Taller 1

Carlos Erazo, Pedro Guerrero, María Alejandra Sandoval, Valentina Rozo

Septiembre 2020

1 Número de Operaciones

1.1 Ejercicio

Evaluar el polinomio en x = 1.00000000001 con P(x) = 1 + x + x2 + ... + x50 y la primera derivada. Encuentre el error de cálculo al comparalo con los resultados de la expresión equivalente Q(x) = (x51-1)/(x -1).

```
Número de operciones
Evaluar P(x) en x = 1.00000000001:  51.00000001275002
Evaluar derivada de P(x):  1275.00000044198
Evaluar x =  1.00000000001 en su expresión equivalente Q(x):  51.0000000127500
Evaluar derivada de Q(x):  1275.00000041650
Error entre el resultado de P(x) y Q(x):  4.17966315048509e-14
Error entre el resultado de las derivadas de P(x) y Q(x):  1.99844519081344e-9
```

Al evaluar el polinomio y la función equivalente se obtuvo un error mínimo en en resultado de ambos procesos, este error se ilustra también en las gráficas siguientes.

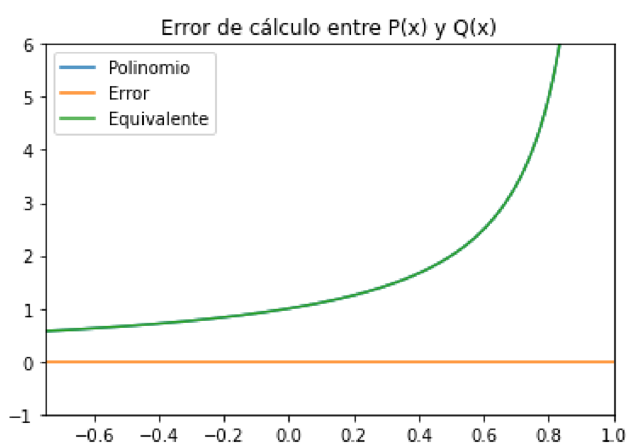

Figure 1:
Error de cálculo entre el polinomio P(x) y la función equivalente Q(x)

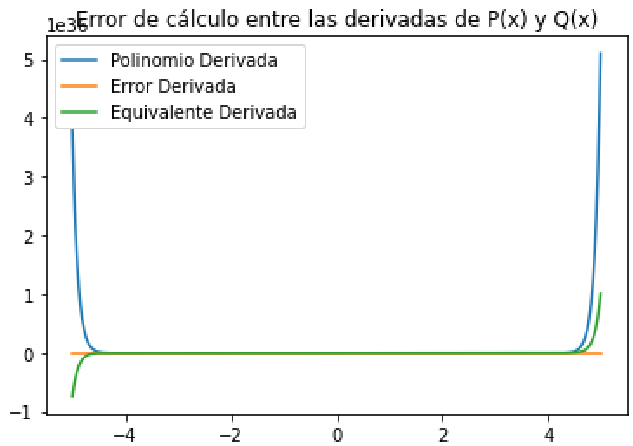

Figure 2:
Error de cálculo entre la derivada del polinomio P(x) y la derivada de la función equivalente Q(x)

En la figura 1 se puede observar el error de cálculo entre la función equivalente Q(x) y el polinomio P(x), acá se puede observar que el error en el cálculo no es tan grande. En cuanto a la figura 2 se puede ver que el error de cáculo en la derivada del Q(x) y P(x) es un poco mayor, coparado con la figura 1.

1.2 Números binarios

1. Encuentre los primeros 15 bits en la representación binaria de PI:

```
15 bits primeros bits de pi
Base 10: PI      Binario:  11.0010010000111
```

2. Convertir los siguientes números binarios a base 10: 1010101; 1011.101; 10111.010101...; 111.1111...

```
Convertir de binario a base 10
Binario: 1010101         Base 10:  85
Binario: 1011.101        Base 10:  11.625
Binario: 10111.010101    Base 10:  23.328125
Binario: 111.1111        Base 10:  7.9375
```

