基于共轭梯度的 B样条主动轮廓边缘提取

张荣国"。刘小君"刘 焜"蔡江辉"

1)(合肥工业大学机械与汽车工程学院,合肥 230009) 2)(太原科技大学计算机科学与技术学院,太原 030024)

摘 要 边缘提取是图像识别的基础,为了进一步提高搜索效率和克服主动轮廓模型对初始位置敏感的问题,提出了一种基于共轭梯度的 B样条主动轮廓变形边缘提取方法。该方法首先通过人工交互的方式,在目标边缘附近给定一条形状和位置尽量和图像边缘一致的 B样条曲线;然后对变形曲线 B样条的控制节点进行进化,以取代传统方法中对变形曲线上每一个像素点进行的进化,由于控制节点的数目远远小于曲线上像素点的数目,因而可以大大减少计算次数;最后在梯度矢量场中,对进化曲线附加一共轭梯度力,以加快变形曲线向目标边缘的收敛速度。实验表明,该方法不仅能应对深度凹陷问题,而且边缘提取效率有了较大的提高。

关键词 主动轮廓模型 B样条曲线 共轭梯度 梯度矢量流

中图法分类号: TP391.41 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2010)01-0103-06

B-spline Active Contours Boundary Extraction Based on Conjugate Gradient Vector

ZHANG Rong-guo^{1), 2)}, L IU Xiao-jun¹⁾, L IU Kun¹⁾, CA I Jiang-hu²⁾

1) (School of Mechanical and Automotive Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009)

Abstract Boundary extraction is the foundation of image recognition. A method of B-spline active contours boundary extraction based on conjugate gradient vector is presented. With human-machine interface, it gives a B-spline curve which is close to and similar to the objective edge in shape and location. Rather than evolving deformable curve with every pixel on the curve in conventional method, the proposed method evolves the curve with controlled node points which are much less than pixel points in numbers, so computational cost should be reduced. Then, an additional conjugate gradient vector force is added on the evolution curve in the gradient vector field, it can make the active contours convergence to the desired edge quickly. The experimental result shows that the proposed method can solve deep concave problems and is efficient in image boundary extraction.

Keywords active contours model, B-spline curve, conjugate gradient, gradient vector flow

0 引 言

图像的边缘提取是图像识别工作的基础。它通过对图像中的像素具有的灰度、纹理的某种相似特征和不连续的跳变特征等进行分析来找出某个区域内部相同或相近的区域,以及区域边界特性变化比

较剧烈的图像轮廓边缘。由于图像的多义性和复杂性,致使许多边缘提取工作无法依靠计算机自动完成,而手工分割又存在工作量大、定位不准确的难题,因此人们提出了一些人工交互和计算机自动定位相结合的方法,即利用各自的优势来实现图像中目标轮廓边缘的快速准确抽取^[1]。传统的边缘检测方法是通过构造对像素灰度级阶跃变化敏感的微

基金项目:国家高技术研究发展计划 (863)项目 (2007AA04Z119);国家自然科学基金项目 (50775060)

收稿日期: 2008-06-10;改回日期: 2008-11-12

第一作者简介:张荣国(1964—),男。教授。1988年于合肥工业大学获工学硕士学位。主要研究方向为图形图像处理和 CAD/CG。Email: rg_zh@163.com

²⁾ (School of Camputer Science and Technology, Taiyuan University of Science & Technology, Taiyuan 030024)

