

中图分类号:

UDC:

学校代码: 10055

密级: 公开

南开大学
硕士学位论文

GF(q) 上 LDPC 分组码和卷积码的比较

Comparison of LDPC Block and Convolutional Codes over GF(q)

论文作者 _____ 指导教师 _____

申请学位 _____ 培养单位 _____

学科专业 _____ 研究方向 _____

答辩委员会主席 _____ 评阅人 _____

南开大学研究生院

二〇一六年五月

南开大学学位论文使用授权书

根据《南开大学关于研究生学位论文收藏和利用管理办法》，我校的博士、硕士学位获得者均须向南开大学提交本人的学位论文纸质本及相应电子版。

本人完全了解南开大学有关研究生学位论文收藏和利用的管理规定。南开大学拥有在《著作权法》规定范围内的学位论文使用权，即：(1) 学位获得者必须按规定提交学位论文(包括纸质印刷本及电子版)，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生学位论文，并编入《南开大学博硕士学位论文全文数据库》；(2) 为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆等场所提供校内师生阅读，在校园网上提供论文目录检索、文摘以及论文全文浏览、下载等免费信息服务；(3) 根据教育部有关规定，南开大学向教育部指定单位提交公开的学位论文；(4) 学位论文作者授权学校向中国科技信息研究所和中国学术期刊(光盘) 电子出版社提交规定范围的学位论文及其电子版并收入相应学位论文数据库，通过其相关网站对外进行信息服务。同时本人保留在其他媒体发表论文的权利。

非公开学位论文，保密期限内不向外提交和提供服务，解密后提交和服务同公开论文。

论文电子版提交至校图书馆网站：<http://202.113.20.161:8001/index.htm>。

本人承诺：本人的学位论文是在南开大学学习期间创作完成的作品，并已通过论文答辩；提交的学位论文电子版与纸质本论文的内容一致，如因不同造成不良后果由本人自负。

本人同意遵守上述规定。本授权书签署一式两份，由研究生院和图书馆留存。

作者暨授权人签字：_____

20 年 月 日

南开大学研究生学位论文作者信息

论 文 题 目	GF(q) 上 LDPC 分组码和卷积码的比较				
姓 名		学号		答辩日期	
论 文 类 别	博士 <input type="checkbox"/> 学历硕士 <input type="checkbox"/> 硕士专业学位 <input type="checkbox"/> 高校教师 <input type="checkbox"/> 同等学力硕士 <input type="checkbox"/>				
院 / 系 / 所			专 业		
联 系 电 话			Email		
通讯地址 (邮编):					
备注:					

注:本授权书适用我校授予的所有博士、硕士的学位论文。由作者填写 (一式两份) 签字后交校图书馆，非公开学位论文须附《南开大学研究生申请非公开学位论文审批表》。

南开大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的研究成果。除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或者没有公开发表的作品的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律责任由本人承担。

学位论文作者签名：_____年 月 日

非公开学位论文标注说明

根据南开大学有关规定，非公开学位论文须经指导教师同意、作者本人申请和相关部门批准方能标注。未经批准的均为公开学位论文，公开学位论文本说明为空白。

论文题目			
申请密级	<input type="checkbox"/> 限制 (≤2 年) <input type="checkbox"/> 秘密 (≤10 年) <input type="checkbox"/> 机密 (≤20 年)		
保密期限	20 年 月 日至 20 年 月 日		
审批表编号		批准日期	20 年 月 日

南开大学学位办公室盖章 (有效)

限制 ☐ 2 年（最长 2 年，可少于 2 年）

秘密 ☐ 10 年（最长 5 年，可少于 5 年）

机密 ☐ 20 年（最长 10 年，可少于 10 年）

中文摘要

本文介绍了 $GF(q)$ 上 LDPC 分组码，并从 LDPC 分组码构建结构相似的卷积码。接着分析了 LDPC 分组码的置信传播算法的性能，以及用于 LDPC 卷积码的滑动窗口版本置信传播算法的性能。在不同参数的 $GF(q)$ 上，本文考虑了两种情况，一种情况是 LDPC 分组码块长度与 LDPC 卷积码约束长度相等，另一种情况是解码延时相等，比较 LDPC 分组码与 LDPC 卷积码的解码性能。其中模拟的结果表明 q 元 LDPC 卷积码的解码性能好与 2 元 LDPC 卷积码。同时 q 元 LDPC 卷积码的解码性能好与 q 元 LDPC 分组码。