3. Convierta los siguientes números de base 10 a binaria: 11.25; 2/3; 30.6; 99.9

```
Convertir de base 10 a binario
Base 10: 11.25   Binario:  1011.01
Base 10: 2/3     Binario:  0.1010101010101010
Base 10: 30.6    Binario:  11110.1001100110011001
Base 10: 99.9    Binario:  1100011.1110011001100110011
```

1.3 Representación del Punto Flotante de los Números Reales

1. ¿Cómo se ajusta un número binario infinito en un número finito de bits? Para ajustar un número infinito de bits, se observa un grupo de cuatro a cinco bits, los cuales después de un número de iteraciones dadas tendría que repetirse, si es así se detiene la ejecución. Otra manera es ajustandolo a la presición deseada, para ello primero se normaliza el número obteniendo el número de bits para el exponente y para la mantisa.

2. ¿Cuál es la diferencia entre redondeo y recorte? La diferencia entre recorte y redondeo consiste en que el redondeo es una aproximación al número, es decir dependiendo el número de dígitos significativos que se pretende poner se van aproximando los dígitos significativos; por ejemplo redondeando 3.1416 con tres cifras significativas se tiene 3.142. Por su parte el recorte consiste en eliminar los dígtos que están por encima del número de cifras necesarias, por ejemplo, 3.1416 recortado es 3.141.

3. Identifique el número de punto fotante (IEEE) de precisión doble asociado a x, el cual se denota como fl(x); para x(0.4)

   ```
   3. Precisión doble IEEE
   Número de punto flotante para 0.4:
   0011111111011001100110011001100110011001100110011001100110011010
   Signo:  0
   Exponente:  01111111101
   Mantisa:  1001100110011001100110011001100110011001100110011010
   En notación decimal:  0.40000000000000013
   ```

   En el ejercicio anterior se calcula el número 0.4 con doble presición en formato IEEE 754, en bits, y el equivalente en decimal.

4. En el modelo de la arimética de computadora IEEE, el error de redondeo relativo no es más de la mitad del epsilon de máquina.Teniendo en cuenta lo anterior, encuentre el error de redondeo para x = 0.4

   ```
   4. Error de redondeo
   x=0.4    Error de redondeo:  1.1102230246251565e-16
   ```

   Error de redondeo de 0.4 teniendo en cuenta el epsilon de la máquina que corresponde a 2.220446049250313e-16.

5. Verificar si el tipo de datos básico de R y Python es de precisión doble IEEE y Revisar en R y Python el format long

   En python uno de los tipos de dato básico es el float, el cual por defecto utiliza 64 bits, en cuanto a los enteros (int), python maneja una presición de 32 bits normanlmente.

   En R un float es de presición simple, mientras que un double es de presición doble.

   El format long en python sirve para almacenar cualquier tipo de precisión, siempre y cuando sea permitido por la máquina. En R el format long hace referencia a una función en un dataset en donde cada fila es una combinación única de variables.

6. Encuentre la representación en número de máquina hexadecimal del número real 9.4

```
6. Real a hexadecimal
Real: 9.4    Hexadecimal:  9.66666666
```

7. Encuentre las dos raíces de la ecuacion cuadrática x2 + 912x = 3 Intente resolver el problema usando la arimética de precisión doble, tenga en cuenta la pérdida de significancia y debe contrarestarla.

```
7. Calcular raíces de x^2 + 9^12 = 3
x1 = 0.0     x2 = -282429536481.0
```

   Para hallar el resultado anterior se utilizó la presición doble de python en flotantes que es float128() de la libreria Numpy.

8. Donde b es un número mayor que 100. Explique cómo calcular con mayor exactitud las raíces de la ecuación: $\mathrm{x}^2 + bx - 10^-12$.

```
8. Calcular raíces de x^2 + bx - 10^-12 = 0
Con b= 101, x1 =  -7.105427357601001859e-15    x2 =  -101.0
En presición doble bits: x1=
1011110100000000000000000000000000000000000000000000000000000000
En presición doble bits: x2=
1100000001011001010000000000000000000000000000000000000000000000
```

Para calcular las raices con mayor presición, se utilizó el la fórmula cuadrática, esta entrega las dos raices cada vez que se hace el llamado. Para tener una mayor presición se ulitiza el float128, este tipo de dato ayuda a que no se pierdan valores y no los espacios vacios no se llenen con números basura. Además se expresa el número en notación IEEE 754 de doble precisión.