分算子来进行检测的。为了有效地抑制噪声对边缘提取的影响,一些算法首先对原始图像进行平滑处理^[2],然后再进行边缘检测。

Kass等人提出的主动轮廓蛇模型,就是一种人 工交互和计算机自动搜索相结合进行变形边缘提取 的方法[3]。它利用先验知识,先通过人工交互的方 式给定一条接近干目标轮廓边缘的初始曲线,然后 从初始位置开始,在曲线内部本身的内力和图像数 据所产生的外力的共同影响下,朝着所期望的目标 轮廓移动进化,这个过程经过反复迭代调整,直到实 现运动曲线和感兴趣的变形目标轮廓相匹配为止。 参数主动轮廓模型中,变形轮廓可用参数的形式明 确地加以表示,其曲线模型具有调和性,不需要添加 额外的约束来保证其光滑性,而且利用光滑的基函 数所表示的曲线,由于需要的参数较少,从而降低了 所求解问题的维数,可以利用一些快速的优化算法 进行求解。由于参数主动轮廓模型计算效率高、计 算方法简单,因而在图像分割和边缘提取中得到广 泛应用。为了使变形曲线具有自动处理拓扑变化的 能力, Casselles等人提出了几何主动轮廓模型[4], Paragios等人还提出了改进的方法[5],用来加快几 何轮廓的收敛速度,该模型变形轮廓曲线是用高维 尺度函数的水平集来表示,它具有自动处理拓扑变 化的能力,当曲线拓扑结构变化时,水平集合函数仍 然保持着它的合法函数。为了改善外力的性能, Cohen等人提出了 Balbon力 [6],它是通过在目标轮廓 边缘内部或外部施加一膨胀或压缩力,使得变形轮 廓曲线朝着目标边缘进化,但在弱边缘处容易穿越 边界: Xu 等人提出了梯度矢量流 (gradient vector flow, GVF)方法[7],它首先在目标轮廓边缘周围生 成一扩散的梯度矢量场,然后变形轮廓曲线在该力 场的作用下朝着目标边缘进化; Ning等人提出了基 于法线方向的梯度矢量流 (normal gradient vector flow, NGVF)方法[8],它对 GVF方法中的 Laplacian 项进行了分解,保留了其法线方向的分量,而去除了 其切线方向的分量,从而改善了扩散的梯度矢量场 性能。Li等人利用 B 样条解决了跟踪问题中的仿 射不变性问题,并予以了证明^[9];Wang等人提出了 一种利用统计信息计算 B 样条曲线的方法 [10],其和 Gebhard 等人提出的方法类似[11],即把 B 样条的控 制点作为能量方程的一部分,由于高次样条曲线的 控制点和曲线上的结点不完全吻合,因此所得到的 主动轮廓不能完全反映目标轮廓的实际情况。

为了进一步提高搜索效率和克服主动轮廓模型对初始位置敏感的问题,本文提出了基于共轭梯度的主动轮廓变形边缘提取方法,它首先通过人工交互的方式,在目标边缘附近给定一条形状和位置尽量和图像边缘一致的 B 样条曲线;接下来不对变形曲线上每一个像素点进行进化,取而代之的是对变形曲线 B 样条控制点进行进化,由于控制点的数目远远小于曲线上像素点的数目,因而可以大大减少计算次数;然后在梯度矢量场中,对进化曲线附加一共轭梯度力,由于共轭梯度的计算借用了梯度力场扩散过程中图像点的梯度计算结果,其所需的额外计算量很小,且共轭方向较梯度方向有更快的收敛速度[12],因此加快了变形曲线向目标边缘的收敛速度。实验表明,该方法不仅能应对深度凹陷问题,而且边缘的提取效率有了较大的提高。

1 主动轮廓模型的数学表示

主动轮廓是一条在图像平面上移动的曲线 X(s) = [x(s), y(s)], s为表示当前位置的归一化弧长参数, s [0, 1]。它是一条可伸缩的能量最小化样条参数曲线,在内力和外力共同作用下变形,其中内力保持活动轮廓的光滑性和连续性,外力使活动轮廓朝着所期望的目标边界移动,其参数化活动轮廓的总能量可定义为

$$E = \int_{0}^{1} E_{int} (X(s)) + E_{ext} (X(s)) J ds$$
 (1)

该式主要由内部能量项 E_{int} 和外部能量项 E_{ext} 两部分组成。其中内部能量项为

$$E_{\text{int}} = \frac{1}{2} [(s | X (s) |^2 + (s | X (s) |^2)]$$
 (2)