关键词： LDPC 分组码；LDPC 卷积码；滑动窗口；置信传播算法；解码延时

Abstract

In this paper, we introduce LDPC block codes (LDPC-BC), and LDPC convolutional codes (LDPC-CC) which are derived from the former. Then we analyse belief propagation (BP) decoder for LDPC-BC, and a sliding window decoder for LDPC-CC. Based on different $GF(q)$, we compare the decoding performance between q -ary LDPC-BC and LDPC-CC in two aspects, one is the block length of q -ary LDPC-BC equals to constraint length of LDPC-CC, another is when two decoding latencies equal. Simulation shows that q -ary LDPC-CC outperform binary LDPC-CC and q -ary LDPC-BC.

Key Words: LDPC block codes; LDPC convolutional codes; sliding window decoder; belief propagation; decoding latency.

目录

中文摘要	I
Abstract	II
第一章 背景及介绍	1
第二章 基于原型构造的 LDPC 码	2
第一节 LDPC 码的原型	2
第二节 LDPC 分组码的构造	4
第三节 LDPC 卷积码的构造	4
第三章 和积算法与滑动窗口解码的简介	7
第一节 LDPC 分组码的和积算法	7
第二节 LDPC 卷积码的滑动窗口解码	8
第四章 模拟仿真结果	10
第五章 总结	11
参考文献	12
致谢	13

第一章 背景及介绍

Gallager 在 1962 年提出低密度校验分组码 [1]，同时他还提出了一种信息遍历解码算法。在 Richardson 等人模拟试验中 [2]，用信息遍历算法解码 LDPC 分组码的性能超过了 turbo 码，并且接近香农极限。Davey 和 MacKay 考虑了定义在 $GF(q)$ 的 LDPC 分组码 [3] 并且把 Gallager 的 BP 解码算法推广到 q 元，称作和积算法，并得到很好的性能。

由 Felström 和 Zigangirov[4] 提出来的 LDPC 卷积码可以通过几个正则 LDPC 码叠加连接而成。LDPC 卷积码的特点是它的 BP 解码阈值能达到它所基于的 LDPC 码的最大后验概率 (MAP) 解码阈值 [5]。但是为了达到接近香农极限的性能，BP 算法必须经过多次迭代，将占用大量内存同时有很高的译码延时。为了解决 LDPC 卷积码顺序解码时以上缺点，Papaleo 等人考虑了 BP 算法窗口解码版本 [6]，并研究了算法中解码延时和解码性能之间的取舍。

由于 LDPC 卷积码与 LDPC 分组码具有相似的结构，并且在解码延时和解码性能互有取舍，Hassan 等人基于解码延时 [7] 和 Hehn 等人基于结构延时 [8] 研究其二者的性能比较。本文基于以上的研究进行 q 元域的推广，同时比较其他相关参数对 LDPC 卷积码与 LDPC 分组码解码性能的影响。本文的结构如下：第一章主要是 LDPC 卷积码与 LDPC 分组码背景及介绍。第二章主要是描述 LDPC 卷积码与 LDPC 分组码的构建过程，要在特殊的构建原则上两者才能比较。第三章主要描述 LDPC 卷积码与 LDPC 分组码的解码算法，并且计算了两种算法的解码延时。第四章通过固定几个参数比较另外的参数，比较 LDPC 卷积码与 LDPC 分组码的性能。第五章是结论及总结。