1.4 Conclusión

Para obtener resultados más precisos se debe trabajar con precisión doble y si la herramineta lo permite, con presicion extendida. Entre R y python, este último en algunos de sus tipos de dato básicos trabaja con presición doble por defecto.

2 Raíces de una ecuación

2.1 Ejercicio 1:

Algoritmo que le permita sumar únicamente los elementos de la sub matriz triangular superior o triangular inferior, dada la matriz cuadrada An. Imprima varias pruebas, para diferentes valores de n y exprese f(n) en notación O() con una gráfica que muestre su orden de convergencia

Solución:Para este algoritmo se utilizo una matriz de unos, es decir, cada una de las posiciones de la matriz contienen un uno; esto con el fin de simplificar el ejercicio. Para probar el algoritmo con varias matrices se utiliza un arreglo que contenga diferentes valores para An. El resultado de la convergencia es el siguiente:

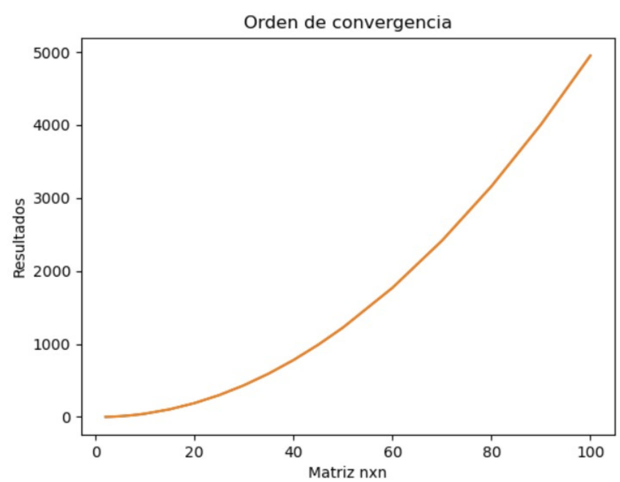

Figure 3:

Orden de convergencia O(n^2)

En la anterior imagen se puede observar que el orden de convergencia para este algoritmo es de O(n**2), lo cual implica que entre mas grande sea la matriz va a tener un poco mas de problema para resolverlo, lo cual lo vuelve un poco ineficiente.

2.2 Ejercicio 2:

Algoritmo que le permita sumar los n2 primeros números naturales al cuadrado. Imprima varias pruebas, para diferentes valores de n y exprese f(n) en notación O() con una gráfica que muestre su orden de convergencia.

Solución:Para este algoritmo se utilizo un arreglo que contenga varios posibles números, el cuadrado de cada uno de estos equivale al numero hasta el cual se va a efectuar la suma dígitos. El resultado de la convergencia es el siguiente:

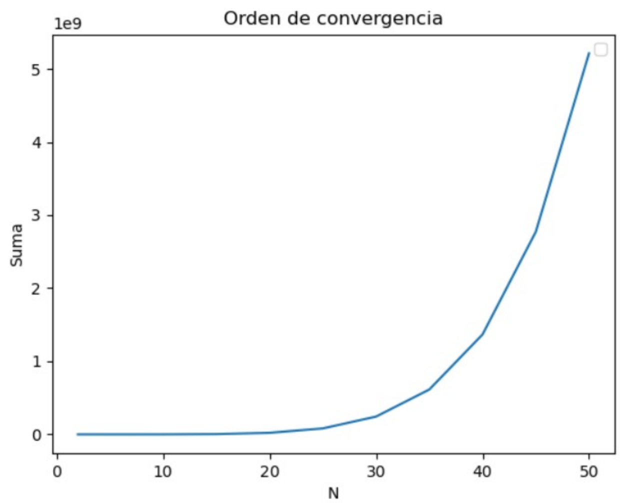

Figure 4:

Orden de convergencia O(2^n)

En la anterior imagen se puede observar que el orden de convergencia para este algoritmo es de O(2**n), lo que implica que a medida que el numero de datos a procesar aumenta le cuesta mas trabajo a la maquina procesarlos, la cantidad de datos aumenta 2**n veces mas rápido.