式中, X(s)和 X(s)分别是 X(s)的一阶和二阶导数, (s)和 (s)为权值参数, 分别用于控制参数曲线的弹性和刚性, 以保证活动轮廓的连续性和光滑性。外部能量项为

$$E_{\rm ext} = -\frac{1}{2} \left[G_{\rm }(x,y) * I(x,y) \right]^2$$
 (3) 外部能量项由图像的灰度、边缘特征获得,它引导活动轮廓向目标边缘轮廓靠近。在 (3)式中, $G_{\rm }(x,y)$ 是均值为 0方差为 的高斯函数,为梯度算子,* 为 2维图像卷积算子。

为了扩大梯度矢量场的影响范围和改善外力场的性能, Xu等人提出了一个 GVF矢量场 $v(x, y) = [u(x, y), v(x, y)]^{77}$, 它首先从原始图像中导出一

个轮廓边界图 f(x, y), 其通常为一个灰度图或二值图, 该边界的梯度 f矢量朝向边界, 这些矢量仅在边界紧邻的附近区域有较大的值, 在匀质区,f接近于 0。它用来对能量函数进行极小化

$$E_{\text{extl}} = \mu (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + |f|^2$$

$$|v - f|^2 dx dy$$
(4)

其中, µ是规则化参数,它可根据图像中噪声情况加以选择,噪声多则增加 µ值,反之则减少 µ值。该式中, ux, uy, vx, y;等是 u和 v对 x, y的一阶偏导,当 f较小时,说明此时处于图像的匀质区,其能量是由矢量场偏导数的平方和来主导,此时产生一个变化缓慢的场;当 f较大时,说明此时处于图像的边缘区。

主动轮廓向目标轮廓靠近的过程,实质上就是寻找能量函数 E极小值的过程。由变分原理可知,当 (s)和 (s)取常数值时,使能量泛涵取极小的必要条件是其转化后满足以下的 Euler方程:

$$X(s) - X(s) - E_{ext} = 0$$
 (5)

这实质上就是一个力平衡方程 $F_{int} + F_{ext} = 0$, 此时内力阻止轮廓的延伸和弯曲, 而外力则把轮廓推向所期望边界, 当主动轮廓和期望轮廓重叠时, 内外力之和等于 0, 则达到力平衡状态, 能量函数取得极小值。

利用变分原理,就可以通过求解 Euler方程来得到以下的梯度矢量流场:

$$\mu^{2} v - (v - f) | f|^{2} = 0$$
 (6)

其中, 2 是 Lap lacean 算子, f_{x} , f_{y} 是边界图像 f(x, y) 对 x, y的一阶偏导。由此产生的外部力为

$$\begin{cases} F_{x_1}^{\text{ext}} = \mu^{-2} \mathbf{u} - (u(x, y) - f_x) (f_x^2 + f_y^2) \\ F_{y_1}^{\text{ext}} = \mu^{-2} \mathbf{v} - (v(x, y) - f_y) (f_x^2 + f_y^2) \end{cases}$$
(7)

2 B样条主动轮廓初始化及进化过程

要使得主动轮廓的变形曲线有一个好的收敛速度,并且能正确收敛到目标边界轮廓上,则一个好的初始化轮廓十分重要。由于主动轮廓模型对轮廓的初始位置比较敏感,因此固定位置或固定形状的初始轮廓很难满足主动轮廓变形的要求。B样条曲线不仅能比较直观地表示变形曲线和所产生的参数曲线之间的关系,而且能方便地通过修改输入参数来改变曲线的形状和阶次,具有局部可修改性和可扩展性,可以显式地表示出控制曲线的形状,因此在曲线曲面造形中得以广泛应用。B样条曲线可以通过

定义一组控制顶点唯一地定义出来,变形曲线的形状趋向于控制顶点所构成的折线多边形,通过改变控制顶点的位置,就可以改变 B 样条曲线的形状,也就可以改变变形曲线的形状,而控制顶点的数目则要远远低于曲线上像素点的数目。

