

Edu<sup>STAR</sup> eBOOK

中教育星电子图书馆

中教育星

电子图书馆

EBOOK



# 大学物理学

Edustar

中教育星软件股份有限公司

## 内容提要

本书是教育部理科物理学和天文学“九五”规划教材和面向 21 世纪课程教材。它是作者在南京大学基础学科教学强化部讲授大学物理课程基础上写成的，以期作为多学科的公共基础课教材。本书是一本全新构思的教材，它以现代物理知识为主导，贯穿以科学研究的思想、方法和语言，有利于培养创造性人才。本书分力学、热物理、电磁学以及近代物理基础等四部分，共计 32 章。本书配有电子版辅助教学材料，列举了作者对题解、文献阅读以及课程论文等环节的观点并包含了有关的参考资料。

本书可作为综合大学和师范大学理科各专业的教科书或参考书，也可供其他高等学校的理工科专业选用。

## 序

物理学在迅速发展,不断地揭示新的现象和规律,征服新的领域,还向相邻的学科交叉渗透,并在高新技术园地里开花结果.这就促使大学基础物理课程作相应的改革,以适应科学发展的新形势.值此新旧世纪交替之际,广大物理学工作者和教师所面临的一项重大挑战,乃是写出一本面向 21 世纪的大学生物理教材.

卢德馨教授曾从事理论物理的科学研究多年,取得了第一手的科研经验,有良好的物理素养.近年来他主持了南京大学基础学科教学强化部的工作,并承担了其中大学物理学的教学任务,致力于基础物理学课程的教学改革.他对此深思熟虑,自有一套创新性的见解,而且有足够的能力和毅力,将这些概念付诸实践.这本书就是他多年教学经验的结晶,既新颖可喜,又脚踏实地,是一本优秀的基础物理学课程的教材.

基础物理学改革的浪潮是全球性的,持续了好几十年,既有成功的经验,也有失败的教训.理论物理大师费曼(R.P.Feynman)的例子就是颇有启发性的:他于 60 年代初介入了大学基础物理的教学改革,曾在美国加州理工学院教过大学一、二年级的物理课程.称著于世的三大卷《费曼物理讲义》就是这段经历的见证.他对于物理学的许多方面做出了富有创造性的重大贡献.随之而来的是他对物理学的透彻洞见和精辟理解.他在上物理课时,若天马行空,纵横驰骋;即物穷理,多蕴妙悟;且谈笑风生,挥洒自如.以此,这部讲义对广大物理工作者和教师,深富启迪和教益,成为被引证最多的一部物理著作,在物理学界产生广泛的影响.从这个意义上来说,这个教改的尝试是成功的.但是应该看到事物的另一面:这本讲义,陈意过高,使得刚入大学的学生难以掌握,因而不适宜作为实际施教的教科书.可以这么说,这是一本为教师而写的,而不是为学生而写的教科书.对学生来说,显得高不可攀,难以理解其底蕴.作为教材,在可接受性上出了问题.随之而来的多卷本《伯克莱物理教程》虽在可接受性上略有改进,但仍有问题.因而可接受性成为了评衡教材的另一重要标准.瑞斯尼克(R.Resnick)与哈立德(D.Halliday)的《物理学》虽然没有费曼那样高的独创性,但稳打稳扎,更贴近于传统教材,可接受性良好,受到广大教师的青睐,遂成为美国应用最广泛的大学物理学教材.革新性教材的另一个问题,是由于要增加很多新的内容所引起的.适应科学发展的需要,必然要增添许多反映新的进展的内容,而作者往往喜新不厌旧,对于传统的内容舍不得抛弃,结果就会使教材的内容臃肿,篇幅浩繁,也不利于施教.

本书作者力图推陈出新,变革教材的陈旧面孔.在这一点上,显然受到费曼的影响,但是他并不沿袭费曼的具体做法,而是有自己的新意.例如在第四章,他采用透视历史的方法来引入万有引力定律,娓娓道来,引人入胜.然后讨论了引力的现代问题,诸如引力质量与惯性质量的等同性,引力红移和引力塌缩等,和物理学的前沿相衔接;然后再回过头来处理二体开普勒问题的理论,使得学生能切实地掌握相应的理论方法.整章读下来,从历史到现实,从概念到理论,有融会贯通的乐趣.又如在第二十七章叙述玻色-爱因斯坦统计之后,紧接着引入最新的实验结果来讨论玻色-爱因斯坦凝聚问题,使学生不是单纯被动地接受一些知识,而是置身于物理学发展的动态环境之中,有身历其境之感,培养了学生对物理学的参与意识.

本书作者一方面对创新下了不少功夫，同时清醒地意识到可接受性的重要。篇章的顺序是力学——热物理——电磁学——近代物理，大体上符合循序渐进的教学原则，不会使学习者产生太大的跳跃和脱节的感觉。本书作者也注意到学生容易犯错误的地方，例如在教矢量的地方，着重提醒哪些表达式是非法的，这一细节反映出作者是一位经验丰富的教师。另外全书的篇幅控制在 600 页左右，使得这一教材可以游刃有余地在 180 小时课堂教学中完成，避免了篇幅过大的毛病。

这本教材自 1989 年起即在南京大学强化部大学物理学课程中试用，1993 年起又用于南京大学天文系的学生。历次教学的效果良好：它激发了学生对物理学的兴趣，也培养了思考物理学问题的能力，这从学生们所做的小论文工作取得良好成绩得到了验证。当然，强化部的学生素质较高，也为这一教学改革顺利进行提供了良好的条件。总之，这是一本令人耳目一新、适于实际施教的大学物理学教材，值得向物理教学界推荐。

冯端

1996 年 10 月

## 前言

本书是作者在南京大学基础学科教学强化部讲授的“大学物理学”课程基础上写成的.强化部有天文、物理、生物物理、化学、生物、生物化学等学科方向.“大学物理学”作为一门公共基础课,很难根据现有的“本系”或“外系”教材来讲授.因此需要一本全新构思的书.普通物理教科书的基本内容往往仍然是以 17 世纪、19 世纪的为主,这在世纪之交是很不适宜的.学制的缩短、双休日制度的实施使课时过多的矛盾更加突出.作者尝试撰写一本以 20 世纪内容为主导的教科书,篇幅适合两个学期的课程,希望能够作为多个学科学生的公共基础课教材.

从当前科学发展的趋势看,学科的交叉、渗透相当普遍.在教材中努力体现这种倾向是值得尝试的.在本学科中各分支间的关联以至融会贯通也是应该强调的.当然寻求物理学与其它学科、物理学各分支间的“枝连”是颇为艰难的事.再者作者本人相信前沿课题应该在基础内容中有其“根”,寻根的工作也是相当艰难的.但是一旦发现前沿课题中有适合基础教学的内容,则务求能纳入教材.希望这种搜索寻根的工作使教材更为丰满、充实.实际研究工作者的思路、方法对于初学者来说是很价值但又难以获得的.例如在研究工作中如何获取和处理信息、处理好数学和物理的关系、不断调整研究步骤、深入理解结果的意义、扩大成果等等,本书试图通过实际问题向读者展示.

传统的基础课强调基础知识、基本理论和基本技能.实践证明完全可能通过课程达到进一步的目标:培养学生的探索精神和创造精神.可以通过历史、展示现实作出示范.同时还可以创造条件使学生有向内容的深度和广度发展的余地.讲授应该不局限于一本教材,提倡开放式.本书引用一定数量的文献和参考书,展示一些悬而未决的问题,都是基于这种考虑.列出的一些经典文献和专业文献主要是供给教师研究用.标有\*的节和段落可以作为参考内容.在本书的辅助材料电子版中列举了作者对题解、文献阅读、课程论文等环节的观点并包含了有关参考材料.

基于以上考虑,本书的选材、表达不同以往.例如光学和电路没有纳入;提出了不少新的观点和处理问题的方式;尝试对物理定律的美学价值进行思考等等.读者可以见仁见智,加以评论.本书写出初稿已有 8 年了,首次在教材建设组披露部分内容也已有 4 年.但是仍不能臻于理想,错误、不当仍然难免.

成书过程中曾先后得到陈祖福、冯端、冯致光、江元生、许敖敖、邓崇光诸位的鼓励和支持.作者还得到江元生、梁昆森、陈廷扬、黄天衣、沈健、赵其昌、潘大谦诸君不少有益的意见和帮助.冯端先生通读全书、作序,对内容的调整和增补提出了宝贵的意见,使我获益非浅.在此一并表示感谢.我的助教和学生在教和学的过程中对本书的形成起了重要作用,石名俊选编了部分习题.希望本书能唤起他们美好的回忆.

卢德馨

1996 年 10 月于南京

## 第一章 绪论

### § 1.1 什么是物理学

物理学是研究自然界基本规律的科学. 它的英文词 physics 来源于希腊文, 原义是自然, 而中文的含义是“物”(物质的结构、性质)和“理”(物质的运动、变化规律). 中文含义与现代观点颇为吻合. 现代观点认为物理学主要研究: 物质和运动, 或物质世界及其各部分之间的相互作用, 或物质的基本组成及它们的相互作用.

物质可以小至微观粒子——分子、原子以至“基本”粒子(elementary particles). 所谓基本粒子, 顾名思义是物质的基本组成成分, 本身没有结构. 然而基本与否与人们的认识水平以及科学技术水平有关, 因此对“基本”的理解有阶段性. 有鉴于此, 物理学家简单地称之为“粒子”. 有时为了表达认识的层次, 我们仍然可以说: “现阶段的基本粒子为……”. 当前我们认为基本粒子有轻子(lepton)、夸克(quark)、光子(photon)和胶子(gluon)等等. 科学家们正在努力寻找自由夸克. 此外, 分数电荷、磁单极也在寻找之列. 我们周围的物体是物质的聚集状态. 人们可以用自己的感官感知大多数聚集状态的物质, 并称它们为宏观(macroscopic)物质以区别前面所说的微观(microscopic)粒子. 居间的尺度是介观(mesoscopic), 而更大的尺度是宇观(cosmological). 场(field)传递相互作用, 电磁场和引力场就是例子.

在物理学的范围内, 物质的运动是指机械运动、热运动、微观粒子的运动、原子核和粒子间的反应等等. 运动总是发生在一定的时间和空间. 时间和空间首先是作为物质运动的舞台, 但最后也成了物理学研究的对象.

现在知道物质之间的相互作用有四种, 即万有引力、弱相互作用、电磁相互作用和强相互作用.

爱因斯坦(A. Einstein, 1879—1955)生前曾致力于统一场论的工作, 试图用统一的理论来描述各种相互作用. 在60年代, 走向统一有了突破性的进展. 格拉肖(S. L. Glashow)、温伯格(S. Weinberg)和萨拉姆(A. Salam)等人发现弱相互作用和电磁相互作用可以统一, 用弱电相互作用(electroweak)来描述. 鲁比亚(1983<sup>[1]</sup>, C. Rubbia)等提供了实验支持. 大统一理论(Grand Unification Theory, GUT)试图将强相互作用也统一进去, 而超对称理论更企图将引力也纳入其中. 还有人在寻求其他的相互作用. 对此, 在Physics Teacher期刊上曾有一篇文章题为“存在第五种基本力吗?”专门讨论这一命题[6]. 在高级的理论中, 相互作用只不过是交换物质, 如电磁作用交换光子、强作用交换胶子.

物理学的一个永恒主题是寻找各种序(orders)、对称性(symmetry)和对称破缺(symmetry-breaking)[10]、守恒律(conservation laws)或不变性(invariance). 物质的有序状态比我们想象的要广泛得多. 除了排列整齐的位置序以外, 还可以有指向序. 超导态也是一种有序状态. 对称性通常指静止的空间几何对称, 如太极图、八卦、晶体中的平移和旋转对称. 实际上, 对称性还可以是动态的, 可以是时间反演对称、物质—反物质对称以及更为抽象的规范对称等等.

就物理学和其他科学的关系而言, 我们可以说:

- 物理学是最基本的科学。
- 物理学是最古老、发展最快的科学。
- 物理学提供最多、最基本的科学研究手段。

最基本的体现是在天文学、地学、化学、生命科学中都包含着物理过程或现象。在这些学科中用到不少物理学概念和术语是很自然的。最基本还意味着任何理论都不能和物理学的定律相抵触。例如，如果某种理论破坏能量守恒定律，那么这一理论就很成问题。当然，某些物理理论本身或一些阶段性的工作本身也是在不断地完善。

19 世纪中叶之前，物理学曾是完完全全的实验科学。力学中的理论问题被认为是数学家的事。19 世纪末，在当时处于世界物理学中心的德国的大学里，开始设置理论物理学教授的席位。此后，随着人类的认识能力逐步深入，逐步深入到不能靠直觉把握的微观、高速、宇观现象，20 世纪初建立了狭义和广义相对论，以及量子力学这些深刻的物理理论。到了 20 世纪中叶，物理学已经成为实验和理论紧密结合的科学。20 世纪后半叶由于电子计算机的发展，既改变了理论物理的工作方式，也扩大了实验的涵义。目前物理学已经成为实验物理、理论物理、计算物理三足鼎立的科学。实验提供的条件比自然界出现的更富变化和更灵活可控，而物理理论则给出了对自然界的数学描述。计算物理学是重要的新分支，有自己独特的研究方法。计算机实验可以提供比通常的实验更为变化丰富和灵活控制的条件。不过通常需要用到超级计算机。

物理学中最重大的基本理论有下面 5 个：

- 牛顿力学或经典力学 (Mechanics) 研究物体的机械运动；
- 热力学 (Thermodynamics) 研究温度、热、能量守恒以及熵原理等等；
- 电磁学 (Electromagnetism) 研究电、磁以及电磁辐射等等；
- 相对论 (Relativity) 研究高速运动、引力、时间和空间等等；
- 量子力学 (Quantum mechanics) 研究微观世界。

后两个理论主要是在 20 世纪发展起来的，通常认为是现代物理学的核心。以上理论中没有一个被完全推翻过，也没有一个是永远正确的。例如，牛顿力学在高速情形下，应该用狭义相对论来代替；而对于强引力，它又偏离于广义相对论，但在它的适用范围内仍然是精确的。科学的理论总是要发展的，需要根据新发现的事实进行修正。在教科书中只介绍一种版本的做法很可能导致“理论是唯一的”这样的观念。事实上，理论决不是唯一的。科学理论往往在美学上令人赏心悦目，在数学上优雅而普适，但是仅仅有这些是决不可能流传下来的。理论和思想必须经受实验的检验和验证。物理学中的理论和实验在相互促进和丰富中得到发展。

一个没有思想的实验工作者可以发现无穷无尽的事实，不过毫无用处。理论家如果不受实验检验这一约束也可能产生出极其丰富的思想，不过与大自然毫无关系而已。

通常的科学研究方法是：

- 通过观测、实验、计算机模拟得到事实和数据；
- 用已知的可用的原理分析这些事实和数据；
- 形成假说和理论以解释事实；
- 预言新的事实和结果；
- 用新的事例修改和更新理论。

上述的后 3 步都是关于理论的. 以上所说的科学研究的步骤是常规的. 有时候, 有的人可能并不遵循这样的过程. 常常直觉 (intuition) 或者预感 (premonition) 会起相当的作用. 有时候, 机遇 (运气或偶然) 对于成功也会起作用, 使你获得一则重要的信息或发现一个特别简单的解. 要学会在恰当的时机提出恰当的问题, 并找到问题的答案. 有时还必须忽略一些“事实”, 原因是这些并不是真正的事实或者它们无关紧要、自相矛盾; 或者是由于它们掩盖了更重要的事实或考虑它们使问题过于复杂化. 据说, 有一次有人问爱因斯坦: 如果迈克耳孙-莫雷 (Michelson-Morley) 实验并不导致光速不变你怎么办? 他说: 他将忽略那些实验结果, 他已经得到了结论, 光速必须被认为是不变的. 关于爱因斯坦 1905 年提出狭义相对论时是否知道迈克耳孙-莫雷实验, 曾发生过长时间的争论. 有人认为爱因斯坦在他的著作中没有留下他知道迈克耳孙-莫雷实验的丝毫痕迹, 他可能纯粹通过理论推理和他们 (迈克耳孙与莫雷) 得出了相同的结论. 爱因斯坦的首席传记作家培斯 (Abraham Pais) 筛选了许多历史记载, 得出结论说, 爱因斯坦确实知道这一实验. 新近有一篇爱因斯坦在 1922 年的演说的英文翻译稿刊登在 Physics Today 上[8]. 此文是根据原来的德语演讲的日文记录整理、翻译的[见第九章参考文献 (13)]. 译者让爱因斯坦“本人”表示, 他知道这一实验.

在大学物理的学习中, 除了学习事实、定律、方程和解题技巧外, 还必须努力从整体上掌握物理学. 要了解各分支间的相互联系. 现代观点认为, 应该从整体上逻辑地、协调地来把握物理学. 学习中, 对于基本物理定律的优美、简洁、和谐以及辉煌应该有所体会, 要学会鉴赏其普适程度, 了解其适用范围. 还要学会区别理论和应用, 物理思想和数学工具, 一般规律和特殊事实, 主要和次要效应, 传统的和现代的推理方式等等.



## § 1.2 物理量

一个物理理论通常由以下几个部分组成：

- 概念，通常是抽象的、不能直接感知的；
- 关于这些概念的数学表示（物理量）的假定；
- 一个或一组方程，表示物理量之间的关系。

物理概念的数学表示决不是天然存在的，例如，我们用矢量来表示速度，用标量来表示温度等等。有些概念要用旋量、张量、复数等等来表示。作某些假定是必要的，而这正是物理学家的重要任务。物理量的表示往往带有历史的偶然性或科学家的个人爱好。例如，温度是一个统一的概念，但对应的物理量可以是摄氏（Celsius）温度  $t$ ，也可以是热力学温度或开氏（Kelvin）温度  $T$ 。\*是否也可以用  $-1/T$  作为温度呢？

基本物理量是通过测量来定义的，称此为操作性定义（operational definition）。通过基本概念、基本物理量而得到的物理量称做导出物理量。大多数物理量是导出物理量。哪些量是基本的、哪些是导出的，有一定的任意性，这往往有历史的偶然。比如，电流和电量哪个更基本呢？按规定电流为基本量。基本量的数目也是可变的。因此，单位或标准的数目也具有一定的任意性。国际计量大会（General Conference on Weight and Measures）选择了少数几个量作为基本量。表 1-1 中列出了国际单位制（SI）采用的基本单位，对于力学来说，只需表中前 3 个单位就够了。例如，力的单位是牛顿，符号为  $N$ ，它是一个导出单位： $1N=1kg \cdot m/s^2$

表 1-1 SI 基本单位

长度	米	m
质量	千克	kg
时间	秒	s
电流	安[培]	A
热力学温度	开[尔文]	K
物质的量	摩[尔]	mol
发光强度	坎[德拉]	cd

标准的制订还要考虑不易变化以及测量的方便程度和合理性。

长度标准起初是标准米。它是国际计量局（the International Bureau of Weights and Measures）保存的一个铂铱合金（platinum-iridium alloy）原器上两个刻度间的距离。1960 年第 11 届国际计量大会决定采用原子标准，规定：1 米为氪（Krypton）同位素（ $^{86}\text{Kr}$ ）发射的特定的红橙光（ $5d_5-2p_{10}$ ）波长的 1650763.73 倍： $1m=1650763.73 \lambda$ 。1983 年第 17 届国际计量大会采用了真空光速

$$c=299792458\text{m/s} \quad (1.2.1)$$

这一常量来定出长度单位，规定：米是光在真空中（ $1/299792458$ ）s 时间间隔内所经路程的长度。

长度测量仅是一个比较的过程，但决不是一件简单的事情。观察者如何测量相对于自身运动的物体呢？这需要采取特别的步骤。根据狭义相对论，长度与运动有关。在量子力学中，空间是量子化的，即离散的。很可能存在一个基

本长度，它限制了经典的空间描述. 据认为这一基本长度不小于  $10^{-35}\text{m}$ .

典型的长度见表 1-2，大小相差  $10^{61}$  倍.

表 1-2 典型的长度

哈勃半径	$10^{26}\text{m}$
地球半径	$6.4 \times 10^6\text{m}$
人的典型高度	$1.8 \times 10^0\text{m}$
书页的厚度	$1 \times 10^{-4}\text{m}$
氢原子半径	$5 \times 10^{-11}\text{m}$
质子有效半径	$1.2 \times 10^{-15}\text{m}$
弱电统一的特征尺度	$10^{-18}\text{m}$
普朗克 ( Planck ) 长度	$10^{-35}\text{m}$

对于宇观和微观尺度，还有表 1-3 所示单位，但它们不是 SI 单位.

表 1-3 其他长度单位

天文单位 ( Astronomical Unit , AU )	$1.4959781 \times 10^8\text{km}$
光年 ( light year , l.y. )	$9.460730 \times 10^{15}\text{m}$
秒差距 ( parallax second , parsec , pc )	$3.259\text{l.y.}$
埃 ( Angstrom , $\text{\AA}$ )	$10 \times 10^{-10}\text{m}$

例 1.1 用天文单位来表示秒差距 ( 图 1-1 ).



解：AU 为地球到太阳的平均距离.

$$1\text{pc} = \frac{1\text{AU}}{1 \frac{1^\circ}{3600} \frac{1}{180^\circ}} = 206265\text{AU}$$

实际上，上式可以作为秒差距的定义.

质量的标准是铂铱合金制作的圆柱形国际千克原器的质量. 规定原子质量单位是：

$$1\text{u} = (1.6605402 \pm 0.0000010) \times 10^{-27}\text{kg} = \frac{1}{12} m_{12\text{C}} \quad (1.2.2)$$

质量的测量似乎也是很简单的. 我们可以用天平来称量物体的质量. 我们称这样测出的质量为引力质量，因为实际上天平是用来比较物体所受引力的大小的. 当我们认为质量是惯性的量度时，我们有衡量物体惯性大小的惯性质量. 没有理由认为两者一定相等. 实际上，同一物体的引力质量和惯性质量彼此是相等的，在  $10^{-11}$  的精度下没有发现差别 ( 见 § 4.3 ).

没有理由反对说“质量也是与运动有关的”.静止质量是物体和观察者相对静止时测得的质量.在微观尺度上静止质量并不守恒.例如，在原子核的裂变和聚变反应中，释放能量的同时总是伴随着质量的减少.以光速运动的粒子其静止质量为零.

典型的质量见表 1-4，大小相差  $10^{84}$  倍.

表 1-4 典型的质量

已知宇宙	$10^{53}\text{kg}$
银河系	$2.2 \times 10^{41}\text{kg}$
地球	$6.0 \times 10^{24}\text{kg}$
人	$6.0 \times 10^1\text{kg}$
灰尘	$6.7 \times 10^{-10}\text{kg}$
烟草花叶病毒	$2.3 \times 10^{-13}\text{kg}$
质子	$1.7 \times 10^{-27}\text{kg}$
电子	$9.1 \times 10^{-31}\text{kg}$

民用时间的单位是(平均太阳)秒,即一天(平均太阳日)的  $1/86400$ .1956 年国际计量局规定 1 秒等于 1900 年 1 月 1 日 0 时整回归年的  $1/31556925.9747$ .1967 年国际计量大会选择铯原子 ( $^{133}\text{Cs}$ ) 两个超精细能级跃迁所对应的辐射的频率

$$\nu=9192631770\text{Hz} \quad (1.2.3)$$

作为时间间隔基准，秒与这一频率的关系是

$$1\text{s}=9192631770/\nu \quad (1.2.4)$$

时间与运动是密切相关的.事实上，钟表只是记录重复运动事件而已.就计时而言，我们同样可以说运动的时钟也许和相对我们静止的快慢不一样，从而双胞胎之一如果作星际飞行归来生物年龄将发生变化.

\*时间的“单向性”问题是物理学的根本问题之一，事实上这和“不可逆”过程有关.

典型的时间见表 1-5，大小相差  $10^{60}$  倍.

表 1-5 典型的时间

宇宙的年龄	$3 \times 10^{17}\text{s}$
地球的年龄	$1.3 \times 10^{17}\text{s}$
人的平均寿命 ( life expectancy )	$2 \times 10^9\text{s}$
1 天	$8.6 \times 10^4\text{s}$
典型的分子旋转周期	$1 \times 10^{-12}\text{s}$
快速运动粒子穿越原子核的时间	$3 \times 10^{-24}\text{s}$
普朗克时间	$10^{-43}\text{s}$

真空光速以及下面 2 个普适物理常量非常重要：

$$\text{普朗克常量}h=\frac{h}{2\pi}=1.05457266\times 10^{-34}\text{J}\cdot\text{s} \quad (1.2.5)$$

$$\text{引力常量}G=6.67259\times 10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2 \quad (1.2.6)$$

这些数值具有深刻的物理意义.例如，光速的值（确切地说其他速率和它的比值）决定了相对论效应是否明显，而普朗克常量则与量子力学有关.伽莫

夫 (George Gamow) 所写的有关这方面的科普读物为我们描写了在普适常量具有不同数值的奇异世界里将是怎样的景象<sup>(13)</sup>，值得一读。学了 §9.2 以后，你若重读这本书，将会发现书中有一些值得探讨的问题。

几何上，面积是 (长度)<sup>2</sup>，就说平面对象是 2 维的；体积是 (长度)<sup>3</sup>，就说立体的对象是 3 维的。实际上 2、3 正是要研究的量 (面积、体积等) 所包含基本量 (长度) 的幂次。这一做法可以推广到其他物理量，以此来描述它们和基本量之间的关系。比如说速度是长度/时间，我们就说速度的量纲 (dimension) 是 (长度)<sup>1</sup> (时间)<sup>-1</sup>。若以 L、M 和 T 分别表示 3 个基本量长度、质量和时间的量纲，则速度的量纲为  $\text{dim}v = LT^{-1}$ 。哈勃 (Hubble) 常量  $H_0$  是

$$H_0 = 50 \sim 100 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1} \quad (1.2.7)$$

其倒数是时间量纲： $H_0^{-1} = 10^9 \sim 10^{10} \text{ a}$  (a 为年的单位)，这是宇宙问题的时间尺度。用光速乘以这一常量，得到哈勃半径——可观察宇宙半径。量纲比起单位来更基本，它是检查方程是否正确的基本手段。

无量纲的量常常有重要的应用。例如，流体力学中的雷诺 (Reynold) 数  $Re = vd/\nu$  就是无量纲量，它的大小可以作为运动状态的判据。另一个例子是等离子体参数  $\beta = e^2 / a$ ，它是耦合强度的度量。事实上，这是离子平均势能和热运动动能之比。

无量纲量可以有单位。例如，行星轨道周期变短的速率的单位是秒/世纪。两个时间单位不能约掉而成为无单位的量。在这里我们可以看到量纲和单位是有联系的，但是完全不同的两个概念。

在各个不同的领域，我们常常用一些特征量作单位来使得方程无量纲化。这样的方程往往除了无量纲的变量以外只包含一些数值常数，最多还包含极少数 (例如一个) 由这些特征量组成的无量纲量。因此，这样的方程有较大的普遍性。有些理论物理学家喜欢采取“自然单位”，他们把  $c$ 、 $\hbar$ 、 $m_e$  都取作 1，在运算的结果中再将其恢复。我们可以用一定的量构成指定量纲的量或无量纲量。某些无量纲量，特别是用普适常量  $G$ 、 $\hbar$ 、 $c$ 、 $e$  等构成的无量纲量，往往联结着不同领域中的效应。

例 1.2 用三个普适常量  $G$ 、 $\hbar$ 、 $c$  构造一个长度量纲的量。

解：令  $l_g = G \hbar c$ ，于是

$$\text{dim } G \hbar c = L$$

式中常量的量纲可以直接从它们的单位得到，也可以从它们所在的公式得到。例如， $\text{dim}G = T^{-2}L^3M^{-1}$  ( $F = Gm_1m_2/r^2$ ,  $F = ma$ )。代入三个常量的量纲后，我们有

$$L^3 + 2 + \dots, M^{-1} + T^{-2} - \dots = L^1$$

结果是  $\dots = 1/2$ ， $\dots = -3/2$ 。所求的长度量纲的量为

$$l_g = \left( \frac{G\hbar}{c^3} \right)^{1/2} \approx 1.6 \times 10^{-35} \text{ m}$$

如果存在基本长度的话，这可能就是下限。

在进行量纲分析的时候可以利用已知的定律或公式 (它们的量纲关系当然是正确的)。例如，我们知道功、能的量纲是一样的，由功以及引力的表达

式

$$W = F \cdot r, F = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} r$$

可以推出与引力有关的能量的量纲，从而用球的质量和半径构造出一个具有能量量纲的量：

$$U = -G \frac{m^2}{R}$$

称它为引力自能。-U 即球对称质量的结合能，它给出了使这个球成为碎片所需要的能量。这个式子和精确的表达式相比，只差一个数值常数。如果球的质量是均匀分布的，这个常数就是 0.6。对于球壳来说，此常数是 0.5。量纲分析以最简单的方式给我们提供了正确的物理结果，只是差一个跟具体模型有关的数值常数。在没有关于模型结构详细信息的情况下，量纲分析的结果恰恰是最合理的。

### § 1.3 物理学中的近似

在作近似的时候,我们常常要先进行比较.只有同量纲的量才能比较它们的大小.如果两个量  $f(x)$ 、 $g(x)$  随  $x$  ( $x$  为自变量.为了比较的方便可以随意地把相关的物理量中的一些作为函数,另一些作为自变量,这与其中的因果毫无关系.) 变化时有如下关系:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = C, \quad 0 < |C| < \infty \quad (1.3.1)$$

我们说当  $x$  趋向  $a$  时它们具有相同的数量级 (order of magnitude), 并写作

$$f(x) = O(g(x)).$$

例如:

$$3x^2 + 5x^4 = \begin{cases} O(x^2), & x \rightarrow 0 \\ O(x^4), & x \rightarrow \infty \end{cases}$$

通常我们把差 10 倍作为差 1 个量级.当  $a$  比  $b$  小两个量级以上时,我们说  $a \ll b$ . 当一个物理量减小到原来的  $1/e$  时,其变化当然是较明显的.从这个意义上来说,有  $e^{-1} \ll 1$ . 就数学的严密性而言,这当然是不满足的.这里,我们可以只将其看作“有了明显变化”的同义语.如果

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

我们说当  $x$  趋向  $a$  时  $f(x)$  是  $g(x)$  的无限小量,并记作  $f(x) = o(g(x))$ .

在绝大多数情况下,为了简化问题常常丢掉无限小量或者至多只保留它的一次幂.对于非线性系统,问题对初值十分敏感.有时候初值的极其微小的不同会导致令人难以相信的差别.在天气系统中的所谓“蝴蝶效应”就是指这样一件事:今天一只蝴蝶在北京拍动一下空气,就足以使下个月纽约的一场暴风雨为之改观.

利用级数展开可以来求极限、估计量级或分离不同量级的量.这里我们只提一下其中的一种展开方式——泰勒级数 (Taylor series):

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + f'(x_0)x + \frac{1}{2!}f''(x_0)x^2 + \dots \quad (|x|$$

小于  $f$  的收敛半径)

最常用的函数的泰勒级数展开式为:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots, \quad x < 1$$

$$(1+x)^{-q} = 1 - qx + \frac{1}{2!}q(q-1)x^2 - \dots, \quad x < 1$$

笼统地认为近似总不如严格解的观点是不可取的.正确地、巧妙地运用近似,是有经验的科学工作者的基本技能.有时候我们似乎能严格地解一些问题,实际上这可能包含着更根本的近似——模型近似.所有的理论模型都是近似的,它只把最主要的效应考虑在内.例如,在粒子物理学中,重力一般都不考虑.又如,当我们用一个统一的重力加速度的时候,实际上已假定了地球是一个均匀的圆球.此外,当我们用库仑定律

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

来计算两个电荷之间的作用力时，电荷的尺寸必须比其间距小得多。也就是说，把它们看做点电荷，否则就要计及它们的大小。

有时候人们可以通过拟合实验数据来建立一些模型（当留有足够多的可调参数时，拟合数据实在是太容易了），而这种模型若能与观测不同侧面的多个实验结果都吻合，简直是一种幸运。

对于某些模型，问题也许有严格的解析解。但对于大多数情况，都还需要作数值计算或运用数学近似。

## § 1.4 矢量

标量是只有大小（一个数和一个单位）的量。质量、长度、时间、密度、能量和温度等等都是标量。矢量（vector）是既有大小又有方向的量，并有一定的结合规则。位移、速度、加速度、角速度、力矩、电场强度等等都是矢量。矢量有以下几种表示方式：

- 几何表示有指向的线段；
- 解析表示如  $A = (A_1, A_2, A_3)$ ，大小为  $A = |A|$ ；
- 张量表示按照一阶张量的变换规律变换。

如果两个矢量有同样的大小和方向，则彼此相等。长度为一个单位的矢量称单位矢量，记作  $e_A = A/A$ 。矢量和标量之间可以有各种函数关系，如标量的矢量函数  $r = r(t)$ 、矢量的标量函数  $W = W(F, r)$  等等。

矢量有以下的结合法则：

（1）矢量的加法

矢量根据平行四边形法则或三角形法则（见图 1-2）合成。矢量加法满足：

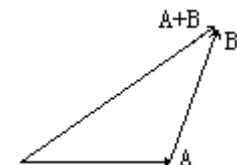


图 1-2 矢量的加法

- 交换律（commutative）

$$A+B=B+A$$

- 结合律（associative）

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

零矢量通过下式定义：

$$A+0=A$$

并不是所有的量都满足交换律的。比如对于旋转运动，旋转的次序是否可以颠倒呢？也就是说  $x+y = y+x$  是否成立呢？从图 1-3 可以看出，砖块按照不同次序旋转，其结果不相同。旋转也可以绕附在砖块上的轴进行，结论将是一样的。当然绕同一轴的两两次旋转，其次序可以交换，但这并不妨碍我们得到的结论：有限旋转不是矢量。一般地说，不在一个平面内的两次旋转的效果是与次序有关的，不过随着角位移的逐渐减小，结果将越来越趋于一致。利用矢量分析理论，可以证明无限小角位移是矢量，或者更精确地说是轴矢量。



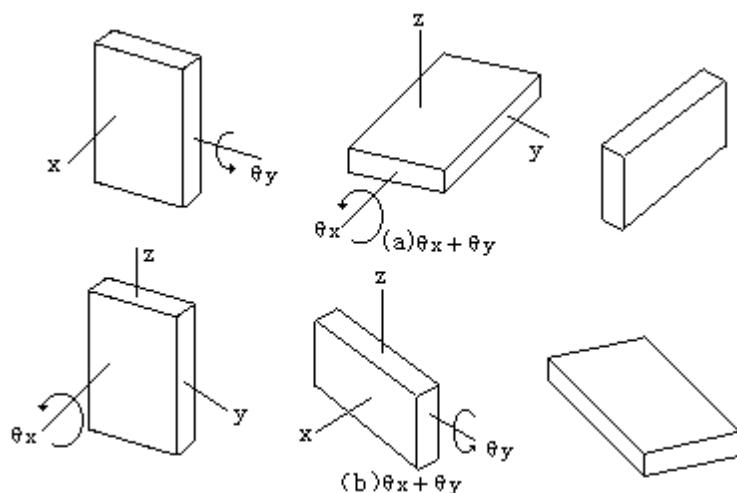


图 1-3 有限旋转

## (2) 数乘

一个矢量  $A$  乘以一个标量 结果仍为矢量， $A=C$ . 这个矢量的大小是  $C=|A|$ ；当  $>0$  时，它和原矢量平行；如果  $<0$ ，则反平行. 数乘满足：

- 结合律  $(\mu A) = (\mu) A$
- 分配律 (distributive)  $(+ \mu) A = A + \mu A$
- $(A+B) = A + B$

这里没有定义矢量的减法，但是结合加法和数乘  $(-1)$ ，就可以得到有关的结果. 例如， $A-A=A+(-1 \times A)=0$ .

## (3) 矢量的分解

在一个平面内，如果存在两个不共线的矢量  $e_1$  和  $e_2$ ，则平面内的矢量  $A$  就可以分解为  $A=A_1e_1+A_2e_2$ . 最常用的是  $e_1$  和  $e_2$  相互垂直. 在 3 维空间中，作这样的分解需要 3 个不共面的矢量.

## (4) 标量积 (点积、内积) (scalar, dot, inner product)

两个矢量的标积是一个标量，

$$A \cdot B = AB \cos$$

式中 是两矢量的夹角. 当  $B$  为单位矢量时，标量积就是矢量  $A$  在单位矢量方向上的投影. 显然，

$$A \cdot B = B \cdot A$$

标积满足分配律：

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$A \cdot A = A^2 \geq 0$ .  $A \cdot A = 0$  意味着  $A$  是零矢量.

$A \cdot B = 0$  又意味着什么呢？它说明其中之一是零矢量、两者都是零矢量或两者相互垂直.

## (5) 矢量积 (叉积、外积) (vector, cross, external product)

$A \times B = C$  是一个 (轴) 矢量，它的方向定义在从  $A$  到  $B$  右手螺旋的前进方向 (图 1-4)；其大小是  $|A \times B| = AB \sin$  ( $0 < <$ )，恰好是以这两个矢量为边的平行四边形的面积 (图 1-5)。

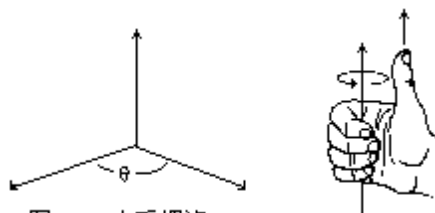


图 1-4 右手螺旋



图 1-5 平行四边形的面积

矢量积有如下性质：

$$A \times B = -B \times A$$

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

$$A \times A = 0$$

矢量积既然是矢量，它还可以再和其他矢量进行矢量乘积：

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

极矢量和轴矢量（赝矢量）在镜子面前将表现出不同的行为，当  $A \times B$  平行或垂直镜面时，其成象规律完全不同（图 1-6）。事实上，我们正是根据这种行为来定义轴矢量和极矢量的。

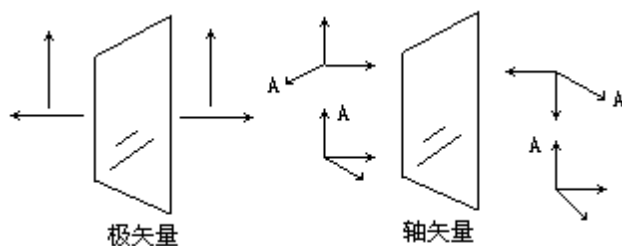


图1-6 极矢量和轴矢量

#### （6）混合积

3 个矢量可以用以下方式进行结合，其结果称为混合积。混合积有以下的循环性质：

$$(A \times B) \cdot C = (C \times A) \cdot B = (B \times C) \cdot A \\ = - (B \times A) \cdot C$$

混合积可以用来计算平行六面体的体积。

矢量可以用来作为标量运算的工具。

例 1.3 求下列两函数之和：

$$x_1 = A_1 \cos(t + \phi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(t + \phi_2)$$

解：设  $i$  是  $x$  方向的单位矢量，可以借助于矢量合成方法：

$$x_1 + x_2 = r_1 \cdot i + r_2 \cdot i = (r_1 + r_2) \cdot i \\ A \cos(t + \phi)$$

其中的  $A$ 、 $t + \phi$  可以由图 1-7 中的几何关系求得。

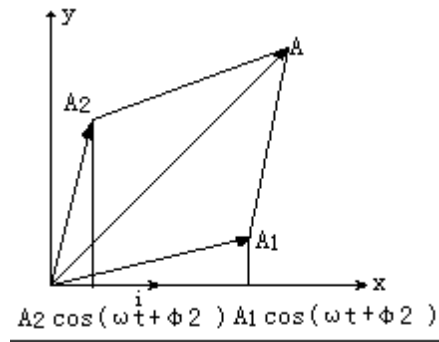


图 1-7

#### 例 1.4 求和

$$A \cos(0) + A \cos(\quad) + A \cos(2\quad) + \dots$$

解：我们可以将求和想象成由若干个大小相同的矢量  $A_1, A_2, A_3 \dots$  叠加的投影，相邻矢量的夹角为  $\frac{\phi}{2}$ 。由图 1-8 可以看出

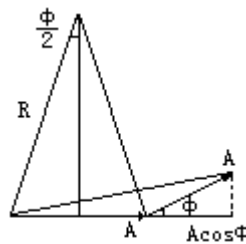


图 1-8

$$R \sin\left(\frac{j}{2}\right) = \frac{A}{2}$$

两个矢量叠加的结果是

$$R \sin\left(n \cdot \frac{j}{2}\right) = \frac{1}{2} |A_1 + A_2|, \quad n = 2$$

消去  $R$  以后可以得到

$$|A_1 + A_2| = A \frac{\sin\left(2 \cdot \frac{j}{2}\right)}{\sin\left(\frac{j}{2}\right)}$$

对于求和

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{A_0}{N} \cos\left(kx - \quad t + \frac{n}{N} j\right)$$

可以利用前面的推导得到结果

$$A = \frac{A_0}{N} = \frac{\sin\left(N \cdot \frac{j}{2N}\right)}{\sin\left(\frac{j}{2N}\right)} \cos(kx - \quad t)$$

对于矢量来说，必须区别定义过的运算和没有定义过的运算。例如，下面的表达式都是非法的：

$$\frac{1}{A}, \ln B, \sqrt{C}, \exp(D)$$

矢量是不同于标量的数学对象，将矢量等同于标量的表达式肯定是不正确的。

矢量在物理学中有着广泛的应用。许多物理量是矢量。例如，

$$\mathbf{F}, \mathbf{v}, \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad \mathbf{r}_c = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}$$

都是矢量。大多数矢量可以用大小和指向来说明，叫做自由矢量。有一些量可以用沿某一直线的矢量来表示。例如用杆秤来称量时，砵和物上的重力可以用通过悬挂点的竖直线上的矢量来表示，至于在线上的位置则无关紧要。这类矢量叫滑移矢量。有些矢量，如空间点的电场强度，则是完全束缚的。

利用矢量运算，不需要依赖于具体的坐标系，可以使得描述物理现象的方程的普遍性得到更好的反映。矢量运算也较简洁，不过在很多情况下，还是需要选定坐标系用分量来进行具体运算。

## § 1.5 正交坐标系

一个坐标系需要有由基矢量 (base vectors) 组成的基. 基矢量相互正交的坐标系称为正交坐标系 (orthogonal coordinate system). 此外也还有斜交坐标系, 本书中只采用正交系. 我们熟悉的直角坐标系 (Cartesian system) 的基是  $(i, j, k)$ , 其中的基矢量都是单位矢量, 且满足正交和右手螺旋关系:

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0, \quad i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$$

$$i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j$$

一个矢量可以用基矢来展开:

$$A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$$

利用单位矢量的性质和正交关系, 可以求得矢量的三个分量为

$$A_1 = A \cdot i, \quad A_2 = A \cdot j, \quad A_3 = A \cdot k$$

利用矢量运算的分配律, 可以求得用分量表示的运算结果. 例如:

$$A \cdot B = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}, \quad (A \times B) \cdot C = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

基矢量不一定是正交的或右手的, 可以是斜交的或左手的, 但是, 它们必须是完整的和线性独立的. 完整性要求它们的个数和空间维数一致. 如果一组矢量满足关系式

$$C_1 A_1 + C_2 A_2 + \dots + C_n A_n = 0$$

的条件是所有系数为零, 我们就说这些矢量是线性独立的, 否则就说是线性相关 (linearly dependent) 的. 如果这些矢量中包括有零矢量, 则一定是线性相关的. 两个线性相关的矢量一定共线 (collinear). 3 个线性相关的矢量一定共面 (coplanar).

除直角坐标系以外, 极坐标系也是常用的. 平面极坐标 (planar polar coordinates) 系的基由径向基矢量和横向基矢量组成  $(e_\rho, e_\phi)$ , 见图 1-9. 它们满足以下关系:

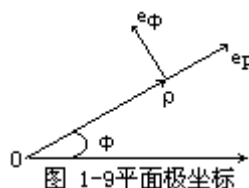


图 1-9 平面极坐标

$$e_\rho \cdot e_\rho = e_\phi \cdot e_\phi = 1, \quad e_\rho \cdot e_\phi = 0$$

平面内任意矢量可以表示为

$$A = A_\rho e_\rho + A_\phi e_\phi$$

而位置矢量是  $r = \rho e_\rho$ , 其分量和端点坐标分别是  $(\rho, 0)$ 、 $(\rho, \phi)$ . 在直角坐标系中分量和端点坐标是一致的, 而在极坐标中两者却不一致, 这一点应该引起注意.

当考虑三维问题时, 我们需要用到柱坐标系 (cylindrical polar coordinates) 或球坐标系 (spherical polar coordinates), 如图

1-10 所示. 它们的基以及任意矢量在其中的表示如下：

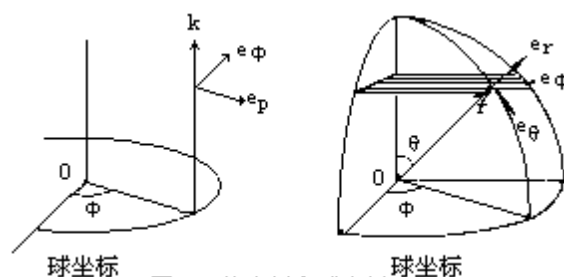


图1-10柱坐标和球坐标

$$(e_r, e_\phi, k)$$

$$A = A_r e_r + A_\phi e_\phi + A_z k$$

$$(e_r, e_\theta, e_\phi)$$

$$A = A_r e_r + A_\theta e_\theta + A_\phi e_\phi$$

在极坐标中进行分量运算时，下面的转换式是很有用的，]

$$e_r = \cos \theta e_k + \sin \theta (\cos \phi e_i + \sin \phi e_j)$$

$$e_\theta = -\sin \theta e_k + \cos \theta (\cos \phi e_i + \sin \phi e_j)$$

$$e_\phi = -\sin \phi e_i + \cos \phi e_j$$

下面我们以平面极坐标为例说明怎样在极坐标系下求导. 如果位置矢量是时间的函数，则

$$r = r(t), \phi = \phi(t)$$

极坐标系基矢的指向也是时间的函数，如果将它们用直角坐标来表示，

$$e_r = \cos \phi i + \sin \phi j$$

$$e_\phi = -\sin \phi i + \cos \phi j$$

求导就比较直截了当. 这两个基矢随时间的变化为

$$\frac{de_r}{dt} = (-\sin \phi i + \cos \phi j) \dot{\phi} = \dot{\phi} e_\phi$$

$$\frac{de_\phi}{dt} = (-\cos \phi i - \sin \phi j) \dot{\phi} = -\dot{\phi} e_r$$

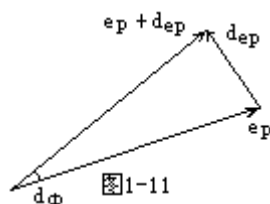


图1-11

以上结果也可用图形方法得到. 对相差时间间隔  $dt$  的两个径向单位矢量  $e_r(t)$ 、 $e_r(t+dt) = e_r(t) + de_r$  作图，如图 1-11 所示，即可得到基矢的变化规律  $de_r = d\phi e_\phi$ . 有了基矢的变化规律，速度和加速度就很容易求得：

$$\dot{r} = \dot{r} e_r + r \dot{\phi} e_\phi$$

$$\ddot{r} = (\ddot{r} - \dot{\phi}^2 r) e_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) e_\phi$$

把这些表达式用于圆周运动，得到：

$$\dot{r} = r \dot{\phi} e_\phi$$

$$\ddot{r} = -r \dot{\phi}^2 e_r + r \ddot{\phi} e_\phi$$

对于匀速圆周运动 (uniform circular motion), 横向加速度项为零.

\* 在极坐标系中, 基矢是不固定的, 我们称它为动参考系. 另外, 还有一种动参考系, 就是其基矢在切向和法向的内禀 (intrinsic) 坐标系. 对于一条曲线, 比如说运动轨迹  $y=y(x)$ , 我们这样来定义切向和法向: 假定曲线可以用参数方程  $x=x(t)$ 、 $y=y(t)$  来描述, 随时间的增加, 点  $P(x, y)$  运动的方向为曲线的正向, 切向基矢就位于切点上曲线的正向, 而法向基矢则位于切点且指向从切向基矢逆时针转过  $90^\circ$  的方向. 在图 1-12 中, 我们画出了两个系统的基.

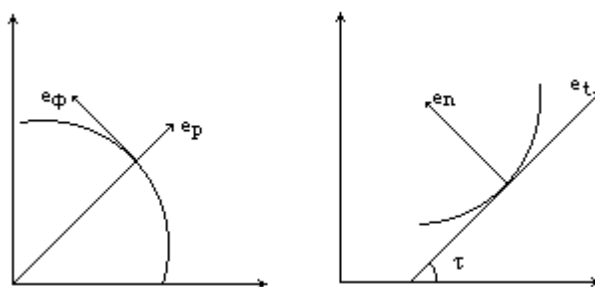


图 1-12

利用内禀坐标系, 可以把速度和加速度表示为:

$$v = \frac{ds}{dt} e_t = v e_t$$

$$a = \frac{d}{dt}(v e_t) = \frac{dv}{dt} e_t + v \frac{de_t}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt} e_t + \frac{v^2}{\rho} e_n$$

式中  $\rho$  是曲率半径 (radius of curvature), 有

$$\frac{dt}{ds} = \frac{l}{v} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

例 1.5 标准型的椭圆曲线方程是

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

试求作椭圆轨道运动物体的径向加速度.