第二章 基于原型构造的 LDPC 码

第一节 LDPC 码的原型

每一个 LDPC 码都对应着一个 Tanner 图，也可称为原型，或者称为基本图。如下图，

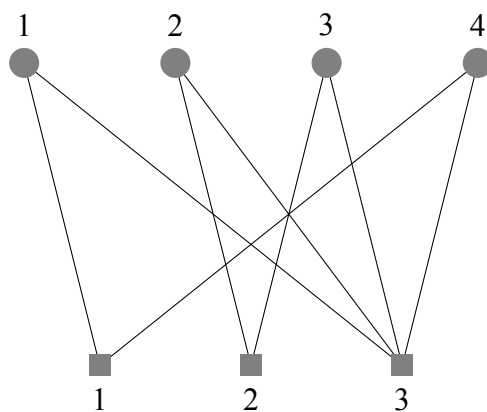
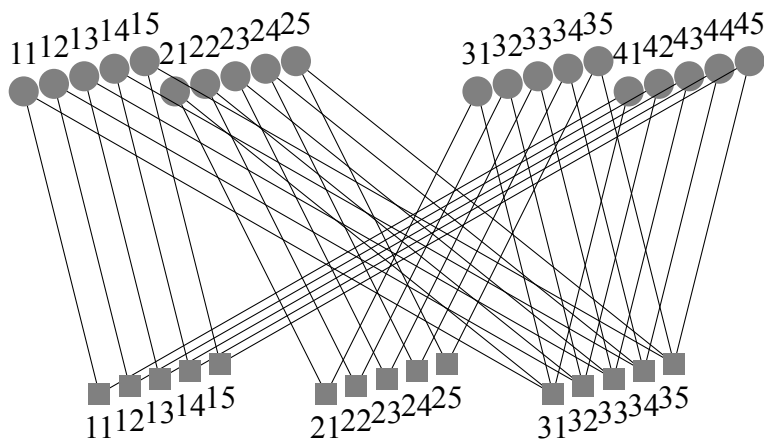


图 2.1 基本图

该基本图描述的 LDPC 码的校验矩阵记为

$$H_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

可以通过叠加基本图构造有结构的 LDPC 码。比如，先复制 m 次基本图，得到簇状的 Tanner 图，如下图。



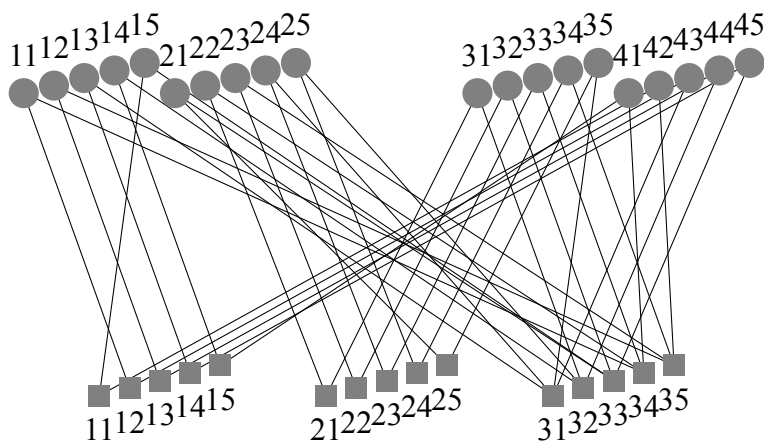
然后将基本图对应的 H_b 中为 1 的元素换为来自置换矩阵集合的元素。即

$$H = \begin{pmatrix} P^2 & 0 & 0 & P^5 \\ 0 & P^5 & P^1 & 0 \\ P^4 & P^3 & P^2 & P^4 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

其中 P^i 对应循环置换矩阵，比如

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

此时构造出来的 LDPC 码的 Tanner 图如下



第二节 LDPC 分组码的构造

设计码率为 $R = b/c$ 的 LDPC 分组码的原型是一个二分图，有 c 个变量节点和 $c - b$ 个校验节点。它能生成不同码长的，设计码率为 R ，有相同的度分布的分组码。 $\text{GF}(q)$ 为含 $q = 2^m$ 个元素的有限域，其中 m 为在 $\text{GF}(q)$ 代表一个符号所需的位数。令 M 为原型叠加数。通过以下两步从原型的 $(c - b) \times c$ 邻接矩阵 $\mathbf{B} = [B_{i,j}]$ 构造码长为 $n_{BC} = Mc$ 的 q 元 LDPC 分组码：

1. 将 \mathbf{B} 中的非零元 $B_{i,j}$ 替换为随机选择的 $M \times M$ 置换矩阵，将 \mathbf{B} 中的零元 $B_{i,j}$ 替换为 $M \times M$ 零矩阵。此时得到对应于 \mathbf{B} 的二元校验矩阵 \mathbf{H} ；
2. 将 \mathbf{H} 中非零元替换为从有限域 $\text{GF}(q)$ 中随机选取的元素，得到 LDPC 分组码的 q 元校验矩阵 \mathbf{H}_{BC} 。