图像平面上的变形曲线可以用一曲线段序列 $\{P_i(t) \mid i=0,1,2,3,...,n-1,t-[0,1]\}$ 来表示,每段曲线的形状由控制顶点列 $\{V_1,V_2,...,V_q\}$ 中的若干个顺序排列的点所控制,则 m 次等距分割的 B 样条参数曲线可表示为

$$\begin{cases}
P_{i}(t) = [x_{i}(t) \quad y_{i}(t)] = \int_{j=0}^{m} g_{j}(t) V_{i+j} \\
g_{j}(t) = \frac{1}{m!} \int_{k=0}^{m-j} (-1)^{k} C_{m+1}^{k} (t+m-j-k)^{m}
\end{cases}$$
(8)

其中, i = 0, 1, 2, ..., n - 1; j = 0, 1, 2, ..., m; 函数 g_j (t)表示控制顶点 V_{i+1} 的基函数。通常情况下,可使用三次 B 样条参数曲线对变形曲线进行逼近,这样主动轮廓初始位置曲线的第 i段的三次 B 样条参数曲线矩阵形式就可以表示为

$$P_{i}(t) = \int_{j=0}^{3} g_{j}(t) V_{i+j}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} t^{3} & t^{2} & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i} \\ V_{i+1} \\ V_{i+2} \\ V_{i+3} \end{bmatrix}$$

从上式中可以看到,每一段三次 B样条参数曲线由 4个控制点的位置坐标来决定,改变其中一个控制点的位置,最多影响相邻的四个曲线段,而增加一个控制顶点,就相应地增加了一段 B样条参数曲线,不仅原有的 B样条参数曲线不受影响,且新增的曲线段与原有的曲线段在连接处具有一阶、二阶导数的连续性。B样条曲线及其控制点如图 1所示。

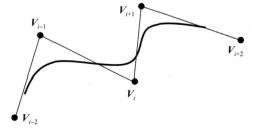


图 1 B样条曲线及其控制点

Fig. 1 B-spline curve and its control points

由于控制点能描述边界的大致形状,因此为了更精确地描述轮廓曲线,本文用位于轮廓线上的结点来描述边界。实际上由控制点,通过上式就可计算出曲线上的任意点;反过来,若给定曲线上的点,则可以求出 B 样条的系数,通过系数和 B 样条基,同样也可以得到样条曲线上其他的位置点。假设给定 n个离散点, $\{P_i(t)=[x_i(t) \mid y_i(t)\}\}$ i=0,1,2,3,...,n-1, 它们是位于样条曲线上的结点

$$P_{i}(t) = [x_{i}(t) \ y_{i}(t)] = \int_{i=0}^{m} g_{j}(t) C_{j}$$
 (10)

则通过适当的变换就可以计算出系数矩阵 C_{j} , 其表达式如下:

$$C_{j} = \sum_{i=0}^{m} (g_{j}(t))^{-1} P_{i}(t)$$
 (11)

其中, $(g_j(t))^{-1}$ 是 $g_j(t)$ 卷积的一个逆变换,利用过滤技术通过递归就可以计算出其结果。对于一条封闭的曲线,要求边界点满足条件 $P_n=P_0, P_{-1}=P_{n-1}$ 和 $P_k=P_{(k\bmod n)}$ 。此处,可以将 $X(s)=P(s)=[x(s)-y(s)]=g_j(s)C_j$ 代入到式 (5)中,此时主动轮廓所受到的内力为

$$F_{\rm int} = X (s) - X (s) \tag{12}$$

传统的主动轮廓变形曲线,是对曲线上的像素点进行进化,如果每段参数曲线离散成 h个像素点,对于由 n段三次 B 样条参数曲线构成的活动轮廓,其参加进化的坐标点个数为 h xn,其渐进时间复杂度的数量级为 O(h xn);本文是将上述每段参数曲线的控制点作为进化点,由于每段三次 B 样条参数曲线由 4个控制点来决定,其参加进化的坐标点个数为 A xn,其时间复杂度的数量级为 O(n);通常情况下,h要远远大于 4,所以,利用 B 样条参数曲线的控制点进行进化,可以大大减少变形曲线进化过程中的计算量,从而提高了收敛效率,而且 B 样条参数曲线具有良好的编辑性和局部可修改性,使得人们可以通过先验知识给定一条位置较好的初始活动轮廓曲线,以最大可能地避免初始搜索方向的歧异性。