2.3 Ejercicio 3:

Para describir la trayectoria de un cohete se tiene el modelo: y(t) = 6 + 2, 13t2 0.0013t4. Donde, y es la altura en [m] y t tiempo en [s]. El cohete esta colocado verticalmente sobre la tierra. Utilizando dos métodos de solución de ecuación no lineal, encuentre la altura máxima que alcanza el cohete.

Solución: Para este problema se usaron los métodos de bisección para encontrar la altura máxima que alcanza el cohete. Lo que se hizo fue derivar la función para así obtener la velocidad y aplicar la siguiente formula:

$$v = \frac{x}{t} \tag{1}$$

Los resultados obtenidos para este problema son los siguientes:

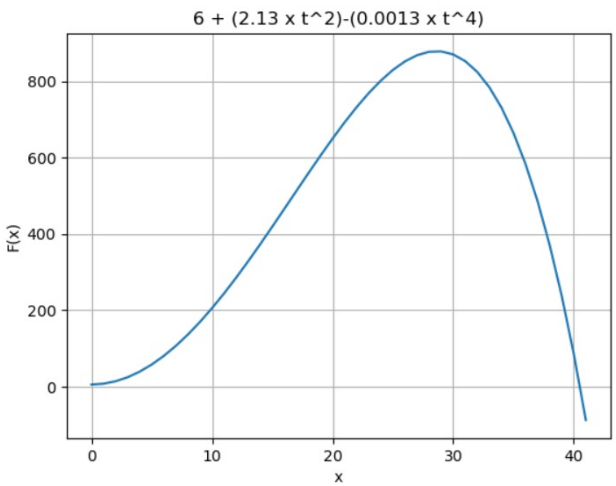

Figure 5:

Gráfica de la función

En la gráfica anterior se evidencia como sube el cohete hasta llegar a su punto máximo, el cual equivale aproximadamente a 878 m, en el momento en que alcanza este punto el cohete comienza a descender. A continuaciones se presentan las gráficas con tres diferentes tipos de tolerancia.

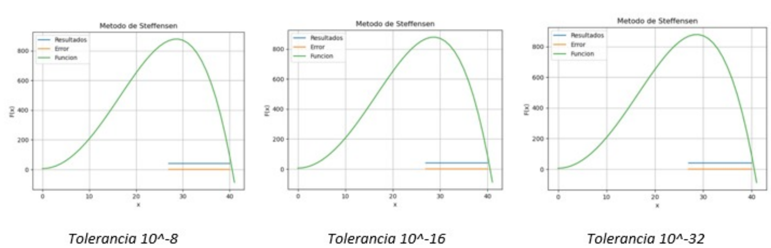

Figure 6:

Método de Steffensen con diferentes tolerancias

De la gráfica anterior se puede concluir que sin importar el cambio en las tolerancias la función no cambia su comportamiento, lo que si puede pasar es que aumenta la precisión en sus datos.

3 Convergencia de métodos iterativos

3.1 Ejercicio 1:

Sean f(x) = ln(x + 2) y g(x) = sin(x) dos funciones de valor real.
a) Utilice la siguiente formula recursiva para determinar aproximadamente el punto de intersección. Con E = 10^{16}

$$Xn = Xn - 1 - \frac{f(Xn-1) * (Xn - 1 - Xn - 2)}{f(Xn1)f(Xn2)} \tag{2}$$

b)Aplicar el método iterativo siguiente para encontrar el punto de intersección con E = 10^{8}

$$Xn + 1 = Xn - f(Xn)\frac{((XnXn1))}{f((Xn)f(Xn1))} \tag{3}$$

Solución: Para ambos problemas lo primero que se hizo para resolver el problema fue encontrar el intervalo en donde las gráficas se intersectan entre ellas, para ello se usaron herramientas como wolfram. Lo siguiente fue elegir los dos primeros números que se requieren para la formula, tiene que tener la condición de que el primero sea menor al segundo de lo contrario la diferencia entre estos seria negativa y el logaritmo no soporta esto. Lo que cambia entre estos puntos es la tolerancia con la que se evalúa cada uno y sus respectivas formulas.

```
-1.9   0.29348215685599666
-1.1   0.47134732354558984
-1.3934821568559967   0.321996253024045
-1.8648294804015866   0.055384273530171946
-1.5428332273775416   0.037651217255554315
-1.5982175009077135   0.004646300503760692
-1.6358687181632678   0.00021970387890313248
-1.6312224176595072   1.4759222262128446e-06
-1.6314421215384103   4.9175286065406e-10
-1.6314435974606365   1.1102230246251565e-15
-1.6314435969688836   0.0
```