对于 LDPC 分组码，必须等待整个码块接受完毕才能执行置信传播解码算法。故 q 元 LDPC 分组码的解码延时为

$$T_{BC} = n_{BC} \cdot m = Mmc$$

第三节 LDPC 卷积码的构造

LDPC 卷积码也可以通过叠加原型来构造。原型的基本矩阵为 $(c - b) \times c$ 的 \mathbf{B} ，以此构造码率为 $R = b/c$ 的 LDPC 卷积码。首先构造 \mathbf{B}_{SC}

$$\mathbf{B}_{SC} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & & & \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_0 & & \\ \vdots & \mathbf{B}_1 & \ddots & \\ \mathbf{B}_{m_s} & \vdots & \ddots & \\ & \mathbf{B}_{m_s} & \ddots & \\ & & \ddots & \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

其中 m_s 为记忆因子，即当前原型与前一个原型相连的边数。 $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{m_s}$ 为 $(c - b) \times c$ 矩阵，且满足

$$\sum_{i=0}^{m_s} \mathbf{B}_i = \mathbf{B}$$

然后将 \mathbf{B}_{SC} 中的非零元替换为随机选择的 $M \times M$ 置换矩阵，将 \mathbf{B}_{SC} 中的零元替换为 $M \times M$ 零矩阵，得到 LDPC 卷积码校验矩阵 \mathbf{H}_{SC} 。最后将 \mathbf{H}_{SC} 中的非零元

替换为从有限域 $\text{GF}(q)$ 中随机选取的元素，得到 LDPC 卷积码的 q 元校验矩阵 \mathbf{H}_{BC} ，其限制长度（决定了非零对角带的最大宽度），为 $v_s = (m_s + 1)Mc$ 。

本文为简单起见，采用 $m_s = 1$ ，并且只考虑正则 (d_v, d_c) LDPC 卷积码，即 \mathbf{H}_{SC} 中每行重量为 d_c ，每列重量为 d_v 。同时限定随机选择置换矩阵的方法如下。选择两个 $(c-b) \times c$ 矩阵 \mathbf{B}_0 和 \mathbf{B}_1 ，使得 $\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ 为正则 (d_v, d_c) 矩阵。LDPC 分组码的基本矩阵为

$$\mathbf{B}_{BC} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_0 \end{bmatrix}_{2(c-b) \times 2c} \quad (2.5)$$

然后使用第二节的原型叠加方法构造 LDPC 分组码的校验矩阵

$$\mathbf{H}_{BC} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 \end{bmatrix}_{2(c-b)M \times 2cM} \quad (2.6)$$

对于 LDPC 卷积码，使用相同的 \mathbf{B}_0 和 \mathbf{B}_1 ，得到正则 (d_v, d_c) LDPC 卷积码的基本矩阵为

$$\mathbf{B}_{SC} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & & & & & \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_0 & & & & \\ & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_0 & & & \\ & & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_0 & & \\ & & & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_0 & \\ & & & & \mathbf{B}_1 & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

然后使用原型叠加方法构造 LDPC 卷积码的校验矩阵

$$\mathbf{H}_{SC} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 & & & & & \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 & & & & \\ & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 & & & \\ & & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 & & \\ & & & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 & \\ & & & & \mathbf{H}_1 & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

基于以上构造规则，可以使用其他的基本矩阵（见下表）构造 LDPC 分组码校验矩阵 \mathbf{H}_{BC} 与 LDPC 卷积码校验矩阵 \mathbf{H}_{SC} 。当原型叠加数为 M ，有限域元素个数为 $q = 2^m$ 时，LDPC 分组码的码长和 LDPC 卷积码的限制长度都等于 $2Mmc$ 。

表 2.1 构造 LDPC 分组码和 LDPC 卷积码的组成矩阵

码	组成矩阵	码长/限制长度
(2,4)-正则	$\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$	4Mm
(3,6)-正则	$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$	4Mm
(3,9)-正则	$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	6Mm
(3,12)-正则	$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	8Mm