3 基于共轭梯度的外力场及轮廓提取

大家知道,梯度方向是函数变化率最大的方向, GVF方法是先在目标轮廓周围形成一个梯度矢量 场,然后主动轮廓就在梯度力场的作用下向目标边 缘靠近。但沿梯度方向的收敛,并不是一种速度最 快的收敛方法,因为梯度仅表示函数的局部特性,它 的迭代序列 $\{P_k \mid k=1, 2, 3, ..., n\}$ 为线性的,其收敛 速度也为线性的,所以从整体上来看,函数在某点的 梯度方向通常并不一定是全局的收敛速度最快的方 向:共轭梯度为超线性收敛速度,它具有二次收敛的 特性,其收敛速度优于梯度矢量(13-15)。所谓共轭方 向指的是这样一个方向:如果有两个 n维向量 S_1 和 S_2 , 设 A 为 $n \times n$ 的实对称正定矩阵,则 $S_1^T A S_2 = 0$. 那么就称向量 S1与 S2关于矩阵 A共轭。由共轭方 向的性质可知,若给定一组线性无关的向量组,就可 以构造出 n个向量,使其满足共轭性的要求。梯度 和共轭梯度之间的关系如图 2所示。因此,在迭代 过程中,可利用 GVF方法中的梯度信息来构造一个 共轭梯度向量序列 $S^{(1)}, S^{(2)}, ..., S^{(n)}$, 使变形曲线 沿该方向序列进行搜索,就可以快速地达到目标边 缘,共轭梯度矢量构造如下;

$$\begin{cases} S^{(k+1)} = -G^{(k+1)} + {}^{(k)}S^{(k)} \\ {}^{(k)} = \frac{\int G^{(k+1)} \int^{T} G^{(k+1)}}{\int G^{(k)} \int^{T} G^{(k)}} = \frac{\|G^{(k+1)}\|^{2}}{\|G^{(k)}\|^{2}} \end{cases}$$
(13)

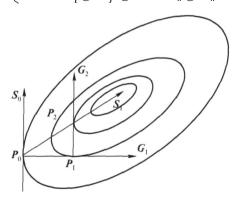


图 2 梯度和共轭梯度方向

Fig. 2 Gradient and conjugate gradient direction

其中, k = 0, 1, 2, ..., n - 1。因为点 $P^{(k+1)}$ 的梯度方向 $G^{(k+1)}$ 与上次搜索方向 $S^{(k)}$ 线性无关, 故可以在以向量 $G^{(k)}$ 和向量 $G^{(k+1)}$ 为基底的子空间中找出一个向量 $S^{(k+1)}$,使其与 $S^{(k)}$ 共轭。可以证明, 由上述方法构造的向量组 S(1), S(2), ..., S(n)是关于 A 共轭的, 即

$$[S^{(i)}]^{T}AS^{(i)} = 0$$
 (14)
 $i \ j \ 1 \ i \ n, \ 1 \ j \ n$

以共轭梯度方向作为变形曲线的搜索方向,在收敛 速度方面较其他方法具有明显的改进。为了使得所 加共轭梯度方向力和其他图像内外力的运算具有相 同的数量级,需对其进行归一化处理,并取它在 x 方向和 y 方向的分解式,其所得到的加在进化点上的附加外力结果如下:

$$\begin{cases} F_{x_2}^{\text{ext}} = \frac{S_x}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \\ F_{y_2}^{\text{ext}} = \frac{S_y}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \end{cases}$$
 (15)

至此,由主动轮廓确定的力平衡方程就可以表示为 $F_{\text{int}} + F_{\text{ext}} + F_{\text{ext}} = 0$ 。最终,变形轮廓边缘的进化方程变为

$$\begin{cases} x_{i+1} = (\mathbf{K} + r\mathbf{I})^{-1} (rx_i + k_1 F_{x_1}^{\text{ext}} + k_2 F_{x_2}^{\text{ext}}) \\ y_{i+1} = (\mathbf{K} + r\mathbf{I})^{-1} (ry_i + k_1 F_{y_1}^{\text{ext}} + k_2 F_{y_2}^{\text{ext}}) \end{cases}$$
(16)