解: 我们已经知道在平面极坐标中  $\mathbf{a} = -\frac{v^2}{r} \mathbf{j}$ , 代入题中  $r$  表达式的即有

$$a_r = -\frac{p}{(1+e)^2} \dot{\theta}^2 = \frac{r_{\min}^2 \dot{\theta}^2}{p} \mathbf{j} = 0$$

$$a_r = -\frac{p}{(1-e)^2} \dot{\theta}^2 = \frac{-r_{\max}^2 \dot{\theta}^2}{p} \mathbf{j} =$$

它们相应于近日点和远日点 (perihelion and aphelion) 或近地点和远地点 (perigee and apogee) 的径向加速度, 与法向加速度只差一个符号.

## 习 题

1.1. 为了方便起见，第十四届国际计量大会推荐了如表 1-6 所示的国际单位的词头 (SI prefixes). 我们熟悉的 km (kilometer)、cm (centimeter) 都是加词头的单位. (a) 皮秒光学、飞秒光学各涉及什么时间量级？(b) 纳米 (nanometer) 材料涉及什么量级的尺度？(c) eV (电子伏) 是能量单位，MeV 和 GeV 分别是多少 eV？

表 1-6 SI 词头

因数	词头名称	符号	因数	词头名称	符号
$10^1$	十 deca	da	$10^{-1}$	分 deci	d
$10^2$	百 hecto	h	$10^{-2}$	厘 centi	c
$10^3$	千 kilo	k	$10^{-3}$	毫 milli	m
$10^6$	兆 mega	M	$10^{-6}$	微 micro	$\mu$
$10^9$	吉 giga	G	$10^{-9}$	纳 nano	n
$10^{12}$	太 tera	T	$10^{-12}$	皮 pico	p
$10^{15}$	拍 peta	P	$10^{-15}$	飞 femto	f
$10^{18}$	艾 exa	E	$10^{-18}$	阿 atto	a

1.2. 哈勃半径给出了可观察宇宙半径的量级，它相当于多少 l.y. (光年)？

1.3. 地球的质量是  $5.98 \times 10^{24}$  kg. 利用阿伏伽德罗常量，我们可以说它近似为 10mol 的 kg 物质. 按这一说法，地球的质量是多少？其精度如何？

1.4. 1a (一年) 近似等于  $\times 10^7$  s, 这一近似的百分误差是多少？

1.5. 质子的半径约  $10^{-15}$  m, 哈勃半径约为  $10^{26}$  m, 在对数标度上，居间的距离是多少？试举出这样大小的一个有物理意义的量.

1.6. 无量纲量可以有单位，试举两个这方面的例子.

1.7. 用三个普适量分别构造具有：(a) 时间量纲的量；(b) 质量量纲的量.

1.8. 利用一球状质量分布的参数 (m, R) 和常数 G 构造一个具有速度量纲的量.

1.9.  $m_e c^2$  是和电子相联系的特征能量，你能否据此定义一个电子“半径”？

1.10. 一质量为 m 的物体悬挂在劲度系数为 k 的弹簧下面，物体受力正比于其位移，比例系数即为 k. 利用量纲分析，求出物体-弹簧系统的振动周期 T 对 k、m 等量的依赖关系 (忽略摩擦) .

1.11. 一个容积为 V 的盒子内盛有 N 个质量为 m 的粒子，粒子无规地在各个方向上以速率 v 运动. 利用量纲分析法，求出这种气体的压强对 N、V、m 和 v 的依赖关系.

$$\left[ \text{答案: } p = \frac{mv^2}{V} f(N) \right]$$



1.12. 低温下固体的比热容与温度有关： $C_V = T^3 + T$ ，其中、  
为常量. 在极低温下，它和温度的什么函数有相同的数量级？

1.13. 展开  $(a^2 - 2ar\cos\theta + r^2)^{-1/2}$  到二级小量  $(r/a)^2$  ( $r \ll a$ ) .

1.14. A、B、C 都是极矢量，三重积  $A \times (B \times C)$  是极矢量还是轴矢量？

1.15. 作图说明：混合积  $A \cdot (B \times C)$  表示平行六面体的体积.

1.16. 当矢量 A、B、C 作镜象变换时，混合积  $A \cdot (B \times C)$  如何变换？设该混合积为非零的量.

1.17. 已知矢量

$$b_1 = 2 \frac{a_2 \times a_3}{a_1 \cdot (a_2 \times a_3)}, \quad b_2 = 2 \frac{a_3 \times a_1}{a_1 \cdot (a_2 \times a_3)},$$

$$b_3 = 2 \frac{a_1 \times a_2}{a_1 \cdot (a_2 \times a_3)}$$

试归纳出标量积  $b_i \cdot a_j$  值满足的规律.

1.18. 求例 1.3 中的 A、.

1.19. 电荷在已知磁场 B 中的运动遵循  $ma = qv \times B$ . 如果加速度 a 可以表示为  $\omega \times v$ ，其中矢量  $\omega$  怎样用已知矢量 B 来表达？

1.20. 证明：2 个线性相关的矢量一定共线，3 个线性相关的矢量一定共面.

1.21. 一人从悉尼去波士顿旅行，两个城市的纬度和经度分别为 (34S, 151E) 和 (42N, 71W). 出发和到达时的位置矢量是什么 (用球坐标表示)？位移矢量又是什么？取地球平均半径  $6.370 \times 10^3 \text{km}$ ，问两城市间的直线距离是多少？

1.22. 在直角坐标系中有矢量

$$A = (2, 1, 1), B = (5, 2, 0), C = (1, 1, 1)$$

求：(a)  $A \cdot B$ ，(b)  $A \times B$ ，(c)  $A \cdot (B \times C)$ ，

(d)  $A \times (B \times C)$ ，(e)  $A \times (A + B \times C)$ ，(f)  $A \cdot (B \times C - A \times B)$

## 参考文献

教科书：

(1) Resnick R, Halliday D. Physics (I). 3rd ed. John Wiley & Sons, 1977; Physics (II). 3rd ed. extended version. 1986

(2) Ford K W. Classical and Modern Physics. Xerox College publishing,

(3) Alonso M, Finn E J. Fundamental University Physics. Addison - Wesley Publishing Company, 1978

(4) Orear J. Physics. Macmillian Publishing Co. Inc., 1979

(5) Feynman R P, Leighton R B, and Sand M. The Feynman Lectures on Physics. Addison - Wesley Publishing Company, 1975

有意思的文献和书：

( 6 ) French A P.Is There a Fifth Fundamental Force ? Physics Teacher , May1986

( 7 ) Spielberg N , Anderson B D.Seven Ideas That Shook the Universe.John Wiley & Sons , Inc. , 1985

( 8 ) Einstein A.How I Created the Theory of Relativity.Translated by Yoshimasa Ono A.Physics Today , Aug.1982

( 9 ) 赵凯华.定性半定量物理学.北京：高等教育出版社，1991

关于对称破缺的精彩评论：

( 10 )冯端 ,金国钧.凝聚态物理新论.上海：上海科学技术出版社，1992.  
§ 1.3

西方物理学家对东方思想的评论：

( 11 )Capra F.The Tao of Physics.Berkeley :Shambhala Publications , 1975

( 12 ) Zukav G. The Dancing Wu Li Masters : An Overview of the NewPhysics. New York : Morrow , 1979

极好的科普读物：

( 13 ) Gamow G. Mr. Tompkins in Paperback. Cambridge : Cambridge University Press , 1967

( 中译本：伽莫夫.物理世界奇遇记.吴伯泽译.北京：科学出版

## 第一部分

### 力 学

所有的物质，大至天体、航天飞机，小至分子、原子、基本粒子都在不断地运动中。力学是物理学中研究物体机械运动的学科分支，讨论机械运动的描述、成因和规律。所谓机械运动，指的是物体相对于其它物体（参考物体）的位置（距离和方向）的变化、指向的变化以及物体各部分之间的相对运动（如形变）。

运动总是发生在一定的时间和空间中。对时空观的研究也就成了力学的一个课题。

在运动学中，我们主要研究运动的描述。

在动力学中，我们主要研究物体间的相互作用以及它们对相对运动的影响。力学中涉及的相互作用主要是引力、电磁力以及各种电磁起源的力：摩擦力、黏性力、表面张力和分子力。

力学中所用的概念、量和方法在物理学的其它分支或其它学科中常常被直接运用或作为参考。这主要是因为机械运动是最基本的运动，另外也是由于历史和认识论的原因。

1687年，牛顿（Isaac Newton，1642—1727）发表了《自然哲学数学原理》（*Principia Mathematica Philosophia Naturalis*）一书。这是一个重要的里程碑，自此开始了牛顿力学的时代。牛顿力学在行星运动以及其它很多方面取得了成功，预言海王星（Neptune）的存在可以说是其辉煌的顶点。但是也正是在天文上，它遇到了本质的困难：水星近日点进动（the precession of the Mercury's perihelion）周期的计算无法与观测值吻合。

1905年爱因斯坦发表了狭义相对论（Special Theory of Relativity），把力学的研究范围扩展到高能、高速情形。他的时空观也和牛顿不同。1916年爱因斯坦发表了广义相对论。该理论包括了加速参照系。作为引力理论，广义相对论具有普适性，牛顿的万有引力理论只是其弱引力极限。

20年代发展起来的量子力学是研究微观客体运动规律的科学。相对论和量子力学被认为是现代物理学的核心，而牛顿力学也就被称为经典力学。

通常意义上微观是指原子、基本粒子尺度，而宏观是指我们的感官能直接感知的、包含了极多的微观粒子的体系。大数粒子组成的体系中个别粒子的行为和体系的整体行为分别称之为微观行为与宏观行为，也许这才是微观和宏观的本义。力学（经典的或量子的）研究的是少体问题。它研究一个（或几个）物体相对于其它物体的运动及其成因——相互作用。当这个（或这些）粒子处于大数粒子体系中时，对它们的力学研究就是对系统“微观行为”的研究。这是为了强调相对于整体行为的区别。对于单纯的少体问题，当然没有必要冠以“微观”字样。例如，我们居住的地球是宏观客体，这是说它由大量下一层次的粒子组成。当我们对地球的轨道运动进行研究时，并且不想讨论这一运动与大量这类客体组成的大体系（比如说银河系）整体行为的联系与区别，则不应该说是微观研究。热物理及热力学处理多体系统的整体行为，如温度、压强、热容等所谓的宏观量及其变化规律，这种多体可多达  $10^{23}$ 。对于这种系统，即使有超级计算机算出所有个别粒子的运动，其“宏观行为”仍然不知道。统计物理或气体动理学理论（Kinetic theory of gas）赋予宏观量以微观解释，就在宏观和微观之间架起了桥梁。

牛顿力学是“决定论”的理论.知道了相互作用——力的规律和某一时刻的位置及速度,则可以推算出以后运动的所有情况.科学的发展促使人们的观念发生变化、理论得以修正或被赋予新的含义.现在,我们知道决定论不是物质世界的唯一描述方式,也许不是最基本的方式.至少我们知道有这样几种非决定论的性质存在:

- 微观客体的量子力学不确定关系;
- 多粒子系统中个别粒子的统计不确定性;
- 非线性动力系统中的不可预言性.

## 第二章 运动学

### § 2.1 物体的运动和运动的物体

当一物体相对于另一物体的位置、指向发生变化时,我们就说该物体在运动.我们把研究的对象叫做物体或系统,而把作为参照的对象叫做环境或参考系统.物体的一部分相对于另一部分的位置、指向所发生的变化也是运动.

当一物体仅发生位置变化时,我们说该物体在作平动.平动时物体的大小、形状、结构、表面纹理等等都无关紧要,这时物体可以用具有同样质量的点来代替.这样一种抽象出来的点,称为质点或粒子 (particle).研究多个物体的运动趋势时,可以把它们看作质点组.分布性的物质叫做连续统 (continuum) 或称流体 (fluid).

当物体指向发生变化时,就是在作转动.对于转动物体,必须考虑其几何形状等因素,但可以不考虑其各部分间的相对运动.作为一种模型,我们称这种不发生相对运动的物体为刚体.此外,我们有弹性体或塑性体,它们可以作振动或产生形变.

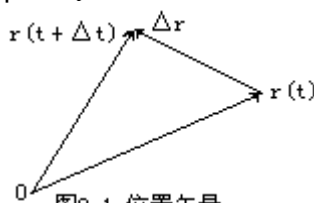
在实际问题中,运动是复杂的,平动、转动、振动、变形等都可能同时出现.在这种情况下,一般需要作简化或近似处理.例如,考虑地球绕太阳公转,地球的平均轨道半径是  $1.5 \times 10^{11} \text{m}$ ,地球的大小和自转运动可忽略不计.在这种情况下,完全可以把地球作质点处理.至于地球的自转,其特征长度是地球的平均半径,约  $6.4 \times 10^6 \text{m}$ .这时可以把地球考虑为刚性球或椭球.对于更小尺度的运动如地壳运动、地震和地震波的传播,这时应将地球考虑作为可产生形变的物体.

运动是相对的,描述运动必须有参考系.对运动作定量描述时,还需要建立坐标系.选取恰当的坐标系往往能使问题得到简化.时间与运动密切相关,按照现代观点,计时还与参考系状态有关.在本书适当的地方,将会对空间和时间作统一处理.

## § 2.2 平动

在单纯的平动问题中,物体被抽象为质点.这样做可以集中研究平动的普遍规律.

首先,我们选取参考点  $O$ .从参考点作一矢量  $r$  指向质点所在位置.这一矢量叫做位置矢量 (position vector),如图 2-1 所示.下面我们研究它随时间的变化规律.设在  $t$  和  $t + \Delta t$  时刻位置矢量分别为  $r(t)$ 、 $r(t + \Delta t)$ ,它们的差  $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$  称为位移 (displacement).质点实际经过的路程用  $s$  表示.我们可以定义在时间间隔  $\Delta t$  内的平均速度 (velocity) 和平均速率 (speed) 为



$$\bar{v} = \frac{r}{t} \quad (2.2.1)$$

$$\bar{v} = \frac{s}{t} \quad (2.2.2)$$

时间间隔  $\Delta t$  取得越小,它们的值反映运动情况越精细.瞬时速度和瞬时速率定义为

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r}{\Delta t} \quad (2.2.3)$$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s}{\Delta t} \quad (2.2.4)$$

利用切向单位矢量,我们可以找到速度和速率之间的关系:通常,在平均速度和平均速率之间不存在这种关系.

速度的大小和方向都可以随时间变化,我们用加速度来表示这种变化.在  $t$  时刻的瞬时加速度定义为

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (2.2.6)$$

瞬时速度和瞬时加速度的定义使得我们可以处理各种复杂的运动问题,而不再局限于匀速、匀加速问题,也不需要求助于平均速度、平均加速度等概念.

由 (2.2.3) 式和 (2.2.6) 式,通过积分可以分别得到位移和速度:

$$r = r_0 + \int v dt \quad (2.2.7)$$

$$v = v_0 + \int a dt \quad (2.2.8)$$

(2.2.5) 式至 (2.2.8) 式都是矢量关系式,在解具体问题时,常常需要采用它们的分量形式.对于直线运动,我们只需要说明坐标原点以及坐标轴的正方向,然后将位移、速度、加速度等都表示成分量形式.

例 2.1 质点 A 从某高度自由下落的同时在其下方上抛一质点 B,两者在空中相碰,见图 2-2.设两者运动开始的瞬间  $t = 0$ ,求两者相碰时的高度.

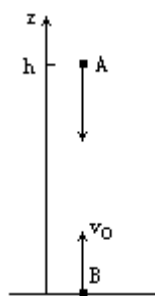


图 2-2

分析：A 和 B 都经受向下的常加速度，它们的高度随时间的变化关系可由 (2.2.7) 式和 (2.2.8) 式求得. 当两者的高度相等时就发生碰撞. 这里用高度(位置矢量)而不是路程来表达位置. 初始高度和上抛速度是必要的参数，应先加以设定.

解：运动中两质点的速度分别为

$$v_A = gt$$

$$v_B = v_0 + gt$$

设 z 轴垂直向上并以地面为原点，则它们的高度分别为

$$h_A = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$h_B = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

其中设定了初始高度 h 和速度  $v_0$ . (解题者有权设定必要的条件)

相碰时  $h_A = h_B$ ，由此得  $t = h/v_0$ . 把它代入上面的方程之一，就得到两质点碰撞时的高度

$$h_c = h \left[ 1 - \frac{gh}{2v_0^2} \right]$$

讨论：只有当给定的 (或你设定的)  $v_0$ 、h 满足下列条件，碰撞才可能发生：

$$v_0^2 \geq \frac{1}{2}gh$$

假如这一条件不满足，则会是什么样的物理情况呢？试考虑碰撞时间与质点 B 到达最高点的返回时间的几种不同关系 (由设定的  $v_0$ 、h 决定)，以及相应的碰撞高度和返回高度的关系.

例 2.2 已知质点运动的速度和加速度的关系  $a = -kv^2$ ，求速度随距离的变化关系.

分析：加速速度为负，质点受阻力而作减速运动. 流体中黏性力 (viscosity) 的大小就是依赖于速度的，因此加速度依赖于速度：正比于速度、速度的平方或介于两者之间. 根据本例所给定的比例关系，加速度随速度减小而减小，这意味着速度开始衰减较快，然后减小较慢，至于速度与距离的关系，也能想到大致如此.

解：取速度方向为 z 方向，则

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dt} = v \frac{dv}{dz}$$

代入已知关系，则有

$$\frac{dv}{dz} = -kv$$

或

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -k \int_{z_0}^z dz$$

积分后得

$$v = v_0 \exp[-k(z - z_0)]$$

讨论：速度按指数衰减，衰减常数就是阻尼系数  $k$ ，量纲为  $L^{-1}$ 。

实验表明：在二维运动中物体某一方向的运动独立于其它方向的运动，这一事实称为运动的独立性。早在 17 世纪，伽利略 (Galileo Galilei, 1564—1642) 就已经知道了运动的合成和分解规律。

例 2.3 当上抛的飞碟 (clay - Pigeon) 到达最大高度处时，射手瞄准并射击，问能否击中目标呢？

分析：假定运动发生在一竖直平面内，飞碟和子弹都有一恒定加速度  $g$ 。利用位置矢量描述飞碟和子弹。

解：取枪口 (muzzle) 作为参考点  $O$ ，飞碟的初始位置矢量为  $r_0$ ，子弹的初始速度为  $v_0$ ，如图 2-3 所示。则时刻  $t$  飞碟和子弹的位置矢量分别为

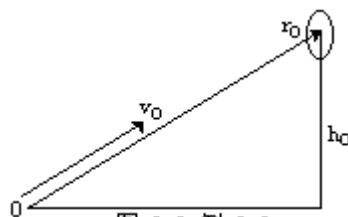


图 2-3 例 2.3

$$r_c = r_0 + \frac{1}{2}gt^2$$

$$r_b = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

对碰的条件是  $r_c = r_b$ ，即

$$r_0 = v_0 t$$

这说明此时两矢量应是共线的 (瞄准)。

讨论：考虑竖直分量，同前例，我们可求得必要条件。把初始位置矢量写作

$$r_0 = d\mathbf{i} + h_0\mathbf{k}$$

初始速度大小必须满足

$$v_0^2 \geq \frac{1}{2}gh \left( 1 + \frac{d^2}{h^2} \right)$$

即离飞碟越远初始速度应越大，这样才能击中目标。当  $d$  趋向于零时，就回到了例 2.1 的结论。

圆周运动是最简单的二维运动之一，在极坐标中， (而不是 )

$$= \mathbf{e}_r + \dot{\mathbf{e}}_\theta + \mathbf{j} \mathbf{e}_\theta \quad (2.2.9)$$



现在  $\dot{\theta} = 0$ ，速度在横向. 定义角速度矢量  $\boldsymbol{\omega}$  的大小为

$$\omega = \dot{\phi}$$

其方向使  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \boldsymbol{\omega}$  三者满足右手螺旋关系.

这样，圆周运动情况下速度可以表示为

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.2.10)$$

如果我们选  $O$  正下方一点  $O'$  为坐标原点，新的位置矢量为  $\mathbf{r}'$ ，则  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OO'} + \mathbf{r}'$ ，如图 2-4 所示，我们仍有

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

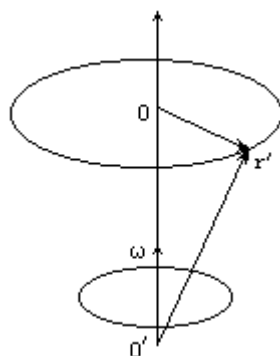


图 2-4 角速度

不过对于在平面内的运动，显然选择平面内的点作参考点较方便. 对于匀速圆周运动， $\boldsymbol{\omega} = \text{常矢量}$ . 这样

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ &= \frac{2\pi}{T} \mathbf{r} = 2\pi f \mathbf{r} \end{aligned}$$

其中  $T$  和  $f$  分别为周期和频率.

匀速圆周运动中的加速度可通过下式求得：

$$\ddot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (2.2.11)$$

请把它与 § 1.5 中的一般表达式作比较.

## § 2.3 转动

当我们研究转动的时候，必须考虑物体的大小、形状、表面纹理和结构等等。不考虑物体的形变则可以称之为刚体。质点的运动涉及它对参考点距离和方向的变化，而刚体的运动则还涉及指向的变化。

首先我们来解释方向和指向 (direction and orientation) 这两个概念之间的差别。在图 2-5 的左图中，物体在作平动，附在物体上的箭头是始终平行的。在右图中，除方位角变化 (物体作平动) 外，附在物体上的箭头不再保持平行。我们把这种指向的变化称为物体的转动。这种变化，可以通过角度的变化——角位移 (angular displacement) 来表达。

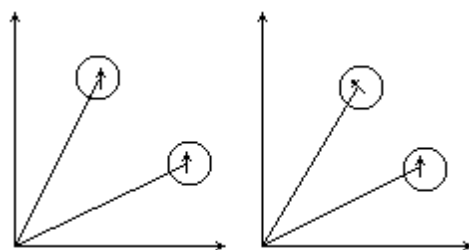


图 2-5 方向与指向

在 § 1.4 中，曾提到有限角位移不是矢量而无限小角位移才是矢量。这样我们有角速度矢量：

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (2.3.1)$$

其方向与无限小旋转轴重合，而大小等于瞬时旋转速率。

角速度作为矢量，遵循矢量的运算规则。在摇头电扇中，可以将角速度分解为沿两个旋转轴的分量。（这种分解当然是很自然的。）在陀螺仪 (gyroscope) 中也有类似的情况 (如图 2-6 所示)。所有的都是可加的。

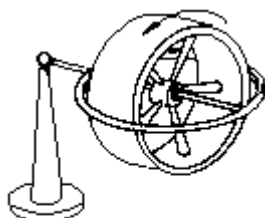


图 2-6 陀螺仪示意图

在大多数情形下刚体既有平动同时又有转动。如图 2-7，我们以回旋镖 (boomerang) 的平面运动来解释这一点。在时间  $t$  内，回旋镖从位置  $AB$  运动到  $A_2B_1$ 。这一运动可以看作同时完成的一个平动和一个转动的合成。例如：

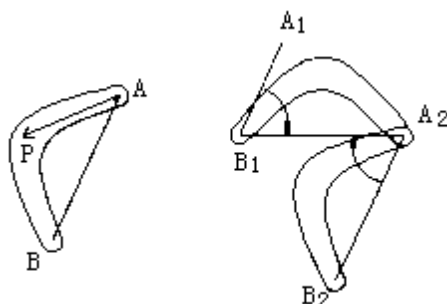


图 2-7 回旋镖的平动和转动

从  $B$  到  $B_1$  (保持  $A_1B_1 \parallel AB$ ) 的平动和  $A_1B_1$  绕  $B_1$  顺时针转动角度

$A_1B_1A_2$ ;

或

从  $A$  到  $A_2$  (保持  $A_2B_2 \parallel AB$ ) 的平动和  $A_2B_2$  绕  $A_2$  顺时针转动角度  $B_2A_2B_1$ .

值得注意的是在两种看法中平动速率是不同的 (因为  $BB_1 \neq AA_2$ ), 而角速度 (方向和大小) 是相同的. 对于不同的参考点,  $r$  可以不同, 但  $\omega$  都相同, 这意味着角速度是一样的. 现在我们给出一个一般的证明. 考虑回旋镖上任意点  $P$ , 以  $A$  点作参考, 则它的位置矢量  $r_P$  可以用  $A$  点的位置矢量  $r_A$  和相对位置矢量  $r_{AP}$  来表示, 于是有

$$v_P = \frac{d}{dt} r_A + \frac{d}{dt} r_{AP} = v_A + \omega_A \times r_{AP}$$

同理

$$v_P = \frac{d}{dt} r_B + \frac{d}{dt} r_{BP} = v_B + \omega_B \times r_{BP}$$

注意到

$$\begin{aligned} r_{BP} &= r_{BA} + r_{AP} \\ v_B + \omega_B \times r_{BA} &= v_A \end{aligned}$$

以及  $P$  为任意点, 可以推出

$$\omega_A = \omega_B$$

这里将主要讨论定轴转动, 因为这是转动的基本单元. 一个一般的转动可以由按一定次序绕三个轴的转动构成. 在上例中, 旋转轴随参考点平动, 保持相互平行 (垂直于纸面), 平动和转动可以分别研究. 以后我们将用 “质心” (center of mass) 作参考点, 它的平动代表了整个物体的运动趋势. 例 2.4 求地球绕地轴旋转的角速度.

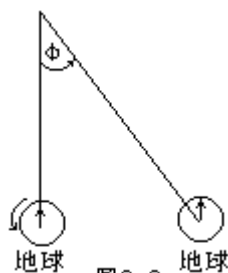
解: 平均太阳日是  $T = 8.640 \times 10^4 \text{ s}$ . 对应地球的角速度为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.272 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

而恒星日 (sidereal day) 为  $T = 8.616 \times 10^4 \text{ s}$ , 对应地球的角速度是

$$\omega = 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

两个 “周期” 相比约差 240 s, 哪一个正确呢? 从图 2-8 中可以看出后者正确, 因为当观察点再次面向太阳时, 他已经转过了  $2\pi + \phi$ . 据此以及  $\phi$  值 ( $\sim 2\pi/365$ , 为什么?), 可以算得  $T = 2\pi / \omega = 239 \text{ s}$ . 与所给数据是一致的.



与平动加速度相似的量是角加速度

$$= \frac{d}{dt} \quad (2.3.2)$$

对 (2.3.1)、(2.3.2) 式积分有

$$= \theta_0 + \int \omega dt \quad (2.3.3)$$

$$= \theta_0 + \omega t \quad (2.3.4)$$

由于有限角位移不是矢量, 在 (2.3.3) 式中用了角速度的大小, 这样的表示只对定轴转动才有实际的意义.

在相等时间里重复进行的运动叫做周期性运动 (periodic motion). 数学上可以将周期性运动表示为

$$A(t+T) = A(t) \quad (2.4.1)$$

其中  $T$  称作周期 (period),  $1/T=f$  称为频率 (frequency). 大家熟悉的匀速圆周运动就是一个例子, 它可由下式来描述:

$$\begin{cases} x = R \cos \omega t \\ v = R \sin \omega t \end{cases} \quad (2.4.2)$$

其周期是  $T = 2\pi / \omega$ . 其它例子有, 行星的轨道运动、血液循环、生态循环 (ecological cycle) 和经济大萧条 (economic depression) 等等. 某些周期运动可能没有很严格的周期或数学表示. 如果周期运动在空间上是来回往复的, 我们称之为振动 (oscillatory or vibratory motion). 振动可能包含着平动或转动, 或两者都有, 不过振动有其特有的时空特征: 时间上的周期性和空间上的重复性. 我们可以列举很多可以进行振动的系统: 弹簧下挂一重物, 提琴或钢琴的弦, 单摆, 鼓膜, 分子中或晶格中的原子, 等离子体 (plasma), 电子电路, 声带和耳膜等等. 振动可以是很复杂的, 包括不止一个频率. 如果振动可以用单一频率的谐函数来描述, 我们称之为简谐振动 (simple harmonic oscillation) 或简谐运动 (simple harmonic motion). 简谐振动的最简单的表示式是

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \omega t \\ x &= -x_0 \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

一般的表示有下列 3 种:

$$\begin{aligned} x &= A \sin \omega t + B \cos \omega t \\ x &= A \cos (\omega t + \phi) \quad (2.4.4) \\ x &= A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

现在我们采用第二种形式来作讨论. 系数  $A$  叫做振幅 (amplitude), 括号中的量  $\omega t + \phi$  叫做相位 (phase),  $\phi$  是初相, 而  $\omega$  称作角频率 (circular frequency). 根据三角函数的周期性及周期的含义, 时间上一个周期相当于  $2\pi$  的相位差:  $(T+\phi) - (\phi) = 2\pi$ , 所以  $T = 2\pi / \omega$ .

如图 2-9 所示, 点  $Q$  作匀速圆周运动, 可以用位置矢量  $R$  来描述. 点  $P$  作简谐振动, 其位置矢量可以认为是  $R$  的  $x$  分量. 采用这一图象, 我们就有表 2-1 所列的对应关系. 在这种对应的意义上看,  $\phi < 0$  的振动对应于顺时针的匀速圆周运动.

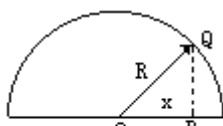


图 2-9 简谐振动与  
匀速圆周运动

表 2-1

	简谐振动 ( P )	匀速圆周运动 ( Q )
A	振幅	半径
t+	相位	角度
	初相	初始角
	角频率	角速度
f	频率	公转速率
T	周期	周期
x	位移	沿直径的投影

两个一维同频率的简谐振动，即

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos ( t + j_1 ) \\ x_2 = A_2 \cos ( t + j_2 ) \end{cases} \quad (2.4.5)$$

可按三角函数关系进行叠加；也可如图 2—10 所示，先将  $x_1, x_2$  看作是矢量的投影，再将矢量投影和叠加交换次序，按下列方式进行运算：

$x_1 + x_2 = r_1 \cdot i + r_2 \cdot i = (r_1 + r_2) \cdot i = A \cos ( t + )$  利用图 2 - 10 中标出的各矢量的振幅和初相可算得振幅为

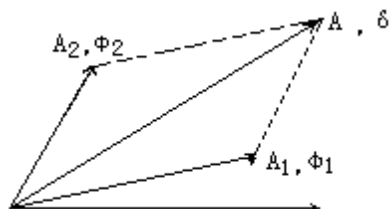


图 2-10 振动叠加的矢量表示

$$A_2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos (j_2 - j_1)$$

初相位 的正切值为

$$\tan = \frac{A_1 \sin j_1 + A_2 \sin j_2}{A_1 \cos j_1 + A_2 \cos j_2}$$

当  $\phi_1 = \phi_2$  时，振动是同相 ( inphase ) 的，两矢量共线. 这时合矢量的振幅为  $A = A_1 + A_2$ ，我们就说振动是完全相长的 ( constructive ) .

当  $\phi_1 - \phi_2 =$  时， $A = |A_1 - A_2|$ ，我们称这两个振动是反相的 ( inopposition ) 或者相消的 ( destructive ) . 相应的矢量和位移图见图 2 - 11.

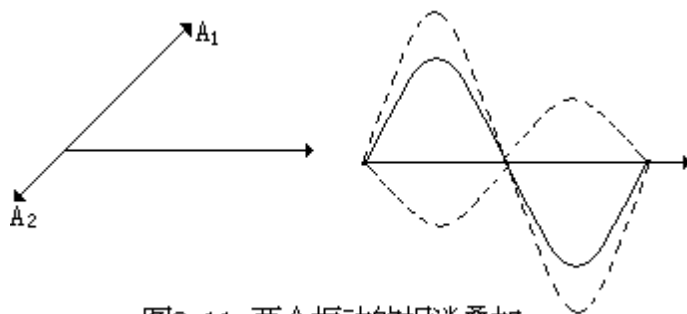


图2-11 两个振动的相消叠加

当  $j_1 - j_2 = \pi/2$  时,  $A = |A_1^2 - A_2^2|$ , 我们称两个振动具有正交相差 (quadrature) .

对于两个不同频率的一维简谐振动, 我们可用同样的方法进行合成. 由于相差不再保持常值, 为简单起见令它们的初相位均为零, 有

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t) \end{cases} \quad (2.4.6)$$

振幅的瞬时值为

$$A = \left\{ A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t] \right\}^{1/2}$$

$|A_1 - A_2| \leq A \leq A_1 + A_2$

当  $A_1 = A_2 = A$  时,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= A (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \\ &= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

振幅按以下调制因子 (modulating factor) 变化:

$$\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \quad (2.4.8)$$

振幅的这种起伏变化称作拍 (beat), 其图形如图 2-12 所示. 对  $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 、 $A_1$ 、 $A_2$  的一般值, 合成波形可用计算机来描绘.

另外, 还有一种表示复杂振动的方法: 在频率-振幅 ( $f, A$ ) 坐标平面上依次在  $f_i$  处作长度为  $A_i$  的垂线以构成“频谱图” (参见附录 D). 该方法的优点是振动的“成分”一目了然.



图 2-12 振幅调制

两个相互垂直的简谐振动的叠加可以直接通过位置矢量的合成而得到. 利用示波器 (oscilloscope) 中的电子束也很容易完成这种叠加. 当在垂直和水平输入端分别输入两个待叠加的信号时, 荧光屏上光斑的轨迹就是这种叠加的结果, 称作李萨如曲线 (Lissajous curves) 或李萨如图 (Lissajous figures) .

## § 2.5 相平面和相空间

为了描述运动，我们需要说明位移和速度，或者角位移和角速度。例如，我们可以作图使得变化规律

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \dot{r} = \dot{r}(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} = \\ = \end{cases} \begin{cases} (t) \\ (t) \end{cases}$$

更加形象。如果能消去位移方程  $x = x(t)$ 、 $y = y(t)$  中的时间变量，我们就得到轨迹方程  $y = y(x)$ 。例如二维的圆周运动的轨迹为圆。一维运动的轨迹是什么？

以上所说的描述运动的方式是自然、简单的，长期以来人们相信这样的描述方式提供了运动的所有信息。可是，现在我们知道未必如此。比如，为什么我们不能作位移与速度的关系图呢？当然可以！问题是这样的图是否包含了新的信息？(2.4.3) 式提

供了一个最简单的例子，一对  $(\theta, \dot{\theta})$  数值决定了一个运动状态。如果我们逐点研究就可以得到一系列的数据，这些点在

- 所构成的平面中，描绘出了一个椭圆

如图 2-13 中的曲线 1。它的面积正比于  $\frac{2}{0}$ 。

对于理想情形，不同的振幅和频率将描绘出不同的椭圆。当有阻尼存在时，曲线是什么形状呢？注意这些图形不是实空间中的运动轨迹，我们称之为状态空间的轨迹或相空间 (phasespace) 的轨迹——相图。

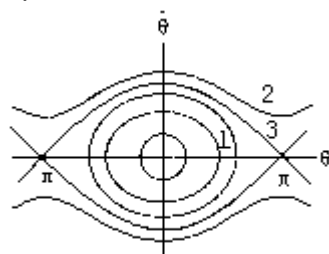


图 2-13 相平面中的轨迹

下面我们来研究一下单摆 (见 § 3.2)。小幅度摆动时可用 (2.4.3) 式

描写。相图  $(\theta, \dot{\theta})$  是椭圆。如果用轻杆来

代替弦时，小幅度运动将是相同的。但是，在开始时如果给以足够的速度，它就可以作转动，这种情况下，相图将如图 2-13 中曲线 2 所示。当开始时的冲击恰好使得小球到达最高点时速度为零，相图会如何呢？首先可以确定在  $\pm$

处速度为零，即曲线和横轴有交点。其次可以想象这种状态处在摆动和转动之间，其相图为曲线 3。从这三种曲线可以清楚地看到系统总体运动的三种不同类型，而不是个别时刻的状态。因此，我们可以确信相图提供了更多的信息，或者说完整的运动学应该包括相图在内。图 2-14 和图 2-15 表示出相图中的几个典型成分：中心 (center)、节点 (node)、鞍点 (saddle) 和螺线 (spiral)。

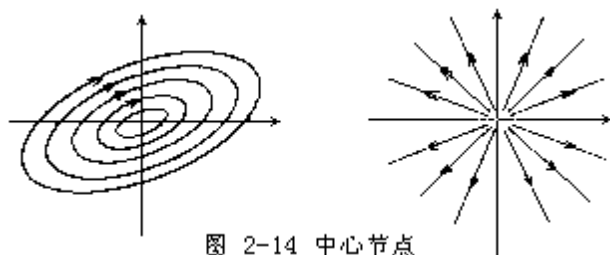


图 2-14 中心节点

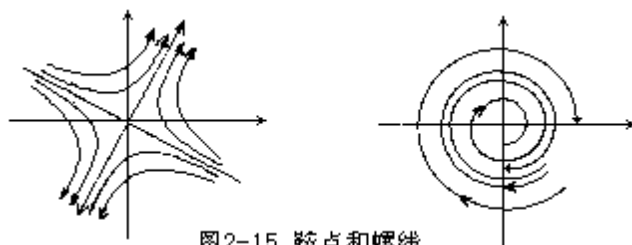


图2-15 鞍点和螺线

实际上相图对于研究混沌 (chaos) 有非常基本的意义. 如果系统的相图是分形结构 (fractal) (见 § 28.2), 它就处在混沌状态.



## § 2.6 伽利略变换

运动总是相对于某个参考系而言的.为了作定量描述,我们必须建立坐标系.常常会遇到这样的情况:描述运动容易的坐标系却不是我们要的坐标系.这样就需要坐标系之间进行变换.例如,若我们知道船在河中相对于水流的速度,却希望知道船相对于河岸的速度,就是这样的情形.

考虑以速度  $u$  相对平动的两个坐标系  $S$  和  $S'$ , 在  $t=0$  时刻,  $S$  和  $S'$  的原点重合.这样的配置称为标准坐标位形, 见图 2-16.在此后的任意时刻  $t$ , 质点  $A$  在两个坐标系中的位置矢量之间的关系是

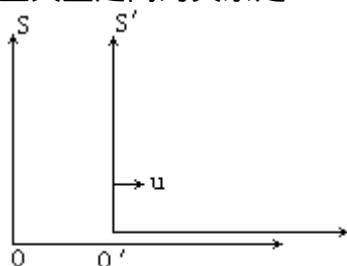


图2-16 标准坐标位形

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t$$

对时间求导可以得到速度之间的关系:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \quad (2.6.1)$$

这一变换叫做伽利略变换 (Galilean transformation). 需要强调的是这个公式并不意味着式中 3 个速度必须在同一方向. 一般情况下, 3 个速度矢量构成一个三角形.

我们限于讨论  $u$  是常矢量的情形. 这时位置矢量和加速度分别为

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}' + \vec{u}t \\ \vec{a} &= \vec{a}' \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

研究人们在雨中行走的问题时, 就会遇到坐标系的变换问题. 假定雨是垂直下落的, 下落速度为  $\vec{v} = -v\vec{k}$ , 而人行走速度为  $\vec{u}$ . 取行人为  $S'$  系, 则在行人看来, 雨滴的速度为

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

故有

$$\begin{aligned} v^2 &= (\vec{v}' + \vec{u}) \cdot (\vec{v}' + \vec{u}) = v'^2 + u^2 \\ \tan \theta &= \frac{u}{v} \end{aligned}$$

伽利略变换在通常的速度下都是有效的. 在高速, 比如速度接近光速时, 它被证明是有问题的. 尽管如此, 我们仍可试着用它来处理与光有关的问题.

\* 首先, 用伽利略变换来处理光行差 (aberration of light) 问题.

假定星光来自天顶 (比如来自  $\alpha$  Draconis). 但是望远镜垂直向上并不能观察到, 原因是地球在轨道平面运动时, 其切向速度大小为  $u = 29770\text{m/s}$ , 则望远镜必须转过一个角度才能观察到这颗星. 角度为

$$\theta = \arctan \frac{u}{c} \sim 10^{-4}$$

这一结果大致正确, 以后我们将讨论其中存在的问题.

其次，用伽利略变换来讨论一个想象试验（gedenkan experiment）。

设想我们离开距离  $d$  观察开炮。 $t = 0$  时点火，  
 $t_f = d/c$  时见到这一动作。设炮弹出膛的时间是  $t_{out}$ ，  
则相应的观察到的时间是  $t_{out}$ 。毫无疑问，  
我们先看到点火动作后才看到炮弹出膛。这意味着必须有

$$t_f = \frac{d}{c} < t_{out} = t_{out} + \frac{d}{c + v}$$

也就是

$$t_{out} > d \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{c + v} \right)$$

当  $d$  足够大时，不等式可能遭到破坏，也就是说在足够远的地方可以看到因果颠倒。因此，速度叠加公式对光不适用。

## \* § 2.7 科里奥利加速度

两个参考系可以是相互旋转的，例如高速离心机开动时试管参考系和桌面参考系就是相对旋转的。试管中的颗粒沿试管作直线运动，而相对于桌面却是螺线运动，因此我们也需要旋转坐标系之间的变换。

考虑相对桌面  $S$  作转动的圆盘  $S'$ 。如图 2-17 所示。设转动角速度  $\omega$  为常矢量，指向垂直于盘面的  $z$  轴正方向，转动轴位于圆盘中心  $O$ ，桌面原点  $O$  与之重合。假定矢量  $A$  固定在  $S'$  上。注意到速度表示 (2.2.10) 式， $dt$  时间内  $A$  的增量是

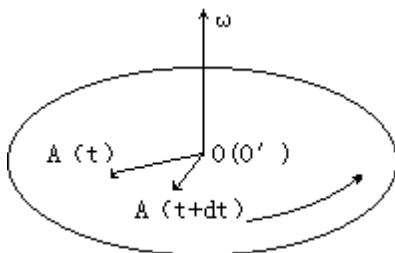


图 2-17 平面旋转坐标系

$$dA = A(t + dt) - A(t) = (\omega \times A) dt$$

如果矢量同时相对于  $S$  有一个增量  $dA$ ，则相对于  $S$  的增量将是

$$dA = (\omega \times A) dt + dA \quad \text{于是我们有一般关系式：}$$

$$\left( \frac{dA}{dt} \right)_s = \left( \frac{dA}{dt} \right)_{s'} + \omega \times A \quad (2.7.1)$$

或者写作符号等式：

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} + \omega \times r \quad (2.7.2)$$

显然，将位置矢量代入上式可得到速度的变换关系：

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} + \omega \times r \quad (2.7.3)$$

式中带撇的导数仅表示是在  $S'$  系中进行而已，而并不表示时间上有什么不同。这对于其它矢量也适用。比如，任意矢量可以用两个起自原点的矢量来代替。以上做法完全可以推广到 3 维情形。符号等式 (2.7.2) 是线性的（满足分配律）。对于速度矢量，我们有

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{dt} + \omega \times r \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} + \omega \times r \right) + \omega \times \left( \frac{dr}{dt} + \omega \times r \right) \\ &= \frac{d^2 r}{dt^2} + 2 \omega \times \frac{dr}{dt} + (\omega \times r) \quad (2.7.4) \end{aligned}$$

可见在  $S$  系中的观察者看来，加速度由 3 部分组成。第一项是  $S'$  系中的加速度。当质点在  $S'$  系中静止时，第三项的意义就可以明显看出：

$$\omega \times (\omega \times r) = -(\omega^2 r) \quad (2.7.5)$$

即向心加速度。第二项称为科里奥利加速度 (Coriolis acceleration)，

这一项只有当质点在  $S$  系中运动时才有非零的值.\* (2.7.4) 式与平面极坐标中的加速度表示式 (§ 1.5) 是否一致? 如果角速度不是常矢量, (2.7.3) 式和 (2.7.4) 式是否正确? 如不正确, 应该怎样修改?

下面我们讨论地球转动的影响. 自转着的地球取作  $S$  系, 一个“不转的”地球 (平动框架) 为  $S$  系. 在地球参考系中, 质点受到的重力加速度为

$$\mathbf{g} = g_0 - 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (2.7.6)$$

我们知道

$$\begin{aligned} g_0 &= 9.8 \text{ m/s}^2 \\ \omega &= 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad/s} \end{aligned}$$

相比之下, 惯性离心 (centrifugal) 项就小得多,

$$|\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})| = \omega^2 R = 3.39 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2 < g_0$$

这样将它合并到有效重力加速度中去, (2.7.6) 式就可以写成

$$\mathbf{mg} = m\mathbf{g}_{\text{eff}} - 2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (2.7.7)$$

最后一项即为运动物体上的科里奥利“力”. 需要注意的是, 这一项完全是由坐标系变换而来的, 或者说是由于旋转坐标系中的观察者的看法与平动坐标系中的不一样而产生的. 通常我们可以说“科里奥利力”是运动学效应.\* 科里奥利力与纬度有关吗? 南半球和北半球情况有区别吗?

根据 (2.7.7) 式可以对落体的偏向作出判断. 粗略地说, 落体的速度 (零级近似) 在  $-\mathbf{r}$  方向. 对于北半球, 可以判定速度将偏向东方, 也就是在  $-2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \sim k \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\phi$  方向. 所谓落体偏东就是指的这件事. 如果从 (2.7.6) 式考虑, 结果会如何呢?

\* 讨论: 上抛物体会落在抛出点吗?

地表的运动也一样受到科里奥利力的影响. 从图 2-18 可以看出旋转导致运动偏向前进的右手方向. 我们可以将速度分解以求得定量的结果:

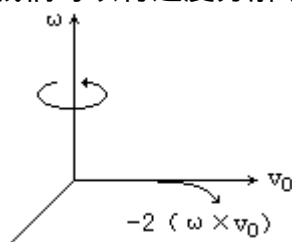


图 2-18

$$\begin{aligned} -2 \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v} \mathbf{e}_\phi + v_\phi \mathbf{e}_\phi) &= 2 (\mathbf{v} \mathbf{e}_r \times \mathbf{k} + v_\phi \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{k}) \\ &= 2 (-v \cos \theta \mathbf{e}_\phi + v_\phi \mathbf{e}_r) \\ &= 2 \cos \theta (-v \mathbf{e}_\phi + v_\phi \mathbf{e}_r) \\ &\quad + 2 v_\phi \sin \theta \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

式中径向项由于  $g$  项的存在可以忽略. 前两项精确地显示了加速度指向运动方向的右手边.

有关科里奥利力的典型例子有大气中的气旋 (whirling). 在天气预报节目中, 你也许见到过卫星云图中逆时针的气旋. 在南半球这种气旋是顺时针的. 傅科 (Foucault, 1819-1868) 摆是展示地球旋转的极好例子. 1850 年, 傅科在巴黎的万神殿 (Pantheon) 用了一个摆长为 67m 的摆, 摆平面的偏转明确地告诉人们地球是在旋转着的.

科里奥利力在微观现象中也有所表现.例如,它使得转动分子的振动变得复杂了,使得分子的转动和振动能谱之间相互影响.

## 习 题

2.1. 一带电粒子以  $300 \times 10^6 \text{m/s}$  的速度射入电场区,受到  $1.15 \times 10^{14} \text{m/s}^2$  的逆向加速度.带电粒子飞行多远后静止?能静止多久?

2.2. 一自由落体在最后 1s 内通过了其全程距离的一半.试求出该落体下落的距离及所用时间.

2.3. 一钢球从一建筑物的屋顶由静止开始自由下落.建筑物内一观察者站在高度为 1.3m 的窗前,发现钢球从窗的最上端落至最下端用了  $1/8 \text{s}$ .钢球继续下落,2.0s 后,与水平地面发生完全弹性碰撞并上升至窗的最下端,试求该建筑物的高度.

2.4. 设计一个实验,利用落体或上抛运动来测量重力加速度  $g$ .

2.5. 一地面雷达观察者正注视一抛射体,在某一时刻,他得到如下信息:抛射体达到了最高点,并具有大小为  $v$  的水平速度,此时抛射体与观察者的直线距离为  $l$ ,观察者的视线与水平面的夹角为  $\theta$ .

(a) 计算抛射体的落地点与观察者的水平距离  $d$ ,用  $l$ 、 $v$ 、 $\theta$  表示.

(b) 抛射体是否能越过观察者的头顶?

2.6. 蟹状星云中的脉冲星转速为  $30 \text{ r/s}$ ,半径为  $150 \text{ km}$ .位于星体赤道附近物体的加速度是多少?

2.7. 在玻尔的氢原子模型中,电子围绕原子核作匀速圆周运动,在半径为  $5.29 \times 10^{-11} \text{m}$  的轨道上,其速度为  $2.18 \times 10^6 \text{m/s}$ ,求氢原子中电子的加速度.

2.8. 由于地球的自转,地球赤道上某一点具有一定的加速度,而地球本身由于绕太阳公转,也具有一定的加速度,试求这两个加速度之比.假定公转轨道为圆形.