Figure 7:

Intersección formula recursiva

-1.9	0.7999999999999998
-1.1	0.29348215685599666
-1.3934821568559967	0.47134732354558984
-1.864829480401586 6	0.321996253024045
-1.5428332273775416	0.055384273530171946
-1.5982175009077135	0.037651217255554315
-1.6358687181632678	0.004646300503760692
-1.6312224176595072	0.00021970387890313248
-1.6314421215384103	1.4759222262128446e-06
-1.6314435974606365	4.9175286065406e-10

Figure 8:

Intersección formula iterativa

3.2 Ejercicio 2:

Determine el valor de los coeficientes a y b tal que f(1) = 3 y f(2) = 4 con la siguiente función:

$$f(x) = a + (ax + b)e^{(}ax + b) \tag{4}$$

Obtenga la respuesta con E = 10^8
Solución:

3.3 Ejercicio 1:

Sea la siguiente función:

$$f(x) = e^x - x - 1 \tag{5}$$

Demuestre que Tiene un cero de multiplicidad 2 en x = 0
Solución: Según el teorema se sabe que un cero simple se presenta cuando f(x) = 0 y f'(x) != 0. Para el caso de esta función se tiene que f(x) y f'(x) son = 0 por esto se puede concluir que que se presenta una multiplicidad de 2 en el punto x = 0. Además la formula al evaluarla en 0 no existe, porque no se puede dividir por 0, y al calcular la segunda derivada se observa que el resultado de esta es diferente de cero; por lo cual nosotros deducimos que la multiplicidad es 2 porque la segunda derivada no es cero y la primera derivada y la función si lo son.

3.4 Ejercicio 2:

Utilizando el método de Newton con p0 = 1 verifique que converge a cero pero no de forma cuadrática

Solución: Se hizo uso de la siguiente formula para poder resolver el problema en cuestión:

$$Xn + 1 = Xn - \frac{(f(Xn)}{f'(Xn))} \tag{6}$$

Se obtuvo la derivada para poder hacer uso de al anterior función, luego se valido que la diferencia entre x+1 y x sea menor o igual a la tolerancia.

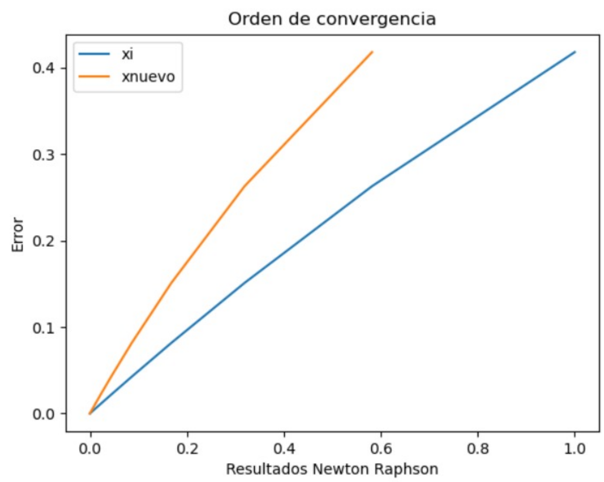

Figure 9:

Complejidad de convergencia de Newton Rapshon

En la anterior gráfica se puede notar que su complejidad no es de O(n**2), también se puede observar que su comportamiento es similar a una función radical.