第三章 和积算法与滑动窗口解码的简介

第一节 LDPC 分组码的和积算法

和积算法是一种软判决算法。在算法迭代过程中，校验节点生成独立于信息节点接收到信息的额外信息，进而决定信息节点的值。以下介绍基本的和积算法。

记信源发送码字为 \mathbf{c} ，接收到的向量为 \mathbf{y} 。将从校验节点 j 到它所连接信息节点 i 额外信息记为 $E_{j,i}$ 。如果某次迭代中，码字中 $c_{i'} = 1$ 的概率为 $P_{j,i'}$ ，那么校验方程中包含奇数个 1 的概率为

$$P_{j,i}^{ext} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \prod_{i' \in B_j, i' \neq i} (1 - 2P_{j,i'})$$

其中， B_j 为与校验节点 j 相连的信息节点的下标集合。类似的，校验方程满足 $c_i = 0$ 时概率为 $1 - P_{j,i}^{ext}$ 。

校验节点 j 到信息节点 i 的额外信息用似然比来表示

$$E_{j,i} = L(P_{j,i}^{ext}) \quad (3.1)$$

$$= \log \frac{1 - P_{j,i}^{ext}}{P_{j,i}^{ext}} \quad (3.2)$$

$$= 2 \tanh^{-1} \prod_{i' \in B_j, i' \neq i} \tanh(M_{j,i'}/2) \quad (3.3)$$

其中

$$M_{j,i'} \triangleq L(P_{j,i'}) = \log \frac{1 - P_{j,i'}}{P_{j,i'}}$$

每个信息节点接收输入的 LLR，记为 R_i

$$R_i = \log \frac{p(\mathbf{c}_i = 0 | y_i)}{p(\mathbf{c}_i = 1 | y_i)}$$

同时接收来自相连接的校验节点的 LLR。故信息节点 i 总的 LLR 为

$$L_i = L(P_i) = R_i + \sum_{j \in A_i} E_{j,i}$$

对于从信息节点发送到校验节点的信息，记为 $M_{j,i}$

$$M_{j,i} = R_i + \sum_{j' \in A_i, j' \neq j} E_{j',i}$$

和积算法的具体步骤为

1. 给信息节点发送到校验节点的信息 $M_{j,i}$ 赋值为 R_i
 2. 计算校验节点发送到信息节点的信息 $E_{j,i}$
 3. 计算信息节点的 LLR, L_i 。生成预测码字 \hat{c} ，代入校验方程，若满足，则停止算法。或者达到最大遍历值停止算法。
 4. 计算信息节点发送到校验节点的信息 $M_{j,i}$ ，遍历次数加一。继续第二步。
- 如果该算法收敛，经过足够多次迭代后，将渐近求出码字中各位为 1 或者 0 的概率。实现逐符号最大后验概率译码。

第二节 LDPC 卷积码的滑动窗口解码

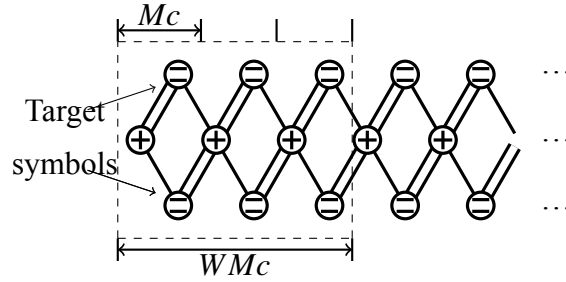


图 3.1 滑动窗口解码器的例子， $t = 0$

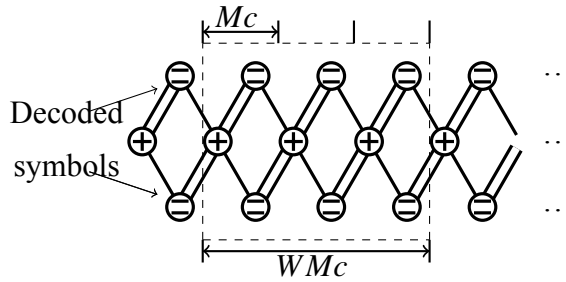


图 3.2 滑动窗口解码器的例子， $t = 1$

上图为滑动窗口解码器的一个例子。其窗口大小为 $W = 3$ ，作用在 $m_s = 1$ 的 (3,6)-正则 q 元 LDPC 卷积码上。对于窗口里的 WMc 个符号，解码算法不断迭代，直到某一固定迭代次数或者满足某些停止规则。然后窗口平移 Mc 个位置，