2.9. 一音叉与频率为  $384 \text{ Hz}$  的标准音叉形成每秒三次的拍频.当这一音叉的一支粘上一小块蜡时,拍频降低.问这音叉的频率是多少?

2.10. 试写一程序演示李萨如图形.可取  $x = \cos(2\pi \cdot 1 \cdot t + 0)$ ,垂直振动频率和初相位作可调参数.

2.11. 试作正交相差的两振动的矢量和位移叠加图.

2.12. 讨论受周期性冲击的简谐振子.冲击导致速率的不连续跳变.它的相空间的轨迹是什么?如果我们只取相空间中  $t=T, 2T, 3T, \dots$  的点,图形是怎样的?

2.13. 在双阱势中,运动的相图是怎样的?

2.14. 飞行员从 A 地向正东飞行至 B 地,然后返回.空气相对于地面的速度是  $u$ ,而飞机相对于空气的速度  $v$  为常量.试对风速:(a) 为零、(b) 正东、(c) 正北,求来回飞行时间.在后两种情形,对  $v$  有什么要求?

2.15. 一人欲划船渡过  $500 \text{m}$  宽的河流.他相对于水的速度为  $3000 \text{m/h}$ ,水流速度为  $2000 \text{m/h}$ .设人在岸上的行走速度为  $5000 \text{m/h}$ , (a) 为了在最短时间内达到河对岸正对出发点的位置,此人需选择怎样的路线? (b) 该最短时间为多少?

2.16. 一质量为  $m$  的病毒微粒存在于某溶液中, 盛该溶液的试管置于一离心机上. 离心机以每分钟  $n$  转的速率旋转. 在某个时刻, 该病毒位于距旋转轴  $r$  处, 并相对于试管以恒定速率  $v_0$  沿径向运动. 试分别在下面两个参考系中, 定量地考虑病毒的运动情形并给出所有受力大小: (a) 随离心机一同旋转的参考系; (b) 固定的实验室参考系.

### 参考文献

- ( 1 ) Alonso M and Finn E J. Fundamental University Physics. Addison Wesley Publishing Company, 1978
- ( 2 ) Moon Francis C. Chaotic Vibrations. John Wiley & Sons, 1987
- ( 3 ) Shapiro Ascher H. Bath - Tub Vortex. Nature, Dec. 15, 1962
- ( 4 ) McDonald J E. The Coriolis Effect. Sci. Am., Jan. 1952
- ( 5 ) Correll M. The Case of the Coriolis Force. Phys. Teacher, Jan. 1976

### 第三章 质点动力学

#### § 3.1 惯性定律和惯性系

动力学的基本定律是牛顿运动定律. 牛顿第一定律也称惯性定律. 惯性定律说:

任何物体都将保持静止或匀速直线运动的状态, 直到其他物体所作用的力迫使它改变这种状态为止.

另一种陈述是

自由质点以恒速运动.

所谓自由质点指的是不受任何作用力的质点, 这当然是一种抽象. 当质点是完全孤立的或是宇宙间唯一的物体时, 才可能完全不受力. 实践中, 这种情况一般出现在质点远离其它物体, 或它与环境的作用可以忽略不计的条件下, 也可能是受力局部抵消或在某一方向上抵消. 气垫导轨就是一个例子, 可以使滑块所受合力为零. “恒速度”意思是没有加速度, 运动发生在一条直线上.

牛顿认为恒速(包括零速)是自然状态. 意识到这一点似乎是理所当然的, 实际上, 从历史观点来看, 对于运动的观念经历过极大的变更. 例如, 希腊哲学家亚里士多德(Aristotle, 384—322 B.C.) 就认为(火、空气)上升、(土、水)下降是自然的运动. 现在我们知道这些运动都是受力作用的结果. 亚里士多德对科学方法论有卓越的贡献: 从很少的简单假定出发, 经过逻辑推理, 描述相当复杂的问题. 他也提出了物理学中的一些基本问题. 伽利略认为匀速运动是自然的, 惯性使物体维持它们原来的运动状态. 伽利略的贡献除了自由落体运动的推理[据传由他在比萨斜塔(Leaning Tower of Pisa)上做的实验]外, 还有关于惯性的思想、运动的独立性和运动的叠加等等.

牛顿第一定律实际上是关于惯性参考系(inertial frame of reference)的定义. 自由质点并不总是以恒速运动, 牛顿的说法是以一定的参考系为前提的. 通常说“恒星”可以作为标准的非加速系, 但是, 这件事缺乏实验依据. 就现在的知识而言, 整个宇宙在膨胀, 所有远处的天体都在远离我们而去. 我们不妨采用这样的做法: 把第一定律适用的参考系称为惯性系或伽利略系. 第一定律首先定义了惯性系, 然后表达了惯性运动的规律. 相对于某一惯性系作常速平动的坐标系中, 恒速运动将还是恒速运动, 只不过速度矢量不同于第一个坐标系中的而已. 反过来, 所有的惯性系的速度都只差一个常矢量, 或者说所有的惯性系都是等价的. 非惯性系可以导致象傅科摆、恒星的日和年的表观运动、信风、气旋等现象.

下面我们就地球作为惯性系的问题加以讨论. 为简化起见, 假定涉及的运动为匀速圆周运动. 对于匀速圆周运动, 向心加速度为

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = (2\pi/T)^2 R \quad (3.1.1)$$

我们将有关数据列于表 3-1 中以便计算. 利用表 3-1 中的数据, 可以求得相应的向心加速度, 见表 3-2.

表 3-1 圆周运动的半径和旋转周期

地球半径	$6.4 \times 10^6 \text{m}$
地球自转周期	$8.64 \times 10^4 \text{s}$
平均地日距离	$1.5 \times 10^{11} \text{m}$
地球公转周期	$3.156 \times 10^7 \text{s}$
太阳至银河系中心距离	$3 \times 10^{20} \text{m}$
太阳绕银河系中心旋转周期	$6.3 \times 10^{15} \text{s}$

表 3.2 向心加速度

地球自转	$3.4 \times 10^{-2} \text{m} / \text{s}^2$
地球公转	$5.9 \times 10^{-3} \text{m} / \text{s}^2$
太阳公转	$3 \times 10^{-10} \text{m} / \text{s}^2$

从许多实际目的来看,地球可以近似当作惯性参考系.用太阳作为惯性参考系则近似性更好.从参考系的角度看,哥白尼(NicolausCopernicus,1473—1543)的日心说是选择了一个较好的惯性系.在天文研究上,有时必须以最远的星云作为惯性参考系.



### § 3.2 牛顿第二定律和第三定律

牛顿第二定律说：

运动的改变与力成比例并发生在力的作用方向上。

用加速度矢量表示运动的改变，牛顿第二定律可以写作：

$$F=ma \quad (3.2.1)$$

其实，这与其说是定律不如说是一些定义。首先是力的操作性定义。质量的单位是任意的，取 kg（千克）（等于国际千克原器的质量）作单位后，我们就可以通过测量加速度来定义力。其次（3.2.1）式也是惯性质量的定义。在相同的力作用下，具有较大加速度的物体有较小的惯性。较大的加速度意味着较大的速度改变率，或者说物体容易改变它的运动状态。惯性质量的引入就是为了度量惯性。在以 kg 作惯性质量的单位后，我们只需说明比较惯性质量的方式。对于受同样的力作用的两物体，有

$$m_2 a_2 = m_1 a_1 \quad (3.2.2)$$

那么  $m_2 = m_1 \cdot a_1 / a_2$ 。这一思想主要来源于马赫（E.Mach，1838—1916）。

最后作为动力学的基本方程，（3.2.1）式连接了物理量 F、m、a；实验决定了它们（矢量或标量）是可加的。

（3.2.1）式在伽利略变换下是不变的。从 § 2.6 我们知道

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (3.2.3)$$

第二定律的更基本的表示是

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (3.2.4)$$

其中  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  称为动量。如果 m 为常量，（3.2.1）式和（3.2.4）式就将等价。在考虑相对论效应时两者将不等价，因为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m(v) ; \quad m \frac{d}{dt} \mathbf{v} \neq \frac{d}{dt} \mathbf{p}$$

牛顿第三定律说

· 对每一相互作用总存在一个相等的反作用。

或

· 任何两个物体的相互作用总是大小相等并沿着同一直线的相反方向：

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA} \quad (3.2.5)$$

这是关于力的定律。它适用于接触力和“超距力”。按照现代观点，不存在超距作用，相互作用是通过场以有限速度传播的。引力也不例外。如果相互作用以有限速度传播，则存在延迟效应。

利用牛顿定律解题的常规步骤是：

- 明确问题中所求运动的物体；
- 考察物体所受的力及其性质；
- 分别画出各质点所受的力和运动的参考系；
- 写下运动方程；找出有关的几何关系；
- 作必要的近似并求解。

例 3.1 如图 3-1 所示配置，质量为  $m$  的直杆可以在竖直方向上下运动。求质量为  $m$  的斜劈的加速度  $a$  和作用力  $F_N$ 。

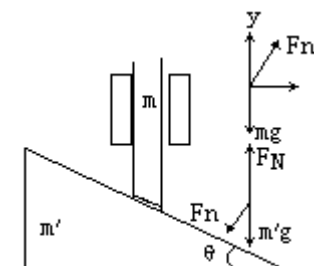


图 3-1

解：首先将两物体受力画在图中，则有

$$F_N \cos - mg = ma_y \quad (1)$$

$$F_N - F_N \cos - m'g = 0 \quad (2)$$

$$-F_N \sin = m' a_x \quad (3)$$

其中  $dy = dx \tan$ 。将 (3) 式代入 (1) 式得到

$$-m' a_x \cot - mg = m \tan a_x$$

$$a_x = -\frac{m}{m' \cot + m \tan} g$$

$$F_N = -\frac{m}{\sin} a_x = \frac{m m' \cos}{m' \cos^2 + m \sin^2} g$$

例 3.2. 一个 1.0 kg 小球用两根 1.0 m 长的弦系在一旋转轴上，形成一等边三角形。上弦的张力是 25N，如图 3-2 所示。求下弦的张力  $F_{T2}$ 、球上的净力和球的速率。

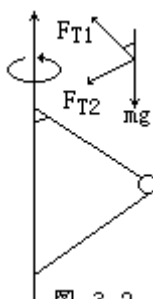


图 3-2

解：对力作分解，有

$$k \quad F_{T1} \cos - F_{T2} \cos - mg = 0$$

$$F_{T2} = F_{T1} - \frac{mg}{\cos}$$

$$-e \quad F = (F_{T1} + F_{T2}) \sin = 26N$$

$$v = \sqrt{\frac{Fr}{m}} = 5.1 m/s$$

请注意有效数字 (significant figure)。本问题中所给的数据均为两位有效数字。在加、减运算过程中一般不损失有效位数；乘、除开方等运算结果的有效数字的位数决定于位数最少的因子。

单摆是由一个质量为  $m$  的质点用长为  $L$  的弦或轻杆悬挂在  $O$  构成的，如图 3-3 所示。假定弦不能伸长，且质量可以忽略，运动方程为

$$e: mg \cos \theta - F_T = m(-L \ddot{\theta})$$

$$e: -mg \sin \theta = mL \ddot{\theta} \quad (3.2.6)$$

其中，第二个方程可以写成

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L}\right) \sin \theta = 0 \quad (3.2.7)$$

对于小角度， $\sin \theta \approx \theta$ ，方程变成

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L}\right) \theta = 0 \quad (3.2.8)$$

通过观察，可以知道方程的解有以下形式：

$$\theta = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (3.2.9)$$

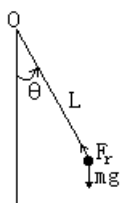


图 3-3 单摆

利用初始条件： $\theta(t=0) = \theta_0$ ， $\dot{\theta}(t=0) = 0$ ，可以得到解为

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \quad (3.2.10)$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L}$$

在以上求解单摆运动的过程中，设置了很多条件（共有 6 个）。每一个或几个条件的改变，都将得到另一个问题。

当 $\sqrt{g/L}t = 2\pi$  时，单摆经历了一个整周期，所以单摆的周期和频率分别为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}; \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (3.2.11)$$

对于一般情形，运动方程 (3.2.7) 式的一次积分为

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{L} (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (3.2.12)$$

完整的解需要特殊函数的知识（见附录 B）。在图 3-4 中画出了两个具有较大初值的解，试比较它们的特征。容易看出：角度越大，频率越低。我们可以简单地把 (3.2.7) 式写为

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L} \sin \theta\right) = 0 \quad (3.2.13)$$

那么形式上

$$\omega^2 \approx \frac{g}{L} \sin \theta \leq \frac{g}{L} = \omega_0^2$$

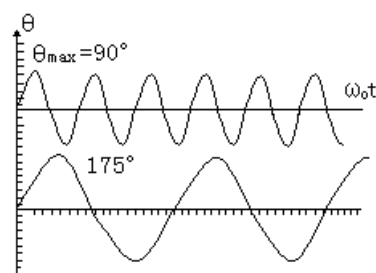


图3-4 不同初始条件的解

### § 3.3 力

力是运动变化的原因。力的相互抵消导致平衡和结构的稳定性。在某些场合，也有不追究力而直接讨论运动过程中动量变化（或守恒）的。讨论平衡问题时，也会更多地用势能的概念。不过在动力学各章中，力仍是基本的要素。

力就是相互作用。我们已经知道有四种基本的相互作用形式。相互作用的概念可以由交换场量子的概念所代替，比如说电磁作用就是交换光子的过程。下面介绍某些常见的力。

引力和重力是我们接触最多的，其规律是

$$F_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} r_{12} \quad (3.3.1)$$

我们将在第四章作专门的讨论。与之有关的课题有：行星运动、引力场中光的红移（redshift）、吸积（accretion）、潮汐和潮汐撕裂（tidal disruption）。引力也将改变时空的弯曲程度。在黑洞（black hole）周围的时空与这里绝然不同。（3.3.1）式反映了引力与距离平方成反比的关系。引力作为基本作用力之一，有这样的简单关系是理所当然的。固体和液体的聚集，引力起的作用很小。

弹性力或回复力遵从胡克（Hooke's law）定律：

$$F = -kx \quad (3.3.2)$$

这一关系很简单，不过它只是一种近似、经验（empirical）表达，只适用于位移相当小的情形。否则会很古怪：距离越大作用却越强！在  $10^{-15}\text{m}$  尺度内，也可能存在一种具有回复性质的力。这种力导致了夸克禁闭（quark confinement）。

分子间的力遵从经验定律，

$$F \sim 2\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{13} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^7 \quad (3.3.3)$$

如图 3-5 所示。我们不大能接受这样复杂的表达式作为一个基本力。事实上，这一复杂的形式反映了分子具有内部结构。分子由原子组成，原子又由电子和原子核组成，两个集团之间的力就是所有各个成分之间力的总和。这些力都是电磁力。

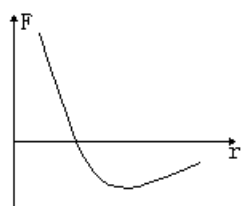


图3-5 分子间的力

摩擦力 (friction) 也是很复杂的, 本质上与电磁力相关. 摩擦力是耗散的 (dissipative). 很多场合要设法减小摩擦力. 人们常用润滑剂 (lubrication)、滚珠轴承或气垫轴承来减小摩擦. 但是也许有更多的场合需要利用摩擦, 增加摩擦力. 最容易想到的是防滑. 另外, 如果没有适当的摩擦就不会有音乐 (起码是弦乐), 没有减速和制动系统的高速汽车、列车也是不可想象的. 与工业技术密切相关的摩擦已经导致了一门科学——摩擦学 (Tribology) 的形成<sup>(1)</sup>. 在基础研究方面, 由于德让 (de Gennes) 的提倡, 贝克 (Bak) 等人以沙堆作模型开始的研究<sup>(2)</sup> 导致了自组织临界性 (self-organized criticality, SOC) 等的研究. 这些研究涉及到生命科学、地球科学和凝聚态物理中的很多应用, 例如元胞自动机 (cellular automation)、生命游戏 (game of life)、地震、磁畴等等, 这些都是始料未及的<sup>(3)</sup>.

表面摩擦取决于很多因素, 如: 材料的性质、表面加工情况、表面 (氧化) 膜沾污程度、温度等.

我们有如下的近似、经验定律: 静摩擦力  $F_f$  在数值上正比于正压力  $F_N$ ,

$$F_f \leq \mu_s F_N \quad (3.3.4)$$

比例系数  $\mu_s$  叫做静摩擦系数 (coefficient of static friction). 这是一个十分简单的表达式. 但这并不表示摩擦力是一种基本的相互作用力. 实际上, 摩擦力是相当复杂的, 有静摩擦、滑动摩擦、滚动摩擦等等, (3.3.4) 式只是一个经验公式. 如果注意到摩擦力和正压力是在不同的方向上, 你也许更能理解这仅仅是一个数值关系. 不过总结出这一规律也是很不容易的. 想一想摩擦力为什么会与面积无关呢.

滑动摩擦力在数值上也与正压力成正比:

$$F_f \leq \mu_k F_N \quad (3.3.5)$$

比例系数  $\mu_k$  叫做滑动摩擦系数 (coefficient of kinetic friction). 一般地说静摩擦系数不小于滑动摩擦系数. 例如, 对于铸铁与铸铁表面, 静摩擦系数竟高达 1.10, 而滑动摩擦系数只有 0.15. 不粘锅表面的涂层塔夫隆 (Teflon) 表面之间, 两种摩擦系数均为 0.04.

以上结果可以用阿蒙顿-库仑 (Amontons - Coulomb) 定律来表达:

· 摩擦力正比于正压力, 比例系数为  $\mu_k$ , 与表观的接触面积之大小无关, 与滑动速度的大小无关.

由于表面的起伏, 物体间实际接触面积只有表观面积的  $10^{-4} \sim 10^{-2}$ . 对于非常洁净的表面, 应该较多地考虑分子引力的起因.

临界角 (critical angle) 与摩擦力有关.

当改变斜面倾角时 (图 3-6), 平衡方程为

$$F_N + F_f + mg = 0$$

分量形式是：

$$F_f - mg \sin \theta = 0$$

$$F_N - mg \cos \theta = 0$$

由 (3.3.4) 式，可以得到

$$\mu_s \leq \frac{F_f}{F_N} = \tan \theta$$

临界角为

$$\theta_c = \arctan \mu_s$$

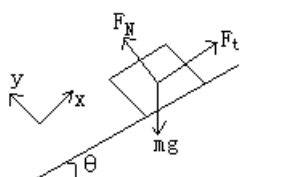


图3-6

这一结果可以用来估计沙堆的倾角 (angle of repose of a dune) . 也使我们想起德让说的所谓 “沙堆平衡时的倾角以及崩塌 (avalanche) 时的动力学” 以及自组织临界性 .

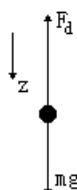


图3-7 流体阻力

空气 (流体) 阻力 (Frictional drag) 为

$$F_d = \frac{1}{2} C_d A v^2$$

其中  $C_d$  是曳引系数 (drag coefficient) ,  $A$  为有效截面积 ,  $\rho$  是流体密度 , 而  $v$  是物体相对于流体的运动速度 .

例 3.3 求流体中运动物体的终极速度 .

解：如图 3-7 所示，物体在流体中下落，受力

$$F_z = mg - \frac{1}{2} C_d A v^2$$

落体所受力平衡时的速度定义为终极速度 (terminal velocity) . 令  $F_z = 0$  , 则

$$v_T^2 = \frac{2mg}{C_d A}$$

讨论：利用这一表式，我们可以将运动方程写为

$$\frac{dv}{dt} = g \left( 1 - \frac{v^2}{v_T^2} \right)$$

跳伞运动员可以到达终极速度  $v_T$  吗？我们可以解上面的运动方程 将方程改写为

$$\frac{dv}{dz} \frac{dz}{dt} = g \left( 1 - \frac{v^2}{v_T^2} \right)$$

或

$$\frac{dv^2}{1 - v^2/v_T^2} = 2gz$$

根据初始条件  $z=0, v=0$ , 可解得

$$v^2 = v_T^2 (1 - e^{-z/z_c})$$

式中  $z_c = m/C_d A$ . 通常当  $z = z_c$  时我们就认为已到达了终极速度.

黏性力 (Viscosity force) 遵循斯托克定律 (Stoke's law): 其中  $r$  是在黏性流体中运动的球的半径, 而  $\eta$  是黏度系数 (coefficient of viscosity), 其单位是

$$1\text{N} / [\text{m} (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})] = 1\text{Pa} \cdot \text{s}$$

黏性力的规律决定于一个无量纲数——雷诺数 (Reynolds number):

$$\text{Re} = \frac{vd}{\eta} \quad (3.3.6)$$

对于较小的雷诺数 ( $0 \sim 10$ ), 如前所说  $F \sim v$ ; 对于较大的雷诺数 ( $3 \times 10^2 \sim 3 \times 10^5$ ) 则相应地有  $F \sim v^2$ ; 对于更大的雷诺数, 则关系更为复杂.

电磁力 (electromagnetic forces) 是指电荷在电场  $E$ 、磁场  $B$  中所受的力:

$$F_e = qE$$

$$F_m = qv \times B$$

或点电荷之间的库仑力:

$$F_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} r_{12}$$

核力 (nuclear force) 是把核子 (nucleons) 结合在一起的力. 它很强, 胜过质子之间的库仑力, 但是还没有严格的、简单的解析表达式. 在某些情形下, 核力可以表示为

$$F \sim \frac{1}{r^2} \exp(-r/r_0), \quad r_0 \sim 10^{-14} \text{m}$$

这说明核子有结构, 否则对于两个点粒子间的力我们应该可以期望有一个简单的表达式.

### § 3.4 非惯性系和惯性力

在某些情况下从惯性系来考虑问题并不是最方便的，例如对信风 (trade wind) 等的研究就是如此。

一质量为  $m$  的质点相对于  $S$  系运动，加速度为  $a$ ，而  $S$  系又相对于惯性系  $S'$  以速度  $u$  运动。如果  $u$  随时间变化，则位移间的关系将不同于 (2.6.2) 式，应为

$$r = \int_0^t u dt + r \quad (3.4.1)$$

设一自由质点在  $S$  系中以常矢量  $v$  运动。则在  $S'$  系中来看，这一自由质点的速度为  $v'(t) = v - u(t)$ ，不再是常矢量。此时牛顿第一定律不再适用，所以  $S$  系不是惯性系而称为非惯性系 (noninertial frame)。在  $S$  系中，牛顿第二定律应该是

$$F = m\ddot{r} \quad (3.4.2)$$

由于  $\ddot{r} = a + \dot{u}$ ，则上式可写成

$$F = ma + m\dot{u}$$

在  $S$  系中，力与加速度的关系不再满足牛顿第二定律。但是，如果我们在  $S$  系中引入惯性力 (inertial force)  $F_{in} = -m\dot{u}$ ，则牛顿第二定律在形式上仍成立：

$$(F + F_{in}) = ma \quad (3.4.3)$$

例 3.4 求加速电梯中物体的视重 (apparent weight)。

解：假定地面是惯性系  $S'$ 。在  $S$  系中，运动方程为  $m_g g + P = m_j a$  其中  $P$  是秤具对物体的作用力 (图 3-8)，即视重大小为

$$P = -(m_g g - m_j a)$$

当电梯自由下落时，乘客将经历失重 (weightlessness) 状态，此时视重为零。在电梯中，物体处在静止状态，有

$$m_g g + P + (-m_j a) = 0$$

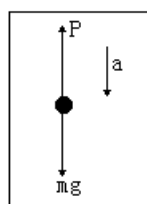


图 3-8 例3.4

最后一项是惯性力。

例 3.5 试用惯性力讨论斜劈-滑块系统 (图 3-9)。

解：在斜面参考系中的方程为：

$$F_n \sin \theta - m\ddot{x} = m\ddot{x}$$

$$F_n \cos \theta - mg = m\ddot{y}$$

$$-dy = dx \tan \theta$$

其中第三式是几何关系，为解题提供了方便。在桌面系统中则没有这样的关系。注意惯性力项中的加速度是非惯性系相对于惯性系的。



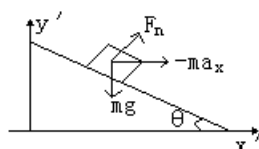


图3-9 例3.5

旋转系是非惯性系，需要引入的惯性力称为惯性离心力（inertial centrifugal force）。在惯性系  $S$  中，对于圆周运动我们可以写运动方程

$$F = -mr\dot{\varphi}^2 \mathbf{e} \quad (3.4.4)$$

而在随质点作圆周运动的  $S$  系中，我们有力平衡方程：

$$F + mr\dot{\varphi}^2 \mathbf{e} = 0 \quad (3.4.5)$$

图 3-10 中所示的圆锥摆（Conical pendulum）提供了这样的例子。在实验室系  $S$  中，张力  $F_T$  和  $mg$  提供了圆周运动的向心力（centripetal force）。在随圆锥摆一起转动的  $S$  系中，张力  $F_T$ ，重力  $mg$  和惯性离心力  $mr\dot{\varphi}^2 \mathbf{e}$  达到平衡。

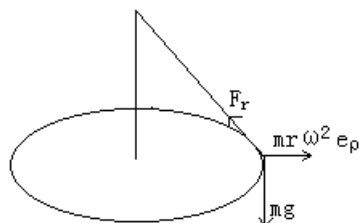


图3-10

最后，我们介绍所谓的科里奥利力（Coriolis force）。(2.7.6) 式即为

$$m\mathbf{a}_{\text{rot}} = m\mathbf{a}_{\text{in}} - 2m \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_{\text{rot}} - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (3.4.6)$$

式中右边第二项是科里奥利力，第三项是惯性离心力。事实上，它们都只不过是运动学效应，不存在相应的反作用力，因此，引入惯性力后，牛顿第一定律、第二定律在非惯性系中依然适用，而第三定律却不再适用。

一般来说，相互作用力不能通过坐标系的变换而消失，例如摩擦力或电磁力等等就是如此。对于不同的参考系，电磁力的电力和磁力部分可能会不同，但是不可能全都消失。对于引力则不然，如在一个自由下落的参考系中，物体可以出现失重——重力就被惯性力抵消了。当然，产生这一现象的前提条件是引力质量等于惯性质量。在这个意义上来说，我们无法区别引力和惯性力。伽利略提出了绝对速度的不可测性，这导致了相对性原理（the principle of relativity）。爱因斯坦则认为绝对加速度也是不可测的，因为我们无法区别加速参考系和引力，这导致了等效原理（第三十二章）。

### § 3.5 动量和角动量

一个质点的线性动量定义为

$$p = mv \quad (3.5.1)$$

可用动量的变化律来表示牛顿第二定律：在力学的高级表示中，能量和动量的运用很自然。在相对论、量子力学等现代理论中动量也是一个中心概念。

当质点不受力或在某一方向上不受力时，就有动量守恒或某一方向的动量分量守恒：

$$\begin{aligned} F &= 0, p = C \\ F_i &= 0, p_i = C_i \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

$C$  为常矢量， $C_i$  为常量。

(3.5.2) 式可以改写为

$$dp = Fdt$$

对两边积分后，可以得到动量的变化与冲量 (impulse)  $I$  的关系：

$$p_f - p_i = \int_{t_i}^{t_f} dp = \int_{t_i}^{t_f} Fdt \quad I = \bar{F}(t_f - t_i) \quad (3.5.4)$$

考虑某个参考系，相应坐标系的原点为  $O$ ，一个质点处于其中，位置矢量为  $r$ ，所受的力为  $F$ 。如果质点的动量为  $p$ ，则量

$$L = r \times p \quad (3.5.5)$$

称为质点相对于  $O$  点的角动量或动量矩。上式也可以表示为

$$L = rp_{\perp} \quad ; \quad L = r_{\perp} p \quad (3.5.6)$$

式中下标表示垂直方向上的投影。

例 3.6 如图 3-11 所示，一质点沿直线运动，求其相对于  $O$  点的角动量。

解：数值上  $L = bmv$

其中  $b$  称为碰撞参量 (impact parameter)，也就是前面所说的垂直方向上的投影。根据定义方程 (3.5.5) 式可以判断角动量是在垂直纸面向里的方向上。

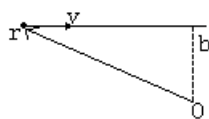


图3-11 例3.6

考虑一个质点在平面内运动的情况。如果选取参考点  $O$  在该平面内，则角动量矢量垂直于平面，如图 3-12 所示。若另作选择，如选  $O'$  作为参考点，则可能使情况复杂化。以圆运动为例，质点的角动量为

$$\begin{aligned} L &= mr \times (\omega \times r) \\ &= mr^2 \omega - r(r \cdot \omega) \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

事实上，在大多数情况下，对于平面运动选取  $O$  点作参考点较自然和方便。相对于  $O$  点，有

$$L = mr^2 \omega \quad (3.5.8)$$

下面我们将通过例子来给出不同体系的角动量的数量级。

\* 氢原子的玻尔 (Bohr) 模型是电子绕核作轨道运动。有关的数据是：

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{kg}, \langle r \rangle = 0.529 \text{\AA}, \quad \omega = 4.13 \times 10^{16} \text{s}^{-1}$$

其中 $\langle r \rangle$ 为量子力学平均。计算结果得： $L = 1.05 \times 10^{-34} \text{m}^2 \text{kg} / \text{s}$ 。这个量正是我们在第一章中介绍过的三个重要普适量之一——普朗克常量 $\hbar$ 。按照量子力学，角动量应该为

$$L^2 = l(l+1) \hbar^2 \quad (3.5.9)$$

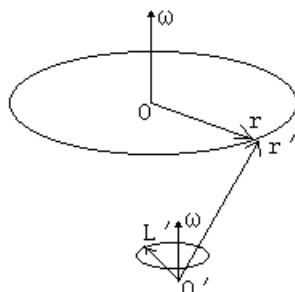


图3-12 角动量和角速度

其中 $l$ 是正整数。也就是说角动量总是普朗克常量的若干倍，而不能连续变化。其实，由于普朗克常量与宏观世界涉及的角动量相比太小了，在宏观领域，说（宏观物体如下例）角动量是连续变化的不会造成什么问题。

例 3.7 求地-月系统的角动量。

解：有关的数据是： $m = 7.36 \times 10^{22} \text{kg}$ ， $\bar{r} = 3.08 \times 10^8 \text{m} \sim 60R_{\oplus}$ ，

$T = 27.3 \times 8.616 \times 10^4 \text{s}$  由此可以算得月球绕地球运动的角动量为

$$L = 2.84 \times 10^{30} \text{m}^2 \text{kg} / \text{s}$$

由此可见，与前例相比角动量在数值上相差 64 个量级。

角动量的变化规律是怎样的呢？直接对 (3.5.5) 式求导，可得

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{dr}{dt} \times p + r \times \frac{dp}{dt} \\ &= r \times F \\ &= M \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

这里定义了质点所受的力矩  $M$  (torque)。注意力矩和角动量必须相对于同一参考点。力矩的量纲是  $\dim M = ML^2T^{-2}$ 。

例 3.8 写出质点  $m$  下落过程中，相对于  $O$  点的力矩和角动量。

解：如图 3-13，以质点在水平位置为计时起点。力矩和角动量分别为

$$M = mgb$$

$$L = r(mgt) \sin \theta = (mgb) t$$

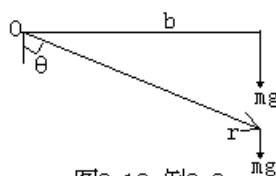


图3-13 例3.8

当力矩为零时，角动量为常矢量，我们有角动量守恒。这可以发生在力和位置矢量共线的情形，例如力是有心力时就是如此。这也是为什么行星不会落到太阳中去的原因。

### § 3.6 机械功和机械能

无限小机械功定义为

$$dW = F \cdot dr \quad (3.6.1)$$

由此，功率为

$$P = \frac{dW}{dt} = F \cdot v \quad (3.6.2)$$

其量纲和在国际单位制中的单位分别是

$$\dim W = ML^2T^{-2}; 1J = 1N \cdot 1m$$

功可以与路径有关也可以无关，其数值可以是正、零或负（图 3-14）。

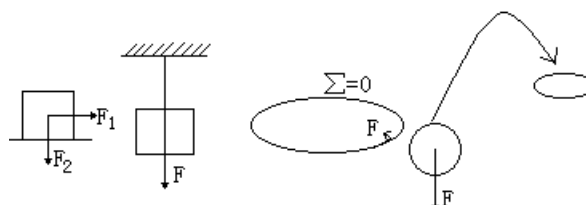


图3-14 不同数值的功

下面我们从合力做功出发来推求功能关系：

$$\begin{aligned} W &= \int F \cdot dr = \int m \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} dt = \int mv \cdot dv \\ &= \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2 \\ T_f - T_i \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

式中  $T$  代表动能 (kinetic energy)，下标  $f$ 、 $i$  分别代表末态和初态。在推导中我们用了下面的关系：

$$v \cdot v = v^2, 2v \cdot dv = 2v dv$$

注意动能的表式也可以用  $S$  系中的量来表示：

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m (v + u) \cdot (v + u) \\ &= \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} m (2v + u) \cdot u \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

这说明，动能与坐标系的选取有关。\*功是否也与坐标系的选取有关呢？即动能的增量是否与坐标系有关呢？

\*地球卫星不论从远地点 (apogee) 或近地点 (perigee) 出发绕地球一周引力所做的功是零 (见图 3-15)。即

$$W_{apa} = W_{pap} = 0$$



图3-15

当质点绕一闭合路径运动时，若作用在质点上的力做功为零：

$$\oint F \cdot dr = 0$$

则这个力是保守力 (Conservative force)。保守力的另一种定义是，质点在两点之间运动时，保守力所做的功与路径无关。例如重力是保守力，

重力做功只依赖于两个端点。我们可以把如图 3-16 所示路径分成若干小段，并用阶梯状的路径来代替。在水平部分  $dW = 0$ ，而垂直部分为  $mgdz$ 。于是总功为

$$-mg(h_i - h_f)$$

保守力做功只与路径的端点有关，可以用下式表示：

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_i) - U(\mathbf{r}_f) \quad (3.6.5)$$

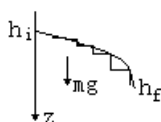


图3-16 重力做功

其中  $U$  (可包括一个常量) 称为势能函数，简称势能 (potential energy)。\* 例如，质点离地面高为  $h$  时的重力势能以及振幅为  $A$  的简谐振子的弹性势能分别为

$$U = mgh + C$$

$$U = \int_A^x (-kx) dx = -\left(\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kA^2\right)$$

要强调的是，动能是相对于一定的参考系的，而势能则属于整个系统，即通过保守力相互作用的各物体。保守力可以用势能来表达，例如，对 (3.6.5) 式求导即得到  $x$  方向的力为

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \quad (3.6.6)$$

$$\text{更一般地，} F = -\nabla U \quad (3.6.7)$$

如果所研究的力全是保守的，从 (3.6.3) 和 (3.6.5) 式，有

$$T = -U \text{ 或 } (T+U) = 0$$

由此得到动能与势能之和为常量，即机械能守恒 (Conservation of mechanical energy)。例如，对于单摆有

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = mgz_0$$

其中假定了  $z = 0$  处为势能零点。高度  $z$  可以用角度来表示：

$$z = L(1 - \cos \theta)$$

于是有

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

这正是运动方程的第一积分。

图 3-17 是简谐振子机械能守恒的图示：

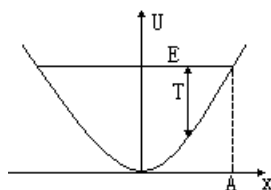


图3-17

$$\frac{1}{2}kA^2 = T + \frac{1}{2}kx^2$$

容易找到代表动能和势能的线段。作一维运动的物体的速度为

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}$$

这导致了原则上可解的方程

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U)}} = dt$$

图 3-18 是一模型势能曲线，图中的虚线表示质点可以运动的区域。在 A、B、C 和 D 点， $dU/dx = 0$ ，均有  $F_x = 0$ 。但是，由于各点附近曲线的形状不同，将导致不同的结果。A、C 两点是势能曲线的极小点，有  $d^2U/dx^2 > 0$ ，即

$$\frac{d}{dx} \left( -\frac{dU}{dx} \right) = \frac{dF_x}{dx} < 0$$

说明力 F 是回复力，意味着在这两点的平衡是稳定平衡 (stable

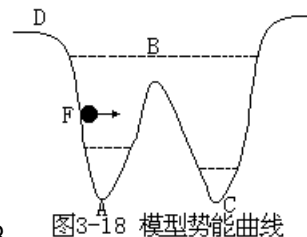


图3-18 模型势能曲线

equilibrium)。在 B 点，平衡是不稳定的 (unstable)。在 D 点，U 是常量，平衡被称作是随遇平衡 (neutral)。最

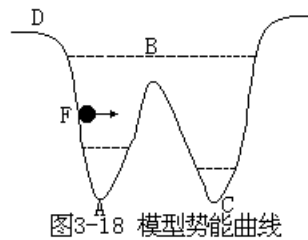


图3-18 模型势能曲线

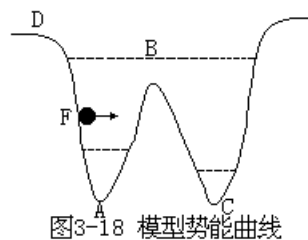


图3-18 模型势能曲线

后，在 F 点， $F_x > 0$ ，质点将向右边运动。

在图 3-18 中，某些区域  $T = E - U < 0$  是经典力学禁止的，而在量子力学中质点可以以一定的概率进入。如质点可以以一定的概率穿透势垒 (barrier) B，在这种情形下，只有平均值  $\langle T \rangle$ 、 $\langle T \rangle$  等才是有意义的。

一个实际的一维势能曲线例子存在于氨 (Ammonia) 分子中，如图 3-19 所示。氮原子相对于氢原子平面有两个对称的位置，而它处在这两个位置的可能性是一样的。当氮从一个位置穿越平面到另一位置去时，它将经受到一个图中所示的势垒。

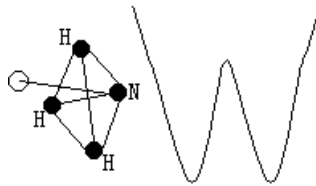


图 3-19 氨分子

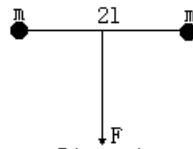
以后我们将会发现用势能来讨论平衡问题在许多方面都要便利。

### 习题

3.1. 两个质量均为  $m$  的质点，由长度为  $2l$  的轻绳连接，一恒力  $F$  持续地垂直作用于细绳的中点 ( $x=0$ ) 处 (如图)。证明每一个质点在与作用力  $F$  垂直的方向上的加速度的大小为

$$a_x = \frac{F}{2m} \cdot \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}}$$

式中  $x$  是质点与  $F$  的垂直距离。讨论当  $x=l$  时的情形。



题3.1图

3.2. 一质量为  $m$ 、角度为  $\theta$  的楔块置于水平桌面上，另一质量为  $m$  的立方块放在该楔块的斜面上，见图。假设所有的接触面都是光滑的，(a) 为使立方块相对于斜面静止，则该楔块应以多大的水平加速度运动？(b) 此时作用于该系统上的水平作用力  $F$  是多少？如果没有任何外力作用于该系统，试描述楔块  $m$  和立方块  $m$  的运动。

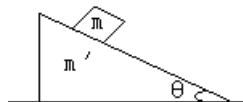


图3.2

3.3. 升降机中一斜面与地板成  $\theta$  角。质量为  $m$  的立方块从斜面滑下。在以下情形，求立方块相对于斜面的加速度：升降机 (a) 匀速上升、(b) 匀速下降、(c) 匀加速上升、(d) 匀减速下降、(e) 缆绳断裂。(f) 求在升降机匀加速上升时斜面对立方块的力。

3.4. 一质量为  $m$  的小立方块置于旋转漏斗内壁 (见图)。漏斗以角速度  $\omega$  旋转。设漏斗

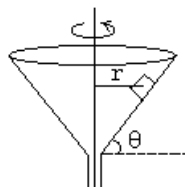


图3.4

与水平方向的夹角为  $\theta$ ，立方块与漏斗表面间的摩擦系数为  $\mu$ 。求使小立方块不滑

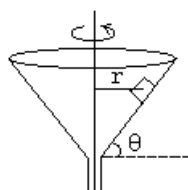


图3.4

动的最大转速  $v_{\max}$  和最小转速  $v_{\min}$  .

3.5 某物体下落过程中受到空气的阻力  $F_d = -kv$  , 其中  $v$  是物体的速度、 $k$  为与速度无关的常量 . (a) 求终极速度 ; (b) 将速度对时间作图 ; (c) 将加速度对时间作图 ; (d) 将下落距离对时间作图 .

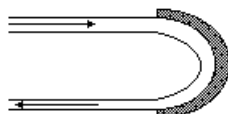
3.6 . 采用非惯性参考系重解 3.2 题、3.3 题、3.4 题 .

3.7 . 由于地球的旋转 , 铅垂实际上将不再指向地心 . 求在 (a) 北极、(b)  $30^\circ \text{N}$ 、(c) 赤道等处的偏离情况 .

3.8 . 在北半球 , (a) 求出水平向东运动的物体所受的科里奥利力 ; (b) 求垂直向上运动的物体所受的科里奥利力 .

3.9 . 在北纬  $30^\circ 05'$  处 , 一物体从 10m 高处落下 , 求由于科里奥利力的作用而引起物体落点的水平偏移量 . (空气阻力不计)

3.10 . 水流冲击涡轮机的碟状叶片 , 冲击前后水的速率均为  $v$  , 如图所示 . 单位时间撞击叶片的水量是常量  $\mu$  . 求水施加在叶片上的力 .



题3.10图

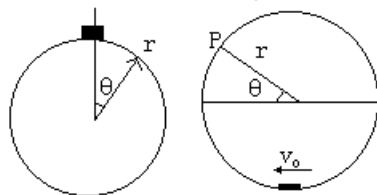
3.11 . 所谓的汤川 (Yukawa) 势具有如下形式 :

$$\int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \exp[i(kx - (k)t)] d(k - k_0) \quad (8.5.4)$$

它相当好地描述了核子间的相互作用 . 这里常量  $r_0 = 1.5 \times 10^{-15} \text{m}$  ,  $U_0 = 50 \text{Mev}$  . (a) 给出相应的作用力的表达式 ; (b) 说明该种作用力的短程性质 , 并计算当  $r = 2r_0$ 、 $4r_0$  及  $10r_0$  时的作用力与  $r = r_0$  时的作用力之比 .

3.12 . 一质点从无摩擦的球面自静止开始下滑 , 如图所示 . 求 : (a) 势能作为角度  $\theta$  的函数 ; (b) 动能作为  $\theta$  的函数 ; (c) 切向和法向加速度作为  $\theta$  的函数 ; (d) 质点飞离球面的角度 .

3.13 . 如图 , 一质量为  $m$  的质点在一光滑的半径为  $r$  的圆形轨道的内侧运动 . 当该质点在轨道的最低点时 , 速度为  $v_0$  . (a) 为使得质点绕环运动一周而不脱离接触 , 求  $v_0$  的最小值  $v_m$  ; (b) 若  $v_0 = 0.775v_m$  , 质点在 P 点与轨道脱离接触并沿图中虚线所示的轨迹运动 , 试求 P 的位置 , 用  $\theta$  表示 .

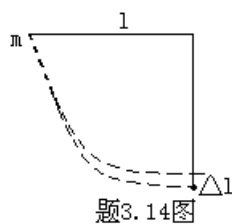


题3.12图

题3.13图



3.14. 如图所示，一弹性绳悬挂一质量为  $m$  的质点，从水平位置开始静止释放，此时弹性绳处于原长状态。（a）从动力学及能量考虑，证明当伸长量  $\Delta l$  与原长  $l$  相比较小时， $\Delta l$  可以表示为  $\Delta l = 3mg/k$ ；其中  $k$  为弹性绳的劲度系数，注意  $k$  越大， $\Delta l$  越小，故近似  $\Delta l \ll l$  越好；（b）在上述情形中，试证明质点运动到最低点时的速度为  $v = \sqrt{2gl - 3mg/2k}$ ，该速度比悬线为非弹性时的速度为小（相当于  $k = \infty$ ），给出该结果的物理解释。



## 第四章 引力

### § 4.1 万有引力定律

对行星运动 (planetary motion) 的描述是运动学研究的问题。从 17 世纪起出现了一些“宇宙”模型，实际上当时的对象只涉及太阳系 (solarsystem)：太阳、水星 (Mercury)、金星 (Venus)、地球 (以及月亮)、火星 (Mars)、木星 (Jupiter)、土星 (Saturn)。这里我们先介绍运动轨道的描述，稍后再讨论力的作用规律，而怎样从动力学求解行星的运动则放在 § 4.4 中讨论。

埃及亚历山大 (Alexandria) 的托勒密 (Claudius Ptolemy, 127—152) 是希腊 (Hellenistic) 数学家及天文学家，他建立了地心学说 (Geocentric theory)。在他的理论中，地球处在特殊的地位，太阳和其他行星都绕着地球转，轨道所在球面称为均轮 (deferent)。但均轮的球心是偏心 (eccentric) 而不是地球，行星运动的角速度相对于等分点 (equants) 是匀速的。为了对行星运动进行精确描述，除了均轮以外还需要本轮 (epicycle) (图 4-1)，总共需要 70 个球面。托勒密的代表论文为 The Great Syntax。

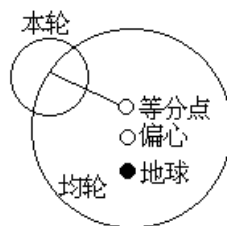


图4-1 托勒密体系

哥白尼 (Nicolaus Copernicus, 1473—1543) 发现，把行星运动的着眼点从地球移到太阳则看来很复杂的运动变得简单了，由此他创立了日心学说 (Heliocentric theory)，准确地推出了行星到太阳的距离。在临终那天，他的著作《论天球革命》(De Revolutionibus Orbium Celestium；英译：On the Revolutions of the Heavenly Spheres) 出版了。

哥白尼理论仍然需要 46 个球面，但不需要等分点。用哥白尼方法计算要比用托勒密方法简单，不过所得的天文表往往差不多。

在哥白尼死后 50 多年 (1600 年)，布鲁诺 (Giordano Bruno) 就声言宇宙是无限的，太阳只不过是一颗小星。

伽利略对力学有很多贡献。在行星运动方面，他的特殊贡献在于大大改善了望远镜，扩大了视野。望远镜最初出现在 1608 年，1609 年哈略特 (Thomas Harriot) 就用之考察月球表面。伽利略也用它观察了月球的表面和太阳的黑斑等，表明天体并不是完美的。他还发现了地球以外的旋转中心：木星有卫星、太阳存在自转等等。其代表作为 1632 年出版的 Dialogues Concerning the Two Chief World Systems。

丹麦的第谷 (Tycho Brahe, 1546—1601) 是又一位先行者。他发现托勒密和哥白尼的理论都有严重问题。第谷根据对木星和土星的冲 (conjunction of Jupiter and Saturn) 的观测得知，托勒密理论要迟一个月，而哥白尼理论约迟几天。第谷的研究受到了很大支持，在 1576—1597 年间哥本哈根 (Copenhagen) 附近的海文岛 (Hven Island) 被划归他使用，

而当时丹麦国家产值的 5% ~ 10% 提供给他作研究经费。他的模型是：太阳和月亮绕着地球转，而其它 5 颗行星绕着太阳转。这一模型无疑是对托勒密模型失败的一种认可。第谷对科学的主要贡献还有很多，如：

- 建立了科学的实验步骤；
- 消除系统误差[观测管的弯曲 (flexure)，光线的折射等]；
- 标明数据误差：他的数据误差为 2 ( < 0.61mm / 1m )；
- 系统连续的观察 (21 年)。

开普勒 (Johannes Kepler, 1571—1630) 于 1600 年作为第谷的助手为其工作。在第谷 1601 年临终前不久，他让开普勒研究火星的轨道。开普勒首先假定了火星轨道为圆形，并认定运动必须参照太阳的真实位置而不是地球轨道的中心。与第谷的数据最好的符合约 6 ~ 8。由于第谷的数据误差仅为 2，这一分歧使开普勒抛弃了圆轨道的假设。后来他提出了行星在等时间内扫过相等面积的假设，这与地球绕太阳的轨道运动吻合很好。于是，开普勒用卵形来拟合火星轨道，并试图与面积律匹配，最小分歧为 4。当时他正在写他的论文 *A Commentary on the Motion of Mars*。当他意识到所需要的是介于卵形和圆形之间的图形——椭圆时，他已经写到了第 51 章。此时开普勒一下子得到了我们现在所谓的开普勒第一定律。4 年后论文改名为

- *A New Astronomy*

*Based on Caution, or A Physics of the Sky Derived from Investigations of the Motions of the Star Mars, Founded on Observation of the Noble Tycho Brahe*

并出版 (1609 年)。

开普勒定律 (Kepler's laws)：

- (1) 行星绕太阳运动的轨道是以太阳为焦点的椭圆 (轨道定律)；
- (2) 行星与太阳的连线在相等时间内扫过相等的面积 (面积定律)；
- (3) 行星绕太阳公转周期的平方正比于行星到太阳距离的立方 (周期定律)。

按照开普勒定律，行星运动轨道不再需要偏心、等分点、本轮、均轮等等。每一行星对应一个椭圆轨道，何其简洁、优美！试回想一下在托勒密和哥白尼体系中竟然分别需要 70 和 46 个球面！当然，开普勒定律还只是经验定律，是从运动学信息——第谷的数据归纳出来的，并未提及运动的原因。尽管如此，开普勒的工作是从观测的现象和数据归纳出物理规律的典范。开普勒的数学能力是超乎寻常的，他分析第谷数据所用的工具仅仅是计算尺和罗盘。

开普勒在数学物理方面的成就往往是和他的“天庭和谐”以及神秘主义搅合在一起的。试看他的两篇论文的标题：

- *Mysterium Cosmographicum* (Cosmic Mystery) (1596 年)；
- *Harmony of the World* (1619 年)。依照他的“和谐”理论，开普勒建立了所谓嵌套多面体 (nested polyhedra) 方案。通过 5 个“稳定”的正多面体依次与球面内接、外切可以得到各行星与太阳的距离，如图 4-2 所示。当时已知的行星恰为 6 个，正好嵌入 5 个稳定多面体。开普勒选择了下列序列：

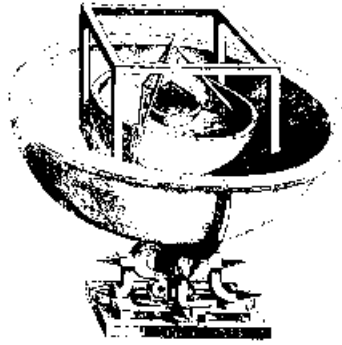


图4-2 开普勒的嵌套球面

土星 木星 火星 地球 金星 水星

立方体 四面体 十二面体 二十面体 八面体

(cube) (tetrahedron) (dodecahedron) (icosahedron) (octahedron)

得到的距离精度在 5% 以内。这当然只是一种凑合。正是在试图改进他的这一模型的过程中，开普勒发现了行星运动的第三定律。

牛顿提出质点  $m_1$  作用在质点  $m_2$  上的引力是

$$F_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} r_{12} \quad (4.1.1)$$

称为牛顿万有引力定律 (Law of gravitation)，参见图 4-3。这一定律被假定适用于一切物质、任何时间、地点。无论对苹果还是卫星来说，所受引力都服从同样的规律，不同的只是运动的初速度  $v_0$ 。

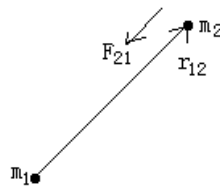


图4-3 万有引力

在牛顿学生时代 (1664 年) 的笔记本中，人们可以发现向心力的表达式：

$$F \sim v^2 / r = r \omega^2$$

牛顿根据开普勒第三定律：

$$T \sim r^{3/2}, F \sim r \omega^2 \sim r / T^2 \sim 1 / r^2$$

已经可以推断出引力反比于距离的平方，即  $F \sim 1 / r^2$ 。

当时有关椭圆的数学尚是困难的事。只有在莱布尼茨 (Gottfried Wilhelm Leibniz) 和牛顿发明了微积分以后，牛顿才给出了全部答案 (1680 年)。牛顿在 1679 年给胡克 (Hooke) 的信中，证明了均匀圆球或球壳的引力就如同全部质量集中在中心一样。胡克希望牛顿能求出平方反比力作用下的运动轨迹。1684 年哈雷 (Halley) 问了牛顿同样的问题，牛顿立即回答说轨迹是椭圆。1687 年《自然哲学的数学原理》(Philosophia Naturalis Principia Mathematica) 出版，这是在哥白尼提出日心说之后的 144 年，开普勒发现椭圆定律之后的 78 年。

(4.1.1) 式中包含着引力常量

$$G = 6.67259(85) \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \quad (4.1.2)$$

它是首先由卡文迪许 (Henry Cavendish, 1731—1810) 于 1798 年测得的, 所用的仪器是扭秤 (torsion balance), 如图 4-4 所示.