4 实验结果及分析

为验证本文方法的边缘提取效果,采用一幅人工合成图像,在 P4-2.99 GHz内存为 512M的个人计算机上,用 Matlab7.0作为开发工具,对本文所提方法进行了边缘提取实验,其中,弹性系数 =0.5,刚性系数 =0.6,阻尼系数 =1,GVF力场系数 $k_1=0.5$,共轭梯度力场系数 $k_2=0.6$,所得边缘提取结果如图 3所示。图 3(a)为一带有瓶颈区域的人工合成图像;图 3(b)为通过人工交互的方式在图像边缘附近放置的 B样条控制结点;图 3(c)为由这些控制结点所围绕的控制多边形;图 3(d)为由这些控制结点所围绕的控制多边形;图 3(d)为由这些控制结点所构成的 B样条曲线作为主动轮廓向目标边缘进化的过程,图 3(f)为用本文方法所提取的目标边缘

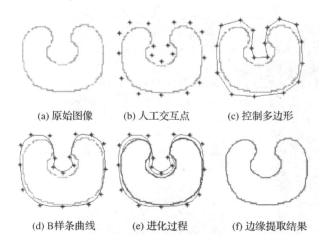


图 3 本文方法初始轮廓及快速进化过程

Fig. 3 Initial contours and evolution procedure

轮廓。从图中可以看出,利用 B 样条可以给出一些充分接近于目标轮廓的初始点,由于 B 样条本身的性质能确保曲线的连续性和结点连接处的光滑性,因此利用有限的结点就可控制 B 样条曲线的整体形状。另外还把本文方法与参考文献 [7]中的传统方法进行了对比实验,所得结果如表 1所示。

表 1 两种方法性能比较

Tab. 1 Performance comparison between two methods

考核项目	进化点数	迭代次数	CPU用时 / s
传统方法	142	300	12. 453 9
本文方法	18	25	1.265 6
考核项目	最大误差 D_{\max}	均方误差 Err	 收敛情况
传统方法	3.030 5	7. 429 2	部分收敛
本文方法	2.009 7	6. 252 6	完全收敛

为了对本文方法的适用性进行进一步的验证,本文采用与同前一个实验同样的环境,对真实图像的目标轮廓进行提取,图 4给出了一幅灰度医学计算机 X射线断层扫描 (CT)图片的轮廓边缘提取过程。图 4(a)为一幅 120 x90大小的人体胸腔的 CT图;为了很好地提取所期望的轮廓,实验时,先用均值为 0,方差为 2.5的高斯函数对其进行平滑处理,然后通过人工交互的方式在 CT图像边缘附近放置初始轮廓结点(如图 4(b)所示);图 4(c)为由初始轮廓结点所围绕的控制多边形;图 4(d)为由这些控制结点所构成的 B样条曲线;图 4(e)为主动轮廓向所期望的目标边缘轮廓收敛的过程;图 4(f)为用本文方法经过 65次迭代以后所提取的 CT图的边缘轮廓。

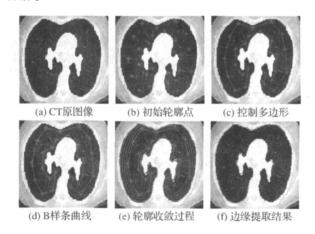


图 4 CT图片轮廓边缘收敛过程

Fig. 4 Contours convergence on CT picture

由此可得出如下的一些认识:1)由于初始轮廓点是通过人工交互的方式给定控制结点来生成的,它能充分接近于目标轮廓,有的甚至能落到目标图像的边缘上,故此可大大缩小搜索的范围,并可降低主动轮廓对初始位置的敏感性;2)B样条在连接处具有光滑性和局部可控制性,不仅可充分模拟复杂边界形状,而且只要初始点给得合适,就可避开传统方法无法收敛到深度凹陷区的缺陷;3)和控制点相对应的结点数目远远小于轮廓上像素点的数目,而由它们参与进化则可大大减少求解能量方程的迭代次数;4)用共轭梯度中的共轭方向进行搜索,进一步加速了收敛速度。