即已解码的 Mc 个符号从窗口移出。滑动窗口解码的解码延时为

$$T_{CC} = WMmc$$

因此，对于本文构造的 LDPC 分组码与 LDPC 卷积码，LDPC 卷积码的解码延时 T_{CC} 等于 LDPC 分组码的码长，即等于 LDPC 分组码的解码延时 T_{BC} 。滑动窗口解码器的窗口内迭代算法可以使用以上的和积算法，也可以用和积算法的改进版本 [9] 等。窗口内迭代算法的停止规则如下。给定 LDPC 卷积码以及接收到的码字，令 $P_t^{(j)}(b)$ 为在时刻 t ，窗口中第 j 个符号 $v_t^{(j)}$ 的 $b \in \text{GF}(q)$ 的概率。经过每次和积算法的迭代，基于 $P_t^{(j)}(b)$ 对 $v_t^{(j)}$ 进行硬判决，记为 $\hat{v}_t^{(j)}$ ，即选择 $\hat{v}_t^{(j)} = x$ 使得概率为最大值。记 $e_t^{(j)}$ 为 $v_t^{(j)}$ 不等于 $\hat{v}_t^{(j)}$ 的概率，则

$$e_t^{(j)} = 1 - P_t^{(j)}(x = \hat{v}_t^{(j)})$$

而对于整个窗口内的符号， $e_t^{(j)}$ 的平均值为

$$\hat{P}_t = \frac{1}{Mc} \sum_{j=0}^{Mc-1} e_t^{(j)}$$

当迭代次数达到最大值 I_{max} ，或者 \hat{P}_t 小于某个选定的误符号率时，解码窗口才平移到下一个位置。

第四章 模拟仿真结果

本文模拟仿真的环境为 BI-AWGN 信道中使用 BPSK 调制。对于 q 元 LDPC 分组码，采用 FFT-QSPA 解码算法以及停止规则为最大迭代次数 $I_{max} = 100$ 。对于 q 元 LDPC 卷积码，滑动窗口解码使用 FFT-QSPA 解码算法，停止规则为最大迭代次数 $I_{max} = 100$ 或者误符号率 SER 达到 10^{-6} 。

第五章 总结

参考文献

- [1] R. Gallager. *Low-density parity-check codes* [M]. M.I.T. Press, **1963**: 143 ~ 148.
- [2] T. J. Richardson, M. A. Shokrollahi and R. L. Urbanke. “*Design of capacity-approaching irregular low-density parity-check codes*” [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, **2001**, 47(2): 619 ~ 637.
- [3] M. C. Davey and D. Mackay. “*Low-density parity check codes over $GF(q)$* ” [J]. *IEEE Communications Letters*, **1998**, 2(6): 70 ~ 71.
- [4] A. J. Felstrom and K. S. Zigangirov. “*Time-varying periodic convolutional codes with low-density parity-check matrix*” [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, **1999**, 45(6): 2181 ~ 2191.
- [5] S. Kudekar, T. Richardson and R. Urbanke. “*Threshold saturation via spatial coupling: Why convolutional LDPC ensembles perform so well over the BEC*” [C]. In: *Information Theory Proceedings (ISIT), 2010 IEEE International Symposium on*, **2010**: 803 ~ 834.
- [6] M. Papaleo et al. “*Windowed erasure decoding of LDPC Convolutional Codes*” [C]. In: *Information Theory (ITW 2010, Cairo), 2010 IEEE Information Theory Workshop on*, **2010**: 1 ~ 5.
- [7] N. Ul Hassan, M. Lentmaier and G. P. Fettweis. “*Comparison of LDPC block and LDPC convolutional codes based on their decoding latency*” [C]. In: *Turbo Codes and Iterative Information Processing (ISTC), 2012 7th International Symposium on*, **2012**: 225 ~ 229.
- [8] T. Hehn and J. B. Huber. “*LDPC codes and convolutional codes with equal structural delay: a comparison*” [J]. *IEEE Transactions on Communications*, **2009**, 57(6): 1683 ~ 1692.
- [9] L. Barnault and D. Declercq. “*Fast decoding algorithm for LDPC over $GF(2^q)$* ” [C]. In: *Information Theory Workshop, 2003. Proceedings*, **2003**: 70 ~ 73.

致谢

感谢您使用本模板。