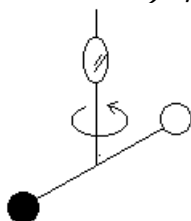


图4-4 扭秤示意图

牛顿引力定律的成功是令人瞩目的.

哈雷彗星 (Halley comet) 曾在 1456 年、1531 年、1607 年和 1682 年分别出现, 周期约 76 年. 根据这些记录, 哈雷 (Edmund Halley) 曾利用引力定律准确预报了该彗星下一次出现的日期即 1758 年.

太阳系中行星的运动是一个多体问题, 除了太阳的引力以外, 行星之间相互的影响也必须计入. 拉普拉斯 (Pierre Simon Laplace, 1749—1827) 曾应用当时最新的数学技术做出了那时候已知天体的十八体的运动问题, 留下了名著:

· 1799—1825 *Mecanique Celeste*.

天王星 (Uranus) 是由英格兰的赫歇尔 (William Herschel) 于 1781 年 3 月 13 日观测发现的, 而海王星 (Neptune) 的发现则完全是由预言导致的. 亚当斯 (John Adams) 1845 年 10 月所作对海王星的预测被观测天文学家查理和爱里 (Challis and Airy) 所忽视. 稍后 (1846 年 8 月) 勒维 (Urbain LeVerrier) 的工作得到了柏林天文台开尔 (Calle) 的认真对待. 在收到勒维 9 月 23 日信件的当天开尔就找到了海王星. 此外, 冥王星 (Pluto) 是由汤鲍 (C. Tombaugh) 于 1930 年 2 月 18 日在美国亚利桑那的洛维天文台观测到的 (哈勃空间望远镜升空以后发现冥王星还有一个“月亮”).

以上例子都是牛顿理论的辉煌成果. 但是它也遇到了困难. 那就是水星近日点的进动问题. 每 100 地球年, 水星近日点进动 575". 扣除来自其它行星的扰动 532", 尚有 43" 无法得到解释.

庞加莱 (Henri Poincaré, 1854—1912) 对三体问题的深入研究, 揭示了决定论的动力学系统中可能存在着随机性. 有关的著作是

· 1892—1899 *Methodes Nouvelles de la Macanique Celeste* 其重要意义在 20 世纪中叶后方始为科学界所认识. 庞加莱被认为是现代混沌理论的创始人.

一个质点  $m$  受多个质点的引力为

$$F = -G \sum_i \frac{V_i m}{|r - r_i|^3} (r_i - r) \quad (4.1.3)$$

对于连续质量分布系统, 上面的求和可以用积分来代替:

$$F = -G \sum_i \frac{V_i m}{|r - r_i|^3} (r - r_i) = -G \int \frac{dV}{|r - r'|} (r - r')$$

现在, 我们先求一个球壳状质量分布系统对质点的引力. 设该球壳的半径为  $R$ 、质量为  $m$ 、厚度为  $t$ , 如图 4-5 所示. 在计算以前, 不妨先猜想一下一质点  $m$  在球壳内、外分别将受到怎样的引力. 假定球壳的密度是均匀的, 则

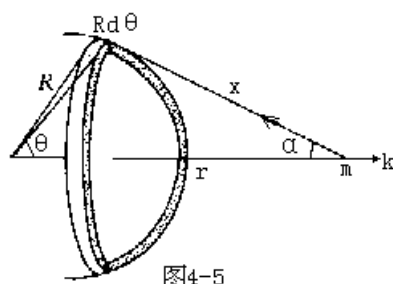
$$= \frac{m}{4 R^2 t}$$

$$dV = 2 R \sin \theta R d\theta$$

而由于对称性，知力在  $-k$  方向，其大小为

$$F = G \int_0^{\pi} \frac{m^2 R^2 \sin \theta d\theta}{x^2} \cdot \cos \alpha$$

$$= \frac{1}{2} G m^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta \cos \alpha}{x^2} d\theta$$



从几何关系知

$$x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta$$

$$2x dx = 2Rr \sin \theta d\theta$$

$$x \cos \alpha = r - R \cos \theta$$

于是得到

$$F = \frac{1}{2} G m^2 \int_{|r-R|}^{r+R} \frac{1}{x^2 R r} \left[ r - \frac{r^2 + R^2 - x^2}{2r} \right] dx \quad (-k)$$

$$= \begin{cases} -G \frac{m}{r^2} k, & r > R \\ 0, & r < R \end{cases} \quad (4.1.4)$$

这意味着球壳对壳内的质点不施加力，而对壳外的质点施加的力等价于质量集中在中心时所施的力。这一数学证明据说是牛顿推迟 20 年之久发表他的成果的原因之一。这一结果也可以不用上面的方法求解，参阅 § 4.5。以上结果可以用来求解均匀球的引力，球外部结果同上；球内位于  $r$  处的质点的引力来自有效质量  $m = r^3 / R^3$ ，质点  $m$  上所受的作用力为

$$F = -G \frac{\left( m \frac{r^3}{R^3} \right) \cdot m}{r^2}$$

$$= -G \frac{m}{R^2 R} r \quad (4.1.5)$$

随  $r$  线性变化。试作力随距离变化的曲线。

例 4.1 求质点在贯穿球体的隧道（图 4-6）中所受的力。

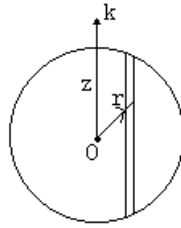


图4-6

解：利用球内引力公式（4.1.5）式，立即有

$$F_r = -\frac{Gm}{R^3}r$$

$$F_z = -\frac{Gm}{R^3}z$$

作为简化模型，可以认为地球是球形的．那么重力可以表达为

$$F = G \frac{m_{\oplus} m}{r^2} = mg \quad (4.1.6)$$

重力加速度将随距离变化：

$$\frac{dg}{g} = -2 \frac{dr}{r}$$

而有效 g 还应包括离心力引起的部分：

$$g_{\text{eff}} = -G \frac{m_{\oplus}}{r^3} r - \omega \times (\omega \times r) \quad (4.1.7)$$

在纬度  $\theta$  处的离心力为

$$- \omega^2 r \cos \theta$$

## § 4.2 引力势能

从 (3.6.7) 式, 我们有

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\Delta U$$

对于两个质点或者一个质点  $m$  在球外或球壳外的情形, 引力做功

$$\begin{aligned} W &= \int \left( -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \right) \cdot dr \\ &= -G m_1 m_2 \int_{r_1}^r \frac{1}{r^2} dr \\ &= - \left[ -G \frac{m_1 m_2}{r} \right]_{r_1}^r = -G \frac{m_1 m_2}{r} + G \frac{m_1 m_2}{r_1} \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

于是势能为

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r} + U_0 \quad (4.2.2)$$

其中可加常数可以有不同的选取方式, 例如:

$$U(\infty) = 0, \quad U(r) = -G \frac{m_\oplus m}{(R_\oplus + z)} + \frac{G m_\oplus m}{R_\oplus} \quad (4.2.3)$$

$$U(R_\oplus) = 0, \quad U = -\frac{G m_\oplus m}{(R_\oplus + z)} + \frac{G m_\oplus m}{R_\oplus} \quad (4.2.4)$$

显然, (4.2.4) 式与熟知的地球表面的势能  $mgh$  不同. 我们可以进一步研究它. 当涉及的高度比地球半径小很多时, (4.2.4) 可以作近似展开:

$$\begin{aligned} U &= \frac{G m_\oplus m}{R_\oplus} \left[ 1 - \frac{R_\oplus}{R_\oplus + z} \right] \\ &= mgz \left[ 1 - \frac{z}{R_\oplus} \right] \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

由此看出, 我们以前知道的表达式只是严格表示的近似而已. 从图 4-7 可以看出, 原来的表达式相应于曲线的一小段, 相对于 (4.2.3) 式的曲线平移了一个量  $G m_\oplus m / R_\oplus$ .

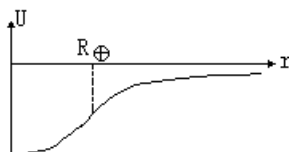


图4-7 质点在地球内、外的势能

\*考虑质点从  $r = R_\oplus + z$  自由下落到  $R_\oplus$ . 选择  $U(R_\oplus) = 0$ , 从能量守恒可以立即算出落地的速度:

$$-G \frac{m_\oplus m}{R_\oplus + z} + G \frac{m_\oplus m}{R_\oplus} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v^2 = 2gz \left( 1 - \frac{z}{R_\oplus} \right)$$

对于球内的质点 ( $r < R$ ), 有



$$\begin{aligned}
 U_r - U &= \int_r^R F_r dr = \int_r^R \left( -\frac{Gm}{R^3} m \right) dr + \int_R^\infty \left( -\frac{Gm}{r^2} m \right) dr \\
 &= \frac{Gm}{R} m \left[ -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (4.2.6)
 \end{aligned}$$

\*球壳的势能曲线如何？

对于多质点系，我们相信只存在二体相互作用。于是，总势能就是所有质点对之间的势能之和，

$$U = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} G \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = -\sum_{\substack{i,j \\ i > j}} G \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (4.2.7)$$

对于连续分布的质量系统，其中一部分与另一部分之间的势能之总和称为自能 (self-energy)。对于一均匀圆球可以按球壳和核心划分，它们的质量分别是

$$m \frac{r^3}{R^3}, \quad 4\pi r^2 dr = \frac{3r^2 m}{R^3} dr$$

自能是

$$U_s = -G \int_0^R \frac{mr^3}{R^3} \frac{1}{r} \frac{3r^2 m}{R^3} dr = -\frac{3}{5} G \frac{m^2}{R} \quad (4.2.8)$$

$-U_s$  就是将质量球打成碎片所需要的能量。反之，当物质聚集到一起时，它就是所能释放的能量。

引力系统的一个例子是土星和它的环。假定环的总质量是  $3.5 \times 10^{18} \text{kg}$ ，且集中在离土星平均距离  $1.1 \times 10^8 \text{m}$  处，试计算体系的自能。

当一质点  $m$  吸积 (3) (4) (accretion) 到半径为  $R$  的物体  $m$  表面时，释放的引力势能为

$$E_a = G \frac{m}{R} m \quad (4.2.9)$$

如果吸积物体是质量为太阳质量  $m_\odot$ ，半径为  $R_* \sim 10 \text{km}$  的中子星，那么吸积单位质量所释放的能量是

$$\frac{E}{m} \sim 10^{16} \text{J/kg} \quad (4.2.10)$$

这一能量最终将以辐射的形式释放出来。

为了对能量作比较起见，现在来考虑从核聚变所能提取的能量。在“质子循环”中，每一循环消耗四个质子而有  $26.2 \text{MeV}$  能量释放出来。利用质子质量的数值，可算得相当于每单位 (参与聚变) 质子的质量所释放的能量为

$$\frac{E_f}{m} = 6.3 \times 10^{14} \text{J/kg} \quad (4.2.11)$$

这相当于将氢经核“燃烧”成氦的燃烧热。与 (4.2.10) 式相比，约是吸积出产的 6%，或粗略地说为中子星吸积出产的  $1/20$ 。作为一种能量释放机制，吸积的效率强烈地依赖于吸积物体的致密性 (compactness)  $m/R$ 。白矮星 (white dwarf)  $m \sim 0.6 m_\odot$ ， $R_* \sim 10^4 \text{km}$ ，其吸积的能量比中子星小  $10^3$  可与核燃烧释放的能量相比较：

$$E_f \sim \frac{1}{20} (10^3 E_a) = 50 E_a \quad (4.2.12)$$

显然核燃烧更为有效。

\*对于黑洞，其引力半径为

$$R_* \sim \frac{2Gm}{c^2} \sim 3 \frac{m}{m_\odot} \text{ km} \quad (4.2.13)$$

(太阳的半径是  $6.96 \times 10^3 \text{ km}$ ，其引力半径为  $2.95 \text{ km}$ ) 试计算吸积效率。

在很多情形下，转移的物质往往没有丧失全部的角动量。这种情况下，它们不能在吸积星上着陆。这就导致了吸积盘 (accretion discs) 的形成。在不少情形下，盘流基本上限于轨道平面，作为一级近似可以认为盘是二维气流。这一薄盘近似是很成功的。

下面讨论引力场中的轨道运动 (Orbiting)。假定质点  $m$  绕  $m_\odot$  于  $r$  处作匀速圆周运动，容易发现：

$$E = -\frac{Gm_\odot m}{2r} < 0$$

$$E_k = E - U = \frac{Gm_\odot m}{2r} = -\frac{1}{2}U \quad (4.2.14)$$

$$v = \sqrt{Gm_\odot / r}$$

其中  $v$  叫做轨道速度。紧贴地球表面，轨道速度是

$$\sqrt{\frac{Gm_\oplus}{R_\oplus}} = \sqrt{gR_\oplus} = v_1 \quad (4.2.15)$$

数值为  $7.9 \times 10^3 \text{ m/s}$ 。轨道运动的周期是

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \left( \frac{r^3}{Gm_\odot} \right)^{1/2} \geq 2\pi \left( \frac{R_\oplus^3}{Gm_\odot} \right)^{1/2} \\ = 2\pi \sqrt{R_\oplus / g} = 84 \text{ min} \quad (4.2.16)$$

从地球表面发射卫星需要的速度  $v_L$ ，可如下算出：

$$\frac{1}{2}mv_L^2 - G\frac{m_\oplus m}{R_\oplus} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m_\oplus m}{r} = -G\frac{m_\oplus m}{2r} \\ v_L^2 = 2Gm_\oplus \left( \frac{1}{R_\oplus} - \frac{1}{2r} \right) \geq \frac{2Gm_\oplus}{R_\oplus} \left( 1 - \frac{R_\oplus}{2R_\oplus} \right) = gR_\oplus = v_1^2 \quad (4.2.17)$$

从地球表面到无穷处，能量守恒为

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m_\oplus m}{R_\oplus} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m_\oplus m}{r}$$

质点只有满足  $v^2 \geq 0$  才能从地球引力场逃逸，逃逸速度 (escape speed) 为

$$v_E = \sqrt{2Gm_\oplus / R_\oplus} = \sqrt{2}v_1 = 11.2 \text{ km/s} \quad (4.2.18)$$

这在数值上大于地球的切向速度

$$4.65 \times 10^2 \text{ m/s} = v_E/24$$

例 4.2 火箭从地球表面发射需要多大速度才能脱离太阳？

解：这一问题可以分几步计算．从地球公转轨道逸出，逃逸速度是

$$v \geq \sqrt{2Gm_{\text{ES}} / R_{\text{ES}}} \\ = \left( \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 1.99 \times 10^{30}}{1.50 \times 10^{11}} \right)^{1/2} \text{km/s} \\ = 42.1 \text{km/s}$$

这一速度正好是地球轨道速度 $v_{\text{os}}$ 的 $\sqrt{2}$ 倍．设想这一速度是地球轨道速度和质点“离开”地球引力场时相对于地球的速度 $v$ 之和

$$v = v_{\text{os}} + v$$

则 $v$ 的最小值是

$$|v|_{\text{min}} = v - v_{\text{os}} = v(1 - 1/\sqrt{2}) = 12.3 \text{km/s}$$

这一速度是靠从地表发射，克服地球引力而获得的．为脱离太阳系所需要的地面发射速度 $v_{\text{E}}$ 包含在下式中：

$$\frac{1}{2}mv_{\text{E}}^2 - G\frac{m_{\oplus}m}{R_{\oplus}} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m_{\oplus}m}{r}$$

其中的 $r$ 表示远离地球，比如说 $r=10^3R_{\oplus}$ ．因为

$$\frac{R_{\oplus}}{R_{\text{ES}}} \sim \frac{6.4 \times 10^6}{1.5 \times 10^{11}} \sim 4.5 \times 10^{-5}$$

所谓无穷只不过是偏离轨道百分之几而已．这样，

$$v_{\text{E}} = \left( \frac{2Gm_{\oplus}}{R_{\oplus}} + v^2 \right)^{1/2} = 16.7 \text{km/s}$$

逃逸速度可以用作引力强度的判据．如果

$$\frac{v_{\text{E}}}{c} \ll 1 \quad (4.2.19)$$

我们就说该天体周围的引力是弱的．如果

$$\frac{v_{\text{E}}}{c} \leq 1 \quad (4.2.20)$$

则是强引力．表 4-1 给出了几类天体的逃逸速度，可由此判断这些天体周围的引力强弱．

表 4-1 几种天体的逃逸速度

天体	逃逸速度 ( km · s <sup>-1</sup> )
地球	11.2
太阳	6.4 × 10 <sup>2</sup>
白矮星 Sirius B	4.8 × 10 <sup>3</sup>
中子星	1.6 × 10 <sup>5</sup>
宇宙	

考虑质量为 $m$ ，半径为 $R$ 的天体．如果

$$R \frac{2Gm}{c^2} r_{\text{g}} \quad (4.2.21)$$

则光也不能从它逃逸，这种天体叫做拉普拉斯黑洞（Laplacian blackhole）。（4.2.21）式中的  $r_g$  叫做引力半径。在广义相对论（General Theory of Relativity, GTR）中，相应的量是施瓦氏半径（Schwarzschild radius） $r_s$ （见 §32.4），它给出了黑洞的视界（event horizon）。在黑洞表面，引力场强度为

$$g \sim \frac{Gm}{r_s^2} = \frac{c^4}{4Gm} \quad (4.2.22)$$

一个天体是黑洞的候选对象的关键是它的致密性

$$\frac{m}{R} \geq \frac{c^2}{2G} \quad (4.2.23)$$

至于密度，（对球形几何）相应的条件是

$$= \frac{\frac{4}{3} R^3}{R^3} \geq \frac{\frac{4}{3} r_g^3}{r_g^3} = \frac{3c^6}{32 G^3 m^2} \sim \frac{1}{m^2} \quad (4.2.24)$$

在星系层次上质量  $m$  约为  $10^9 m_\odot$ ，密度低至  $20 \text{ kg/m}^3$  仍可以是黑洞；而中子星平均密度可以高达  $10^{17} \sim 10^{18} \text{ kg/m}^3$ ，却不是黑洞的候选对象。黑洞的正确概念来自爱因斯坦的广义相对论。

### § 4.3 引力质量 引力红移 引力塌缩

质量是物质的基本属性（正如电荷一样），质量不能存在于物质之外。由于质量的基本性，我们只能对它作操作性定义（见 § 1.2）。

引力质量和惯性质量（Gravitational and inertial mass）分别通过  $m_g \sim W$  和  $m_i \sim 1/a$  等关系定义，两者都不依赖于材料。引力质量还可以分为主动引力质量  $m_a$  和被动引力质量  $m_p$ 。按照牛顿第三定律，有

$$m_1 a = m_2 a \quad m_1 m_p = m_2 m_p$$

或

$$\frac{m_{1a}}{m_{1p}} = \frac{m_{2a}}{m_{2p}} \quad (4.3.1)$$

所以我们将不再区分主动引力质量和被动引力质量。如果引力质量等于惯性质量， $m_i/m_g=1$ ，将会有什么结果呢？直接的结果是重力所导致的加速度对所有物体相同：

$$G \frac{m_{\oplus} m_g}{R_{\oplus}^2} = m_i a, \quad a = G \frac{m_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} = g$$

正如同“比萨斜塔实验”所证实的那样。另一结果是失重：

$$P + m_g g = m_i \ddot{r}$$

$$-P = m_g g - m_i \ddot{r} \quad (4.3.2)$$

这样重力的效果可以被加速参考系所抵消。

引力质量与惯性质量的直接比较，可采用牛顿的方法：

$$-m_g g \sin \theta = m_i L \ddot{\theta}$$

两者的比值将出现在单摆的频率或周期中，这是容易测定的，但是不易获得较高的精度。厄缶（R. Eötvös）自 1890 年起进行他的有名的、精确的实验，先后持续了 25 年。在图 4-8 中假定了垂线和径向有一个偏离，偏离角为  $\theta$ 。为地球的自转角速度，我们可以写出平衡方程：

$$e : -F_T \sin \theta + m_i \omega^2 R \cos \theta \sin \theta = 0$$

$$e : F_T \cos \theta - m_g g + m_i \omega^2 R \cos^2 \theta = 0 \quad (4.3.3)$$

而偏离恰恰是下述比率的度量：

$$\tan \theta = \frac{m_i \omega^2 R \sin(2\theta)}{2m_g g} \sim \frac{m_i}{m_g} \quad (4.3.4)$$

厄缶将八种材料和铂作比较，发现它们的惯性质量和引力质量之比相等：

$$\frac{m_i}{m_g} = \frac{m_{ipt}}{m_{gpt}}$$

差别不大于  $5 \times 10^{-8}$ 。1964 年狄克（R. H. Dicke）及其合作者改善了实验。他们将铝和金制作的重物悬挂在南北方向的棒上，如图 4-9 所示。事实上，他们的实验是相对于太阳引力的，结果没有发现摆荡，表明惯性质量和引力质量相等，精度为  $10^{-11}$ 。1971 年布洛金斯基（Braginski）又将精度提高了 10 倍。引力质量和惯性质量的等价性是导致广义相对论发展的重要线索。

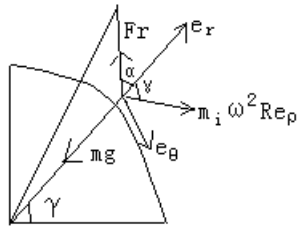


图 4-8 厄缶实验

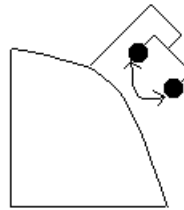


图4-9 锹克实验

引力红移 (Gravitational red shift) 是指光谱线由于引力的作用而向红端移动的现象。光子的能量是普朗克常量乘以频率  $E=h\nu$  (§ 22.2), 质能关系是  $E=mc^2$  (§ 9.5)。故光子的惯性质量 (以及引力质量) 是  $h\nu/c^2$ 。光子能量以及光子-地球系统的势能满足能量守恒:

$$-h d\nu = mg dz = \frac{h\nu}{c^2} g dz \quad (4.3.5)$$

整理并积分, 得

$$\int_{\nu_e}^{\nu_0} \frac{d\nu}{\nu} = - \int_0^H \frac{g}{c^2} dz$$

故

$$\nu_0 = \nu_e \exp \left( - \frac{gH}{c^2} \right) \approx \nu_e \left( 1 - \frac{gH}{c^2} \right) \quad (4.3.6)$$

这说明频率  $\nu$  发生了红移, 如图 4-10 所示。

1959 年庞德和瑞勃卡 (R. V. Pound and G. A. Rebka) 得到了向下发射的引力紫移为  $(2.57 \pm 0.26) \times 10^{-15}$ , 而相应的理论值为

$$\frac{\nu}{\nu_e} = \frac{gH}{c^2} = 2.46 \times 10^{-15}$$

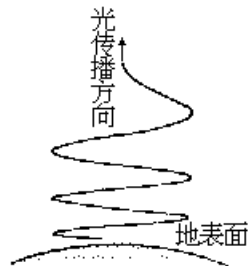


图4-10 引力红移

例 4.3 求远处星光的红移。

解: 对于较大的  $H$ , 引力红移的计算需用另一势能形式:

$$dU(z) = \frac{Gm}{(R+z)^2} dz$$

这样积分变成

$$\int_{\nu_e}^{\nu_0} \frac{d\nu}{\nu} = -G \frac{m}{c^2} \int_0^H \frac{dz}{(R+z)^2} = - \frac{Gm}{c^2 R} \frac{H}{R+H}$$

对  $H \gg R$ , 观察到的频率  $\nu_0$  将是

$$\nu_0 = \nu_e \exp \left( - \frac{Gm}{c^2 R} \right) \approx \nu_e \left( 1 - \frac{Gm}{c^2 R} \right)$$

从广义相对论得到的精确结果是

$$v_0 = v_e \left( 1 - \frac{2Gm}{c^2 R} \right)^{1/2} \quad v_e \left( 1 - \frac{Gm}{c^2 R} \right)$$

当然，最后一步近似只有满足下列条件才成立：

$$\frac{2Gm}{c^2 R} = \left( \frac{v_E}{c} \right)^2 = \frac{r_g}{R} \ll 1$$

即弱引力条件，这是可以想见的。

根据以上观点，从黑洞 ( $R \sim r_g$ ) 发射的信号将无限红移  $v_0 \rightarrow 0$ 。白矮星的致密性  $m/R$  较大，因此来自白矮星的信号红移也较明显：

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = -5.9 \times 10^{-5} \quad (\text{计算})$$

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = -6.6 \times 10^{-5} \quad (\text{观测})$$

为了知道频率的移动，可以比较某些元素的特征谱线。图 4-11 是太阳光谱 (solar spectrum) 的一部分。钙的 K 和 H 两条谱线特别容易辨认。例如，我们可以将接收到的谱线中 K+H 的相对位置和地球上钙的 K+H 线的位置作比较，从而知道频率的变化。

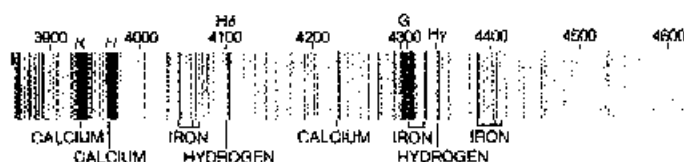


图4-11 太阳光谱的一部分

引力塌缩 (Gravitational collapse) 是星体形成和演化的重要机制。但是，星体的形成和演化是很复杂的，是天体物理的专门研究课题。这里仅讨论一个简单的模型：一团冷的、弥散的尘埃或氢原子云在它们自己的引力的作用下收缩。在此过程中，它们的势能减小而动能增加。特别是在中心区域，密度和温度增加更快。随着温度的增加，气体辐射能量，能量守恒关系为

$$-U = E_k + E_{\text{rad}}$$

在这一阶段，其体积可能为星体的 10 倍，而温度在  $10^3\text{K}$  数量级。云团进一步收缩致使中心温度达  $10^7\text{K}$ ，核聚变反应发生。辐射产生外向压力使收缩停止，星体形成并处于稳定期。然而，一旦氢燃料耗尽，引力收缩将重新进行直到氢聚变开始。这时压力增加，把外层向外推，导致表面变大，能量密度和温度降低。这是红巨星 (red giant) 阶段。这种收缩——停止的过程反复进行，伴随着碳、氧直至铁 ( $^{56}\text{Fe}$ ) 的形成。这时就没有核燃料可以用来制止塌陷了。通过新星 (nova) 或超新星 (supernova) (例如中国历史上记载的 1054 年的“客星”，其残迹蟹状星云，1987A 等都是) 爆炸阶段，星体可能塌陷到白矮星、中子星或黑洞，其命运取决于质量。原始质量小于钱德拉塞卡 (Chandrasekhar) 极限质量 ( $1.4m_\odot$ ) 则为白矮星，小于奥本海默 (Oppenheimer) 极限质量 ( $2 \sim 3m_\odot$ ) 则为中子星；当质量大至  $3m_\odot$  时塌陷为黑洞。黑洞的可能候选对象是

下面，我们尝试用经典力学来处理塌缩问题。星体外层的运动方程是

$$\ddot{x} = -\frac{Gm}{x^2} = -\frac{r_g c^2}{2x^2} \quad (4.3.7)$$

对于初始条件：\$t = 0\$, \$\dot{x} = 0\$, \$x = R\$, 可以得到

$$\dot{x}^2 = r_g c^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right) \quad (4.3.8)$$

或

$$\dot{x} = -c\sqrt{r_g} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right)^{\frac{1}{2}}$$

再次积分

$$\int_R^{r_g} \frac{dx}{\left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right)^{\frac{1}{2}}} = -c\sqrt{r_g} \int_0^{t_0} dt$$

可得星体塌缩到引力半径所需的时间是

$$\begin{aligned} t_0 &= -\frac{1}{c\sqrt{r_g}} \int_R^{r_g} \frac{dx}{\left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{R}{c} \sqrt{\frac{R}{r_g}} \int_{\frac{r_g}{R}}^1 \frac{dx}{\left( \frac{1}{x} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{R}{c} \sqrt{\frac{R}{r_g}} \end{aligned}$$

其中的积分项为

$$I = 2 \left[ \arcsin \sqrt{1 - \frac{r_g}{R}} + \frac{r_g}{R} \sqrt{1 - \frac{r_g}{R}} \right]$$

对于太阳, \$m = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}\$, \$R = 6.96 \times 10^5 \text{ km}\$,

$$\frac{r_g}{R} = \frac{2.95}{6.96 \times 10^5} = 4.24 \times 10^{-6} \ll 1$$

积分结果为 \$I\$ . 于是 (实际上太阳质量不够大, 不足以塌缩成黑洞)

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{R}{c} \sqrt{\frac{R}{r_g}} = 3.1416 \times \frac{6.96 \times 10^5 \text{ km}}{2.99792 \times 10^5 \text{ km/s}} \sqrt{\frac{1}{4.24 \times 10^{-6}}} \\ &= 3.54 \times 10^3 \text{ s} \quad (4.3.9) \end{aligned}$$

下面我们来写一个球状冷星的平衡方程, 设其密度 可随 \$r\$ 变化:

$$[p(r) - p(r + dr)] dS - G \frac{m_{<r} p(r)}{r^2} dS dr = 0 \quad (4.3.10)$$

$$\text{式中 } m_{<r} = \int_0^r (r) 4\pi r^2 dr$$

压强 \$p\$ 由下列方程决定:

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{m_{<r} p(r)}{r^2}$$

$$(r=R) = 0$$

$$(4.3.11)$$

压力可有不同的起源, 比如说运动学的、辐射或量子力学的等等. 完整的解需要关于物态方程的进一步知识.



在广义相对论中，相应的方程为

## § 4.4 开普勒问题和散射

孤立的双星系是二体系统，它们处于星际空间深处，远离其它天体的影响。这种情况下，力作用在物体的连线上，称作有心力，施力物体为力心。另一类二体问题是碰撞。对此我们更关心的是动量的变化而不是作用力。有关碰撞的问题将在下一章中讨论。

选取一原点为 0 的惯性系来描述两质点体系的运动，如图 4-12 所示，运动方程为

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -f(r) \mathbf{r} \quad (4.4.1)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = f(r) \mathbf{r} \quad (4.4.2)$$

式中

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

$f > 0$  适用于引力、库仑力、弹性力等；

$f < 0$  适用于库仑力。

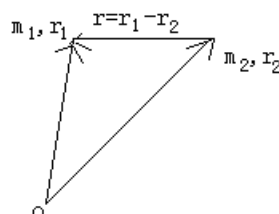


图4-12 二体问题

(1) 由于运动方程右边相对位置矢量的存在，方程组不能分解。先用以下方法加以处理。

将 (4.4.1) 式与 (4.4.2) 式两边对应相加，有

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0 \quad (4.4.3)$$

将 (4.4.1) 式两边除以  $m_1$ ，(4.4.2) 式两边除以  $m_2$  再对应相减，有

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) f(r) \mathbf{r} \quad (4.4.4)$$

定义

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= m_c \\ m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 &= m_c \mathbf{r}_c \\ \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} &= \frac{1}{\mu} \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

式中  $\mathbf{r}_c$  是“质心”的位置矢量， $\mu$  称为约化质量 (reduced mass)。用这两个量，运动方程可以写作：

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = 0 \quad (4.4.6)$$

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -f(r) \mathbf{r} \quad (4.4.7)$$

(4.4.6) 式的解给出了运动的趋势，而 (4.4.7) 式的解提供了运动的细节——两质点之间的相对运动。看起来 (4.4.7) 式像是以  $m_2$  为坐标原点的  $m_1$  的运动方程，实际上它有着更令人注目的结构：力仍为原来两质点之间的作用力，而质量为约化质量。两质点相对于质心的运动，容易由相对运动解表达：

$$r_1 - r_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r; r_2 - r_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r$$

当选质心作为参考系原点时，总线性动量为零，此参考系称为质心系（COM frame）。从（4.4.6）式可知质心系是一个惯性系。在质心系中，两质点和质心共线，两速度矢量反平行。

（2）在按常规求解上面的方程之前，我们先讨论一下有心力对运动的影响。

对于有心力，力矩将是

$$M = r \times f(r) = 0 \quad (4.4.8)$$

按照（3.5.10）式，角动量守恒：

$$L = r \times p = C \quad (C \text{ 为常矢量})$$

这将导致以下结果：

·  $r$  和  $p$  共面，两者都处于垂直于常矢量  $L$  的平面内（采用平面极坐标系表述较方便，见图 4-13）。

$$\dot{L} = r \times \mu (\dot{r} e_r + r \ddot{r} e_r) = \mu r^2 \dot{\theta} k$$

· 面积速度（开普勒第二定律）：

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2\mu} = \text{常量}$$

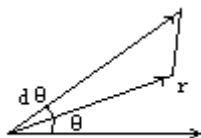


图4-13 面积速度

·  $\dot{\theta}$  永不改变方向。

（3）求解一次积分。

现在我们集中讨论（4.4.7）式。它可以写为分量形式：

$$\mu (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = -f(r) \quad (4.4.9)$$

$$\mu (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) = 0 \quad (4.4.10)$$

（4.4.10）式将导致

$$\mu r^2 \dot{\theta} = \text{常量} \quad (4.4.11)$$

利用这一结果，对（4.4.9）式积分得

$$\frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r) = E \quad E \text{ 为常量} \quad (4.4.12)$$

式中

$$U(r) = -G \frac{m' m}{r} - \frac{k}{r} \quad (4.4.13)$$

（4.4.12）式即能量守恒。也可以将（4.4.12）式写作：

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \quad (4.4.14)$$

(4) 再一次离开常规步骤，作有效势能曲线. 如果我们知道了势，就可以作有效势能曲线并大致知道轨道形状. 图 4-14 中标明了几种可能的轨道.\* 在图 4-14 中，如何画不同轨道的径向动能和有效势能对应的线段？

(4.4.14) 式形式上类似于一维表示式，但是要注意其不同点. 对圆轨道，总能量等于有效势能，这是否意味动能为零呢？绝对不是. 有效势能包括了横向运动的动能.

(5) 至此我们完全可以求解出各种情况下的解  $r(t)$ . 但是我们再作一次改变，来求轨道方程  $r = r(\theta)$ . 为此，可以把对时间的求导变为对角度的求导：

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} \quad (4.4.15)$$

将上式代入 (4.4.14) 式，有

$$d\theta = \frac{L}{\mu r^2 \left\{ \frac{2}{\mu} \left[ E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - U(r) \right] \right\}^{1/2}} dr$$

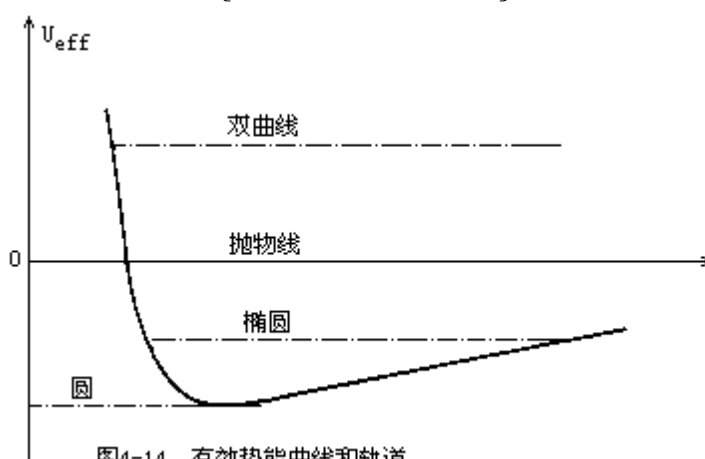


图4-14 有效势能曲线和轨道

对于 (4.4.13) 式表示的引力势能，有

$$d\theta = \int \frac{L}{\mu r^2 \left\{ \frac{2}{\mu} \left[ E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r} \right] \right\}^{1/2}} dr \quad (4.4.16)$$

积分得到

$$= \arccos \frac{\frac{L}{r} - \frac{\mu k}{L}}{\left\{ \frac{\mu^2 k^2}{L^2} + 2\mu E \right\}^{1/2}} + \theta_0$$

或

$$\cos(\theta - \theta_0) = \frac{\frac{L}{r} - \frac{\mu k}{L}}{\sqrt{1 - 2\mu E \frac{L^2}{\mu^2 k^2}}} \quad (4.4.17)$$

式中 $e$ 是离心率 (eccentricity) , 而 $p = \frac{L^2}{\mu k}$ . 按照离心率和  $p$  的定义, 有

$$E = - ( 1 - e^2 ) \frac{k}{2p} \tag{4.4.18}$$

(4.4.17) 式可以写成标准形式:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \tag{4.4.19}$$

按照离心率将轨道进行分类的情况, 见表 4-2.

离心率	能量	轨道
$e=0$	$E = -\frac{k}{2p}$	圆
$0 < e < 1$	$-\frac{k}{2p} < E = -\frac{k}{2a} < 0$	椭圆
$e=1$	$E=0$	抛物线
$e > 1$	$E > 0$	双曲线

对于椭圆轨道, 有

$$r_{min} = r \frac{p}{1 + e} \quad r = \frac{p}{1 - e} \quad r_{max} \tag{4.4.20}$$

椭圆的半长轴 (semimajor axis) 是

$$a = ( r_{min} + r_{max} ) / 2 = p / ( 1 - e^2 )$$

半短轴 (semiminor axis) 是

$$b = \sqrt{ap}$$

根据开普勒第二定律, 在时间  $t$  内扫过的面积是

$$A = \int \frac{dA}{dt} dt = \frac{L}{2\mu} t$$

而周期  $T$  正是扫过整个椭圆面积需要的时间

$$T = \frac{2\mu}{L} ( \pi ab ) = \frac{2\mu\pi}{L} a^{3/2} \sqrt{p}$$

代入  $k$  和  $p$  的表达式 (  $m_1, m, m_2, m$  ) , 有

$$T = 2 \pi a^{3/2} \sqrt{\frac{1}{G(m'+m)}} \quad (\text{牛顿})$$

$$T = 2 \pi a^{3/2} \sqrt{\frac{1}{Gm}} \quad (\text{开普勒}) \tag{4.4.21}$$

对于  $E > 0$ , 轨道是双曲线. 取  $\theta_0=0$ , 轨道相对于极轴对称. 假定初速为  $v_0$ , 对  $r \rightarrow \infty$ , 总能量为同时, 总的角动量是  $\mu v_0 b$ , 这里  $b$  是碰撞参量, 如图 4-15 所示. 对于  $r \rightarrow \infty$  时的角度  $\theta$ , 有

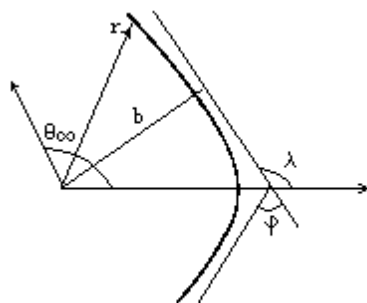


图4-15 散射

$$\cos \theta_{\infty} = -1/e$$

图中的角度  $\theta_{\infty}$  称为“散射角”.从几何关系可知  $\theta_{\infty} = 2\alpha - \pi$ , 而

$$\tan \frac{\phi}{2} = -\cot \alpha = \frac{k}{2Eb} \quad (4.4.22)$$

至此,我们从引力公式得到了行星运动的规律.回想起托勒密为了描述行星运动曾用了 70 个球面,哥白尼用了 46 个球面,更早还有柏拉图 (Plato) 的学生 Eudoxus 曾用 27 个同心球面,而亚里士多德 (Aristotle, 384—322BC) 也用过 56 个球面,而现在一个行星一个椭圆,何其简洁!再者,开普勒得到的是经验定律,而现在是从引力公式出发得到了更精确的结果[注意(4.4.21)式中两者的差别].由此,我们不难理解万有引力定律及其结果的美学价值.

## § 4.5 引力场

牛顿万有引力定律为

$$F_{21} = -G \frac{m^1 m^2}{r_{12}^3} r_{12}$$

这反映的是一种瞬时的超距作用.按照现代观点,质点或连续分布物体周围存在一个引力场,位于场中的任何其他质点将受到引力作用,引力场的强度可通过检验质点  $m$  所受的力来定义:

$$g_f = \frac{F}{m} = -\frac{Gm'}{r^3} r \quad (4.5.1)$$

力是可加的,既然引力场通过力来定义,其强度也是可加的:

$$g_f = -\sum_i \frac{Gm_i}{r_i^3} r_i \quad (4.5.2)$$

例 4.4 在一密度为  $\rho$  的均匀球内有一球形空腔,两球心距离为  $l$ ,见图 4-16.求空腔内的引力场强.



图4-16

解:我们可以想象这是两个球形质量的场的差.场强的形式为

$$\begin{aligned} g(r) &= -G \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \right) \frac{r}{r^3} \\ &= -\frac{4}{3} G \rho r \end{aligned}$$

于是空腔内的场

$$\begin{aligned} g &= g(r) - g(r) \\ &= -\frac{4}{3} G \rho l \end{aligned}$$

讨论:阴影部分中的引力场是怎样的呢?

考虑地球表面一个物体  $m$  仅受重力作用.如果  $m$  是在惯性系中,力是  $F = mg_f$ ,加速度是  $a = F/m = g_f$ .如果  $m$  是在一个加速度为  $u$  的加速系中,加速度是  $\dot{v} = \dot{v} - \dot{u}$ ,而不是  $\dot{v} = g_f$ .如果参考系也受到同样的引力作用被加速而作自由下落或轨道运动,这时物体  $m$  相对于这一参考系静止而根本没有重力加速度.\*例如,在地球的引力场中,轨道卫星和其中的物体都经受重力.此时重力恰恰是轨道运动的向心力,卫星和其中的物体有着相同的向心加速度.在卫星参考系中物体则是相对静止的.这说明场强  $g_f$  始终存在,而运动学量加速度则取决于观察者(参考系).

“称重”通常是在相对静止的参考系中进行的.在非惯性系中,我们应当加上惯性力的影响.

\*高斯定律 (Gauss's law)

对于一个矢量场  $g_f$ , 我们可以定义通过面积元  $dS$  的无限小通量 (flux):

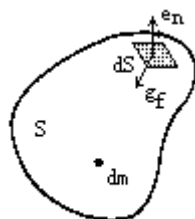


图4-17 通量

$$d = g_f \cdot dS$$

引力场的高斯定律说:

$$\Phi = \oint_S g_f \cdot dS = -4\pi G m_{in} \quad (4.5.3)$$

式中  $m_{in}$  为曲面  $S$  所围物体的质量. 利用质点的引力场表达式可以求得通量值.

如图 4-17 所示, 由质量元  $dm$  形成的场  $g_f$  通过曲面  $S$  的通量为

$$\begin{aligned} d &= - \left( G \frac{dm}{r^3} r \right) \cdot dS \\ &= -G \, dm \left( \frac{r \cdot dS}{r^3} \right) \\ &= -G \, dm \, d\Omega \quad (4.5.4) \\ &= -4\pi G dm_{in} \end{aligned}$$

其中

$$d\Omega = \frac{r \cdot dS}{r^3} \quad (4.5.5)$$

是矢量  $r$  的原点 (即质量元  $dm$  处) 对  $dS$  所张的立体角.

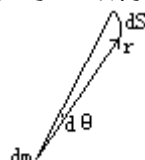


图4-18  $dm$  所张的角

我们可以从二维的情形作一些类比. 如图 4-18 所示, 设弧  $ds$  的方向为其法线方向, 则

$$\frac{r}{r^2} \cdot ds = d\Omega$$

即为  $dm$  所张的角. 可以求得平面上一点对包围它的闭曲线所张的角为  $2\pi$ , 而对于不包围它的闭曲线所张的角为 0. 在三维空间中, 一点对包围它的闭曲面所张的立体角为  $4\pi$ , 而闭合面以外的点对其张的立体角为 0. 由此, 我们得到高斯定律:

$$\oint_S g_f \cdot dS = -4\pi G m_{in} \quad (4.5.6)$$

对于对称的高斯面, 通量比较容易求出.

从 (3.6.7) 式可知, 保守力可以用势能来表示:

$$F = -\nabla U$$

所以场强是



$$g_f = \frac{F}{m} = -\nabla \frac{U}{m} \quad -\nabla V \quad (4.5.7)$$

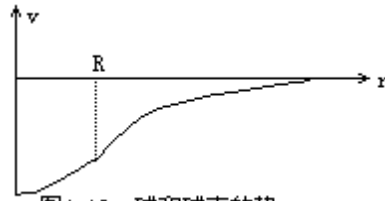


图4-19 球和球壳的势

其中  $V$  称为引力场的势 (potential). 从  $U$  的知识我们知道,  $m$  周围的势是

$$V = -\frac{Gm}{r} + C \quad (4.5.8)$$

对于半径为  $R$  的球壳或均匀密度的球, 势的曲线如图 4-19 所示.

具有相等势的各点所形成的曲面叫等势面 (equipotential surfaces). 为了讨论方便起见, 我们常取等势间隔:

$$dV = C = \frac{Gm}{r^2} dr \quad (C \text{ 为常量}) \quad (4.5.9)$$

这样等势面在空间上的间距将是不相等的, 正比于  $r^2$ .

场矢量垂直于等势面, 并指向势减小的方向. 这点我们将在电学中作深入讨论.

引潮力 (9) (tidal force) 是潮汐生成的原因, 主要来源于月亮和太阳. 下面对它作一些讨论.