3.5 Ejercicio 3:

Utilizando el método de Newton generalizado, mejora la tasa de rendimiento? explique su respuesta

Solución:Se hizo uso de la siguiente formula para poder resolver el problema en cuestión:

$$Xn + 1 = Xn - \frac{f(x)f'(x)}{(f'(x))^2 f(x) * f''(x)} \tag{7}$$

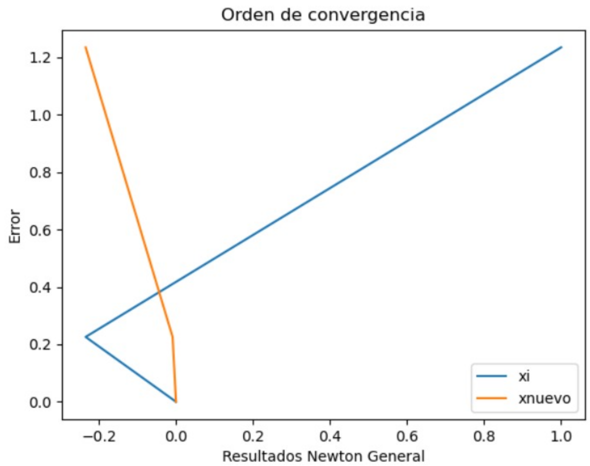

Figure 10:

Convergencia

En la anterior gráfica se puede ver que el comportamiento de la convergencia es lineal, por lo cual esta mejora su rendimiento con respecto al Newton Raphson. Esto se debe a que al usar la segunda derivada se acelera la convergencia al calcular el Xi + 1.

4 Convergencia acelerada

4.1 Ejercicio

Dada la su sesión x$_n^{\infty}{}_{n=0} con x_n = cos(\frac{1}{n})$

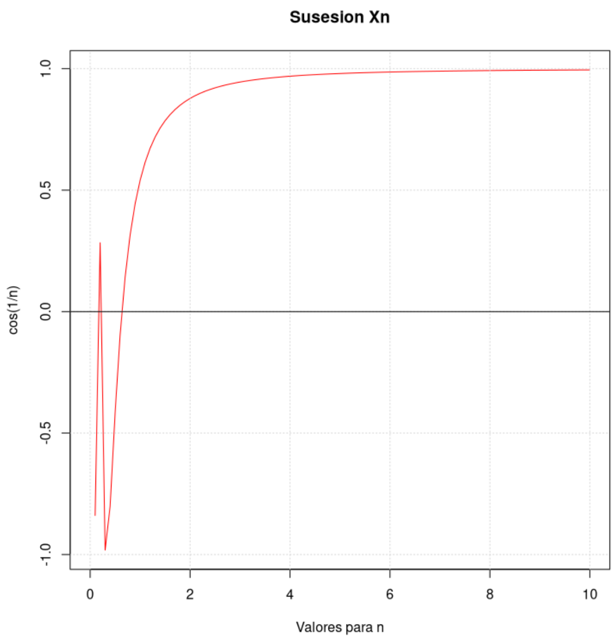

Figure 11:

Sucesión cos(1/n)

1. Verifique el tipo de convergencia en x = 1 independiente del origen.

Una serie diverge o converge a partir de su limite, para este caso dado que $(1/\infty)$ tiende a 0, la convergencia es de tipo absoluta, ya que es aquí donde x = 1.

2. Compare los primeros términos con la sucesión ${A_n^\infty}_{n=0}$.

La comparación entre la sucesión y la aplicación del método de convergencia de Aitken da como resultado un "pronostico" por parte del método de Aitken, que señala como se observa en la Figura 12 hacia donde converge la sucesión.

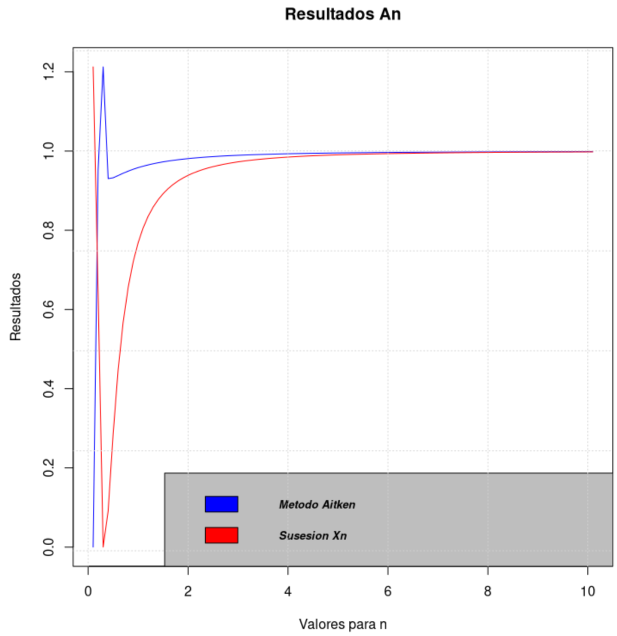

Figure 12:

Comparativa con el método de Aitken

3. Sean $f(t) = 3\sin(t)^3 - 1$ y $g(t) = 4\sin(t)\cos(t)$ para t ¿ 0 las ecuaciones parametricas que describe el movimiento en una partícula. Utilice un método de solución numérico con error de 10^{-16} para determine donde las coordenadas coinciden y muestre gráficamente la solución.

Para resolver el ejercicio se igualaron ambas funciones y se evaluaron con el método de Steffensen donde se confirma la Figura 13 con una intersección de ambas gráficas en 1.18 que al remplazar en cualquiera de las dos funciones da un resultado de 1.39.

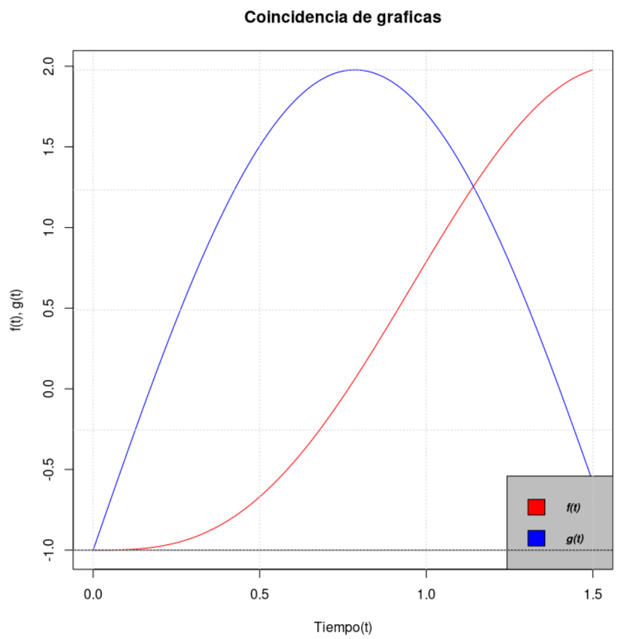

Figure 13:

Movimiento de partículas

4.2 Método de Steffensen

Utilice el algoritmo de Steffensen para resolver $\mathrm{x}^2 cos(x)$ y compararlo con el método de Aitken con Tolerancia de 1e8, 1e16, realice una gráfica que muestre la comparación entre los métodos.

Al implementar la función en ambos métodos, se confirma que el método de Steffensen realiza menos iteraciones con un resultado de -0.82, teniendo en cuenta que la función es de orden cuadrado su otra raíz correspondería a 0.82. Esta comparación se realiza varias veces cambiando el punto de inicio para ambas funciones, obteniendo el mismo resultado, con un punto inicial de 0, se obtienen los resultados de la Figura 14.

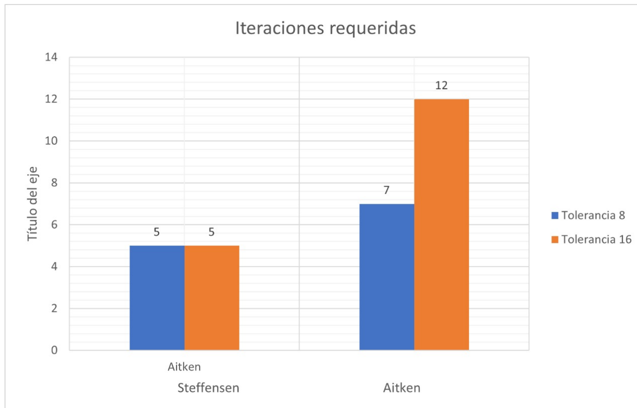

Figure 14:

Comparación de métodos.

References