5 结 论

边缘提取在图像处理中是一种低层处理技术, 一个快速有效的轮廓提取算法对图像处理、模式识 别等有着重要意义。本文用共轭梯度的正交方向替 代主动轮廓的梯度矢量场方向,并利用 B 样条曲线 上的结点作为进化点来进行目标轮廓的搜索,提出 了一种快速的主动轮廓边缘提取方法,该方法充分 利用了人工交互的便利和计算机自动处理的优点。 它通过在目标边缘附近给出一条初始轮廓来减少主 动轮廓的搜索范围,以取代传统变形曲线中对每一 个像素点进行进化,即只对变形 B样条曲线控制结 点进行进化,由于控制点的数目远远小于曲线上像 素点的数目,因而可以大大减少计算次数。由于共 轭梯度方向较梯度方向有更快的收敛速度,因此本 文通过 GVF力场扩散过程中图像点的梯度信息来 计算共轭梯度,所需的额外计算量很小,这进一步加 快了主动轮廓向目标边缘的收敛速度。实验表明, 该方法保持了捕捉范围大的优点,不仅减少了搜索 区域,降低了对初始位置的敏感性,而且提高了边缘 提取效率,并可有效地解决深度凹陷和瓶颈问题。

参考文献 (References)

[1] Menet S, Saint-Marc P, Medion GB. B-snake: Implementation and application to stereo[C]//Proceedings of Image Understanding

- Workshop. Pittsburgh, Pennsylvania, USA, 1990: 720-726.
- [2] Bao Paul, Zhang Lei. Noise reduction for magnetic resonance images via adaptive multiscale products thresholding [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2003, 22 (9): 1089-1099.
- [3] Kass M, W itkin A, Terzopouls D. Snake: Active contour models
 [J]. International Journal of Computer Vision, 1987, 1(4): 321-
- [4] Casselles V, Kimmel R, Sapiro G. Geodesic active contours [J]. International Journal of Computer Vision, 1997, 22(1):61-79.
- [5] Paragios N, Mellina GO, Ramesh V. Gradient vector flow fast geometric active contours [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(3): 402-407.
- [6] Cohen L D, Cohen I Finite-element methods for active contour models and balloons for 2D and 3D images[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1993, 15 (11): 1131-1147.
- [7] Xu C, Prince J L. Snake, shapes, and gradient vector flow [J].
 IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(1): 359-369.
- [8] Ning Ji-fang, Wu Cheng-ke, Liu Shi-gang, et al. NGVF: An improved external force field for active contour model[J]. Pattern Recognition Letters, 2007, 28(1):58-63.
- [9] Li Peirhua, Zhang Tian-wen. A new B-spline active contour model [J]. Chinese Journal of Computers, 2002, 25 (12): 1348-1356. [李培华,张田文.一种新的 B样条主动轮廓线模型 [J]. 计算机学报, 2002, 25 (12): 1348-1356.]
- [10] Wang Y, Teoh E K, Shen D. A B-snake model using statistical and geometric information applications to medical images [C]// Proceedings of the 7th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision Singapore, 2002: 793-796.
- [11] Gebhard M, Mattes J, Eils R. An active contour model for segmentation based on cubic B-spline and gradient vector flow [C]//Proceedings of the 4th International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention Utrecht, the Netherlands, 2001: 1373-1375.
- [12] Barth T. Manteuffel T. Multiple recursion conjugate gradient algorithms, Part I Sufficient conditions [J]. SAM Journal of Matrix Analysis and Applications, 2000, 21(3): 768-796.
- [13] Nocedal J, Wright S J. Numerical Optimization [M]. New Youk, USA: Springer-Verlag Press, 1999.
- [14] Chang P S, Willson A N. Analysisi of conjugate gradient algorithm for adaptive filtering[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000, 48(2): 409-418.
- [15] Zhang Xian-da. Matrix Analysis and Application [M]. Beijing:
 Tinghua University Press, 2004. [张贤达.矩阵分析与应用
 [M]. 北京:清华大学出版社, 2004.]