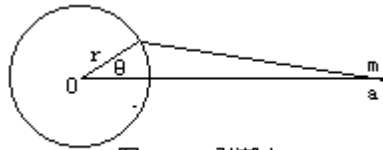


图4-20 引潮力

首先考虑月球的影响, 如图 4-20 所示, 月球  $m$  在地面  $r$  处的引力场强度是

$$g_f(r) = -\frac{Gm}{|r-a|^3} (r-a) \quad (4.5.10)$$

相应的势是

$$V(r) = -\frac{Gm}{|r-a|} = -\frac{Gm}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2az}} \quad (4.5.11)$$

为了对该式作近似处理, 我们可以利用下面的矢量的标量函数的泰勒展式来展开式中的因子  $1/|r-a|$ :

$$\begin{aligned} f(a+d) &= f(a) + (d \cdot \nabla) f(a) \\ &\quad + \frac{1}{2!} (d \cdot \nabla)^2 f(a) + \dots \end{aligned}$$

也可以直接展开  $1/\sqrt{a^2 + r^2 - 2az}$  到  $(r/a)^2$ , 势为

$$V(r) = -\frac{Gm}{a} \left[ 1 - 2\frac{z}{a} + \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$= -\frac{Gm}{a} \left[ 1 + \frac{r}{a} \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 (3\cos^2 \theta - 1) + \dots \right] \quad (4.5.12)$$

$$V_0 + V_1 + V_2 + \dots$$

其中第一项是常量，对场强没有贡献.总场强可以写作：

$$g = \frac{Gm}{a^2} \mathbf{k} + g_r \mathbf{e}_r + g_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (4.5.13)$$

这里第一项是主导项，加速整个地球；在非惯性系中，它被惯性力抵消.而

$$g_r = -\frac{\partial V_2}{\partial r} = \frac{Gmr}{a^2 a} (3\cos^2 \theta - 1)$$

$$g_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} = -\frac{Gm}{a^2} \frac{r}{a} (3\cos \theta \sin \theta) \quad (4.5.14)$$

是潮汐现象的主要项.可以将它们与地球的引力场作比较：

$$\frac{g_m}{g_\oplus} \sim \frac{m}{m_\oplus} \left(\frac{r}{a}\right)^3 = \left(\frac{7.36 \times 10^{22}}{5.98 \times 10^{24}}\right) \left(\frac{1}{60.3}\right)^3 = 5.60 \times 10^{-8}$$

而太阳的效应更小，

$$\frac{g_\odot}{g_\oplus} \sim \frac{m_\odot}{m_\oplus} \left(\frac{r}{a_{SE}}\right)^3 = \left(\frac{1.99 \times 10^{30}}{5.98 \times 10^{24}}\right) \left(\frac{6.37 \times 10^6}{1.496 \times 10^{11}}\right)^3 = 2.57 \times 10^{-8}$$

图 4-21 中画了新月或满月时的大潮 (spring tides) 与小潮 (neap tides). 潮力不仅作用在水上也作用在大气和固体上.

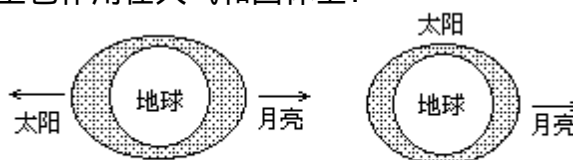


图4-21 大潮和小潮

#### \* 潮力撕裂 (tidal disruption)

考虑一质量为  $m$ 、半径为  $R$  的星体，在相距  $a$  处有一质量为  $m$ 、半径为  $r$  的伴星 (accompaniment). 假定伴星以角速度  $\omega$  旋转，考虑其中一个离其中心  $O$  处的小质量元  $m$ ，不妨设其在赤道平面上 ( $\theta = 0$ )，如图 4-22 所示，它所受的惯性离心力和潮力分别为

$$F_{\text{centrifugal}} = m \omega^2 a, \quad F_{\text{tidal}} = \frac{GM}{a^2} \frac{2\rho}{a} m,$$

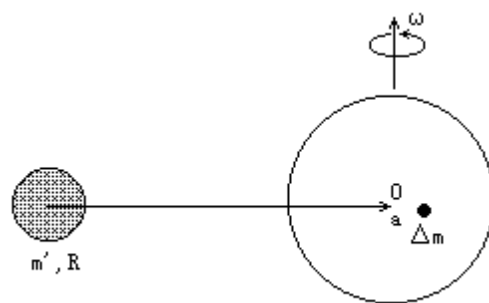


图4-22 潮力撕裂

而将  $m$  吸向伴星中心的引力是

$$G \frac{m \Delta m \rho}{r^2} \frac{1}{r}$$

所以撕裂条件是

$$m \left( \frac{2Gm'}{a^3} + \omega^2 - \frac{Gm}{r^3} \right) = 0$$

对于最简单的情形，即非旋转伴星，撕裂条件是

$$a = r \left( \frac{2m'}{m} \right)^{1/3} = 1.26r \left( \frac{m'}{m} \right)^{1/3}$$

如果伴星的自转速度等于公转速度，即

$$\omega^2 = \frac{G(m'+m)}{a^3} = \frac{Gm'}{a^3}$$

撕裂条件为

$$a = r \left( \frac{3m'}{m} \right)^{1/3} = 1.44r \left( \frac{m'}{m} \right)^{1/3} = 1.44R \left( \frac{\rho_{m'}}{\rho_m} \right)^{1/3}$$

这一表达式非常接近于适合于流体伴星的洛希极限 (Roche limit)：

$$a_c = 2.45539R \left( \frac{\rho_m}{\rho_{m'}} \right)^{-1/3}$$

如密度比类似于月球和地球即 3.3/5.5，则临界距离为

$$a = 1.5R_{\oplus}$$

彗星如果过于接近太阳或木星，将会破裂为两块或更多块。1994 年 6 月苏梅克-列维彗星 (comet Shoemaker-Levy 9) (10) 和木星相撞为此提供了生动的研究课题。

\*引力辐射 (gravitational radiation) (11) (12)

引力可以以波的形式辐射。如果要到达可检测水平，则必须有巨大的质量运动或变动。脉冲星、准星体、超新星 (爆炸) 以及星系核心都是引力辐射的可能来源。例如，最近的超新星爆炸 SN 1987A (supernova) 就是检测引力辐射的一个机会。即使如此，引力辐射的检测仍然是极其艰难的任务，它所要求的检测仪器的灵敏度实在太高了。

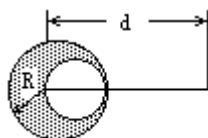
## 习 题

4.1. 一中子星半径为 20km，转速为 1.0/s。它应有怎样的质量，表面物体才不会被甩出去？

4.2. 轮船沿地球的赤道航行, 该船上一弹簧秤下悬挂一物体. 设轮船的航行速度为  $v$ , (a) 证明弹簧秤的读数为  $W_0(1 \pm 2v/g)$ , 其中  $W_0$  是轮船静止时弹簧秤的读数,  $\omega$  是地球自转的角速度; (b) 解释该结果中出现的加减号的意义.

4.3. 巴黎和伦敦用一条直的地下铁道连结. 两城市间的火车在重力作用下运行. 试计算火车的最大速度以及从伦敦到巴黎旅行所用的时间. 两城市间的距离为 300km, 地球半径为 6400km, 忽略摩擦.

4.4. 一半径为  $R$  的铅制球体中有一位于球体表面与中心之间的空洞, 如图所示. 设铅球未挖空前质量为  $m$ , 试求这一中空铅球与球外一质量为  $m$  的质点之间的引力; 该质点位于铅球和空洞的连心线上, 与铅球的中心距离为  $d$ .

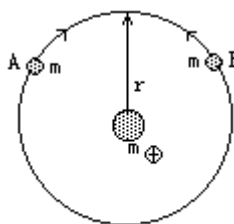


题4.4图

4.5. 一质量为 220kg 的卫星起初在距离地球表面 640km 的轨道上运动, (a) 确定其速度; (b) 求其周期. (c) 由于多种原因, 卫星每运行一周平均损失机械能  $1.4 \times 10^5 \text{J}$ . 作为近似, 可认为卫星的轨道是一个半径逐渐变小的圆形, 试确定卫星运行了 1500 圈后与地球表面的距离、速度及周期; (d) 求平均阻力的大小. (e) 在此过程中角动量是否守恒?

4.6. 估算一下人通过跳跃就能脱离的小行星的半径有多大.

4.7. 考虑两个具有相等质量  $m$  的卫星 A 和 B, 它们在相同的轨道  $r$  上环绕地球运动, 但是方向相反, 故它们在某个时候将发生碰撞 (如图). (a) 用  $G$ 、 $m_{\oplus}$ 、 $m$  和  $r$ , 求出碰撞前两个卫星及地球的总能量  $E_A + E_B$ ; (b) 若碰撞是非弹性的, 并且碰撞碎片依旧聚集在一起 (即质量变为  $2m$ ), 求碰撞后的总机械能; (c) 描述碰撞后碎片的运动.



题4.7图

4.8. 一火箭由地球 (半径为  $R$ ) 表面, 以速度  $v = (v_r, v_\theta)$  发射. 略去空气摩擦和地球转动 (但用精确的重力场), 试求确定火箭所达到最大高度  $h$  的方程. 将  $h/R$  作为小量, 求解该方程, 并对  $v$  是垂直向上的情形, 给出结果.

4.9. 试对均匀情形求解 (4.3.12) 式.

4.10. 一质量为  $m$  的质点沿着由  $x = x_0 \cos \omega_1 t$ ,  $y = y_0 \sin \omega_2 t$  所给定的轨道运动. (a) 求质点所受作用力的  $x$  分量和  $y$  分量. 问在什么情况下, 这个力是有心力? (b) 求势能 (作为  $x$  和  $y$  的函数). (c) 确定该质点的动能. 证明质点的总能量守恒.

4.11. 环绕地球运动的卫星, 其椭圆轨道的近地点距地球表面 300km, 远地点距地球表面 2000km, 试求卫星在轨道的近地点与远地点处的速率之比.

4.12. 质量为  $m$  的粒子受到大小为  $k/r^2$  的引力作用,  $k$  为一常量. 在某个时刻如果粒子处于其封闭轨道的一个极端, 此时与力心距离为  $a$ , 速度为  $\sqrt{k/2ma}$ , (a) 求另一个极端的位置. (b) 粒子处于另一个极端时的速度是多少?

4.13. 一质量为  $m$  的质点受到两个力的作用: 一个是有心力  $F_1 = f(r)er$ , 另一个是摩擦力  $F_2 = -\lambda v$  ( $\lambda > 0$ ), 其中  $v$  是质点的速度. 若初始时刻该质点对  $r=0$  点的角动量是  $L_0$ , 求以后各时刻质点的角动量.

$$\left[ \text{答案: } L = L_0 \exp\left(-\frac{\lambda}{m}t\right) \right]$$

4.14. 考虑一个质量为  $m$  的行星, 环绕质量为  $m'$  的恒星运动. 假定在恒星周围空间均匀分布有密度为  $\rho$  的尘埃.

(a) 证明尘埃的作用相当于增加一个附加的有心力, 其大小为  $F = -mkr$ , 式中  $k = \frac{4\pi}{3} \rho G$ ,  $G$  为引力常量. 忽略任何与尘埃碰撞的阻力.

(b) 若行星在圆轨道上运动, 角动量为  $L$ , 试利用  $L$ 、 $G$ 、 $m$  和  $k$  来表示轨道半径  $r$  所满足的方程. 不必求解方程.

$$\left[ \text{答案: } 0 = -\frac{Gm'm}{r^2} - mkr + \frac{L^2}{mr^3} \right]$$

4.15. 如果两体问题中的力是  $f(r) = -kr$ , 轨道将是怎样的?

4.16. 怎样根据轨道求力  $f(r)$ ?

4.17. 从量纲分析导出 (4.4.22) 式.

4.18. 一个球形物体以角速度  $\omega$  转动.

(a) 如果仅仅有引力阻碍球的离心撕裂, 那么该球必须具有的最小密度是多少? 利用这一点估计蟹状星云中转速为 30/s 的脉冲星的最小密度.

(b) 如果脉冲星的质量与太阳的质量相当, 它的最大可能半径是多少?

$$\left[ \text{答案: } \frac{\omega^2}{\frac{4}{3}\pi G} = \frac{3\pi f^2}{G} \quad 1.3 \times 10^{14} \text{ kg/m}^3; \right]$$

$$R \leq \sqrt[3]{\frac{m}{\frac{4}{3}\pi \rho}} \quad 150 \text{ km}]$$

## 第五章 质点系动力学

在第三章和第四章中已经研究了牛顿运动定律和万有引力定律.本章将把这些定律对单质点的应用推广到多质点系统,其中包括变质量系统、碰撞和流体等专题.多质点系统是一种抽象.当我们关心整个系统的运动而对系统中的个体只考虑平动时,就可将系统当作多质点系统.

## § 5.1 质心和质心系

现考虑  $N$  个质点组成的系统, 称为质点系. 我们希望知道系统作为一个整体, 它的运动以及各个质点相对于适当参考系的运动. 对于质点 1, 运动方程是

$$m_1 \ddot{r}_1 = F_1 + F_{12} + F_{13} + \dots + F_{1N} \quad (5.1.1)$$

或者一般地写作

$$m_i \ddot{r}_i = F_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N F_{ij} \quad (5.1.2)$$

式中,  $F_i$  是作用在第  $i$  个质点上的外力,  $F_{ij}$  是第  $j$  个质点对第  $i$  个质点的作用力. 对质点编号  $i$  求和将有

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i = \sum_i F_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} F_{ij} \quad (5.1.3)$$

定义

$$\sum_i F_i = F_{\text{ext}} \quad (5.1.4)$$

为作用在系统上的合外力; 而

$$\sum_i m_i r_i = \left( \sum_i m_i \right) r_C = m_C r_C \quad (5.1.5)$$

定义了质心 (center of mass, com), 或者更确切地说定义了质心的位置矢量. 质心并不一定是系统中的某一个点. 引入这两个量, 运动方程 (5.1.3) 式变成

$$m_C \ddot{r}_C = F_{\text{ext}} \quad (5.1.6)$$

这就给出了系统运动的总趋势. 看起来好象质量全部集中在质心, 而外力也全部作用在质心上. 质心的运动是系统作为整体的平动. 这里已经设 (5.1.3) 式中左边的第二项为零, 实际上, 根据牛顿第三定律, 该项中各个力两两成对, 就作用在整个系统上的力而言, 它们相互抵消了. 总线性动量的表达式

$$p = \sum p_i = \sum m_i \dot{r}_i = \frac{d}{dt} \sum m_i r_i = m_C \dot{r}_C \quad (5.1.7)$$

也支持上述图象, 并导致一致的结果:

$$\dot{p} = F_{\text{ext}} \quad (5.1.8)$$

根据 (5.1.5) 式, 质心的位置可以表示为

$$r_C = \frac{1}{m_C} \sum_i m_i r_i \quad (5.1.9)$$

例 5.1 在水分子中, 氢氧键长度为  $d = 0.91 \times 10^{-10} \text{m}$ , 张角为  $105^\circ$ . 求水分子的质心.

解: 取角平分线为  $x$  轴, 氧原子为坐标原点. 由于对称性, 质心位于  $x$  轴上, 故

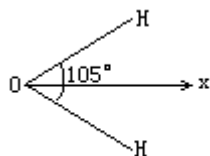


图5-1 水分子

$$x_c = \frac{2m_H d \cos \frac{105^\circ}{2}}{2m_H + m_O} = 0.62 \times 10^{-11} \text{m}$$

水分子在运动中可以作各种转动或平动，质心的运动代表它的平动。

例 5.2 求地日系统的质心。

解：取太阳中心为原点，质心位于

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{m_\oplus}{m_\oplus + m_\odot} R_{\text{ES}} = \frac{5.98 \times 10^{24} \text{kg}}{1.99 \times 10^{30} \text{kg} + 5.98 \times 10^{24} \text{kg}} 1.50 \times 10^{11} \text{km} \\ &= 4.49 \times 10^5 \text{m} \\ &= 0.645 \times 10^{-3} R \end{aligned}$$

对于连续的质量分布，质心的表达式是

$$r_c = \frac{1}{m_c} \int r dm = \frac{1}{m_c} \int r \rho dV \quad (5.1.10)$$

为了描述质点系的运动，我们常常采用实验室系（L-frame），即使用位置矢量  $r_1, r_2, \dots, r_i, \dots$ ；有时也采用质心系（C-frame），以质心为原点，利用带撇的位置矢量：

$$r_i = r_i' + r_c \quad (5.1.11)$$

由上式或质心的定义知道

$$r_c' = 0 \quad (5.1.12)$$

对质心系，总的线性动量为

$$\begin{aligned} p &= \sum m_i \dot{r}_i = \frac{d}{dt} \left( \sum m_i r_i \right) = \frac{d}{dt} (M r_c) \\ &= 0 \quad (5.1.13) \end{aligned}$$

这是质心系的主要特性。质点系的总角动量为

$$L = \sum_i r_i \times p_i \quad (5.1.14)$$

它随时间的变化率为

$$\frac{d}{dt} L = \sum_i r_i \times \left( F_i + \sum_{j=1}^n F_{ij} \right) \quad (5.1.15)$$

式中右边第一项是外力矩，而第二项



$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} &= \sum_{\substack{j,i \\ j \neq i}} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} \\
&= - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} \\
&= 0
\end{aligned}$$

上式中第二行是由于牛顿第三定律：作用力与反作用力反平行.如果不仅如此，两力还沿着两质点的连线，则称为强第三定律.根据强第三定律，第三行为零，有

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mathbf{M}_{\text{ext}} \quad (5.1.16)$$

另一方面，我们可以用相对于质心的量来表达角动量和力矩：

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \\
&= (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_C) \times \mathbf{p}_i \\
&= (\mathbf{r}_i \times m_i (\dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{r}}_C)) + \mathbf{r}_C \times \mathbf{p} \\
&= \mathbf{L}_C + m_C \mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{r}}_C + \mathbf{r}_C \times m_C \dot{\mathbf{r}}_C \\
\mathbf{M}_{\text{ext}} &= \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \\
&= (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}_i \\
&= \mathbf{M}_C + \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}_{\text{ext}} \\
&= \mathbf{M}_C + m_C \mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{r}}_C
\end{aligned}$$

式中  $\mathbf{L}_C$ 、 $\mathbf{M}_C$  分别是相对于质心的角动量和力矩.将上面的结果代入(5.1.16)式，我们可得到下列关系：

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_C = \mathbf{M}_C \quad (5.1.17)$$

现在，我们来考察功能关系：

$$\begin{aligned}
W &= \sum_i \int_{(i)}^{(f)} (\mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}) \cdot d\mathbf{r}_i \\
&= \sum_i \int_{(i)}^{(f)} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot d\mathbf{r}_i \\
&= \int_{(i)}^{(f)} d \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) \\
&= T(f) - T(i) \quad (5.1.18)
\end{aligned}$$

如果内力是保守力，则有

$$\begin{aligned}
W &= \sum_i \int_{(i)}^{(f)} \left( \mathbf{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} \right) \cdot d\mathbf{r}_i \\
&= W_{\text{ext}} + U(i) - U(f) \quad (5.1.19)
\end{aligned}$$

式中

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} U_{ij}$$

$U_{ij}$  是  $i$  和  $j$  之间的 (二体) 势能, 它可如下推得:

$$\begin{aligned} F_{12} \cdot dr_1 + F_{21} \cdot dr_2 &= F_{12} \cdot d(r_1 - r_2) \\ &= -\nabla U_{12} \cdot dr_{12} \quad (5.1.21) \end{aligned}$$

结合 (5.1.18) 式, 有

$$W_{\text{ext}} = U(f) - U(i) + T(f) - T(i) \quad (5.1.22)$$

即外力做功等于系统能量的增加. 如果外力中有一部分也是保守力, 这部分外力所做的功  $W_{\text{ext}}$  可以写为

$$W_{\text{ext}} = \sum_i U_i \Big|_i - \sum_i U_i \Big|_f \quad (5.1.23)$$

这种 (单体) 势能可以合并到 (5.1.20) 式的势能表达式中, 我们有 (非保守部分) 外力做功等于机械能增加. 外力全部为保守力时则仍然有机械能守恒.

值得注意, 一般惯性系中的动能与质心系中的动能只差一个常量:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{r}_i + \dot{r}_C) \cdot (\dot{r}_i + \dot{r}_C) \\ &= \frac{1}{2} m_C v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \dot{r}_C \cdot \sum_i m_i \dot{r}_i \\ &= T_C + \sum_i T_i \quad (5.1.24) \end{aligned}$$

例 5.3 求拉起一根长为  $l$  的绳子所做的功.

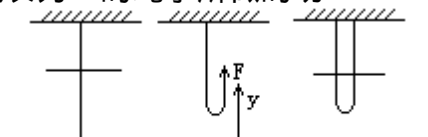


图5-2 例5.3

解: 如图 5-2, 取  $y$  轴向上, 得

$$F(y) = \frac{1}{2} \left( \frac{m}{e} y \right) g$$

$$\text{而功 } W = \int_0^l F(y) dy = \frac{1}{4} mgl$$

利用质心表示以及功能关系 (5.1.22) 式, 立即可以得到

$$W = mg \left( \frac{3}{4} l \right) - mg \left( \frac{1}{2} l \right) = \frac{1}{4} mgl$$

\*在跳高中, 运动员总是采取质心较低的姿势. 这样, 越过一定的高度需要较少的能量, 或者说, 对一定的爆发力可以越过更高的高度. 例如, 采取俯卧式 (straddle jump) 或背越式 (Forsbury flop), 质心甚至可低于横杆.

有时质点系中的质点会受到一定约束 ( constraints ) .例如 , 位置矢量可能受到以下面的约束 :

$$f ( r_1 , r_2 , \dots , [t] ) = 0$$

对于一个刚体 , 则有

$$|r_i - r_j| = c_{ij}$$

## § 5.2 变质量系

当系统吸收或抛弃部分质量时，我们可以将系统作为变质量系（system of variable mass）来处理。这类例子有雨点、火箭、传输带等等；黑洞的间接例证，如 Cygnus X-1 等也在其中。当黑洞和伴星组成双星时，就有从伴星流向黑洞的吸积流，作为变质量系统，伴星的公转周期由此而变化。

现在用火箭作为例子，来推导出这种系统的一般方程。设在时刻  $t$ ，火箭的质量和速度分别为  $m$ 、 $v$ ；而在时刻  $t + \Delta t$ ，它们分别为  $m(t + \Delta t) = m(t) - \Delta m$  以及  $v + \Delta v$  [注意： $m(t + \Delta t) = m(t) + dm$ ]，而  $m$  的速度是  $u$ ，如图 5-3 所示。这样系统和  $m$  一起总动量的平均变化率是

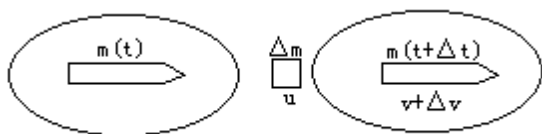


图5-3 变质量系统

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{[(m - \Delta m)(v + \Delta v) + (\Delta m)u] - mv}{\Delta t} \\ &= m \frac{dv}{dt} + [u - (v + \Delta v)] \frac{dm}{dt} \end{aligned}$$

当时间间隔  $\Delta t$  趋向于零时，差商趋向于导数：

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} + (u - v) \left( - \frac{dm}{dt} \right) \quad (5.2.1)$$

同时，总外力即为作用在  $M(t)$  上的外力。因此，有运动方程

$$m \frac{dv}{dt} = F_{\text{ext}} + (u - v) \frac{dm}{dt} \quad (5.2.2)$$

当然，我们也可以直接用牛顿第二定律

$$F = \frac{d}{dt} (mv)$$

来分析变质量系统。要点是将上述方程用于总质量不变的整个体系，然后再小心认定你要研究的系统的那一部分。

例 5.4 已知火箭从静止开始发射，质量为  $m_0 = 2.72 \times 10^6 \text{ kg}$ 。火箭以

$$- \frac{dm}{dt} = C = 1.29 \times 10^3 \text{ kg/s}$$

速率喷射气体。气体喷出速度（exhaust speed）为  $v_{\text{rel}} = 5.50 \times 10^4 \text{ m/s}$

求 火箭质量为  $m_f = 2.52 \times 10^6 \text{ kg}$  时的速度  $v_f$ 。

解：从所给的数据可知加速时间是  $t = 155 \text{ s}$ 。

$$m \frac{dv}{dt} = mg + v_{\text{rel}} \frac{dm}{dt}$$

取  $z$  轴向上，我们有

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v_{\text{rel}}}{m} \frac{dm}{dt} = -g$$

$$\int_{v_0}^{v_f} dv + v_{\text{rel}} \int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} = -g \int_0^t dt$$

$$v_f = v_0 + v_{\text{rel}} \ln \left( \frac{m_0}{m_f} \right) - gt$$

$$= 2.68 \times 10^3 \text{ m/s}$$

如果考虑重力加速度  $g$  对  $z=R_{\oplus}+h$  的依赖性，我们有以下方程：

$$\frac{d^2 z}{dm^2} + \frac{g_0 R_{\oplus}^2}{C^2} \frac{1}{z^2} = \frac{v_{\text{rel}}}{C} \frac{1}{m}$$

例 5.5 求传输带的功率。

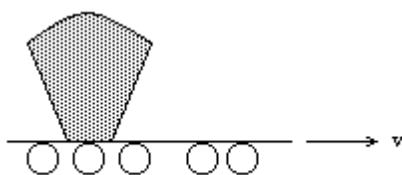


图5-4 传输带 例5.5

解：如图 5-4 所示，传输带速度恒定，相对速度和运动方程为

$$u=0$$

$$0 = F_{\text{ext}} + (0 - v) \frac{dm}{dt}$$

功率是

$$P = F_{\text{ext}} \cdot v = v \frac{dm}{dt} \cdot v = 2 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right)$$

## § 5.3 碰撞

碰撞的物理定义有多种，例如：

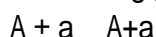
- 一种遭遇；
- 一种以脉冲力相互作用的过程；
- 两质点交换它们动量和能量的过程。

我们倾向于第三种说法，但一般限于指相互作用力程较短或可以较明确地说明其持续期的过程。气体分子间的相互作用常采用伦纳德—琼斯势 (Lennard-Jones potential) 来描述：

$$U = 4 \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] \quad (5.3.1)$$

它显示了作用力的力程很短。长程相互作用物体之间的碰撞，如所谓的库仑散射，则是专门的课题。

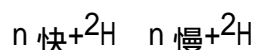
经常发生碰撞的宏观物体有天体 (celestial bodies)、桌球 (billiards)、气垫导轨上的滑块 (riders on air track) 等等。我们也常常提及气体分子间的碰撞以及原子、原子核、基本粒子间的碰撞等等很多例子。这些例子还包括“散射” (scattering)：



例如，导致原子核发现的卢瑟福 (Rutherford) 散射：



又例如裂变 (fission) 中减速剂 (moderator) 造成的中子的减速过程：

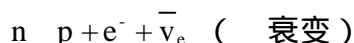


其中  ${}^2\text{H}$  是重水中的氘核 (deuteron)。

在更广的意义上，我们可以把下列过程都算作碰撞，如核反应及衰变：



粒子间的碰撞、反应及衰变：



在碰撞问题中，细节往往难于测量，特别是微观领域的情形。通常我们只研究碰撞物体的（近于自由态的）初态和末态，而将细节留在“黑盒子”中，图 5-5 是这种情况的示意图。我们可以从初态  $i$  来求末态  $f$ ，或反之。当然，我们也可以期望从  $i$  态和  $f$  态获得相互作用的信息；反散射方法 (inverse scattering method) 就是旨在根据散射求相互作用的一种研究手段。“黑盒子”思想在很多领域都有广泛的应用；如在电子学中，我们可以从输入和输出讯号来找出电路网络或功能集成块的结构；又如医学诊断 (diagnose)，在大多数情形下并不进行解剖，而是根据体表的征兆对体内病变作出判断。

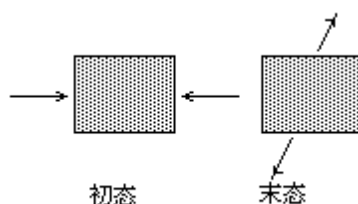


图5-5 碰撞前后的状态

在通常的碰撞问题中，相互作用较强而持续期较短，外力可以忽略。于是

我们可以对 i 态和 f 态应用动量和能量守恒：

$$p_i = p_f$$

$$T_i + U_i = T_f + U_f$$

式中 U 包括了碰撞对象间的势能和各对象的内能。

定义反应能 (reaction energy) 为

$$Q = T_f - T_i = U_i - U_f \quad (5.3.2)$$

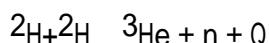
宏观上它是热能，微观上它可以是粒子的动能。如果粒子存在内部结构，还可以是内能。

$Q=0$ ，相应于弹性碰撞，机械能守恒。 $Q>0$ ，相应于放热反应 (exothermic reaction)，例子有聚变、裂变、爆炸等等，实际上是其它来源提供了能量而使动能增加。 $Q<0$ ，相应于吸热反应 (endothermic reaction)，期间部分动能转变为其它形式的能量。

不同类型的碰撞可能涉及到不同的技术问题和专门的领域。例如，在下列反应中：



由于有中微子 (neutrino) 介入，我们必须用相对论的动量能量关系；而在聚变过程中：



我们关注的则是 Q 值，

$$Q = \left( \sum m_0 c^2 \right)_i - \left( \sum m_0 c^2 \right)_f \quad (5.3.3)$$

最简单的碰撞发生在一维——正碰 (head-on)，如图 5-6 所示。首先我们讨论弹性碰撞，即  $Q=0$ 。趋近速度和分离速度定义为

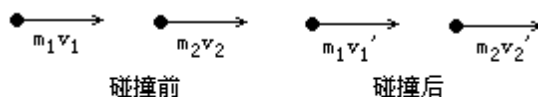


图 5-6 正碰

$$v_{app} = v_1 - v_2, v_{sep} = v_2' - v_1' \quad (5.3.4)$$

动量守恒和能量守恒分别是

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (5.3.5)$$

$$Q + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (5.3.6)$$

注意 Q (现在是零) 在方程中的位置。(5.3.5) 式和 (5.3.6) 式可改写为

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2)$$

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$$

对于  $v_1 > v_1'$  (否则将不发生碰撞)，有

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$$

这导致

$$v_{app} = v_{sep} \quad (5.3.7)$$

简单的代数运算将给出

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

讨论：为方便起见，我们取  $v_2 = 0$ . 于是，

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (5.3.9)$$

1) 反冲 (recoil) 如果  $m_1 \ll m_2$ , 则

$$v_1' = -\left(1 - 2\frac{m_1}{m_2}\right)v_1 \approx -v_1$$

$$v_2' = 2\frac{m_1}{m_2}v_1 \ll v_1$$

质点 2 获得动能，且

$$\frac{T_2'}{T_1'} = \frac{T_2'}{T_1} = 4\frac{m_1}{m_2} \ll 1$$

2) 转移 (transfer) 如果  $m_1 = m_2$ , 则

$$v_1' = 0, \quad v_2' = v_1$$

速度和能量发生了转移. 这就解释了在反应堆中, 单就质量而言氢是最有效的中子减速剂. 可是由于质子要俘获中子而产生氘, 通常采用重水而直接利用其中的氘来作减速剂.

3) 如果  $m_1 m_2$ , 则

$$v_1' = \left(1 - 2\frac{m_2}{m_1}\right)v_1 \approx -v_1$$

$$v_2' = 2\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)v_1 \approx 2v_1$$

对于  $Q < 0$  ( $T_f < T_i$ ), 则  $v_{app} > v_{sep}$  (作为一个练习, 试证明之), 碰撞称为非弹性 (inelastic) 的. 可以用下式定义恢复系数 (coefficient of restitution)  $e$ :

$$e(v_1 - v_2) = v_2' - v_1' \quad (5.3.10)$$

其中  $0 \leq e < 1$ .  $e = 0$  的情形相应于完全非弹性碰撞 (completely inelastic), 即两个质点黏在一起.

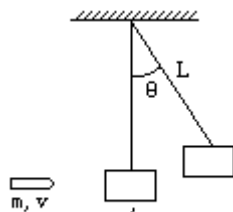


图5-7

例 5.6 求冲击摆 (Ballistic pendulum) 的反应能.

解：如图 5-7 所示，动量守恒为

$$mv = (m + m')v$$



子弹嵌入以后能量守恒，起摆到最大高度时，

$$\frac{1}{2} (m' + m) v^2 = (m' + m) gL (1 - \cos \theta)$$

所以较难测的子弹速度可利用起摆角度表示为

$$v = \frac{m' + m}{m} [2gL (1 - \cos \theta)]^{1/2}$$

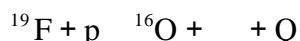
反应能为

$$\begin{aligned} Q &= T_f - T_i = \frac{1}{2} (m' + m) v^2 - \frac{1}{2} m v^2 \\ &= -\frac{m' + m}{m} m gL (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

这意味着系统丧失部分动能而获得热能。

在二维碰撞中未知数增加，特别当产物多于两个时问题就更难求解了。除了入射动量外一般还需要辅以其它信息，问题才能彻底求解。由于运动的独立性，二维碰撞问题一般可以将动量按相互垂直（实际上，只须不平行即可）的方向分解以后再作讨论。

例 5.7 一束能量为 1.85MeV 的质子轰击氟（fluorine）核，一些质子以反应的形式与氟核作用。



在垂直于入射束的方向上观察到有  $\alpha$  粒子出现，它们的速度是  $1.95 \times 10^7 \text{m/s}$ 。求该过程中的反应能。涉及的质量有

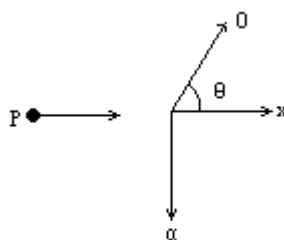


图5-8 例5.7

$$\begin{aligned} m_{\text{F}} &= 19.0u, \quad m_{\text{p}} = 1.01u \\ m_{\text{O}} &= 16.0u, \quad m_{\alpha} = 4.00u \end{aligned}$$

解：动量守恒是

$$x: m_{\text{p}} v_{\text{p}} = m_{\text{O}} v_{\text{O}} \cos \theta$$

$$y: 0 = m_{\text{O}} v_{\text{O}} \sin \theta - m_{\alpha} v_{\alpha}$$

能量守恒是

$$Q + \frac{1}{2} m_{\text{p}} v_{\text{p}}^2 = \frac{1}{2} m_{\text{O}} v_{\text{O}}^2 + \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2$$

这里我们用了简单的经典动能表达式，原因是入射质子的能量较小：

$$1.85 \text{MeV} \ll 938 \text{MeV} = m_{\text{p}} c^2$$

反应能为

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{m_{\text{O}}} (m_{\text{O}} v_{\text{O}})^2 + \frac{1}{m_{\alpha}} (m_{\alpha} v_{\alpha})^2 \right] - \frac{1}{2} \left( \frac{m_{\text{p}}}{m_{\text{p}}} v_{\text{p}}^2 \right) \\ &= \left( 1 - \frac{m_{\alpha}}{m_{\text{O}}} \right) T_{\alpha} - \left( 1 - \frac{m_{\text{p}}}{m_{\text{O}}} \right) T_{\text{p}} \end{aligned}$$

代入有关数据得到最后的结果：

$$Q=8.1\text{MeV}$$

\* 如何定义二维碰撞的恢复系数？用速度的大小还是在某一方向上的投影？

在核物理或粒子物理中经常用到质心系.图 5-9 表示在实验室系和质心系中所观察粒子碰撞的情形.假定靶粒子（粒子 2）在实验室参考系中是静止的（ $v_2=0$ ），则在实验室参考系中有

$$p = m_1 v_1 \quad (5.3.11)$$

$$v_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \text{ 或 } p_c = (m_1 + m_2) v_c = m_1 v_1 = p \quad (5.3.12)$$

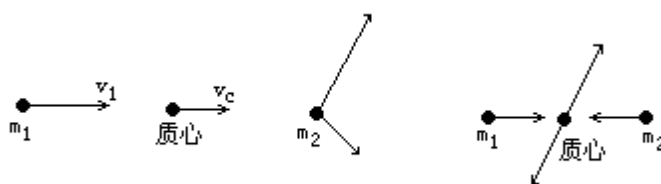


图5-9 实验室系和质心系

在质心系中，

$$v_{1c} = v_1 - v_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad v_{2c} = 0 - v_c = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

容易证明

$$p_{1c} = m_1 v_{1c} = \mu v_1, \quad p_{2c} = m_2 v_{2c} = -\mu v_1$$

动量守恒为

$$m_1 v_{1c} + m_2 v_{2c} = 0, \quad m_1 v_{1c} + m_2 v_{2c} = 0$$

对于  $Q=0$ ，能量守恒为

$$Q + \frac{1}{2} m_1 v_{1c}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2c}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1c}'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2c}'^2$$

所有这些导致

$$v_{1c} = v_{1c}', \quad v_{2c} = v_{2c}'$$

所以在质心系中质点只改变其速度方向。

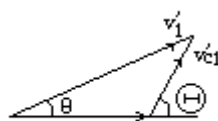


图5-10 散射角

\* 找出实验室参考系和质心系中散射角 (angles of scattering) 的关系对于解决实际问题是很有用的.在碰撞以后,质点 1 在实验室参考系中有速度  $v_1$  而在质心系中为  $v_{1c}$ . 它们的关系是

$$v_1' = v_{1c}' + v_c$$

在图 5-10 中， $\theta$ 、 $\theta'$  分别是实验室参考系和质心参考系中的散射角，注意，

$$\frac{v_C}{v_{1C}} = \frac{v_{2C}}{v_{1C}} = \frac{m_1}{m_2}$$

有

$$\tan \theta = \frac{v_{1C}' \sin \Theta}{v_C + v_{1C}' \cos \Theta} = \frac{\sin \Theta}{m_1 / m_2 + \cos \Theta}$$

对于不同的质量比,可以求出实验室参考系中散射角的范围,如图 5-11 所示.

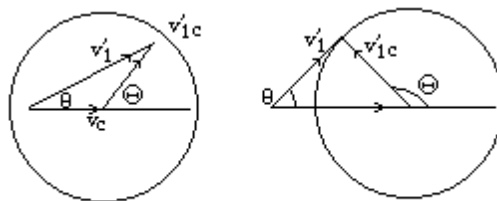


图5-11 散射角的范围

对于  $Q < 0$ , 动能减少而势能或内能增加. 在质心系中恢复系数的可能定义是

$$e (v_{1C} - v_{2C}) = v_{2C}' - v_{1C}' \quad (5.3.13)$$

对于  $Q > 0$ , 我们应该将它放入能量守恒方程中.

\* 设一质量为  $m_0$  的物体衰变为 3 片相等的碎片,

$$m_0 \rightarrow 3m + Q$$

且  $Q > 0$ , 动量和能量守恒提供了 4 个方程, 而 3 个碎片的运动要由 6 个量 (3 个标量和 3 个矢量) 来决定, 所以问题没有完全确定. 但是我们可以由此得到一些确定的线索. 画一个以  $Q$  为高的等边三角形, 以其内部的点到三边的距离表示 3 个碎片的动能, 所允许的点都在三角形的内接圆中; 对于极端相对论的能量动量关系 (见 § 9.5), 所允许的点在一个倒三角形中. 这种表示叫做戴立兹图 (Dalitz diagram), 见图 5-12.

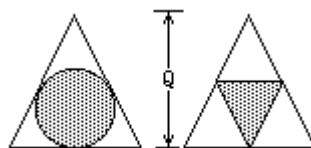


图5-12 戴立兹图

对于宏观物体, 碰撞参量  $b$  反映了散射强度, 当然它必须小于力程. 力程越大, 发生碰撞事件的概率也越大. 对于刚性球, 其截面就是这种概率的测度. 对于其它情形, 我们可以引入有效散射截面 (Crosssection). 让一束氦核轰击面积为  $A$ 、厚度为  $t$  的金箔, 设入射率为  $R$ 、散射中心的密度为  $n$ . 我们可以建立事件率  $R$  和有效核截面积之间的关系为

$$R = R (nAt) \frac{\sigma}{A} = Rnt \quad (5.3.14)$$

截面的量纲为  $L^2$ , 单位为  $m^2$ , 也常用  $b$  (靶恩, barn) .

$$1b = 10^{-28} m^2 \quad (5.3.15)$$

可能发生什么样的事件与涉及的能量大小有关. 例如, 除了弹性和非弹性散射外, 下列过程都是可能的:





为了描述各种过程的不同概率，我们应该赋予它们不同的截面。这样，每一事件有它自己的截面。这些截面与几何面积未必有任何关系，只是为了保留这样一个术语而已。

每一个入射粒子在行进过程中可能遭遇多次碰撞。我们想知道平均说在两次碰撞之间所能自由飞行的距离——平均自由程 (Mean freepath)。在气体中，分子彼此频繁地碰撞，因此平均自由程这一概念也适用于气体分子的运动。从量纲分析，我们可以得到平均自由程

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \quad (5.3.16)$$

严格的计算表明，平均自由程是

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} \quad (5.3.17)$$

两者只相差一个数值因子。

## § 5.4 流体运动

流体是一个连续统 (continuum). 为了用描述质点系的一般方法描述流体运动, 我们可以想象流体是由流体元组成的, 就能象处理质点问题一样, 给出初始条件, 然后求此后的位置和运动. 这一方法来自拉格朗日 (Joseph Louis Lagrange, 1736--1813). 另外一种不同的方法是由欧拉 (Leonhard Euler, 1707--1783) 提出的. 按照欧拉的方法, 我们不是追踪流体元的运动, 而是研究流体密度和速度的空间分布以及随时间的变化. 在大多数情形, 人们采用后一种方法. 流体流可以是不稳定的, 如潮流、湍流 (turbulence), 也可以是稳定的; 流体流可以有旋的, 如旋涡 (whirlpool), 也可以是无旋的; 流体流可以有源、有漏或两者都有, 也可以都没有; 流体可以是可压缩的或不可压的; 流体还可以是黏性的或无黏性的. 在初次接触时, 我们只讨论最简单的情形: 不可压的、无黏性的稳定流. 这样就没有时间  $t$  介入, 所要求的只是

$$\rho = \rho(\mathbf{r}), \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \quad (5.4.1)$$

在稳定流中,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ . 每一流体元所经过的路径叫流线 (stream-line). 流线均不相交, 否则在交点上将会有两个速度方向了. 一束流线组成的管叫做流管 (图 5-13), 显然流体不能穿过流管壁.

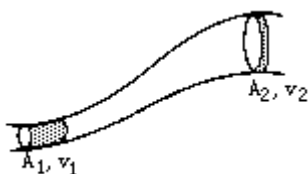


图5-13 流管

在  $t$  时间内, 从一流管两端流入和流出的质量分别为

$$m_1 = \rho_1 A_1 v_1 t, \quad m_2 = \rho_2 A_2 v_2 t$$

由于质量通量  $dm/dt$  为常量, 有

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

即  $\rho v = \text{常量} \quad (5.4.2)$

对不可压缩流体,

$$Av = \text{常量} \quad (5.4.3)$$

(5.4.2) 式和 (5.4.3) 式称为连续性方程 (equation of continuity). 实际上就是质量守恒方程.

\* 源或漏以及不稳定的漂移都对当地密度有贡献. 这样连续性方程应作:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = S \quad (5.4.4)$$

对于不可压缩、无黏性流体, 功能关系是

$$W = W_p + W_g = T, \quad W_p - U = T$$

式中

$$W_p = p_1 A_1 (v_1 t) - p_2 A_2 (v_2 t) = (p_1 - p_2) V$$

而

$$T + U = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) + mg(z_2 - z_1)$$

注意,

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{m}{V} =$$

这样我们有伯努利方程 (Bernoulli's equation) :

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gz = \text{常量} \quad (5.4.5)$$

由瑞士数学家伯努利 (Daniel Bernoulli) 提出. 他的代表作是  
Hydridynamica (1738 年)

伯努利方程有着广泛的应用. 但需注意, 它只适用于同一流管或流线. 对于静态平衡 ( $v=0$ ) 情况,

$$p + \rho gz = \text{常量} \quad (5.4.6)$$

对于水平管道流,

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{常量} \quad (5.4.7)$$

这常被称作伯努利原理: 高速则低压.

\*文丘里管 (Venturi meter) (见图 5-14) 可用来测量空气流的速度  $v$ . 对空气流, (5.4.3) 式和 (5.4.6) 式适用. 对 U 型管 (静态):

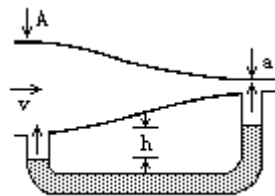


图5-14

$$p_A + \rho gh = p_a + \rho gh$$

我们可以从  $h$  计算  $v$ .

在体育运动中有很多例子用到了伯努利原理. 图 5-15 中显示了上旋球的受力情况. 由于黏性作用, 有一薄层空气被球带动, 造成球上部高压, 从而使球受向下的力. 足球中的香蕉球也可类似地解释.

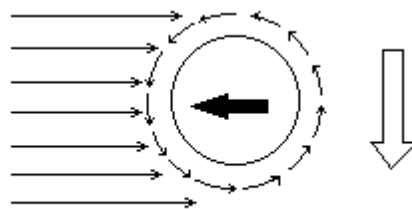


图5-15

另外的例子有飞机或水翼船的动力举升. 机翼上部的流线较下部挤, 那就意味着高速和低压 (图 5-16). 实际上机翼上下的流速可以通过未受机翼影响的流体的速度间接进行比较. 通常在飞机起飞时机翼有一定的迎角 (angle of attack) 以增加举力.

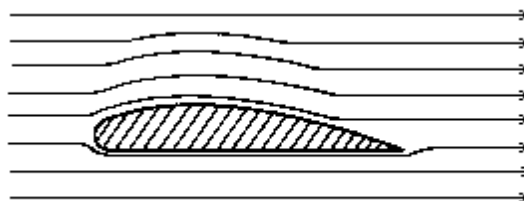


图5-16 机翼所受的举力



## § 5.5 对称性和守恒律

对称性是指一定对称操作之下的不变性 ( invariance ). 更确切地, 我们是说物理定律在某些操作或变换之下的不变性. 例如, 在伽利略变换下牛顿定律是不变的. 变换可以是连续的或分立的; 可以和时空有关, 也可以无关. 变换与不可区分性或不可测量性以及守恒律有关. 除了电荷共轭变换以外, 与时空无关的变换统称规范变换 ( gauge transform ).

我们将分别在相应的章节中提及各守恒律. 表 5-1 列出的前三个变换出现在力学部分; 电荷守恒将在 § 15.1 中提到; 其余部分将主要在 § 29.3 和 § 29.5 中讨论. 在 § 26.5 关于生物大分子的讨论中, 也讨论了生物分子中的左右对称问题.

表 5-1

变换	不可测量性	守恒律
空间平移	空间绝对位置	动量
时间平移	绝对时间	能量
转动	空间绝对方向	角动量
电荷规范变换	电荷空间相位	电荷
重子规范变换	重子荷空间相位	重子 ( baryons ) 数
轻子规范变换	轻子荷空间相位	轻子 ( leptons ) 数
空间反演	左右	宇称 ( parity )
时间反演	时间方向	——
电荷共轭	粒子-反粒子	电荷宇称

通常我们从运动方程出发讨论守恒律, 然后说明对称性. 在理论物理中, 则有不同的推理过程, 往往以对称性为出发点. 1905 年人们理解了麦克斯韦方程中深刻的对称性 ( § 20.2 ), 1907 年爱因斯坦想 “ 为什么我们不能将这样的过程倒过来? 为什么我们不能从对称性出发建立符合对称性原则的基本方程, 并由此得到和方程符合的实验结果? ” ( 3 ). 杨 - 米尔斯 ( Yang-Mills ) 非阿贝耳规范对称 ( non-Abelian gauge symmetry ) 理论 ( 4 ) 是这方面的典范. 有人指出这一理论与广义相对论有异曲同工之妙. 这一理论适合于弱电相互作用 ( electroweak interaction ) 和夸克间的强相互作用 ( strong interaction ).

在理论力学中, 会讲到 Noether 定理 ( Noether's theorem, Emmy Noether, 1882—1935 ), 它阐述了系统对称性质和守恒律的关系. 该定理说:

- 拉格朗日 ( Lagrangian ) 密度的一个连续对称性质导致一个守恒条件.
- 为了大致理解这一定理, 我们可以说:
- 系统的一个连续对称性质导致一个守恒条件.

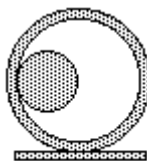
### 习 题

5.1. 求均匀半圆板 ( 半径为  $R$  ) 的质心.

5.2. 一质量为  $m$ 、半径为  $R$  的小圆球位于相同质量、内半径为  $2R$  的球壳



内，球壳放在光滑桌面上，如图所示.释放小球，任其下落，最后静止，求球壳移动了多远？



题5.2图

5.3. 将一质量为  $m$ 、长度为  $l$  的柔软均匀链条的一端垂直地悬挂起来，其下端恰好接触到桌子的表面. 现将其上端突然释放，链条自由落至桌面并盘成一小堆，链条的每一节落至桌面时便立即静止，试用静止在桌面上的链条的质量来表示任一时刻桌面作用于链条上的力.

5.4. 一火箭在均匀引力场中以恒定速率  $u$  喷射气体而由静止升起. 假定气体排放率为  $\dot{m}$ ，其中  $m$  是火箭的瞬时质量， $\dot{m}$  是常量；又假定使火箭减速的空气阻力是  $bv$ ， $b$  为常量， $v$  是火箭的速率. 求  $v(t)$  (把它表示为时间的函数).

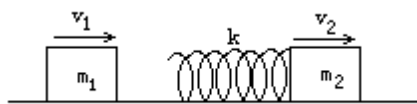
[提示：终极速度是  $m(u-g)/b$ ]

5.5. 一雨滴的初始质量为  $m_0$ ，在重力的影响下，由静止开始降落. 假定此雨滴从云中得到质量，其质量的增长率正比于它的瞬时质量和瞬时速度的乘积：

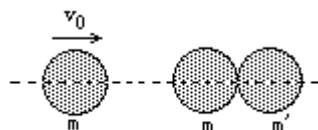
$$\frac{dm}{dt} = kmv$$

式中  $k$  为常量. 试证明雨滴的速率实际上最后成为常量，并给出终极速率的表达式. 忽略空气的阻力.

5.6. 如图所示，两物块在无摩擦的桌面上运动，其中  $k = 1120 \text{ N/m}$ ， $m_1 = 2.0 \text{ kg}$ ， $v_1 = 10 \text{ m/s}$ ， $m_2 = 5.0 \text{ kg}$ ， $v_2 = 3.0 \text{ m/s}$ . 求碰撞时弹簧的最大压缩量.



题5.6图



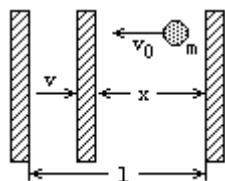
题5.7图

5.7. 如图所示，右侧的两个小球起初静止并略微分离，左侧有一小球以速度  $v_0$  入射，假设碰撞是弹性正碰：(a) 若  $m = m$ ，说明整个过程中有两次碰撞并求各球最后的速度；(b) 若  $m > m$ ，说明有三次碰撞并求各球最后的速度.

5.8. 慢中子与静止重水中的氘核发生弹性碰撞，若中子的散射角为  $90^\circ$ ，试证明其动能将损失  $2/3$  并传递给了氘核.

5.9. 如图所示，一质量为  $m$  的球在两个壁面间以速度  $v_0$  来回弹跳，碰撞是完全弹性的. 略去重力不计，(a) 求每个壁所受到的平均作用力  $F$ . (b) 如果一个表面以  $v \ll v_0$  的速率慢慢地移向另一表面，则回跳频率由于碰撞间的距离减小以及球从运动的表面碰回时，球的速率增大而增加. 求出用表面间的距离  $x$  来表示的力  $F$ . (c) 证明：把表面从距离  $l$  推

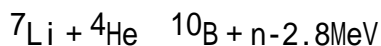
近到距离  $x$  时所作的功等于球的动能的增加.(这个问题说明了当气体压缩时温度升高的机制.)



题5.10图

$$\left[ \text{答案: (a) } F = \frac{mv_0^2}{1}; \text{ (b) } F = \frac{mv_0^2}{1} \left( \frac{1}{x} \right)^3 \right]$$

5.10. 用能量为  $E_0$  的氦原子核去轰击一个薄的锂靶. 锂原子核原来静止于靶内, 但基本上是不受束缚的. 当氦核进入一锂核, 就能产生反应, 复合核分裂为一个硼核和一个中子. 碰撞是非弹性的, 而最后的动能比  $E_0$  少了 2.8MeV. 粒子的相对质量是: 氦为 4, 锂为 7, 硼为 10, 中子为 1. 这个反应可写为



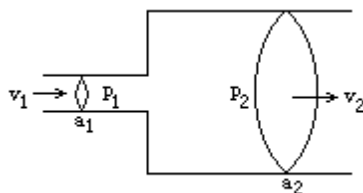
(a) 可以产生中子所需的  $E_0$  的最小值  $E_{0\min}$  是多少? 在此阈限上, 中子能量是多少?

(b) 证明: 如果入射能量落在  $E_{0\min} < E_0 < E_{0\min} + 0.27\text{MeV}$  范围内时, 则向前抛出的中子的能量并不都一样, 但必定是两个可能的能量值的一个. (在质心坐标系中看这个反应, 即可得出这两个能量的来源.)

[答案: (a) 中子能量为 0.15MeV]

5.11. 质量为  $m_1$  的粒子与起初静止的质量为  $m_2$  的粒子发生弹性碰撞, 证明: (a)  $m_1$  的最大散射角  $\theta_m$  由下式确定:  $\cos^2 \theta_m = 1 - m_2^2/m_1^2$ , 故当  $m_1 > m_2$  时, 有  $0 < \theta_m < \pi/2$ ; (b) 当  $m_1 = m_2$  时, 有  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ ,  $\theta_1$  和  $\theta_2$  分别是  $m_1$  和  $m_2$  的散射角; (c) 当  $m_1 < m_2$  时,  $\theta_1$  可以取 0 到  $\pi$  之间的所有值.

5.12. 如图, 密度为  $\rho$  的流体以速度  $v_1$  流经一横截面积为  $a_1$  的较窄的区域, 然后在某处突然到达横截面积为  $a_2$  的较宽的区域, 并与周围的液体混合后一同以速度  $v_2$  继续流动.



题5.12图

(a) 若不考虑混合过程的细节, 用动量的概念证明由于混合而引起压强的增加近似为

$$p_2 - p_1 = \rho v_2 (v_1 - v_2)$$

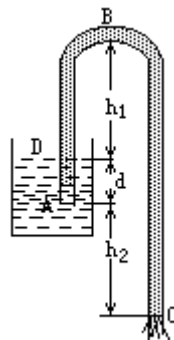
(b) 根据伯努利方程, 证明对于逐渐变宽的管道, 其压力的增加应为

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2)$$

(c) 计算突变情形下压力的损失. 你能与动力学中的弹性或非弹性碰撞

作一类比吗？

5.13. 利用虹吸现象，可以取出容器中液体而无须倾斜容器. 如图所示，首先要将其中的管道注满液体，而液体一旦开始流动，则该过程将一直持续至容器中的液面低于管道的开口 A 端. 设液体的密度为  $\rho$ ，并忽略其黏性. (a) 从管道的开口 C 处流出的液体的速率是多少？(b) 在最高点 B 处液体的压强是多少？(c) 使虹吸现象能够发生的  $h_1$  的最大高度是多少？



题5.13图

## 第六章 刚体动力学

### § 6.1 定轴转动和转动惯量

一个一般的转动可以由按一定次序绕 3 个垂直轴的转动来合成. 定轴转动是任意转动的基本元素. 定轴指的是确定的转动轴, 也指转动轴在运动中保持平行的情形.

线性动量正比于速度. 角动量与角速度之间是否也有类似的关系呢? 如果有, 那么与惯性质量对应的是什么呢? 在 § 3.5 中, 我们得到了质点的角动量表达式 (3.5.7) 式. 这里我们重复推导如下:

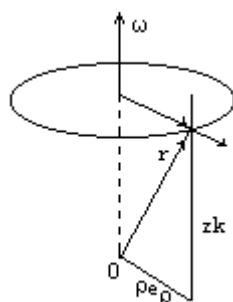


图6-1 角动量

$$\begin{aligned} L &= r \times mv \\ &= m (e_\phi + zk) \times [k \times (e_\phi + zk)] \\ &= m (e_\phi + zk) \times e_\phi \\ &= m \rho^2 - m z^2 \end{aligned}$$

在 § 3.5 中我们处理的是单个质点, 而且取运动平面  $z=0$ ; 对于质点系, 不管是否是刚性连接, 上述结果可以直接推广为

$$L = \sum_i m_i \rho_i^2 - \sum_i m_i z_i^2$$

对于连续分布的刚体,

$$L = (\rho^2 dm) - (z^2 dm) \quad (6.1.1)$$

一般情况下, 不再可能通过取  $z=0$  使右边第二项为零. 但是, 对于沿着某些轴特别是对称轴的情形,

$$L = (\rho^2 dm) \quad (6.1.2)$$

我们称这样的轴为惯量主轴 (principal axis of inertia), 而

$$I = \rho^2 dm \quad (6.1.3)$$

称为转动惯量 (rotational inertia). 这样在线性动量和角动量之间就有了对应. 每一物体至少有 3 个相互垂直的惯量主轴. 对称轴是惯量主轴, 从 (6.1.1) 式可知这是充分的. 我们可以直接从 (6.1.3) 式来计算  $I$ , 也可以应用一些定理来计算.

例 6.1 求质量为  $m$ , 半径为  $R$  的圆环的转动惯量.

解: 沿着垂直轴,  $I = \int R^2 dm = mR^2$ . 从图 6-2 可知, 沿着直径的转动惯量为

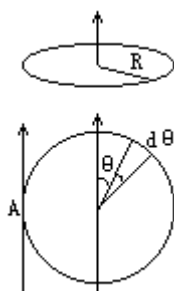


图6-2

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \int_0^{\pi} R (R \sin \theta)^2 d\theta \\
 &= mR^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{2} mR^2
 \end{aligned}$$

绕通过 A 点平行于直径的轴的转动惯量是什么？如图 6-3 所示，圆球的转动惯量可以如下求得：

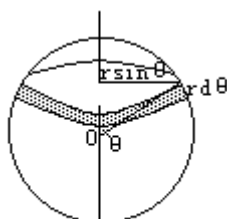


图6-3

$$\begin{aligned}
 I &= dm (r \sin \theta)^2 \\
 &= \frac{m}{\frac{4}{3} \pi R^3} [2 \pi (r \sin \theta) r d\theta] (r \sin \theta)^2 \\
 &= \frac{2}{5} mR^2
 \end{aligned}$$

也许你可以推导出相应的球壳的转动惯量？

回转半径 (radius of gyration) 由下式定义：

$$I = mR_0^2 \quad (6.1.4)$$

所以在例 6.1 中，沿两个轴的回转半径分别为

$$R_0' = R, R_0'' = \frac{1}{\sqrt{2}} R$$

例 6.2 求中空圆柱的转动惯量. 从量纲考虑，你认为转动惯量应该怎样？也许直觉告诉你  $I \sim m_2 R_2^2 - m_1 R_1^2$ ？

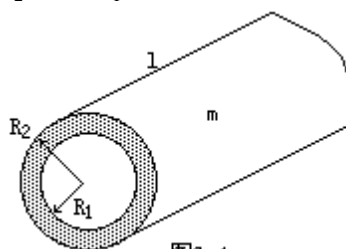


图6-4

解：

$$\begin{aligned} dm &= \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} 2\pi r dr \\ &= \frac{2m}{R_2^2 - R_1^2} r dr \end{aligned}$$

直接计算得到

$$I = \frac{1}{2} m (R_2^2 + R_1^2)$$

对于绕两个平行轴转动（图 6-5）的转动惯量，平行轴定理（parallel axis theorem, Steiner's theorem）适用。绕 z 轴的转动惯量可以计算如下：

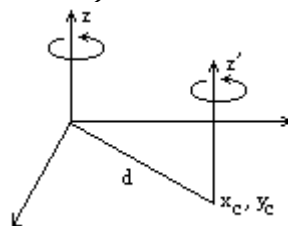


图6-5 平行轴定理

$$\begin{aligned} I &= \int (x^2 + y^2) dm \\ &= \int [(x + x_C)^2 + (y + y_C)^2] dm \\ &= \int (x^2 + y^2) dm + (x_C^2 + y_C^2) \int dm \end{aligned}$$

注意  $x'_C = y'_C = 0$ ，我们有

$$I = I_C + md^2 \quad (6.1.5)$$

式中  $I_C$  是绕通过质心的转轴的转动惯量，而  $d$  是两轴的间距，这就是平行轴定理的表达式。

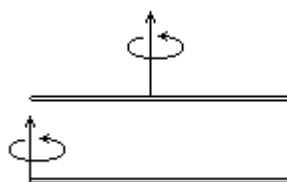


图6-6

例 6.3 求均匀棒（图 6-6）的转动惯量。

解：沿着过中心的垂直轴的转动惯量为

$$I = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{m}{l} dx x^2 = \frac{1}{12} ml^2$$

沿端点的轴为

$$I = \frac{1}{12} ml^2 + m \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

对于薄板的转动惯量，垂直轴定理（perpendicular axis theorem）适用。如图 6-7，有

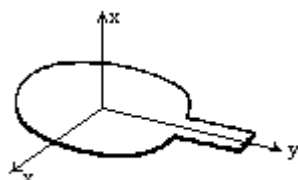


图6-7 垂直轴定理

$$\begin{aligned}
 I_z &= \int dm (x^2 + y^2) \\
 &= \int dm x^2 + \int dm y^2 \\
 &= I_y + I_x \quad (6.1.6)
 \end{aligned}$$

这就是垂直轴定理的表达式。\*例如，如图 6-8 所示的矩形板 ( $l \times b$ )，沿板上两条中轴的转动惯量分别为：

$$I_x = \frac{1}{12} ml^2, \quad I_y = \frac{1}{12} mb^2$$

于是沿板中心垂直轴的转动惯量为

$$I = I_x + I_y$$

沿通过矩形板角上的垂直轴的转动惯量是什么呢？

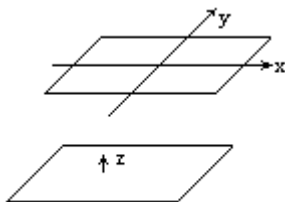


图6-8

## § 6.2 转动动力学

在 § 2.3 中我们从运动学角度定义刚体是只作平动和转动的系统，它不形变或作振动。就结构而言，可以说刚体是受下列约束的质点系：

$$|r_i - r_j| = C_{ij}$$

即不形变的固体。按这一观点，一固体若由  $N$  个质点组成时有  $3N$  个坐标 ( $r_1, r_2, \dots, r_N$ )，由于存在上述约束，它们不是独立的。成对的约束有

$C_N^2 = N(N-1)/2$  个。事实上，当粒子数较大时，计数是很

困难的。此外，当  $N$  较大时（多大？），独立变量数目将会变为负数。由此看出以上处理方式有问题。我们可以按另外的思路来作考虑。当刚体上有一个参考点固定时，刚体的位置是不定的；当有两个点固定时，仍然是不确定的（这时只能确定一根轴线）。3 个不共线（non-collinear）的点就可确定刚体的位置。3 个点可以由 6 个独立坐标来确定：即 3 个位置矢量共 9 个分量，扣除 3 个约束条件。所以，为了决定一个刚体的位置，我们充其量只要 6 个变量。或者说需要 6 个变量来描述刚体的运动，因此我们说刚体有 6 个自由度。如果有一个转动轴有确定指向，则自由度减为 4（3 个平动和 1 个转动）。如果有 1 个点固定，则只剩下 3 个转动自由度。

对于 6 个自由度的刚体，我们正好有 6 个方程：

$$m_c \frac{d^2 r_c}{dt^2} = F_{\text{ext}} \quad (6.2.1)$$

$$\frac{dL}{dt} = M \quad (6.2.2)$$

选择质心作为角动量和力矩的参考点是自然的，但不是必须的。当轴的指向确定并且是对称轴时，有

$$M = \frac{d}{dt} L = \frac{d}{dt} (I \omega) = I \frac{d\omega}{dt} \quad I \quad (6.2.3)$$

在无力矩情形，我们有角动量守恒： $L$  和  $\omega$  均为常矢量。角动量守恒的典型应用是陀螺仪的运动。

例 6.4 一圆盘可以自由地绕通过中心的轴转动，一根弦线绕在盘沿，如图 6-9 所示。如果 (a) 用一个 9.8N 的力向下拉弦线；或 (b) 用一质量为 1kg 的物体挂在弦上，分别求出圆盘的角加速度。

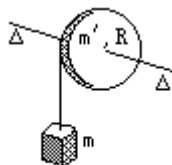


图 6-9 例 6.4

解：从例 6.2 可知圆盘的转动惯量为

$$I = \frac{1}{2} m R^2.$$



$$\begin{aligned}
 (a) \quad & F = 0 \\
 & RF = \left( \frac{1}{2} m R^2 \right) \\
 & = \frac{2F}{m'R} \\
 (b) \quad & mg - T = m(R) \\
 & RT = \left( \frac{1}{2} m R^2 \right) \\
 & = \frac{2mg}{(m' + 2m)R}
 \end{aligned}$$

在滚动情形下，平动和转动不是独立的。滚动意味着：

$$v_c = \frac{dx}{dt} = \frac{Rd\phi}{dt} = R\omega$$

选择不同的转动轴，平动速度可能不同，角速度则是一样的。接触点（或线）常常被选作瞬时轴。

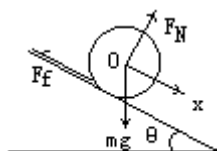


图6-10

\* 例如，当一个圆柱滚下斜面时，运动方程为

$$x: mg \sin \theta - F_f = ma$$

$$y: F_N - mg \cos \theta = 0$$

$$RF_f = \left( \frac{1}{2} m R^2 \right) \alpha$$

利用  $R\alpha = a$  容易解得

$$a = \frac{2}{3} g \sin \theta = C; \quad v^2 = 2as = \frac{4}{3} g s \sin \theta$$

而静摩擦是

$$F_f = \frac{1}{3} mg \sin \theta, \quad \mu \geq \frac{1}{3} \tan \theta$$

例 6.5 一均匀棒在垂直圆轨道中运动，其两端无摩擦地约束在轨道上。求棒的运动方程。

解：我们首先想象一下棒作什么运动，需要多少坐标来描述。其次，按下列两个步骤进行：

步骤 1，决定力矩的参考点：C 还是 O？

步骤 2，找出绕该点的转动惯量：

$$\begin{aligned}
 I_O &= I_C + md^2 \\
 &= \frac{1}{12}ml^2 + m[R^2 - (\frac{l}{2})^2] \\
 &= mR^2 (1 - \frac{l^2}{6R^2})
 \end{aligned}$$

以 O 为参考点，只有重力对力矩有贡献. 我们可以避开轨道的作用力.

$$-mg(d \sin \theta) = I_O \ddot{\theta}$$

对于小角度  $\theta$ ，这方程容易求解.

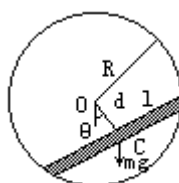


图6-11 例6.5

在很多情形下，质心方程是平庸的（往往给出恒等式）. 在下例中，这一方程却是必要的.

例 6.6 一滚动球接触粗糙表面，如图 6-12 所示，求解随后的运动.



图6-12 例6.6

解：选择中心为参考点，运动方程将是

$$\begin{aligned}
 \mu_k mg &= m \frac{dv}{dt} \\
 -R \mu_k mg &= I \frac{d\omega}{dt}
 \end{aligned}$$

这两个方程都容易积出：

$$\begin{aligned}
 v &= \mu_k gt \\
 &= v_0 - \frac{mR}{I} \mu_k gt \\
 &= v_0 - \frac{mR}{I} v
 \end{aligned}$$

纯滚动开始于  $R\omega = v$ ，即

$$v = \frac{\omega_0 R}{1 + mR^2/I}, \quad t = \frac{v}{\mu_k g}$$

应该理解这一结果可以推广到圆环、圆盘、圆柱（空心或实心）情形.

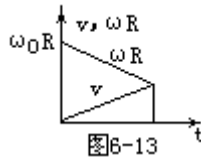


图6-13

从 § 5.1 我们知道质点系的动能是

$$T = \frac{1}{2} m_C v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

对于刚体转动，右边第二项应为

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \left( \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \right)$$

$$= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} \quad (6.2.4)$$

对于主轴，这一项是  $\frac{1}{2} I \omega^2$ . 有了动能的表达式，我们可写出机械能守恒的表达式为

$$\frac{1}{2} m_C v_C^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + U = \text{常量} \quad (6.2.5)$$

\* 例如，用机械能守恒讨论刚体从斜面滚下的运动，有

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + mg \cdot 0 \\ &= \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I \frac{v_C^2}{R^2} \\ v_C^2 &= \frac{2gh}{1 + I / mR^2} \end{aligned}$$

质心运动速度的具体数值视刚体几何形状而定，例如，对圆环、圆柱、圆盘或球分别是

$$gh, \frac{4}{3}gh, \frac{10}{7}gh$$

对于转动，选转轴上的一点为原点，力的作用点的位移为  $d\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{e}_\varphi$ . 无限小功

$$\begin{aligned} dW &= \mathbf{F} \cdot (d\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{e}_\varphi) \\ &= F \cos \theta d\varphi = F \sin \theta d\varphi \quad (\theta \text{ 为 } \mathbf{F} \text{ 与 } \mathbf{e}_\varphi \text{ 的夹角}) \\ &= M d\varphi \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

于是，功率为

$$P = M \dot{\varphi} = M\omega \quad (6.2.7)$$

试与平动情形  $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  作比较.

### § 6.3 角动量的进动

当外力矩为有限值时，角动量将随时间变化.在 § 6.2 中，只有角动量的大小变化；所举的例子中，力矩都是在角动量方向（相互平行或反平行）.现在，我们讨论力矩和角动量不共线的情形.这时角动量不再能保持其方向，这样的例子有对称陀螺或磁场中的轨道磁矩.当角动量的增量很小或外力矩垂直于角动量  $L$  时，对角动量和增量进行分解可得到一个清晰的图象：转动轴本身在转动.我们称此为角动量的进动（precession）.图 6-14 中，重力矩  $M=rmg$  造成了进动，进动角速度 可如下求得：

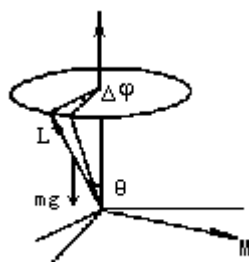


图6-14 角动量的进动

$$|M| = |r \times mg| = rmgsin$$

$$L = Lsin \quad \varphi$$

$$= I \sin \quad \varphi$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi}{t} = \frac{mgr}{I\omega}$$

以上处理适合于  $\gg$  或  $I \gg mgr$ .

\* 例如，地球赤道平面和黄道（ecliptic）平面的夹角是  $23^\circ 27'$ ，如图 6-15.由于这一夹角的存在以及地球的椭球（ellipsoid）形状，地球将受到太阳和月亮的引力力矩.由此将造成地球旋转角动量的进动 称为岁差进动（precession of equinoxes），进动周期为  $T=27725a$ ，进动角速度为

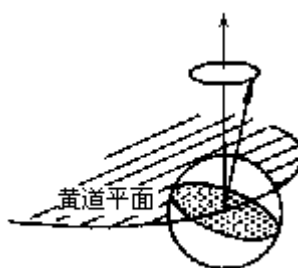


图6-15

$$= 7.19 \times 10^{-12} \text{rad/s}$$

对于地球，转动惯量为

$$I = \frac{2}{5}mR^2 = \frac{2}{5} (5.96 \times 10^{24} \text{kg}) (6.38 \times 10^6 \text{m})^2$$

$$= 9.74 \times 10^{37} \text{m}^2 \cdot \text{kg}$$

自转角速度为  $\omega = 7.29 \times 10^{-5} \text{rad/s}$ ，算得力矩的大小为

$$M = Lsin \approx 2.03 \times 10^{22} \text{N} \cdot \text{m}$$

除了进动以外，还有另一类运动——章动 (nutation)，角动量的倾角在  $\theta_1$  和  $\theta_2$  之间变化，如图 6-16 所示。

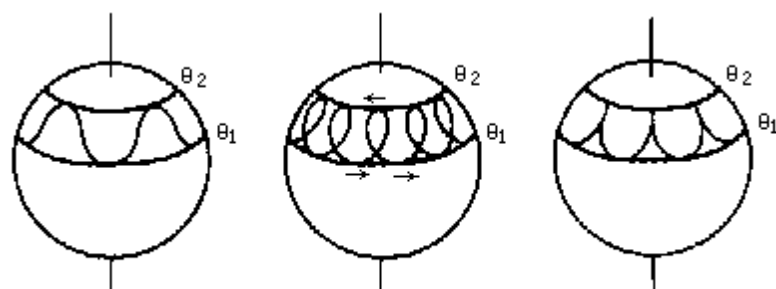


图6-16章动

## § 6.4 刚体的平衡和稳定性

刚体平衡的条件是

$$F_{\text{ext}}=0 \quad (\text{平动平衡}) \quad (6.4.1)$$

$$M=0 \quad (\text{转动平衡}) \quad (6.4.2)$$

不过在某些情形，其中部分条件只给出相同的结果. 上面的条件导致

$$a_C = 0, \quad \dot{\omega} = 0 \quad (6.4.3)$$

我们就说物体处于机械平衡. 特别当

$$v_C = 0, \quad \omega = 0 \quad (6.4.4)$$

时我们说物体处在静态平衡.

例 6.7 求两墙间所系的对称悬链上的张力  $F_T$ .

解：设悬挂处链（以及拉力  $F$ ）和铅直方向（ $y$ ）夹角为  $\theta$ ，链重  $W$ ，则

$$y: 2F\cos\theta - W = 0, \quad F = \frac{W}{2\cos\theta}$$

$$x: F\sin\theta - F_T = 0, \quad F_T = \frac{W}{2}\tan\theta$$

例 6.8 若干边长为  $l$  的砖块向上堆砌，求沿该边长方向的最大伸展量.

解：选择下面砖块的边缘为轴，伸出部分由力矩为零的临界位置决定.

对于四块砖，最大伸展量

$$l_1 = \frac{11}{12}l$$

对于  $n=52$ ，计算给出

$$l_1 = 2.2594070l$$

质心的定义式为

$$\sum_i r_i m_i = r_C \sum_i m_i$$

重心（center of gravity）则可以通过在重力场中的静态平衡条件来定义：

$$\sum_i r_i \times (m_i g_i) = r_{\text{cog}} \times \sum_i m_i g_i \quad (6.4.5)$$

$r_{\text{cog}}$  即为重心. 在均匀重力场中或物体尺度比地球半径小很多时，重心和质心重合.

如第三章提到的，平衡和稳定性常用势能曲线而不是用力来讨论. 平衡是稳定的、随遇的或是不稳定的条件是看  $U$  的一阶导数

$U = 0$  时而二阶导数  $U''$  是大于、等于或小于零. 有一种说法：偏离平衡位置时重心上升则为稳定平衡. 这种说法不正确，因为物体完全可以受到重力以外的作用力. 合力或总势能才能完全决定平衡问题. 试根据势能条件找出稳定平衡的例子，其中物体的重心是下降的.

例 6.9 桌面上的一边长为  $a$  的方块，见图 6-17，应该可以发现  $\theta = \pi/4$  是不稳定平衡点. 你是否可以想象  $\theta = 0$  是稳定平衡点？算出结果并作势能曲线. 势能曲线将向你的想象挑战.

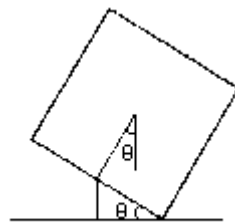


图6-17

解：设方块放平时其势能  $U=0$ .

$$U(\theta) = \begin{cases} mg \left( \frac{a}{2} \cos \theta + \frac{a}{2} \sin \theta \right), & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ mg \left( \frac{a}{2} \cos \theta - \frac{a}{2} \sin \theta \right), & \theta \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} mga [\cos \theta + \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)]$$

$$= mg a \cos(\theta/4) \cos(\frac{\pi}{4} - \theta/4)$$

对于势能的最小值而非极小值（例如不可导的点）如何讨论平衡和稳定性问题？

例 6.10 圆柱面上有一边长为  $a$  方块，如图 6 - 18 所示，试讨论平衡和稳定性.

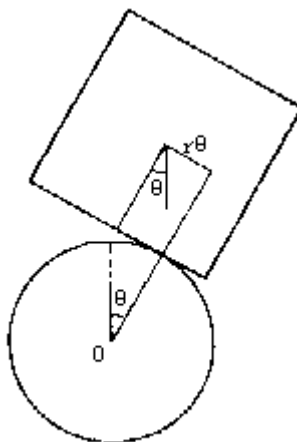


图6-18

解：设圆柱中心  $O$  为零势能点则方块的势能及其导数分别是

$$U(\theta) = mg \left[ \left( \frac{a}{2} + r \right) \cos \theta + r \sin \theta \right]$$

$$U'(\theta) = mg \left( -\frac{a}{2} \sin \theta + r \cos \theta \right)$$

$$U''(\theta) = mg \left( -\frac{a}{2} \cos \theta - r \sin \theta \right)$$

平衡位置是  $\theta=0$ . 在这一位置，我们有

$$U''(0) = mg \left( r - \frac{a}{2} \right)$$

可以得出结论：如果  $a < 2r$  或  $a > 2r$  那么平衡是稳定的或不稳定的. 如果  $a=2r$

则为随遇平衡.如果我们直接从  $a=2r$  出发：

$$\begin{aligned}
 U(\theta) \big|_{a=2r} &= mga \left( \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \right) \\
 &= mga \left[ 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots - \frac{1}{2} \theta \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right) \right] \\
 &= mga \left( 1 - \frac{\theta^4}{24} \right)
 \end{aligned}$$

可知，势能的第一个非零导数是 4 阶导数 ( $d^4U/d\theta^4 = -mga < 0$ )，你是否准备改变随遇平衡的结论呢？

在 § 4.4 中，(4.4.14) 式给出了有效势.我们也可以用这里的理论来讨论轨道的稳定性问题.



## 习 题

6.1. 质量为  $m$  的  $a \times b$  均匀矩形薄板绕通过一个顶角垂直板面的轴转动, 求其转动惯量.

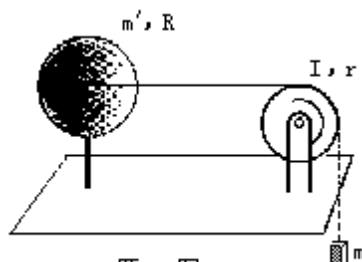
6.2. 竖直米尺从静止开始倒下时, 下端不滑动, 求上端落地时的速度.

6.3. 总长度为  $l$  的柔软的带子先是被紧紧地缠在一团, 然后置于倾角为  $\theta$  的斜面上让其滚下并自动解开, 其上端固定 (如图所示), 证明这团带子要完全解开所需时间为  $t = \sqrt{3l / g \sin \theta}$ .



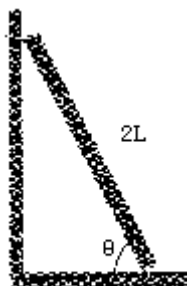
题6.3图

6.4. 如图, 一质量为  $m$ 、半径为  $R$  的均匀圆球可以绕其对称轴无摩擦地转动, 有一轻质细绳缠绕在圆球的水平方向的大圆上并通过半径为  $r$ 、转动惯量为  $I$  的滑轮悬挂一重物, 试求该重物由静止开始下落高度  $h$  后的速度.



题6.4图

6.5. 如图, 一块长度为  $2L$  的木板斜靠在墙上无摩擦的下滑. 证明: 当木板高度为原来高度的  $2/3$  时, 它的顶端便与墙脱离接触.



题6.5图

6.6. 一小球在一个大的半球内无滑动地滚下, 半球的对称轴是垂直的, 小球从上边由静止开始滚动. (a) 小球到达半球的底部时动能是多少? 其中有多少是转动动能? 多少是平动动能? (b) 此时小球作用于半球的正压力是多少? 设小球的半径是  $r$ , 半球的半径是  $R$ , 小球的质量是  $m$ .

6.7 如图, 弹子球被球杆所击, 力的作用线水平并且通过弹子球的球心, 球的初速度是  $0$ . 设弹子球的半径是  $R$ , 质量是  $m$ , 球与桌面之间的摩擦系数为  $\mu$ , 问弹子球在停止滑动前能运动多远?

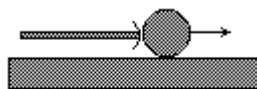
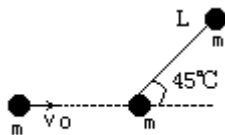


图6.7图

6.8. 一根质量可以忽略的刚性杆，长度为  $L$ ，连接着质量各为  $m$  的两个质点，放在无摩擦的桌面上。另一个质量为  $m$  的质点，以速度  $v_0$  撞击上述系统，如图所示。碰撞后，该质点直接返回。假定机械能守恒，求碰撞后系统绕质心的角速度。



题6.8题

[答案：  $\omega = (4\sqrt{2}/7)(v_0/L)$ ]

6.9. 四块质量相同长度均为  $l$  的砖块按图示重叠放置，每一块都相对于下面的一块伸出一部分。试证明，若要使它们维持平衡，则应按如下方式放置：

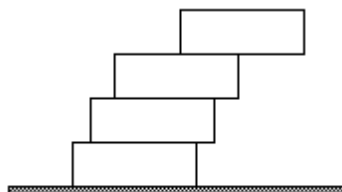


图6.9图

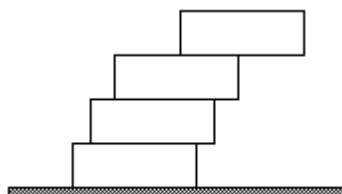


图6.9图

- (a) 最上面的砖块相对下面一砖块伸出  $l/2$ ；
- (b) 第二块砖相对于第三块砖伸出  $l/4$ ；
- (c) 第三块砖相对于最下面的砖块伸出  $l/6$ 。

叙述这样做的力学原理。

6.10. 关于砖块的堆置有下述较为有名的问题。均匀的砖块一块叠一块地放置，以求到达最大伸展量。为此使最上面砖块的重心恰好垂直地位于其下面砖块的边缘上，最上面两块砖的合重心的位置恰位于第三块砖的边缘上，依此类推。(a) 证明这个做法确实可以获得最大伸展量。(b) 证明，若该过程一直持续进行下去，我们可以获得任意想要的伸展量。(c) 现在设想换一种方法堆置  $n$  块砖块，即每一块砖相对于其下相邻的砖伸出  $1/n$ ，砖的长度是  $l$ ，那么，在砖块倒塌之前，我们最多能放置的砖块的数目  $n_{\max}$  是多少？试就  $n=1$ ， $n=2$ ， $n=3$  加以检验。

6.11. 重量为  $W$  的非均匀杆被两根轻绳水平地悬挂在两面直立的墙之间并处于静止状态（如图），绳与墙的夹角分别为  $\theta=36.9^\circ$  和  $\phi=53.1^\circ$ ，若杆的长度  $l$  为  $6.1\text{m}$ ，试计算杆的重心距其左端的距离。

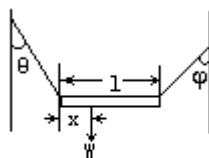


图6.11图

6.12. 半径为  $R$  的半球形碗置于粗糙桌面上，碗内装有沙子，质心高  $h$ . 讨论系统的平衡性质和条件.

## 第七章 振动

在 § 2.4 中，我们讨论了振动的运动学，这里我们将研究振动的动力学问题。除了简谐振动以外，其它振动形式还有耦合振动、受迫振动、阻尼振动等等。

## § 7.1 简谐振动

对弹性力，有胡克定律：

$$F = -kx \quad (7.1.1)$$

其中  $k$  为劲度系数 (stiffness). 在弹性力作用下，质点的运动方程是

$$m \ddot{x} = -kx \quad (7.1.2)$$

或

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (7.1.3)$$

这是二阶线性微分方程. 对于线性方程，如果  $x_1$  和  $x_2$  是解，则  $Ax_1 + Bx_2$  也是解.

(7.1.2) 式的解可以有如下三种形式：

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

$$x = A \cos (\omega_0 t + \varphi) \quad (7.1.4)$$

$$x = A e^{i \omega_0 t} + B e^{-i \omega_0 t}$$

其中  $\omega_0 = \omega = \sqrt{k/m} \quad (7.1.5)$

以后遇到这类方程可以直接写出解. 现在我们采用第二种形式. 二阶微分方程需要两个初始条件来确定解. 例如，已知  $x(0) = x_0$ ，

$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ ，就可以决定解振幅和初相位：

$$A = \left[ x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2} \right]^{1/2}, \quad \varphi = \arctan \left[ -\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0} \right] \quad (7.1.6)$$

对于  $\dot{x}_0 = 0$ ， $x = A \cos (\omega_0 t + \varphi)$ ，与上相比也可以认为是初相位不同的同一振动. 从 § 2.4，我们已经知道  $\cos$  和  $-\cos$  的不同，也可以认为把简谐运动看作匀速圆周运动的投影时，两个圆周运动的旋转方向不同. (7.1.2) 式的第一积分是

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} k x_0^2 = E \quad (7.1.7)$$

式中，常量  $E$  是总能量. 将上式与 (7.1.4) 式相结合，可知平衡位置处速度最大；而在最大位移时，能量全部是势能，如图 7-1 所示.

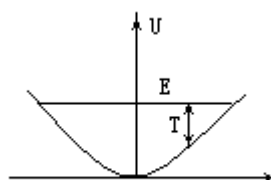


图7-1 势能

由于振动在时间上的周期性和空间上的重复性，平均值是很有意义的. 任一物理量  $P$  对时间和空间的平均定义如下：

$$\langle P \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T P dt \quad (7.1.8)$$

$$\langle P \rangle_A = \frac{1}{A} \int_0^A P dx \quad (7.1.9)$$

简谐振动决不限于弹簧-质点系统. 以下通过例子可以看到, 在不同的领域中会出现结构相同的方程.

\*例如, 在 LC 电路中, 能量守恒定律为

$$\frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2C}q^2 = E$$

对其求导得到

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$$

或

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

这一 LC 震荡方程的结构与简谐振动方程完全一致.

又如等离子体由电子和等量离子组成, 完全电离的气体就是典型的例子. 所谓的等离子体震荡 (Plasma Oscillation) 是一种集体震荡, 不只限于等离子体内发生. 也可以出现在固体中. 例如在 NaCl 晶体中, 当加上外电场时, 电子或负离子将相对于正离子位移一个距离  $d$ , 见图 7-2. 正负电荷形成的场将与外场平衡.

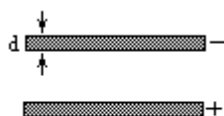


图7-2

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A} = \frac{ne}{\epsilon_0}d$$

当外场撤去以后, 电子 (位移也是  $d$ ) 在这一自身形成的电场的影响下运动, 运动方程为

$$m\ddot{d} = \frac{ne^2}{\epsilon_0}d$$

对于等离子体震荡, 震荡的角频率容易求得

$$\omega^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$$

除了回复力以外, 质点还可以在一个常力例如  $mg$  或  $eE$  的作用下运动. 在这种情形下, 我们可以把运动方程写为

$$m \frac{d^2}{dt^2} \left( x - \frac{F}{k} \right) = -k \left( x - \frac{F}{k} \right)$$

可见质点的振动特性没有变化只是平衡位置位移到  $F/k$ . 而机械能是

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = E, \quad x_0 = \frac{F}{k}$$

扭摆 (Torsion pendulum) 如图 7-3 所示. 扭矩和运动方程分别为

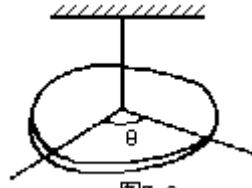


图7-3

$$M = K$$

$$-M = I \ddot{\theta}$$

假定扭弦通过主轴. 周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}}$$

已知 再测得  $T$ , 就可以决定转动惯量.

物理摆 (physical pendulum) 如图 7 - 4 所示: 一可绕水平轴摆动的刚体构成了物理摆. 我们选支点  $O$  为参考点, 则

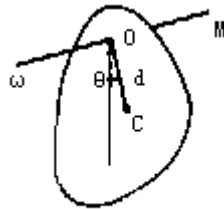


图7-4

$$M_{\text{ext}} = -dmgsin\theta$$

$$I = I_C + md^2$$

运动方程是

$$M = I \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{d}{I} mgsin\theta = 0$$

对于小振动, 周期是

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \equiv 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{eff}}}{g}}$$

其中有效单摆长

$$l_{\text{eff}} = \frac{I}{md} = d + \frac{I_C}{md}$$

$$= d + \frac{R_0^2}{d} > d$$

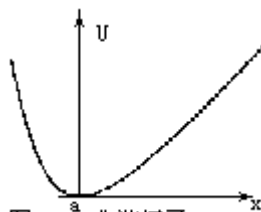


图7-5 非谐振子

在一些系统中, 回复力包含非线性项或其它复杂的因子. 图 7 - 5 中的势能曲线即为一例. 系统的一般运动可以是复杂的, 不再能用谐振子来描述. 但

就图中所提供的信息，我们可以作以下的讨论.在  $a$  点附近，我们可以把  $U$  展开为

$$U(x) = U(a) + U'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} U''(a)(x-a)^2 + \dots$$

力具有如下形式：

$$F = -U'(a)(x-a)$$

由此可得到简谐振动方程，而  $\omega^2 = U''(a)/m$ .

在研究刚体问题时，角动量-力矩方程用得较多，质心的运动方程是否与之等价呢？例如，

$$m \frac{d^2}{dt^2} r_C = mg$$

为了使得问题更清楚，我们选择最简单的几何形体——圆盘作研究.如图 7-6，设支点  $P$  在其边缘上，相对于  $P$  点的角动量-力矩方程为

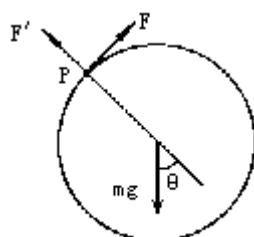


图7-6

$$-Rmg\sin\theta = \left( \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 \right) \ddot{\theta}$$

而相对于质心，角动量-力矩方程为

$$-RF = \frac{1}{2}mR^2 \ddot{\theta}$$

联立这两个方程就得到非零的切向力  $F$ .把这个力合并到质心的运动方程中，我们有

$$-mg\sin\theta + \frac{1}{3}mg\sin\theta = mR \ddot{\theta}$$

这就和相对于  $P$  点的方程一致了.法向力  $F$  也是可以求得的，

$$mg\cos\theta - F = -mR \dot{\theta}^2$$

\*在 § 3.2 中我们已经处理过单摆问题.运动方程的一次积分为能量关系：

$$U(\theta) = mgl(1 - \cos\theta)$$

$$U(\theta_0) = \frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2 + U(\theta)$$

或

$$\dot{\theta}^2 + \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) = 0$$

对方程积分可得到周期（见附录 B）



$$T = 4\sqrt{\frac{1}{g}} K\left(\sin \frac{\theta_0}{2}\right)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right]$$

其中  $K$  是第一类完全椭圆积分. 保留  $\theta_0$  的最低级修正, 有

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 \right) \equiv T_0 \left( 1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 \right)$$

小角度解要求  $\theta_0 = 5^\circ$ . 对于周期偏离小角度解 1% 的情形, 允许的角度远比我们想象的大:

$$\theta_0 = 0.4 \sim 23^\circ$$

对严格解作  $T/T_0 - \theta_0$  图, 表明上述结果相当好. 可见以上表达式对周期  $T$  可适用到相当大的角度. 这是超过我们所期望的. 因此我们可以说周期对角度不是非常敏感的.

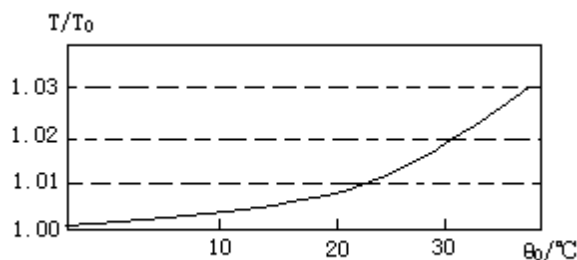


图7-7

## § 7.2 耦合振动

象一般二体问题的情形一样，有些二体振动也是可以进行约化的。例如，两个木块用弹簧连接着在光滑桌面上振动，运动方程是

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1 - l) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1 - l) \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

按照 § 4.4 的做法，运动可以分成两部分，质心运动和相对运动：

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_c = 0, \quad \mu \ddot{x} + kx = 0 \quad (7.2.2)$$

其中

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad x = x_2 - x_1 - l \quad (7.2.3)$$

在很多情形下，存在耦合振动 (coupled oscillation)，即存在两个或更多的振动。例如，二氧化碳分子是线性分子有四个振动模式，角频率用温度来表示， $\hbar\omega/k_B$  分别为 3360K、1890K、954K、954K。图

7 - 8 显示了几种耦合振动。

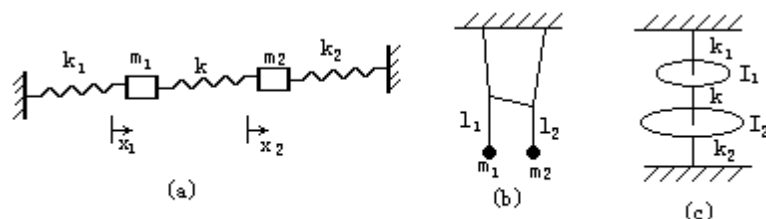


图7-8 耦合振动

对图 (a) 中的振子，有

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 x_2 - k(x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

方程可以写为

$$\begin{aligned} (m_1 \frac{d^2}{dt^2} + k + k_1) x_1 - k x_2 &= 0 \\ k_1 x_1 - (m_2 \frac{d^2}{dt^2} + k + k_2) x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

事实上这两个方程有同样的结构，如果把

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t}, \quad x_2 = A_2 e^{i\omega t} \quad (7.2.6)$$

代入，则有

$$\begin{aligned} \left( \omega^2 - \frac{k + k_1}{m_1} \right) A_1 + \frac{k}{m_1} A_2 &= 0 \\ \frac{k}{m_2} A_1 + \left( \omega^2 - \frac{k + k_2}{m_2} \right) A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

非平庸解要求系数行列式为零。这一条件给出了四个频率，它们是块质量和弹

簧劲度系数的函数,通常称它们为特征频率(characteristic frequencies). $x$ 的解可写为

$$x_i = \sum_{j=1}^4 a_{ij} \cos(\omega_j t + \phi_{ij}) \quad (7.2.8)$$

这里不再进一步讨论解,而主要研究特征频率,这会有意义得多.问题也可以用势能曲线来讨论.势能

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 \quad (7.2.9)$$

中间项是相互作用能,一个形式上的坐标“旋转”可以消去此交叉项.这就意味着在某种意义上势能由两个独立振动项组成.尝试取

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cos \theta - x'_2 \sin \theta \\ x_2 &= x'_1 \sin \theta + x'_2 \cos \theta \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

发现,当

$$\cot 2\theta = \frac{k_2 - k_1}{2k} \quad (7.2.11)$$

时,势能将有下面的形式:

$$V = \frac{1}{2} m_1 \omega_1^2 x_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega_2^2 x_2'^2 \quad (7.2.12)$$

而

$$\begin{aligned} m_1 \omega_1^2 &= \frac{1}{2} (k_1 + k_2 + 2k) - \frac{1}{2} \sqrt{(k_1 - k_2)^2 + 4k^2} \\ m_2 \omega_2^2 &= \frac{1}{2} (k_1 + k_2 + 2k) + \frac{1}{2} \sqrt{(k_1 - k_2)^2 + 4k^2} \end{aligned} \quad (7.2.13)$$

我们并不在意  $x_i$  代表什么,而只关心频率.对于简单的情形,比如说,  $m_1=m_2=m$ ,  $k_1=k_2=k_0$ ,可以直接求助于运动方程:

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 &= -k_0 x_1 + k (x_2 - x_1) \\ m \ddot{x}_2 &= -k_0 x_2 - k (x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (7.2.14)$$

简单的运算就可得到

$$\begin{aligned} 2m \frac{d^2}{dt^2} \frac{(x_1 + x_2)}{2} &= -2k_0 \frac{(x_1 + x_2)}{2} \\ \frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} (x_1 - x_2) &= -\left(\frac{k_0}{2} + k\right) (x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (7.2.15)$$

这里似乎有两个独立的振动,它们的频率是

$$\omega_1 = \sqrt{k_0/m}, \quad \omega_2 = \sqrt{(k_0 + 2k)/m}$$

称为简正频率(normal frequencies).相应的坐标是

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_2 = x_1 - x_2$$

当然它们不是  $m_1$  和  $m_2$  的真正坐标,而是其组合,我们称为简正坐标.显然简正坐标并不是属于某一实际的物理粒子.在多体问题的科学前沿,人们并不是

去寻求数量级为  $10^{23}$  的实际粒子的动力学，而是去寻求少数较低的简正频率。

## § 7.3 阻尼振动

除回复力以外，如果还存在阻力

$$F = -R\dot{x} \quad (7.3.1)$$

时（例如，在流体中  $F = -6\pi\eta R\dot{x}$ ），运动方程为

$$m\ddot{x} = -kx - R\dot{x} \quad (7.3.2)$$

或

$$\ddot{x} + \frac{R}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (7.3.3)$$

回复力引起谐振动，而阻力导致指数衰减；两种因素共存时，将存在相互间的竞争。我们可以采用试探解

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.3.4)$$

来求解 (7.3.3) 式，其中有四个参数待定。除了两个初始条件外，另外两个条件应包含在方程本身之中。(7.3.4) 式的一阶和二阶导数分别为

$$\dot{x} = Ae^{-\gamma t} [-\gamma \cos(\omega t + \varphi) - \omega \sin(\omega t + \varphi)]$$

$$\ddot{x} = Ae^{-\gamma t} [\gamma^2 \cos(\omega t + \varphi) + 2\gamma\omega \sin(\omega t + \varphi) - \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)]$$

将它们代入 (7.3.3) 式得到

$$(\gamma^2 - \omega^2 - \frac{R}{m}\gamma) \cos(\omega t + \varphi) +$$

$$(2\gamma\omega - \frac{R}{m}\omega) \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

要求以上方程对  $t$  的任何值都成立，谐函数的系数必须分别为零。这就导致

$$\gamma = \frac{R}{2m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} - \gamma^2 \quad (7.3.5)$$

实际上，试探解的形式中已隐含了欠阻尼条件。过阻尼和临界阻尼 (critical damping) 的条件 (参见附录 C) 分别是  $R > 2m\omega_0$  和  $R = 2m\omega_0$ ，它们都导致非周期运动。

阻尼振子逆着介质运动，必然有能量流向介质。而

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) \\ &= m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = (\dot{x} (m \ddot{x} + kx)) \\ &= -\dot{x}^2 < 0 \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

这是简谐运动中所没有的。我们可以集中研究这一新的性质，而不考虑振幅和初相位。含时的能量表达式是

$$kx - \varphi = k \left( x - \frac{\varphi}{k} \right) = k (x - x_0)$$

去掉其中的震荡因子以后，我们有反映能量衰减趋势的某种平均：

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 e^{-2\gamma t}$$

而这比能量对时间的严格依赖关系更为重要.对此 ,可以求得能量的相对衰减率为

$$-\frac{1}{\langle E \rangle} \frac{d\langle E \rangle}{dt} = 2\gamma \quad (7.3.7)$$

在周期  $T$  ( $2\pi/\omega$ ) 内, 相对衰减是

$$-\frac{1}{\langle E \rangle} \frac{d\langle E \rangle}{dt} T = 2\gamma \frac{2\pi}{\omega} \equiv \frac{2\pi}{Q}; \quad Q \equiv \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{m\omega}{\eta} \quad (7.3.8)$$

其中  $Q$  称为品质因子.在阻尼振动中  $Q$  越大, 相对能量衰减越小.根据地震波的传播情况也可得到品质因子.例如 1976 年 4 月唐山地震前, 平均值  $\bar{Q}$  为 666; 震后平均值  $\bar{Q}$  为 180.这表明震后岩石破碎, 地震波衰减增大.

## \* § 7.4 非线性振动

在实际问题中，回复力可能形如

$$F = -(1 + Bx^2)kx \quad (B > 0) \quad (7.4.1)$$

对压缩和扩张运动而言，其中的立方项是最低的对称幂次。较大的回复力意味着较强的劲度，可以称做“硬弹簧”情形，于是相应的运动方程为

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{2} \quad (8.4.7)$$

而势能（见图 7-9）将有

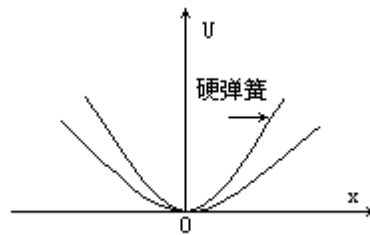


图7-9 硬弹簧

$$\frac{U}{m} = -\int \frac{F}{m} dx = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} B x^4 \quad (7.4.3)$$

“软弹簧”的情形更有意思。其中回复力小于正常的线性力。

$$F = -(1 - Bx^2)kx \quad (B > 0) \quad (7.4.4)$$

或

$$\frac{U}{m} = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} B x^4 \quad (7.4.5)$$

单摆的运动方程中，回复力是

$$\begin{aligned} -mg \sin \theta &= -mg \left( \theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \dots \right) \\ &= -mg \theta \left( 1 - \frac{1}{3!} \theta^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

这是典型的“软”势的情形。相应地可以用下面的级数作试探解：

$$\theta = \theta_0 [\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cos(3\omega_0 t) + \dots]$$

将其代入运动方程可以得到

$$= \theta_0 \left[ 1 - \frac{3}{8} B \theta_0^2 \right]$$

将 § 7.1 中单摆周期的结果换算成  $\omega$  即为上式 ( $B=1/3!$ )。相比之下，对硬弹簧  $B > 0$ 。

在 § 7.1 中的非谐振子有如下形状的力：

$$F = -(1 + Bx)kx \quad (B > 0)$$

它所对应的势是不对称的。在离子晶体中（见 § 30.3），正是势能曲线的这种不对称导致热膨胀现象。对于这种势，计算表明有

$$\begin{aligned} 0 \\ x = A_0 \end{aligned}$$

此结论可以由下列级数试探解得到：

$$x = A + A[\cos(\omega t) + \cos(2\omega t) + \dots]$$

以上我们讨论了系数  $B$  前面具有不同符号的情形. 如果  $B < 0$ , 将怎样呢? 即这样的参数值对应什么样的系统? 我们可以对下列函数作图:

$$u = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \quad (7.4.6)$$

它即是所谓“双阱势”, 如图 7-10 所示. 存在 3 个平衡位置, 两个稳定、一个不稳定, 这是系统动力学性质的变化. 在氨分子中, 氮就经受到这种势.  $\omega = 0$  是一个临界分岔 (bifurcation) 值. 看一下上面讨论的几种势各自在相空间中的轨迹是很有意义的.

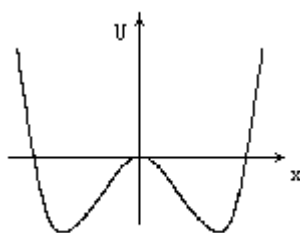


图7-10 双阱势

\*软弹簧的势能曲线是怎样的? 第二章中, 图 2-14 是“中心”, 对应“硬弹簧”. 对应于“软弹簧”、“双阱势”的轨迹是什么呢?

在非线性系统的研究中常常用到吸引子 (attractors) 这一术语. 实际上它

指的是以下几种状态:

- 平衡 (点);
- 周期运动或极限环 (limit cycle, 相平面中的闭曲线);
- 准周期运动.

其中平衡点的情形比较直观, 上面已经作了讨论. 所谓极限环发生在如下的方程所描述的运动中:

$$\ddot{x} + \sin x = T + \gamma \dot{x} (1 - \dot{x}^2)$$

注意方程右边第二项的符号与角速度的大小有关, 也许由此可以粗略地理解图 7-11 所示相平面中存在极限环. 准周期性 (quasiperiodicity) 指的是一个函数有两个或更多的周期, 它们的比不是有理数, 称作彼此无公度 (incommensurate), 例如

$$f(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$$

就是这样的函数.

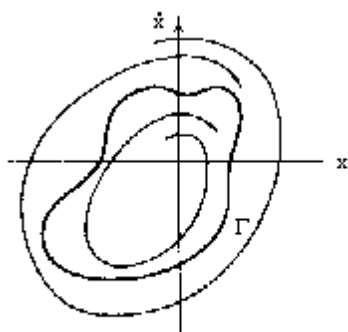


图7-11 极限环



奇异吸引子 (strange attractor) 是和分形集 (见 § 30.2) 联系在一起的.

## § 7.5 受迫阻尼振动

当周期性变化的驱动力  $F_0 \cos \omega t$  加到一个阻尼振子上时，运动方程将是

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (7.5.1)$$

现在有 3 个力：阻尼力、回复力、驱动力；有 2 个频率：自然频率、驱动频率。下面我们致力于寻找它们之间的关系。虽然可以按照微分方程的标准技术来求解方程，但是我们宁愿从物理上作考虑，构筑一个试探解。我们期望方程有如下结构的试探解：

$$x = x_d + x_F$$

其中第一项是 § 7.3 中讨论过的相应的齐次方程的解，它包含一个衰减因子，在足够长的时间之后变为零。所以，我们感兴趣的部分是特解  $x_F$ ，即第二项。用

$$x = A \sin(\omega t - \varphi) \quad (7.5.2)$$

作为试探解代入 (7.5.1) 式，得到

$$\begin{aligned} & [(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\omega t - \varphi) + 2\gamma \cos(\omega t - \varphi)] A \\ &= \frac{F_0}{m} \cos \omega t \end{aligned}$$

分别比较  $\sin \omega t$  和  $\cos \omega t$  的系数，得到

$$\begin{aligned} & (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2\gamma \sin \varphi = 0 \\ & [2\gamma \cos \varphi - (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi] A = \frac{F_0}{m} \end{aligned}$$

由此可得

$$\tan \varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega} \quad (7.5.3)$$

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \quad (7.5.4)$$

所以完整的解是

$$x = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right) \quad (7.5.5)$$

容易发现位移与力的相差为

$$\varphi = \varphi_x - \varphi_F = -\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega} \quad (7.5.6)$$

将它对外界驱动频率作图，结果如图 7-12 所示。当  $\omega = 0$  时，振幅为

$$A = \frac{F_0 / m}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

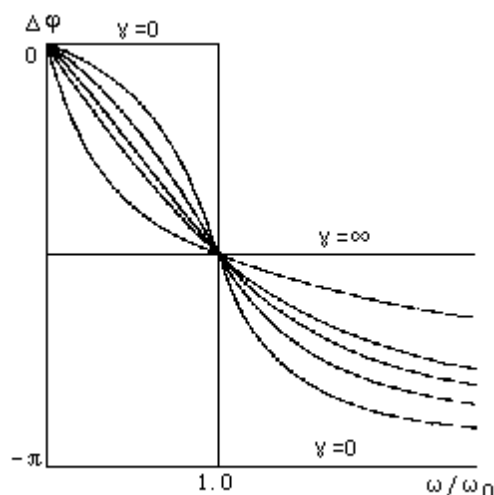


图7-12 位移的相位

位移共振发生于

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2$$

这时位移为

$$x = \frac{F_0}{K} \frac{\omega_0^2}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\gamma}{\omega}\right) \quad (7.5.7)$$

当阻尼趋向于零时,  $\gamma = 0$ , 振幅趋向无穷. 这时相位 (滞后)

$$\varphi = \varphi_x - \varphi_f = -\frac{\pi}{2} \quad (7.5.8)$$

共振曲线的形状对于传感器 (sensor, transducer) 的设计有指导意义. 例如, 利用位移变化特性的电容传感器, 可以使之工作在位移共振曲线  $\omega/\omega_0 < 1$  的平坦区域, 见图 7-13. 这样传感器有较平坦的频率响应.

由 (7.5.7) 式可以求得速度为

$$\dot{x} = \frac{\omega F_0 / m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t + \arctan \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right) \quad (7.5.9)$$

容易看到速度的相位与位移的相位的关系为

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \varphi_x$$

发生速度共振的条件是

$$\omega = \omega_0$$

这时速度为

$$\dot{x} = \frac{F_0}{k} \frac{\omega_0^2}{2\gamma} \cos(\omega_0 t)$$

它和力是同相的. 速度共振曲线在  $\omega/\omega_0 = 1$  区域呈现出一平坦区, 见图 7-14. 这对于动圈换能器的设计很重要, 因为动圈传声器的感应电动势正比于音膜的振动速度: 工作在共振区的传感器频率响应好, 灵敏度高.

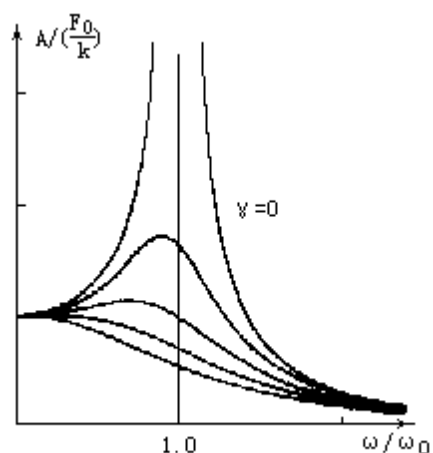


图7-13 位移振幅的频率响应

由 (7.5.9) 式可以进一步求得加速度

$$\ddot{x} = \frac{\omega^2 F_0 / m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right) \quad (7.5.10)$$

容易看到其相位是

$$\varphi_a = +\varphi_x$$

加速度共振发生的条件是

$$= \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}$$

这时加速度为

$$\ddot{x} = \frac{\omega_0^2 F_0}{k} \frac{\omega_0^2}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}\right)$$

加速度共振曲线在  $\omega/\omega_0 \gg 1$  的区域呈现一平坦区, 见图 7-15. 但是测量振源加速度的加速度计在使用时还必须考虑到拾振的要求, 即要求  $\omega/\omega_a \ll 1$ , 其中  $\omega_a$  是加速度计的谐振频率.

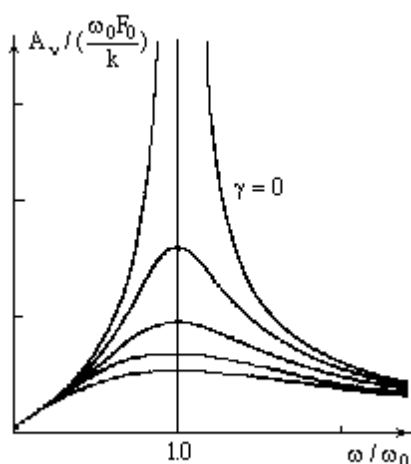


图7-14 速度振幅的频率响应

不同频率的振动可能激起人体不同部分的共振, 对人体造成危害. 表 7-1 给出了频率和相应人体的共振部位.

表 7-1 人体的共振频率

“ 系统 ”	共振频率/Hz
胸-腹	3 ~ 6
头-颈-肩	20 ~ 30
眼球	60 ~ 90
下颚-头盖骨	100 ~ 200

共振的概念在很多领域有着广泛的应用，例如，电子电路、声学、原子过程、核磁共振、穆斯堡尔效应（mössbauer effect）、基本粒子共振等等；在有关的章节中，我们将作相应的讨论。

## 习 题

7.1. 证明：(a) 对于简谐运动，在一个周期中势能的平均值和动能的平均值均为  $kA^2/4$  (其中  $k$  是回复力的系数， $A$  是振幅.)；(b) 若考虑对空间平均，则势能的平均值等于  $kA^2/6$ ，动能的平均值等于  $kA^2/3$ 。(c) 解释上述差异的物理意义。

7.2. 常用的一个势能函数是伦纳德-琼斯势：

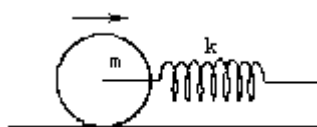
$$U = 4 \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]$$

(a) 求势能最小处的半径及势阱的深度。

(b) 若质量均为  $m$  的两个相同的原子，以林纳德-琼斯势相互作用而束缚在一起，并在平衡位置作微小振动. 求其振动频率。

7.3. 一个半径为  $r$  的大理石小球，在半径为  $R$  的浅碟子中来回滚动. 已知  $R \gg r$ ，求小球作小振动的频率。

[答案：  $\omega = \sqrt{5g/7R}$ ]

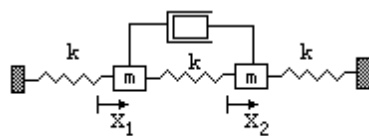


题7.4图

7.4. 如图，将一质量为  $m$  的圆柱形刚体与水平放置的轻质弹簧连接在一起，使该刚体可以沿水平面无摩擦的滚动，弹簧的劲度系数为  $3.0\text{N/m}$ . 设圆柱从偏离平衡位置  $0.25\text{m}$  处由静止释放，计算当圆柱滚动到平衡位置时的 (a) 平动动能、(b) 滚动动能。(c) 证明在这些情形下，圆柱的质心作简谐运动，其周期是  $T = 2\pi\sqrt{3m/2k}$ 。

7.5. 若弹簧的质量  $m_s$  不可忽略，但远比悬挂其下的物体质量  $m$  为小，则振动周期为  $T = 2\pi\sqrt{(m + m_s/3)/k}$ ，试证明之。

7.6. 两个质量均为  $m$  的质点 1 和 2，连接于 3 个相同的弹簧上. 弹簧的质量可以忽略，劲度系数为  $k$ . 忽略重力. 两质点间连接一质量可忽略的阻尼减震器，如图所示. 阻尼减震器的阻力为  $b$ ，这里  $v$  是它两端的相对速度. 令  $x_1$  与  $x_2$  为两质点离开其平衡位置的位移。



题7.6图

(a) 求每个质点的运动方程。

(b) 证明运动方程可以利用新的变量  $y_1 = x_1 + x_2$  和  $y_2 = x_1 - x_2$  来求解。

(c) 证明：如果两质点原来是静止的，后给质点 1 以速度  $v_0$ ，则在足够长的时间以后，两个质点的运动为

$$x_1 = x_2 = \frac{v_0}{2\omega} \sin \omega t$$

并计算出 。

7.7. 如图，立方块的质量为  $1.5\text{kg}$ ，弹簧的劲度系数为  $8.0\text{N/m}$ 。将方块向下拉  $12\text{cm}$  后释放，运动过程中液体对浸于其中的板有阻尼，设为  $-b \, dx/dt$ ，这里  $b=0.23 \, \text{kg/s}$ ，试计算从开始到振幅变为最初的  $1/3$  时方块振动的次数。

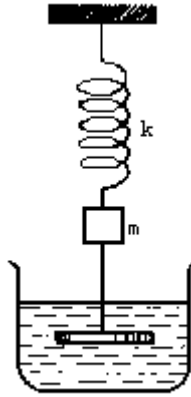


图7.7图

7.8 证明对于强迫阻尼振动，外力的平均功率等于阻尼力耗散的功率。

## 第八章 波

波动是很普通的现象，在我们周围常见的波有：水波、声、光、无线电波、电视信号等等。此外，生态 (ecological) 问题、疫病 (infections) 传染、谣言扩散 (rumor spreading)、神经脉冲 (nerve impulse) 等等也涉及到波现象。在文学作品中，常见的词汇有波、涛、浪、潮、涟漪等等。这里我们所关心的是物理中的波，即基本的波现象。波的一种可能的定义是：波是振动或场的传播。按照美国标准声学术语，波的定义为

Any physical quantity which has the same relationship to some independent variable ( usually time ) that a propagated disturbance has , at a particular instant , with respect to space , may be called a wave.



## § 8.1 波及其分类

机械波是由扰动的传播所导致的在物质中动量和能量的传输.物质本身没有相应的大块的移动.例子有,沿着弦或弹簧传播的波、声波、水波.我们称传播波的物质叫介质,它们是可形变的或弹性的和连绵延展的.对于电磁波或引力波,介质并不是必要的.传播的扰动不是介质的移动而是场.

波可以按很多方式分类.按照位移(或场矢量)以及传播方向的关系,有横波(例如沿弦的波)、纵波(例如声波)和混合波(例如水波及地震波).按照传播的空间维数,波有一维的(沿弦的波)、二维的(表面波,涟漪)和三维的.波可以有不同的波前:平面的、球面的或柱面的等等.至于形状,波可以是波列、波包.行波和驻波的区别也是人们所熟知的.最后,按照波动方程,可以有线性波和非线性波.后者有冲击波(shock waves)或非线性色散介质中的孤立波(solitary waves).原子弹、氢弹爆炸时有冲击波,大坝垮坝时同样有冲击波.孤立波的概念已被用来解释很多物理现象和过程,包括从沿神经传播的电压脉冲到星系的螺旋形结构.

波粒二象性(wave - particle duality)是现代物理学中的一个基本概念.我们知道光是波,是延展的,在光电效应中,却发现它是量子化的——光子(photon).爱因斯坦(1921)、密立根(1923, R.A.Millikan)和康普顿(1927, A.H.Compton)对此都有贡献.另一方面,自从汤姆孙(1897, 1906, J.J.Thomson)发现了电子(荷质比),密立根(1911)等测量了基本电荷,从而确认电子是粒子,是局域的.然而德布罗意(1929, L.V.de Broglie)却提出了物质波的概念.最终小汤姆孙(1937, G.P.Thomson, )以晶体电子衍射实验揭示了电子的波动性.

## § 8.2 波动方程

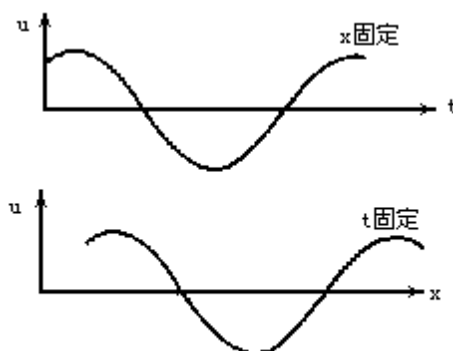


图8-1 固定x或t的图象

我们首先考察一个沿  $x$  方向传播的横波. 如图 8 - 1 , 对于固定的  $x$  , 我们观察到的是该处物质的振动——位移随时间的变化; 而对于固定的  $t$  , 比如说  $t=0$  , 我们得到的是波形的一幅快照:

$$u(x, 0) = f(x) \quad (8.2.1)$$

我们希望知道  $u(x, t)$  又如何呢? 想象一个参考系  $S$  随波运动, 那么所观察到的位移应该是  $u(x, t) = f(x - vt)$ . 可是, 我们知道  $x = x - vt$ , 所以对右行的波, 有

$$u(x, t) = f(x - vt) \quad (8.2.2)$$

对左行波, 有

$$u(x, t) = f(x + vt) \quad (8.2.3)$$

上式对  $x$  和  $t$  求导得到行波方程

$$u_t + v u_x = 0 \quad (\text{右行})$$

$$u_t - v u_x = 0 \quad (\text{左行}) \quad (8.2.4)$$

进一步求导将产生“波动方程”:

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$$

或

$$u_{xx} - \frac{1}{v^2} u_{tt} = 0 \quad (8.2.5)$$

下面, 从一般情况出发来推导波动方程. 首先从柔软弦上的横波出发来讨论. 如图 8 - 2 所示取一段弦, 位移是  $u(x, t)$ . 其长度是

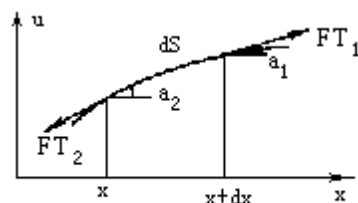


图8-2 横波中的位移

$$ds = \sqrt{dx^2 + du^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$$

运动方程为

$$F_T \sin \alpha_1 - F_T \sin \alpha_2 = 0 \quad (8.2.6)$$

$$F_{T1} \sin \theta_1 - F_{T2} \sin \theta_2 = \left( \frac{ds}{dx} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (8.2.7)$$

对于小振动，以下的近似是合理的：

$$\cos \theta_1 \approx \cos \theta_2 \approx 1, \quad \sin \theta \approx \tan \theta = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad ds \approx dx$$

在这些条件下，我们有

$$F_{T1} = F_{T2} = F_T$$

$$F_T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - F_T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x = \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

将上方程在  $x$  处展开，则变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad v = \sqrt{\frac{F_T}{\rho}} \quad (8.2.8)$$

这个方程是线性齐次常系数方程，其中  $v$  是波速。

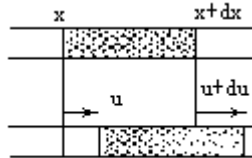


图8-3 纵波中的位移

\*如果加一个与速度成比例的阻尼力密度，则有

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial u}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

对于较强硬的弦，柔韧性必须考虑。方程中应包含附加的（剪切）力项：

$$F_T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

现在讨论在橡皮块中的纵波。运动方程是

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \phi + \frac{2u}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} \phi - \frac{u^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \phi = 0$$

对于小的拉伸或压缩  $L$ ，张力  $F_T$  的变化将与之成正比：

$$F_T = YS \frac{L}{L}$$

这里  $L$  和  $S$  分别为橡皮块的长度和横截面积， $Y$  是杨氏模量（Young's modulus）：

$$Y = \frac{L}{S} \left( \frac{\partial F_T}{\partial L} \right) \quad (8.2.9)$$

这里， $dx$  是原长（ $L$ ），而  $du$  是拉伸长度（ $L$ ）。于是力为

$$F = YS \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - YS \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x$$

$$= YS \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

代入运动方程，得到

$$\rho_0 dx S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Y S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \left( c = \sqrt{\frac{Y}{\rho_0}} \right) \quad (8.2.10)$$

对于气体介质，我们可以利用下面的一个形式代换而得到波速：

$$F_T - pS$$

$$Y = \frac{L}{S} \left( \frac{\partial T}{\partial L} \right) \rightarrow -\frac{L}{S} \frac{\partial(pS)}{\partial L} = -V \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \equiv B = \frac{1}{k_T} \quad (8.2.11)$$

其中负号的出现是因为张力  $F_T$  和压强  $p$  方向相反  $B$  称为体积弹性模量 (bulk modulus of elasticity)， $k_T$  为等温压缩率 (isothermal compressibility)。在下列表达式中  $B$  作为一个系数而出现：

$$p = p_0 + \Delta p, \quad \Delta p = -B \frac{\Delta V}{V}$$

这样 (声) 波速为

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} \quad (8.2.12)$$

\*理想气体中声速的表达式是什么？

在绝热过程 (adiabatic process) 中，可以定义绝热压缩率：

$$k_s = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_s$$

压强的变化是

$$\Delta p = -\frac{1}{k_s} \frac{\Delta V}{V} \sim -\frac{1}{k_s} \frac{\partial u}{\partial x}$$

空气柱的运动方程是

$$\left[ p_0 - \frac{1}{k_s} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_x S - \left[ p_0 - \frac{1}{k_s} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x+dx} S = (\rho_0 S dx) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{k_s} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

声速为

$$v = \sqrt{\frac{1}{k_s \rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \quad \left( \gamma = \frac{C_p}{C_v} \right)$$

我们将在以后(第十一章)讨论有关的热力学过程(如等温过程和绝热过程)。

\*电磁波将在第二十一章讨论。这里，简要地提一下电磁波所遵循的方程。电磁波是电磁场的传播，其场量满足麦克斯韦 (Maxwell) 方程组：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

在真空中， $\rho=0$ ， $\mathbf{J}=0$ ，得

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

按照矢量分析公式：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

得 E 的方程为

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

B 的方程结构完全相同。

### § 8.3 简谐波及其叠加

简谐波 (simple harmonic wave) 具有单一的频率, 但除了其频率和振幅以外不携带任何信息, 所以在应用上是没有什么价值的. 但它作为基本分量, 可以合成各种带有特定信息的波.

我们用一个一维的行波来说明简谐波的一般表示. 根据 (8.2.2) 式或 (8.2.3) 式, 我们可以取波动方程的试探解为

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t - \varphi) \quad (8.3.1)$$

对应的波速是  $v = \omega/k$ . 上式对  $x$  和  $t$  求偏导得

$$u_{xx} = -k^2 u, \quad u_{tt} = -\omega^2 u$$

由此可以得到波动方程, 所以 (8.3.1) 式确实是波动方程的一个解. 其它常用的解的形式有:

$$u(x, t) = B \cos(kx - \omega t) + B' \sin(kx - \omega t)$$

$$u(x, t) = C e^{i(kx - \omega t)} + C' e^{-i(kx - \omega t)} \quad (8.3.2)$$

$$u(x, t) = \operatorname{Re}[D e^{i(kx - \omega t)}]$$

采用 (8.3.1) 式中的符号, 一个波的基本元素可以列举如下:

- 振幅 (amplitude)  $A$ , 是最大位移;
- 频率 (frequency)  $f$ 、角频率  $\omega$  和周期  $T$ , 它们的关系是  $\omega = 2\pi f$ ,  $T = 1/f$ ;
- 相位 (phase)  $\phi = kx - \omega t - \varphi$  和  $x$  处的初相位  $kx - \varphi$ ;
- 波矢 (wave vector)  $k$ , 是波的传播方向上的矢量, 其大小  $k$  叫做波数.

相速度是具有一定相位的点的传播速度. 这里所说的点不是指物质单元. 物质单元只在平衡位置附近振动而没有整体运动. 下面来求相速度. 设时刻  $t$  在  $x$  的点处在某一相位; 在  $t + \Delta t$  时间以后, 发现同样相位的点在  $x + \Delta x$ . 同样相位的意思是

$$k(x + \Delta x) - \omega(t + \Delta t) - \varphi = kx - \omega t - \varphi$$

所以相速度为

$$v_p = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} \quad (8.3.3)$$

波长 (wavelength)  $\lambda$  是相位相差  $2\pi$  的点之间的空间间隔:

$$[k(x + \lambda) - \omega t - \varphi] - [kx - \omega t - \varphi] = 2\pi$$

即

$$k\lambda = 2\pi$$

我们可以用另外的方式来求得波长和波矢的关系, 如

$$\lambda = T \cdot v_p = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{k} \quad (8.3.4)$$

波前 (wavefront) 是同相位的表面. 指定相位的相邻波前之间的间隔为一个波长.

实验表明两个或更多的波可以在同一地点独立地传播. 这样的例子有: 天线上的无线电信号或电视信号以及交响乐团演奏的乐曲等. 在介质中, 任何质点的位移只是各个波动造成的位移之和. 这样我们就有波的叠加.

波的叠加的数学基础是傅里叶分析. 数学上, 一个 (时间或空间的) 周

期函数

$$F(t) = F(t+T)$$

可以分解成级数：

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

我们可以叠加适当的谐函数以合成一定的波形。

**调幅波** (amplitude-modulated wave, AM wave) 设两个波以接近的频率和波长在同一空间区域内传播：

$$\begin{aligned} u_1 &= A \cos[(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t] \\ u_2 &= A \cos[(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t] \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

合成波将是

$$u_1 + u_2 = 2A \cos(kx - \omega t) \cos(kx - \omega t) \quad (8.3.6)$$

我们发现合成波的振幅本身 (合成波的包络) 形成了一个波, 这个波相对合成波而言是缓变的。我们称合成的波为调幅波。我们可以求任何指定振幅 (相当于包络的一定相位) 的点的运动速度, 认为它是包络的相速度或者是合成波调制结构整体的运动速度：

$$k \cdot (x + \Delta x) - (\omega + \Delta \omega) \cdot (t + \Delta t) = k \cdot x - \omega \cdot t$$

即 
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$$

群速度 (group velocity) 的定义如下：

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (8.3.7)$$

调制波携带着信息, 根据狭义相对论, 信号速度不能超过光速  $v_g < c$ 。

光通过玻璃或 X 射线通过石墨时行进速度不同于真空的情形。常用折射率 (refraction index)  $n$  这个数值因子来表达这一事实。

$$n = \frac{c}{v_p} = \frac{kc}{\omega}$$

如果  $n < 1$ , 例如

$$n = 1 - \frac{Nq_c^2}{2\epsilon_0 m \omega^2} \equiv 1 - \frac{a}{\omega^2}$$

则相速将大于真空光速, 而群速度仍然小于真空光速：

$$v_g = \frac{c}{1 + \frac{a}{\omega^2}} < c$$

从相速度的定义 ( $v_p = \omega/k$ ) 出发, 我们可以求得它和群速度之间的关系：

$$v_g = v_p + k \frac{d}{dk} \frac{v_p}{k} \quad (8.3.8)$$

相速和群速的差别出现于介质中, 其中相速 (从而  $v_p$ ) 是波矢的函数：

$$\frac{\omega}{k} = v_p(k)$$

例如, 在稍有色散的介质中,

$$= ck \left( 1 + \frac{1}{2} \alpha k^2 \right) \quad (8.3.9)$$

液体中的表面波的相速和群速不同．相速的一般表式是

$$v_p = \left[ \left( \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} \right) \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \right]^{1/2}$$

其中  $h$  是深度， $\sigma$  是表面张力（对于水  $\sigma = 73 \times 10^{-3} \text{N/m}$ ）．如果  $h \gg \lambda$ ，

$$v_p = \left( \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} \right)^{1/2}$$

容易发现对应于相速极小的波长是

$$\lambda_0 = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} = 0.017 \text{m}$$

按照波长，表面波可分为重力波 (gravity wave) 和毛细波 (capillary wave)，毛细波就是涟漪 (ripple)．它们的相速为

$$v_p = \begin{cases} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} & (\lambda \gg \lambda_0) \text{ 重力波} \\ \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}} & (\lambda \ll \lambda_0) \text{ 毛细波} \end{cases}$$

对重力波

$$\begin{aligned} v_g &= v_p + k \frac{dv_p}{dk} \\ &= v_p + k \frac{d}{dk} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} v_p \end{aligned}$$

而对于毛细波  $v_g = \frac{3}{2} v_p$

对  $h \ll \lambda$  的情形，

$$v_g = \left( \frac{g\lambda}{2\pi} \frac{2\pi h}{\lambda} \right)^{1/2} = \sqrt{gh}$$

驻波 (standing wave) 也可以看作是两行波的叠加．

假定以下两行波在同一空间区域传播：

$$\begin{aligned} u_1 &= A \cos(kx - \omega t - \varphi) \\ u_2 &= A \cos(kx + \omega t) \end{aligned} \quad (8.3.10)$$

合成波是

$$u_1 + u_2 = 2A \cos\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (8.3.11)$$

其中空间和时间部分是分离的，振幅依赖于  $x$ ．对两端 ( $x=0, L$ ) 固定的弦，任何时刻有

$$(u_1 + u_2) \big|_{x=0} = 0 \quad \cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right) = 0$$

$$(u_1 + u_2) \big|_{x=L} = 0 \quad \cos\left(KL - \frac{\varphi}{2}\right) = 0$$



从第一个条件，得 $\varphi =$  。这意味着如果我们认为 $u_1$ 、 $u_2$ 为入射波和反射波，那么它们在固定端的相差为 。这一现象叫做半波损失（half - wavelength loss）。在 $\varphi$ 确定以后，第二个条件限制了 $k$ 的取值： $kL=n\pi$ ，或 $\lambda=2L/n$ 。我们可以将合成波的振幅作图，如图8-4所示，拐点B称为波节或节点（node），而极大位置A为波腹或反节点（antinode）。

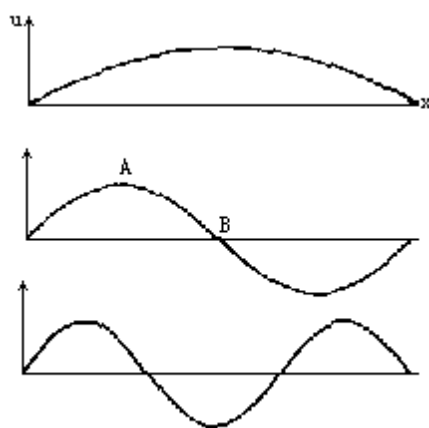


图8-4 驻波

对于驻波的频率，有

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{kv}{2\pi} = n \frac{v}{2L}$$

$$f_n \equiv nf_1 \equiv n \frac{v}{2L} \quad (8.3.12)$$

其中 $f_1$ 称作基频，而 $f_n$  ( $n>1$ ) 称为 $n$ 次谐波（harmonics）。

\*驻波中的动能和势能有一定的分布且不断相互转换。以 $K=3\pi/L$ 的驻波为例，位移、速度分别为

$$\begin{aligned} u &= 2A \sin(kx) [-\sin(\omega t)] \\ &= -2A \sin\left(3\pi \frac{x}{L}\right) \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \\ \dot{u} &= -2A \sin\left(3\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \end{aligned}$$

动能密度、和势能密度分别为

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 \\ &= 2A^2 \rho \sin^2\left(3\pi \frac{x}{L}\right) \cos^2\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \\ w_p &= \frac{1}{2} F_T u_x^2 = 2a^2 F_T K^2 \cos^2\left(3\pi \frac{x}{L}\right) \sin^2\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \\ &= 2A^2 \rho \cos^2\left(3\pi \frac{x}{L}\right) \sin^2\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \end{aligned}$$

当 $t/T=1/4, 3/4$ 时，各段弦都处在它们各自的极大位置。动能密度为零，而势能密度集中在波节附近。当 $t/T=0, 1/2, 1$ 时，弦是直的，能量完全是动能，且集中在波腹附近。当 $t/T=1/8, 3/8, 5/8, 7/8$ 时，能量密度沿整个弦是常量（ $A^2 \rho$ ）。

试将动能密度  $w_k$ 、势能密度  $w_p$  作图。

对一个充气管就位移而言闭端是波节，开口是波腹。至于压强，如图 8-5 所示，其波幅、波节与位移的波节、波腹有所对应。由于

$$B = -V \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)$$

我们有

$$dp = -B \frac{dV}{V} = -B \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8.3.13)$$

所以位移的极大（波腹）是压强的波节，而位移的波节（拐点）是压强的波腹。

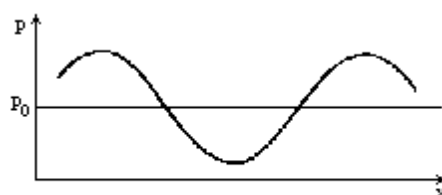


图8-5 纵波中的压强

\*驻波问题也可以用分离变量法来处理。假定

$$u(x, t) = X(x) T(t) \quad (8.3.14)$$

代入波动方程有

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{v^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -k^2 \quad (8.3.15)$$

上式要对任意  $x$  和  $t$  成立，唯一的可能是它们都是常量。上式中设置负常数是为了适合于振动解而不是衰减解。（8.3.15）式等价于

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0 \quad (8.3.16)$$

$$\ddot{T}(t) + k^2 v^2 T(t) = 0 \quad (8.3.17)$$

这就是所谓的本征值方程（Eigenvalue equation）。利用边界条件可以求得解和本征值  $k$ 。

随着波的传播伴随着能量的传输。我们先推导一维横波中能量密度的表达式。对一维横波，有

$$\begin{aligned} dE &= \frac{1}{2} \left( dx \right) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + F_T (ds - dx) \\ &= \frac{1}{2} \left( dx \right) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + F_T dx \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

能量密度是

$$w = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (8.3.18)$$

其中用了  $v^2 = F_T / \mu$ 。利用行波方程，有

$$w = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + F_T \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad (8.3.19)$$

从量纲分析，我们知道三维的能量密度是

$$w_3 = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \frac{F_T}{S} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

对（一维波）通过某一点的能流（energy flow）可作如下讨论。

单位时间内在 A 点自左向右传递的能量是张力做的功。对于右行波，能量为正，这可以从图 8 - 6 中看出。图中长箭头表示右行波的波速  $v$ ，而小箭头表示相应的物质段的运动速度  $u_t$ 。张力在单位时间内做的功可由下式表达：

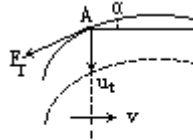


图8-6 能流

$$\begin{aligned} P &= F \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -F_T \sin \frac{\partial u}{\partial t} = -F_T \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} = \pm F_T \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 v \\ &= \pm wv \end{aligned} \quad (8.3.20)$$

对于

$$u = A \cos(kx - \omega t - \phi), \quad v^2 = F_T / \mu = \omega^2 / k^2$$

功率为

$$\begin{aligned} P &= \pm F_T A^2 k^2 \sin^2(kx - \omega t - \phi) v \\ &= \pm \mu A^2 \omega^2 \sin^2(kx - \omega t - \phi) v \end{aligned} \quad (8.3.21)$$

可以发现平均功率为

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \pm \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 v \sim A^2 \quad (8.3.22)$$

对于波动，一个常用的量是强度。三维行波的强度  $I$  是单位时间通过单位截面的能量：

$$I \equiv \frac{|\bar{P}|}{S} \quad (8.3.23)$$

## § 8.4 干涉和衍射

简谐波的叠加，除了生成调幅波和驻波以外还有很多种形式和结果，干涉和衍射也在其中。

干涉 (interference) 可以发生在一维、二维或三维情形。

设有两个具有相同波长和频率的波沿一维路径传播：

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos(kx - t - \varphi) \\ u_2 &= \cos(kx - t) \end{aligned} \quad (8.4.1)$$

其中的相差可以是波程差造成的，例如：

$$kx - \varphi = k\left(x - \frac{\varphi}{k}\right) - k(x - x)$$

合成的波是

$$u_1 + u_2 = 2A \cos \frac{\varphi}{2} \cos\left(kx - t - \frac{\varphi}{2}\right) \quad (8.4.2)$$

注意，这里波是沿同方向传播的，完全不同于驻波。它的强度正比于振幅的平方，与相差有关：

$$I \propto \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \begin{cases} 1, & \varphi = m\pi, & x = m\lambda \\ 0, & \varphi = (2m+1)\pi, & x = (m+1/2)\lambda \end{cases} \quad (8.4.3)$$

所以整数倍波长的波程差将造成相长干涉，而半整数倍的将造成相消干涉。在干涉中，能量出现了重新分布。

在浅水池中，用两个同步振子接触水面，振子振动时将发出两圆形波。它们相互干涉，在水面上呈现节线，这是水波的二维干涉。图 8-7 是杨氏 (Thomas Young) 双缝实验的示意图，缝宽比波长小得多， $a \ll \lambda$ ，缝可以看做点源。在  $d \ll D$  的条件下，上缝和下缝光束的程差可简单地表达为  $d \sin \theta$ ，屏上将形成干涉条纹。明暗条纹分别出现在

$$\begin{aligned} d \sin \theta &= m\lambda, & m &= 0, 1, 2, \dots \\ d \sin \theta &= \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, & m &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

其中整数  $m$  是干涉的级数。

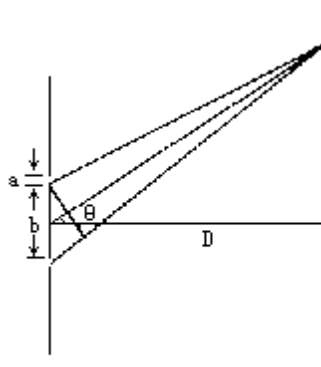


图8-7 杨氏实验

各种干涉仪应用干涉现象来进行精确测量，精度为波长的数量级（对于可见光为几百 nm）；而读数十分简单，只是对干涉条纹数计数而已。

从厚度为  $d$ ，折射率为  $n$  的介质两表面反射的光束也能发生干涉，光程差是  $2nd$ （如图 8-8）。从电磁理论知道当光从低折射率介质入射到高折射

率介质时将出现相差。如果一层油膜 ( $n = 1.45$ ) 飘浮在水面 ( $n = 1.33$ ) 上, 在空气和油膜的界面上, 将有相差 (光程差  $\lambda/2$ ), 在油-水介面则没有相差。在这种情况下, 极大出现在

$$2nd = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

上式右边已经加上了半波长。

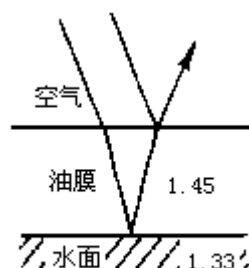


图8-8 薄膜干涉

\*相干性 (coherence) 的意思是两个或更多的波具有确定的可预言的相位关系, 这是产生干涉的必要条件。

惠更斯原理 (Huygens' principle) 由荷兰物理学家惠更斯 (1678, Christian Huygens) 提出表述如下:

· 波前上的所有点可以认为是产生球面次级子波的点源。在时间  $t$  以后, 波前的新位置将是和次级子波相切的曲面。

这一原理常被用来解释反射、折射……等现象。惠更斯假定了光是波, 但对其性质如是纵波还是横波以及波长、速度等等却丝毫未提及。有关光波的严格理论是在一百多年以后 (1865 年) 才由麦克斯韦建立的。

衍射 (Diffraction) 是另一个由于波叠加引起的现象。当光通过小空、指缝、布伞或某些障碍时, 人们发现光强分布并不象障碍边缘一样分明, 而是要散出几个波长的范围。通过望远镜观察的星象往往有着模糊的边缘。晶体 X 射线衍射则是结构研究的强有力的技术。这些都与衍射有关。

假定一束波通过宽为  $a$  的狭缝, 缝宽为几个波长的数量级, 如图 8 - 9 所示。我们可以把它划分为  $N$  个“点源”。为了求得  $\theta$  方向的振幅, 可以考察第  $n$  束和第一束之间的相差:

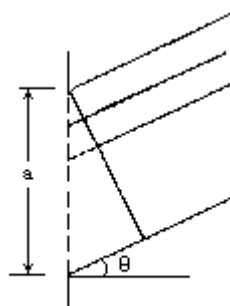


图8-9 衍射

$$\phi = kx \quad x = k \frac{n}{N} a \sin \theta \quad \frac{n}{N} \phi$$

于是合成波为

$$U_0 = \sum_{n=0}^{N-1} u_n (x) = \sum_{n=0}^{N-1} A \cos \left( kx - \omega t + \frac{n}{N} \phi \right) \quad (8.4.4)$$

特别对零角度，有

$$U_0 = N A_0 \cos(kx - \omega t) = A_0 \cos(kx - \omega t)$$

因为  $a$  具有与波长相同的数量级，故  $ka$  量级为 1。当  $N \gg 1$  时，上述余弦值近乎连续变化，如图 8-10 所示，这时，可以用积分代替下面的求和：

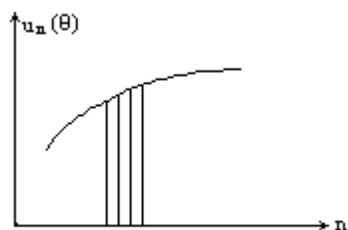


图8-10

$$U = \sum_{n=0}^{N-1} u_n(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} a \cos(kx - \omega t + n\phi) \quad (8.4.5)$$

求得振幅后取平方可得强度为

$$I = I_0 \frac{\sin^2(\phi/2)}{(\phi/2)^2} \quad (8.4.6)$$

可对  $I$  作强度  $I$  的图，如图 8-11 所示。强度极小出现在

$$\phi = 2m\pi \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$a \sin \theta = m\lambda$$

极大出现在  $\phi = 0$ ，而次极大由下式决定：

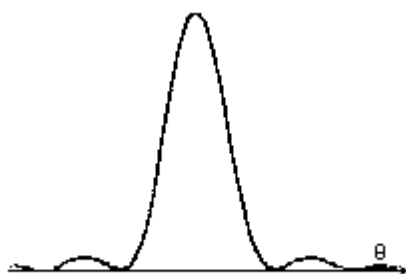


图8-11 衍射图样强度

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{\phi}{2} \quad (8.4.7)$$

\*如果单缝缝宽为  $a=5\lambda$ ，在衍射中，头两个极小是在  $\theta = 11.5^\circ$ 、 $23.6^\circ$ ，而第一个次极大在  $\theta = 16.6^\circ$ 。

(8.4.6) 式还可以用例 1.4 中的方法严格求得。这里我们只求强度，因此只需计算振幅的平方。

## \* § 8.5 色散和波包

相速随波长（或频率）变化的现象叫做色散（dispersion），联接  $\omega$  和  $k$  的方程叫色散关系  $\omega = \omega(k)$ 。色散的根源在于介质。色散在波动方程中应有所表示。对于稍为硬一点的弹簧，切力和挠矩必须考虑，于是波动方程变成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right] \quad (8.5.1)$$

代入行波解（8.3.1）式就得到（8.3.9）式。

例如，一维晶体中的波就是色散的：

$$m\ddot{u}_l = \sum_{n=1}^{\infty} k_n (u_{l-n} - 2u_l + u_{l+n})$$

其中

$$u_l = A \cos(\omega t - k l a)$$

$$u_{l-n} = A \cos[\omega t - k(l-n)a]$$

我们有色散关系：

$$m \omega^2 = \sum_{n=1}^{\infty} k_n (1 - \cos nka) = \sum_{n=1}^{\infty} 2k_n \sin^2 \frac{nka}{2}$$

真空中的波也有色散 相对论能量-动量关系和量子力学中的爱因斯坦关系分别是

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

$$E = \hbar \omega, \quad p = \hbar k$$

所以色散关系是

$$\omega = c \sqrt{k^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}}$$

相速和群速分别是

$$v_p = c \sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2 k^2}}; \quad v_g = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2 k^2}}} < c$$

更为复杂的简谐波的叠加是波包（wave packet）。设波矢有一个以  $k_0$  为中心的分布范围，波的叠加可表示为

$$\sum_{k=k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} A e^{i[kx - \omega(k)t]} \quad (8.5.2)$$

而对于波矢偏离  $k_0$  超过指定值  $\Delta k$  时，振幅  $A(k)$  就远小于  $A(k_0)$ ；比如，下式所给的振幅就是如此：

$$A = A(k_0) \exp \left( -\frac{(k - k_0)^2}{2(\Delta k)^2} \right) \quad (8.5.3)$$

（8.5.2）式的求和可以下列积分代替，并可将积分限扩展到  $\pm \infty$ ：

$$\int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) \exp[i(kx - \omega(k)t)] d(k - k_0) \quad (8.5.4)$$

下面列出两种对应于不同的色散关系结果：

$$= \omega_0, \quad A_0 \sqrt{2\pi} \exp\left[-\frac{x^2}{2(\Delta x)^2}\right] \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)], \quad x \equiv \frac{1}{\Delta k}$$

$$= \hbar k, \quad A_0 \sqrt{2\pi} \exp\left[-\frac{(x - at)^2}{2(\Delta x)^2}\right] \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)], \quad x \equiv \frac{1}{\Delta k}$$

$\Delta x$  是波包大小的测度或波包位置的不确定度 (uncertainty) . 附录 E 中列出了色散为  $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$  的结果, 所得的波包在传播过程中逐渐弥散——它的大小是时间的函数 .



## § 8.6 多普勒效应

多普勒效应是由生在德国的奥地利物理学家多普勒 (Johann Doppler, 1802—1853) 发现的. 1845 年, 荷兰气象学家巴依斯-巴洛 (C. H. D. Buys - Ballot) 测得了声多普勒效应.

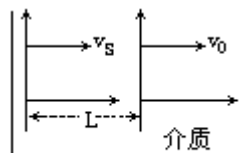


图8-12 多普勒效应

**纵向声多普勒效应** 假定源和观察者最初相距  $L$ , 它们相对于介质分别以速率  $v_s$  和  $v_o$  动. 在  $(x = 0, t = 0)$  和  $(x = v_s T, t = T)$ , 源发射两个信号, 观察者分别在  $t_1$  和  $t_2$  收到, 相应的位置分别是  $L + v_o t_1$  和  $L + v_o t_2$ . 收到信号的时间可求得为

$$t_1 = \frac{L + v_o t_1 - 0}{v_p} = \frac{1}{1 - v_o / v_p} \frac{L}{v_p}$$

$$t_2 = T' + \frac{L + v_o t_2 - v_s T'}{v_p}$$

$$= \frac{1}{1 - v_o / v_p} \left( T' - \frac{v_s}{v_p} T' + \frac{L}{v_p} \right)$$

其中  $v_p$  是声波的相速. 如果  $T'$  正好是波在源参考系中的周期, 在观察者参考系中周期应为

$$T = t_2 - t_1 = \frac{v_p - v_s}{v_p - v_o} T' \quad (8.6.1)$$

至于频率, 我们有

$$\nu = \frac{v_p - v_o}{v_p - v_s} \nu' \quad (8.6.2)$$

当观察者和声源分离时, 即  $v_o > v_s$  (包括  $v_s = 0$ ), 接收到的频率低于源所发射的. 这叫做多普勒红移. 当两者趋近时, 即  $v_o < v_s$  (包括  $v_o = 0$ ), 收到的频率高于发射的, 这就是多普勒紫移 (blueshift).

如果源速大于相速将会发生什么呢? 在这种情况下, 将出现超音速 (supersonic speed) ( $v_s > v_p$ ) 现象, 例子有高速快艇在水中产生的艏波 (bow wave) 或子弹在空气中产生的顶头波. 这类波的波前是一个锥面, 半顶角为  $\theta$ , 如图 8-13 所示, 且有

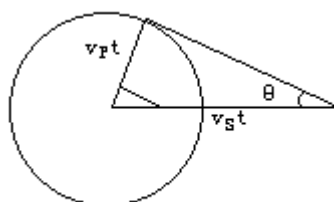


图8-13 超音速

$$\sin \theta_c = \frac{v_p}{v_s} = \frac{1}{M}$$

这种锥面波叫做马赫波或冲击波（shock wave），式中 M 叫做马赫数（Mach number）。

当带电粒子在介质中的运动速度超过介质中的光速时，就会发生辐射，这种辐射叫做切连科夫辐射（Cherenkov radiation）。切连科夫辐射角（如图 8-14）由下式定义：

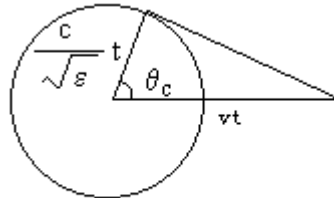


图8-14 切连可夫辐射

$$\cos \theta_c = \frac{c/\sqrt{\epsilon}}{v} = \frac{1}{\beta\sqrt{\epsilon}}$$

对于电磁波，存在光多普勒效应，我们将在下一章讨论。对光波，要用相对论理论来讨论。与水波及声波相比，光波传播可以不需要介质，只有源和观察者的相对运动速度  $u$  才是有意义的。如果源退行，就会出现红移：

$$v = v' \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \quad \lambda = \frac{u}{c} \quad (8.6.3)$$

如果源趋近，就会出现紫移：

$$v = v' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \quad \lambda = \frac{u}{c} \quad (8.6.4)$$

## § 8.7 孤立波

早在上一个世纪 (Aug. 1834), 拉塞耳 (John Scott Russel) 就观察到了孤立波。当时, 他正在苏格兰的运河中以高速马拉船做实验, 发现船首出现了长约 10m, 高约 0.3 ~ 0.5m, 速度约 13 ~ 14km/h 的孤立波。他追踪了约 2 ~ 3km。现在我们知道这是一种浅水孤立波, 满足非线性方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (8.7.1)$$

由于第二项即非线性项的存在, 这一方程的解不满足叠加原理。容易证明下列函数是该方程的解:

$$u(x - ct) = A \operatorname{sech}^2 \frac{x - ct}{B} \quad (8.7.2)$$

在 50 年代, 费米等人 (Fermi - Pasta - Ulam) 研究了两端固定的一维原子链, 回复力是

$$F = -k(x + x^2) \quad (8.7.3)$$

他们发现最低能量的振动模式并不热化, 而是可以一直保持下去。

特殊形状的孤立波可以传播很远而不变形, 具有很好的稳定性, 其原因是色散使脉冲变宽, 而非线性使它变窄, 两种作用可以相互平衡。在现今的远程通讯中, 特制的光纤可以无畸变地传送孤立波信号达数千公里。

## 习题

8.1. 一均匀的圆环在无重力的空间顺时针转动，其切向线速度为  $v_0$  . 求沿环传播的波的速度 .

8.2. 质量为  $m$ 、长度为  $L$  的均匀绳垂直悬挂在天花板上，(a) 证明绳中各点横波的速度可以表示为  $v = \sqrt{gy}$ ，其中  $y$  为相应点到绳下端的距离 . (b) 证明横波从绳的上端传至绳的下端所用时间为  $t = 2\sqrt{L/g}$  . (c) 绳的质量是否影响上述结果？

8.3. 地震造成的纵扰动 15min 传播了 5000km，试估计传播扰动的岩石的杨氏模量 . 假定岩石的平均密度是  $2700\text{kg/m}^3$  .

8.4. 用等温压缩率而不是绝热压缩率来计算声速，会造成多大的百分误差？

8.5. 一块石头扔到水塘中，产生的行波群约 1m 长 . 波群中波的波长约 0.1m . 估算代表波群的波矢谱的范围 .

8.6. 一个系统具有色散关系  $\omega = ak$  . 证明对所有频率有  $v_g = v_p$  .

8.7. 一个波群是由平均波长为  $\lambda$  的谐波叠加而成 . 如果  $v_p(\lambda)$  是波长为  $\lambda$  的波的相速，证明群速为：

$$v_g = v_p - \frac{dv_p}{d\lambda}$$

8.8. 水波的色散关系是

$$\omega^2 = \left( gk + \frac{\sigma k^3}{\rho} \right) \tanh kh$$

试说明这与 § 8.3 中提到的液体中表面波的相速表达式一致 .

8.9. 证明：对于水波， $k^2 = \rho g / \sigma$  相当于  $\lambda = 17\text{mm}$  .

8.10. 对于 5.0m 深的河道，估算下列波长的相速和群速：(a) 10mm；(b) 1.0m；(c) 100m .

8.11. 对于深水波，证明：

$$v_g v_p = \frac{g}{2k} + \frac{3\sigma k}{2\rho}$$

从而证明当  $k^2 = \rho g / \sigma$  时，

$$\frac{v_g}{v_p} = \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{3\sigma k^2}{\rho g}}{1 + \frac{\sigma k^2}{\rho g}}$$

8.12. 风琴管中激起驻波时，一端是波节、一端是波腹，试估计要发出最低声频 (20Hz) 所需要的风琴管的最小长度 .

8.13. 一线状波源发射圆柱形波，假设介质不吸收任何能量，波在任意点的强度和振幅如何依赖于该点与波源的距离？

8.14. 脉动星的周期可以这样考虑，即星体的半径随时间作周期性变化，由此产生的径向纵波形成一驻波：假设该驻波处于基态，即星体表面处于波腹 .

- (a) 你认为此时星体的中心位于波腹还是波节？  
 (b) 与开口的风琴管类比，试证明星体的脉动周期为

$$T = 4R / v$$

这里  $R$  是星体处于平衡时的半径， $v$  是平均声速。

(c) 典型的白矮星压强为  $10^{22} \text{Pa}$ ，密度为  $10^{10} \text{kg/m}^3$ ，比热比为  $4/3$ ，半径为太阳的  $0.009$  倍，则其脉动周期大致是多少？

8.15. 一正弦波以  $80 \text{cm/s}$  的速度沿一根弦传播，在  $x = 10 \text{cm}$  处的质点的位移(以  $\text{cm}$  作单位)是  $u = 5.0 \sin(1.0 - 4.0t)$ 。弦的线密度是  $4.0 \text{g/cm}$ 。(a) 写出弦上一般质点的位移表示式。(b) 计算弦的张力。

8.16. 地面上检测器和波源相距  $d$ ，发现直接传播的波和经高度为  $h_0$  的水平层反射的波是同相位的。当水平层升高  $h$  以后检测器收不到信号，求波长与  $d$ 、 $h_0$ 、 $h$  的关系。

8.17. 两个点波源  $S_1$  和  $S_2$  发射相同频率和振幅的波，发射过程中还保持相同的相位。考虑点  $P$ ，距离两个源的距离  $r_1$  和  $r_2$  近乎相等，(a) 证明这两个波的叠加形成的波幅随  $P$  点位置的变化近似为

$$\frac{2Y}{r} \cos \left[ \frac{k}{2} (r_1 - r_2) \right]$$

式中  $r = (r_1 + r_2) / 2$ 。(b) 证明当  $r_1 - r_2 = (n + 1/2) \lambda$  ( $n$  为整数) 时，出现完全相消；当  $r_1 - r_2 = n \lambda$  时，出现完全加强。讨论相消干涉点和相长干涉点的轨迹是否是完整的双曲线，为什么？

8.18. 对于  $N$  缝系统，证明总扰动和第一缝(或第  $N$  缝)之间的相差是

$$\frac{1}{2} (N - 1) k d \sin \theta$$

8.19. 晶体  $X$  射线衍射的平面间隔为  $d$ ，证明波长不能超过  $2d$ 。可见光可以用吗？

8.20. 减小照相机的光圈可以增加景深，可是也增加了衍射效应，使象模糊。对于每毫米  $60$  线分辨率的底片，估计使衍射变得明显的光圈值。

8.21. 微波的速度与光速相同。一束微波在向着波源飞来的飞机表面上发生反射，反射波与入射波形成拍，其频率为  $990 \text{Hz}$ 。设微波的波长为  $0.10 \text{m}$ ，求飞机的速度。

8.22. 光在水中的速度是在真空中的  $3/4$ 。一束高速电子在水中产生切连科夫辐射，其波前形成角度为  $120^\circ$  的锥面，试求电子在水中的速度。

## 第九章 相对论力学

### § 9.1 伽利略变换

在 § 2.6 中，我们讨论过伽利略变换，提到过坐标系的标准位形。习惯上标准位形构筑如下：两个惯性系  $S$ 、 $S'$ ，它们的  $y$ 、 $z$  轴和  $y'$ 、 $z'$  轴相互平行，而  $x$  轴和  $x'$  轴重合，当  $t = t' = 0$  时，原点重合。选择  $x$  则是一种约定。

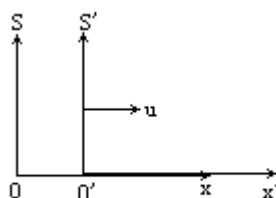


图9-1 标准位形

通常说：在  $S$  系中，时刻  $t$ ，一个质点到达或位于  $(x, y, z)$  处，在  $S'$  系中，则是在  $t'$  时刻，质点到达或位于  $(x', y', z')$  处；现在我们就说：在  $S$  系中有一事件 (event) 发生于  $(x, y, z, t)$ ，同一事件在  $S'$  系中可以用  $(x', y', z', t')$  来描述。事件  $(x, y, z, t)$  或  $(x', y', z', t')$  分别由  $S$  系或  $S'$  系中的观察者记录。这里所谓的观察者，指的是静止于某一个参考系中无数同步运行的记录钟，其位置和相应的一个时钟读数可以构成一个事件记录。

按照上述约定，伽利略变换就是

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (9.1.1)$$

伽利略变换在根本上依赖于时间和空间的观念。下面是牛顿的关于绝对空间和时间的定义：

绝对空间，就其性质来说与此外的任何事物无关，总是相似的、不可移动的……

[原文：Absolute space, in its own nature, without relation to anything external, remains always similar and immovable...]

绝对、真实及数学的时间本身，从其性质来说，均匀流逝与此外的任何事物无关，……

[原文：Absolute, true and mathematical time of itself and from its own nature, flows equally without relation to anything external, ...]

从逻辑上说这些定义不甚协调，而空间和时间的分离则是其特征。

伽利略变换的主要结果是什么呢？两个事件  $A$  和  $B$  之间的时间间隔是

$$t_A - t_B = t'_A - t'_B$$

即在  $S$  系中  $t_A = t_B$  将导致  $S'$  系中  $t'_A = t'_B$ ，也就是说在一个惯性系中同时发生的事件，在所有惯性系中都是同时的。两点之间的空间间隔是

$$x_A - x_B = (x'_A - ut'_A) - (x'_B - ut'_B)$$

$$=x_A - x_B - u(t_A - t_B)$$

若在同一时刻测量，则有

$$x_A - x_B = x_A - x_B$$

即在不同惯性系中作长度测量将得到同样的结果。速度是相对的，

$$v_x = v_x - u$$

而加速度是绝对的，

$$a_x = a_x$$

总之  $t$ 、 $l$ 、 $a$  都是绝对的。此外牛顿力学中  $F$ 、 $m$  也不变。伽利略-牛顿相对性原理认为对于力学来说所有的惯性系都是等价的，没有哪一个更特殊：

在所有惯性系中力学定律都是相同的；

或者说

力学定律在伽利略变换之下是不变的。

这里的定律指牛顿运动定律，包括能量守恒定律和动量守恒定律。

我们要问电磁学定律在伽利略变换之下是否也不变呢？

在图 9-2 的  $S$  系中，两静止电荷间只有静电力，在  $s$  系来看，则两运动电荷间还有磁力，且与速度有关。看来伽利略变换不适合电磁学。

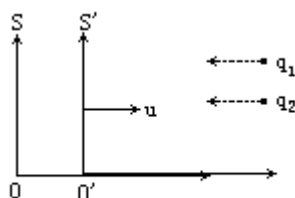


图9-2 伽利略变换与电磁学

电磁学的麦克斯韦理论（1864）表明（可见）光只是电磁波中的一小部分，而赫兹（1886，Hertz）作了实验证实。按照麦克斯韦理论，电磁场遵循方程

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = 0, \quad \nabla^2 B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} B = 0 \quad (9.1.2)$$

其中  $c = \sqrt{\mu\epsilon}$  是光速。如果伽利略变换适用，那么一个一维方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = 0$$

将变成

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \phi + \frac{2u}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} \phi - \frac{u^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \phi = 0$$

所以在不同的惯性系中，波动方程呈现不同的形式。事实上，按伽利略变换，在不同的惯性系（相对速率为  $u$ ）中光可以以  $c+u$  或  $c-u$  传播。

机械波需要介质传播，例如空气、水、弹性物质都是传播机械波的介质。光的传播是否也需要介质呢？人们曾设想光需要一种特殊的介质即以太（ether），在与此介质相对静止的特殊参考系中光以速率  $c$  运动。若是如此，以太应该具有怎样的性质呢？它必须：

没有质量；

完全透明；

对运动物体没有阻力；

非常刚劲（高速运动所要求）。迈克耳孙-莫雷实验（1881~1887）是设计来寻找以太参考系的。该实验的主要仪器是干涉仪，图 9-3 为其原理图。一镀银的半透平面镜 A 将入射光束分裂，平面镜 B 和 D 用来反射光。光线 ABA 和 ADA 将会相互干涉。在仪器所在参考系中，因有“以太风”，故

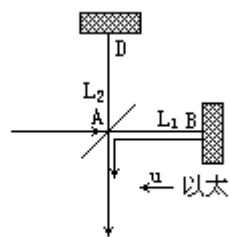


图9-3 迈克耳孙-莫雷干涉仪原理示意图

$$t_{AB} = \frac{L_1}{c - u}$$

$$t_{BA} = \frac{L_1}{c + u}$$

$$t_{ABA} = t_{AB} + t_{BA} = \frac{2L_1}{c} \frac{1}{1 - \beta^2} \left( \frac{u}{c} \right)$$

在 AD 方向的速度和时间将是

$$v = \sqrt{c^2 - u^2}$$

$$t_{ADA} = \frac{2L_2}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2L_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

时间差

$$\begin{aligned} t &\equiv t_{ABA} - t_{ADA} \\ &= \frac{2L_1}{c} \frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{2L_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

在以太系中（图 9-4），

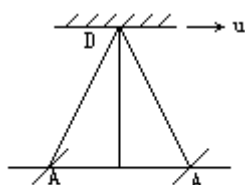


图9-4 以太参考系

$$ct_{AB} = L_1 + ut_{AB}$$

$$ct_{BA} = L_1 - ut_{BA}$$

$$\left( \frac{ct_{ADA}}{2} \right)^2 = L_2^2 + \left( \frac{ut_{ADA}}{2} \right)^2$$

这将导致与实验室系同样的  $t_{ABA}$ 、 $t_{ADA}$  数值。

如果将仪器转过  $90^\circ$  再重复以上实验，时间差将是

$$t' = t'_{ABA} - t'_{ADA} = \frac{2L_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{2L_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

两次测量的差是



$$t - t' = \frac{2(L_1 + L_2)}{c(1 - \beta^2)} - \frac{2(L_1 + L_2)}{c\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\frac{L_1 + L_2}{c} \quad 2$$

对于  $L_1 + L_2 = 22\text{m}$  (8 个来回)，利用地球公转速度  $v = 29.8\text{km/s}$  及钠光波长  $\lambda = 589\text{nm}$  的数值可知干涉条纹的改变量为

$$N = c(t - t') / \lambda = (L_1 + L_2) \beta^2 / \lambda \quad 0.40$$

如图 9-5 所示。可是，实验表明

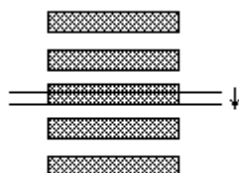


图9-5 干涉条纹

$$N = 0$$

这就意味着不存在“以太”。这类实验就是所谓示零实验或零结果实验 (null experiment，厄缶实验是这类实验的另一个例子)。示零实验往往有着重要的深刻的意义。诺贝尔奖获得者阿尔瓦雷斯 (L. Alvarez) 曾经用 X 射线照射埃及古萨地区的一座金字塔，当时一些报纸报道说，他没有任何发现。阿尔瓦雷斯总是纠正说：他发现了一件事，那就是不存在尚未为人所知的墓室。零结果和没有结果是完全不同的概念。

关于以太，当时还有一些工作企图挽救其命运，可以提及的有：

1. 以太拖曳理论 认为没有干涉条纹是因为有一层以太被带动了，彼此相对静止而已。可是这一理论遭到了天文学家的反对。因为在不同季节，虽然有相对的平行和反平行运动，观察结果并没有差别。

2. 发射理论 认为光速为  $c + kv_S$  即与光源速度有关，即使假定了  $k$  小于  $2 \times 10^{-9}$ ，仍然缺乏进一步的例证。

所有这些导致了当时的物理学家进一步思索以寻求伽利略变换以外的新的变换。这方面的工作有：

1892 年爱尔兰的菲兹哲罗 (G. F. Fitzgerald) 和荷兰的洛伦兹 (H. A. Lorentz) 独立地提出了运动长度收缩的概念。

1899 年洛伦兹 (Heinrich Lorentz) 提出运动物体上的时间间隔将变长。他还提出了后来以他名字命名的著名变换 (Lorentz transformation)。

1904 年庞加莱提出物体质量随其速率增加而增加，表明任何物体所能达到的速度有一最大值——真空光速。

关于狭义相对论有多少是属于爱因斯坦、多少属于其它人的争论，似乎不无理由。但是无可争辩的是爱因斯坦 1905 年的论文把整个内容置于适当的基础上，大大超越了其它的工作，其所作的预言在其它研究工作中甚至都没有想象过。

## § 9.2 洛伦兹变换

狭义相对论 (special relativity) 有两个基本假设：

(1) 相对性原理：物理定律在所有惯性系中都相同。

这就是说不存在特殊的惯性系。这里物理定律至少指力学定律和电磁学定律。我们已经提到过牛顿第一定律可作为惯性系的定义，因此力学定律主要指牛顿第二定律。“在所有惯性系中相同”意思是在某一变换下不变。

(2) 光速不变原理：在所有惯性系中自由空间光速都有相同的值  $c$ 。

对此原理曾有过争议。有人认为单程光速和双程光速可能有不同的含义，他们想大多数测光速的方法都是测的双程光速，是否有可能双程光速总是相同的，而单程光速实际上是不等的？似乎由此可动摇光速不变原理。其实精确测量原子辐射的波长和频率，通过计算  $c = \lambda \nu$  则完全可避免这一困惑。

满足上面两个假设而保持物理定律不变的变换是洛伦兹变换 (Lorentz transformation)。

\*下面从两个基本原理出发来得到这一变换首先，变换必须是线性的。理由是

运动方程是线性的；

假定了时空的均匀性以及空间的各向同性。

在标准位形中，对于任意事件在  $S$  系中的时空坐标  $(x, y, z, t)$  及  $S'$  系中的对应坐标  $(x', y', z', t')$ ，可以写下一组线性变换，其中有一些系数待定：

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (1)$$

对于任意  $y, z$ ，如果  $x = ut$ ，则  $x' = 0$ ，于是有

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}(u)(x - ut) \\ a_{11}(0) &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

根据相对性原理，得

$$x = a_{11}(-u)(x' + ut') \quad (3)$$

这意味着  $t$  是  $x, x'$  的函数：

$$t = f(x, x')(x, t) = a_{44}t + a_{41}x \quad (4)$$

我们可以写下一组联立方程：

$$\begin{cases} x' = a(x - ut) \\ t' = b(t - ex) \end{cases} \quad (5)$$

解得  $x$  为

$$x = \frac{1}{\Delta}(bx' + aut') \quad (6)$$

与 (3) 式相结合，有  $a=b$ 。至此，光速不变原理仍未使用。设在  $t = t' = 0$  时，一球面电磁波离开原点  $O, O'$  且以速度  $c$  行进，则

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (7)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (8)$$

将变换方程 (5) 式代入 (8) 式，再与 (7) 式联立求解，可以得到

$$\begin{cases} e = \frac{u}{c^2} \\ a = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \pm \end{cases}$$

我们知道两参考系相对静止 ( $u=0$ ) 时,  $x=x'$ , 所以上式应取正号.

完整的变换关系为

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \end{cases} \quad (9.2.1)$$

即洛伦兹变换. (9.2.1) 式也可以用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ jct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} \quad (9.2.2)$$

对于两个事件或所谓事件对  $(x'_1, t'_1)$ 、 $(x'_2, t'_2)$ ,

洛伦兹变换是

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \end{cases} \quad (9.2.3)$$

根据观察, 可以发现洛伦兹变换有以下性质:

$v < c$ , 否则  $\gamma$  变成虚数,

反变换, 只需作形式替代 ( $u \leftrightarrow -u$ ),

$v \ll c$  时, 洛伦兹变换等价于伽利略变换,

存在不变量

$$\begin{aligned} (c\Delta t)^2 &= (c\Delta t')^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 = (c\Delta t')^2 \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

$s$  称作事件对的空时间隔 (spacetime interval). 不同空时间隔的事件对在不同参考系中将有不同的属性, 详见 § 9.3 中光锥的段落.

当  $(c\Delta t)^2 > (\Delta x)^2$ , 事件对是类时的 (timelike), 有

$$= \sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta x/c)^2} \quad (9.2.5)$$

称为事件对之间的固有时间间隔 (proper time interval).

当  $(c\Delta t)^2 < (\Delta x)^2$  时, 事件对是类空的 (spacelike), 有

$$= \sqrt{(\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2} \quad (9.2.6)$$

称为固有空间间隔 (proper space interval).

当  $(c\Delta t)^2 = (\Delta x)^2$  时，事件对是类光的 (lightlike)。

\*在  $S$  系中，同时 ( $\Delta t = 0$ ) 测量一段长度两端的位置  $x_2 - x_1 = l_0$ 。就构成了一个事件对。它们的固有距离是  $l_0$ 。同一事件对在  $S$  系中，

$$\begin{aligned} x &= (x' + u\Delta t') = x' \\ t &= \left( t' + \frac{u}{c^2} \Delta x' \right) = \frac{u}{c^2} \Delta x' \\ &= \sqrt{(\gamma \Delta x')^2 - \left( c\gamma \frac{u}{c^2} \Delta x' \right)^2} = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} = l_0 \end{aligned}$$

诚如所说，此为不变量。其实在  $S$  系中， $x$  总是  $l_0$ ，不会因为测量时间而改变。 $\Delta t = \sqrt{l_0^2 - (c\Delta t')^2}$  与  $t'$  有关，但在  $S$  系中总有同样的值。

在  $S$  系中同时 ( $\Delta t = 0$ ) 测量上述长度为  $x = l$ 。这些同时测量也构成一对事件，它们的

$$l = \sqrt{(\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2} = x = l$$

这对事件在  $S$  系中有

$$\begin{aligned} x &= (x' - u\Delta t') = l \\ t &= \left( t' - \frac{u}{c^2} \Delta x' \right) = -\frac{u}{c^2} l \\ &= \sqrt{(\Delta x')^2 - (c\Delta t')^2} = l \sqrt{1 - \beta^2} = l \end{aligned}$$

也是不变的。后面，我们将专门讨论  $l$  和  $l_0$  之间的关系。

洛伦兹变换所导致的一些结果也许我们从未想象过。

**时间膨胀 (time dilation) (运动时钟走得慢)**

考虑  $S$  系中  $x$  处的一时钟，两次读数形成了 ( $x = 0, t_1, t_2$ ) 的事件对。同样的事件对在  $S$  系中时间间隔为 ( $x', t_1', t_2'$ ) 同时出现的变换式即可求得)

$t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1')$  即在  $S$  系中的观察者认为运动的时钟较慢。反之， $S$  系中的观察者也会认为  $S$  系中的时钟较慢。在此我们遇到了对称的情形。\*在孪生子佯谬中，我们会遇到不对称的情形。至少会牵涉到 3 次加速过程 (见下节)。

时间膨胀的直接例证有低速范围的宏观时钟和高速范围的基本粒子实验。1975 年到 1976 年间，马里兰大学的一个研究组用原子钟乘坐飞机进行了测量。发现铯原子钟在两次航程中显示了时间膨胀效应。观察到的效应与理论符合到  $\pm 1\%$ 。又如一束介子，半衰期为  $1.80 \times 10^{-8} \text{s}$  (可以通过静止介子的测量得到证实)，速度为  $v = 0.99c$ 。在  $S$  系中， $t = \gamma t' = 12.7 \times 10^{-8} \text{s}$ ，运动距离  $d = vt = 37.9 \text{m}$ ，可由实验验证。

\*在狭义相对论中，只讨论惯性系，这里我们还是要提一下所谓时钟假说：时钟的快慢只依赖于它的瞬时速率而与加速度无关。

**洛伦兹收缩 (Lorentz contraction) (运动长度收缩)**

考虑在  $S$  系中的一个长度  $x_2' - x_1' = x = l_0$  (静止长度或固有长度)。在  $S$  系中，同时测量这一长度导致  $t = 0$ ， $x = x' / \gamma$ ，

或

\*一根 20m 长的杆是否可关进 10m 长的隧道？特别是从杆的参考系看来会怎样？运动物体的视觉形象是否等价于观察者得到的记录？

同时的相对性 (relativity of simultaneity) 考虑在 S 系中的同时事件 ( $t=0$ ) .

如图 9-6 所示, S 系中有两事件同时发生, 事件发生时发出的光信号以后将在中点 M 相遇. 在 S' 系看来, 光信号相遇在 M' 点, 不是中点. 为什么会如此? 既然光速 c 是常量, 唯一的解释是 B 发生于较早的时刻, A、B 不是同时发生的.

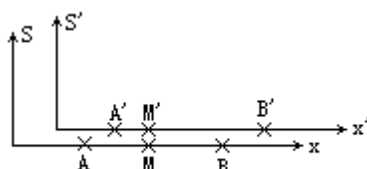


图9-6 同时性

$$t'_B - t'_A = - \frac{u}{c^2} (x_B - x_A)$$

对于当地的事件对,  $x=0$ , 我们有  $t=0$ ; 如果  $x \neq 0$ , 则在 S 系中, 两事件的时间间隔为有限.

因果率 (causality) 和信号速度

事件 P ( $x_P, t_P$ ) 引起 Q ( $x_Q, t_Q$ ). 它们有因和果的关系, 即必然有信息或相互作用以速度

$$v_s = \frac{x_Q - x_P}{t_Q - t_P} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

从  $x_P$  传到  $x_Q$  (不失一般性, 可假定  $x_P < x_Q$ ).

在 S' ( $u$ ) 系中的观察者记录到时间间隔  $t'_Q - t'_P$  为

$$t' = \left( t - \frac{u}{c^2} x \right) = t \left( 1 - \frac{u}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = t \left( 1 - \frac{uv_s}{c^2} \right)$$

如果

$$uv_s > c^2$$

则时间次序将改变 (即  $t > 0$  而  $t' < 0$ ). 如果  $v_s$  是信号传播速度, 则它联系着相关事件, 时间次序不能反转. 在  $u$  不大于  $c$  的条件下, 只有  $v_s < c$  才能保证时间次序不颠倒. 在不相关的两事件之间,  $v_s$  只是具有 LT-1 量纲而已,  $v_s$  完全可以大于  $c$ . 于是以速率  $u$  运动的观察者将可以看到不相关事件的次序颠倒, 只需

$$c > u > (c/v_s) c$$

\*例如, 探照灯在高空云层上的光斑, 其线性扫动速度可以非常大, 甚至大于光速. 可是并没有信息从一块云传到另一块. 试证实探照灯光的波前是阿基米德螺线 (Archimedean spiral).

\*快子 (tachyon) 是一种假说中的粒子, 其速度永远大于光速.

劳厄圆柱 (Laue's cylinder)

在相对论意义上“刚体”、“不可压流体”都是不可能的, 因为刚体可以瞬时地传播信号. 如打击刚体棒的一端, 则另一端立即就得到了信号, 这

与信号速度的有限性矛盾。在非刚体中，弹性波以有限速度传播  $v < c$ 。

考虑图 9-7 中的圆柱，想象每一截面都是一个钟面，在  $S$  系中全都同时；可是，在  $S'$  系中指针却不同步。

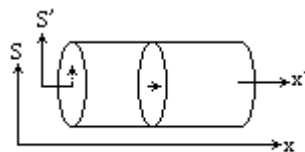


图9-7 劳厄圆柱

$$t = 0$$

$$t = \frac{u}{c^2} x > 0 \quad (x = x')$$

光多普勒效应 (optical Doppler effect)

在  $S$  系的原点先后发出两个光信号 (图 9-8)，即事件  $(0, 0)$  和  $(t, 0)$ ；在  $S'$  系中，它们是事件  $(0, 0)$  和  $(t', x')$ 。根据洛伦兹变换

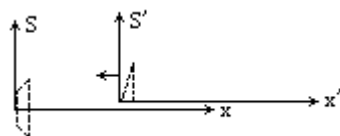


图9-8 多普勒效应

$$t = \left( t' + \frac{u}{c^2} x' \right) = t'$$

在  $S$  系的原点收到第二个信号的时刻是

$$t_1 = t + x/c = t + ut/c = (1 + \beta) t = (1 + \beta) t$$

两个光信号之间的时间差为

$$\Delta t = (1 + \beta) t$$

时间间隔可以用周期表达为

$$T = (1 + \beta) T \quad \text{发射频率 } \nu_e \text{ 和观察频率 } \nu_0 \text{ 的关系为}$$

$$\nu_0 = \frac{1}{(1 + \beta)^r} \nu_e$$

显然，对于退行和趋近情形分别存在红移和紫移：

$$\nu_0 = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \nu_e \quad (\text{红移}) ; \quad \nu_0 = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \nu_e \quad (\text{紫移}) \quad (9.2.7)$$

退行或趋近的星是否会由于多普勒效应而改变它们的颜色呢？答案是否定的。巴依斯-巴洛特 (C. H. D. Buys - Ballot) 等人指出，当退行星体的蓝色部分红移时，其紫色部分将移向蓝区。

\*当波矢  $k$  和相对速度  $u$  有一有限夹角时，我们有横向多普勒效应：

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{1 - \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\theta \text{ 为 } k \text{ 和 } u \text{ 的夹角}) \quad (9.2.8)$$

\*红移是否破坏能量守恒？

退行红移 (recessional redshift) 和膨胀宇宙

用波长来表达，退行红移是

$$\lambda_o = \lambda_e \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

或

$$\frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 \approx \beta$$

宇宙学起源的红移包括多普勒效应和背景引力的影响，哈勃发现

$$\frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = H_0 \frac{L}{c} \quad (9.2.9)$$

这就是哈勃定律 (Hubble's law)。姑且用多普勒红移以及上述近似代入有

$$u = H_0 L$$

相隔越远的星体以越高的速度  $u$  分离，构成了一幅膨胀宇宙的图象。理论证明经验定律 (9.2.9) 式只是近似。类星体红移很大，虽然很多天文学家相信其速度和距离有类似关系，但以上结果显然用了太多的近似。

### § 9.3 空时图和孪生子佯谬

以  $ct$  和  $x$  为坐标轴，我们就构成了所谓的空时图 (Spacetime diagram)。空时图中的一个点代表在时空中发生的一个事件。物理系统的运动构成了各种事件系列，它们在空时图中相应的轨迹叫做世界线 (world line)。图 9-9 中画出了在惯性系中的几种运动，其中  $a$  线相应于静止； $b$  线的方程是

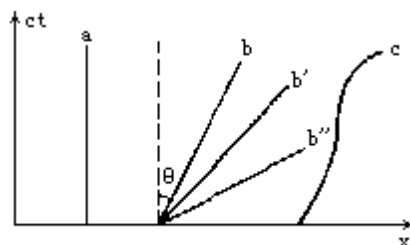


图9-9 空时图

$$ct = \cot \theta \cdot x$$

$$\tan \theta = \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} = \frac{u}{c} = \beta < 1 \quad (9.3.1)$$

而  $b$  线则对应于光。曲线  $c$  包含了加速度。\* $b'$  线有物理意义吗？

对于  $S$  系中的事件描述，我们可以作图 9-10。所需的  $ct$  轴和  $x$  轴即是直线  $x = 0$  和直线  $ct = 0$ 。从 (9.2.1) 式可知，它们相应于直线  $x = ct$  和直线  $ct = -x$ 。为了确定  $S'$  系中的单位，我们可以求点  $(x = 0, ct = 1)$  和  $(x = 1, ct = 0)$  的位置；它们分别是  $S$  系中下列两组方程的交点：

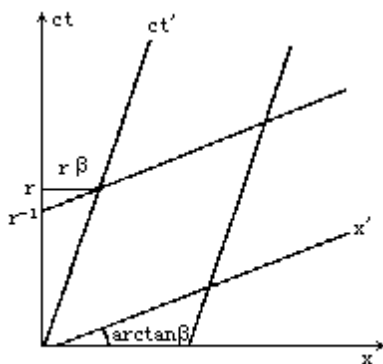


图9-10  $S'$  系的空时平面

$$\begin{aligned} 0 &= x - ct \\ 1 &= (ct - x) \\ 1 &= (x - ct) \\ 0 &= ct - x \end{aligned}$$

这样  $S'$  系的轴就标定了。单位空时间隔是

$$\frac{r}{\cos \theta} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} \quad (9.3.2)$$

时间膨胀、洛伦兹收缩和同时的相对性都可以在空时图中得到表达。



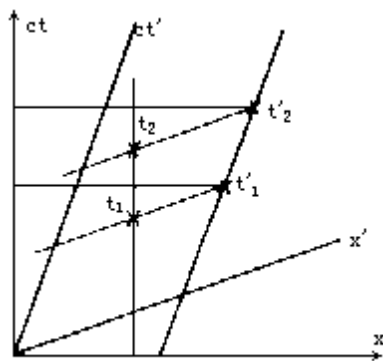


图9-11 时间膨胀

时间膨胀见图 9-11。对于 S 系中的时间间隔  $t_2 - t_1$ ，S' 系中的观察者将认为时间间隔（在同一地点的读数）是  $t_2' - t_1'$ ，即 ct 轴的一部分或所有平行于 x 轴的虚线之间的平行线，它比  $t_2 - t_1$  大倍（利用图 9-10 自己证实这一点）。\* 对于 S' 系中的间隔  $t_2' - t_1'$ ，在 S 系中相应的读数是什么？

洛伦兹收缩见图 9-12。在 S 系的 x 轴上有一长度  $l_0$ 。测量事件相应于通过两端而平行于 ct 轴的两虚线上的两点。点的位置可能影响事件对的空时间隔，可是不影响长度——空间间隔。在 S 系中，在相同时刻（即平行于 x 轴；是否是唯一合理的选择？）测量两端将得到一个长度  $l$ ，而它短于  $l_0$ 。在这一意义上说，长度测量并不对应于同样的事件对。

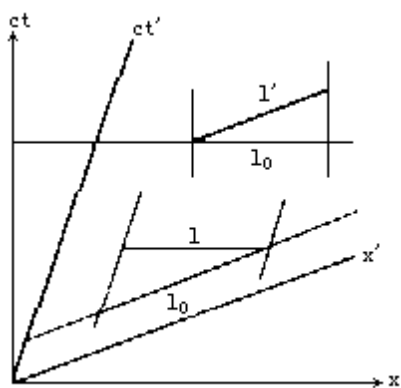


图9-12 洛伦兹收缩

图 9-13 表示了同时的相对性。在 S 系中同时事件可以用平行于 x 轴的线上的两点，比如说  $P_1$ 、 $P_2$  来表示。在 S' 系中，它们位于平行于 x 轴的两线上。那就意味着在 S' 系中它们发生于不同的时刻。在 S 系中观察者看来，同时事件在 S' 系中发生于不同的当地时间（这里我们假定了同时事件发生在不同的地方，否则它们将保持同时）。

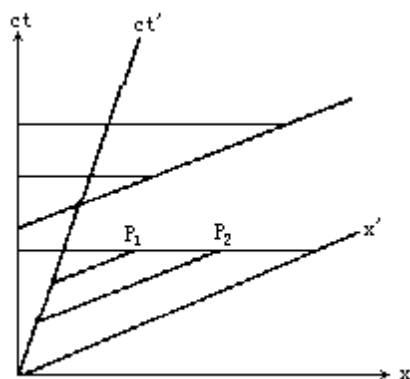


图9-13 同时的相对性

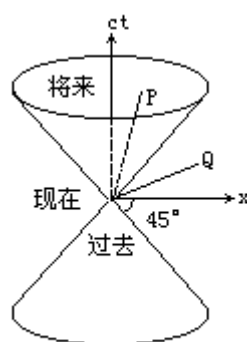


图9-11 光锥

在不同的参考系中，事件对的时间次序和空间间隔可能是不同的。在  $S$  系中，事件对  $O$ 、 $P$  发生于不同的时刻和地点。可是当我们以  $OP$  为  $ct$  轴建立  $S'$  系，这样事件对都发生在  $x = 0$  处，只是时间不同而已。换言之，空间间隔消失了，或者说没有确定的空间序。这就是为什么用“类时”事件对这一术语。事件对  $O$ 、 $Q$  可以出现于同一时间（即以  $OQ$  作为  $x$  轴，有  $ct = 0$ ），也就是说它们的时间次序改变了，或没有确定的时序（早或迟）。可是在空间上它们还是分隔的——类空的。图 9-14 中的锥面叫做光锥（lightcone）。在锥面上的事件对都是类光的；光锥内的事件对都是类时的，我们可以谈及事件次序：上半部  $(ct)^2 > x^2$ ，是“绝对将来”，下半部  $(ct)^2 < x^2$  是“绝对过去”；光锥以外，我们有类空事件，这一区域称作“现在”。

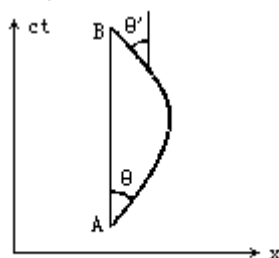


图9-15 固有时间

对于类时事件对，固有时是

$$= \sqrt{(\Delta t)^2 - \frac{(\Delta x)^2}{c^2}}$$

或

$$= d = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2}$$

沿图 9-15 中直线 AB，有

$$s = \int_A^B d = \int_A^B dt = t_B - t_A$$

而沿着曲线，由于有非零的速度，故

$$\Delta\tau_C = \int_A^B dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2} < \int_A^B dt = \Delta\tau_S$$

由此是否可得到一些关于孪生子佯谬的感觉？

孪生子佯谬 (Twin paradox)

设有孪生子两人 A 和 B，A 是静止的，B 先是离 A 而去，以后再返回。假定  $\beta = 0.8$  (则  $\tan \theta = 0.8$ )，并约定每年元旦发射一个信号。对于退行，存在红移：

$$\frac{v}{v_0} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \frac{1}{3}$$

这意味着他们两人都是 3 年收到一个信号。在图 9-16 中，当 B 经过返回点以后，他们相互趋近，多普勒效应是

$$\frac{v}{v_0} = 3$$

即一年收到 3 个信号。

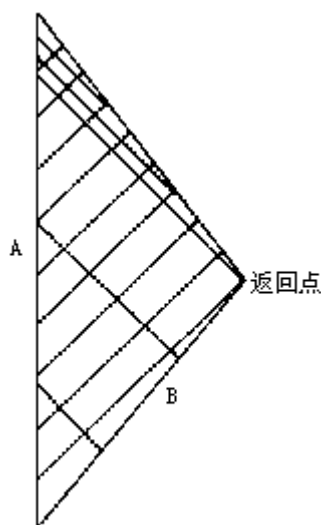


图9-16 孪生子佯谬

在这一问题中 A 是处在惯性系中，而 B 经历 3 个加速过程。即使加速过程中对时间的广义相对论效应可以忽略，仍然存在不对称性：无论如何 A 和 B 不可能同处在惯性系中。这一情况不同于简单的时间膨胀现象。

## § 9.4 相对论运动学

从邻近事件对的洛伦兹变换：

$$\begin{cases} dx &= (dx - udt) \\ dy &= dy \\ dz &= dz \\ dt &= \left( dt - \frac{u}{c^2} dx \right) \end{cases}$$

可求得如下的速度变换公式：

$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x \frac{u}{c^2}} \\ v'_y = \frac{v_y}{r \left( 1 - v_x \frac{u}{c^2} \right)} \\ v'_z = \frac{v_z}{r \left( 1 - v_x \frac{u}{c^2} \right)} \end{cases} \quad (9.4.1)$$

(9.4.1) 式提供了速度叠加的基本公式。\* 用  $v'_x$ 、 $v'_y$ 、 $v'_z$  来表示  $v_x$ 、 $v_y$ 、 $v_z$  的公式是什么？

例 9.1 在正负电子对撞机 (collider) 中，电子和正电子以速度  $0.90c$  相向飞行 (图 9-17)。它们的相对速度是多少？

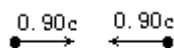


图9-17

解：取对撞机为  $S$  系，向右运动的电子为  $S'$  系。于是， $u = 0.90c$ ， $v_x = -0.90c$ 。相对速度是

$$v'_x = \frac{-0.90c - 0.90c}{1 + 0.90^2} = -0.994c$$

例 9.2 光子和中微子以  $c$  相向运动。已知其中之一的速度为  $v_x = c$ 。另一个作为  $S'$  系以  $-u$  运动，是否有  $v'_x = c + c$ ？

解：利用 (9.4.2) 式，有

$$v'_x = \frac{c + u}{1 + cu/c^2} \rightarrow c$$

例 9.3 在  $x$  方向以速度  $u$  运动的一粒子，在  $y$  方向发射一个光子，求其速度。

解：已知： $v'_y = c$ ， $v'_x = 0$ ，所以

$$v_x = u$$

$$v_y = c / \gamma = c \sqrt{1 - u^2 / c^2}$$

注意

$$(v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = c$$

光行差的经典结果是由布拉得利 (1727, James Bradley) 作出的, 我们在 § 2.6 已经提到过他的结果. 天顶的星看起来是动的, 它垂直射向赤道平面的光看起来是斜的: 地球上的望远镜须转过一个角度才能观察到它. 已知

$$v_z = -c, v_x = v_y = 0, u = v$$

在 S 系 (地球) 中, 有

$$v'_x = v_x - u = -v$$

$$v'_z = v_z = -c$$

$$\tan \theta' = \frac{v'_x}{v'_z} = \frac{v}{c}$$

利用相对论速度公式 (9.4.1) 式, 可以得到

$$v'_z = -\frac{c}{\gamma}, \tan \theta' = \frac{rv}{c}, \sin \theta' = \frac{v}{c}$$

与经典的结果不同.

对于任意角度的光, 我们可以推导出一个一般的表达式. 假定在汽车 (S 系) 中车头灯的光线锥面与 x 轴成夹角  $\theta$  (见图 9-18), 则

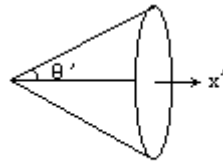


图9-18 车头灯效应

$$\tan \theta' = \frac{v'_y}{v'_x}$$

在 S 系中, 角度  $\theta$  满足关系:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{v'_y}{\gamma}}{\frac{v'_x + u}{\gamma}} = \frac{c \sin \theta'}{c \cos \theta' + u} \\ &= \frac{\sin \theta' \sqrt{1 + \beta^2}}{\cos \theta' + \beta} \end{aligned}$$

## § 9.5 相对论动力学

在本章中我们不考虑重力与非惯性系，那是广义相对论的课题。

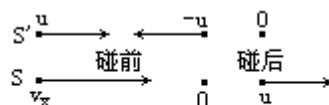


图9-19 在S'和S系中的非弹性碰撞

在动力学中，我们必须涉及质量和动量。我们首先讨论两个质量相同的质点的完全非弹性碰撞。如图 9-19，在 S 系中，它们因碰撞而至静止，有质量和动量守恒；另一方面，在 S 系中若保留质量守恒，则动量守恒被“破坏”了：

$$m \frac{u+u}{1+uu/c^2} + m \times 0 \neq 2mu$$

如何弥补呢？若考虑质量也是依赖于运动的，并定义：

$$m = m(v), m_0 = m(0)$$

则在 S 系中，有

$$\begin{aligned} m(v_x) + m_0 &= m_t(u) \\ m(v_x) \cdot v_x &= m_t(u) u \\ &= [m(v_x) + m_0] u \end{aligned}$$

所以

$$m(v_x) = \frac{m_0 u}{v_x - u} = \frac{m_0}{\frac{v_x}{u} - 1}$$

我们试图保留  $v_x$ ，而将  $u$  也用  $v_x$  来表示；这等价于将  $v_x/u$  用  $v_x$  或  $v_x/c$  来表示。这一点可以做到，只要写

$$\frac{v_x}{u} = \frac{2}{1 + \left(\frac{v_x}{c}\right)^2 \left(\frac{u}{v_x}\right)^2} \quad \text{即} \quad x = \frac{2}{1 + \beta^2/x^2}$$

其解是  $x - 1 = \sqrt{1 - \beta^2}$ 。于是

$$m(v_x) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad m_0 \left( \frac{v_x}{c} \right) \quad (9.5.1)$$

式中  $m_0$  称为静止质量。对于  $m_t(u)$ ，在 S 系中有

$$m_{t0} = 2m(u) = 2 \quad (u) m_0 \text{ 在 S 系中，我们得到一致的结果：}$$

$$m_t(u) = m_{t0}$$

\*如果速度不是很高，你能否求得质量和静止质量的差？

利用 (9.5.1) 式，我们可以得到动量的表式

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (9.5.2)$$

在电场和磁场作用下，电荷的运动方程为

$$q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (9.5.3)$$

没有电场时，

$$\frac{d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})}{dt} = 2\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 2\mathbf{p} \cdot (q\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$$

意味着动量的大小是常量，从而速率和质量都是常量。运动方程是

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (9.5.4)$$

这和牛顿力学中的完全一样，不过现在质量是速率的函数。在直角坐标系中（ $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ ），有

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m} v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m} v_x \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

其解很简单：

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos(\omega t) \\ v_y = -v_0 \operatorname{sgn}(q) \sin(\omega t) \\ v_z = C \end{cases} \quad \left( \omega = \frac{|q|B}{m} \right)$$

即电荷作圆周运动或螺旋运动，因此可以通过角速度来表达其特性。

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{v} &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= -\frac{qB}{m} \mathbf{v} \quad (9.5.5) \end{aligned}$$

我们可以下结论：负电荷绕磁场按右手螺旋运动。对于  $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ ，有

$$m_0 \frac{v^2}{R} = q v B$$

在牛顿力学中，动能为

$$E_k = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{x} = \frac{1}{2} m v^2$$

在狭义相对论中，动能可表示为

$$\begin{aligned} E_k &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int \frac{d}{dt}(m \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{x} = \int \frac{d}{dt}(m \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} dt \\ &= \int \left( \frac{d}{dt} m \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dt \end{aligned}$$

从已知关系

$$m^2 (1 - v^2/c^2) = m_0^2$$

可以发现

$$c^2 dm - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m v^2) = 0$$

于是可得动能的表达式为

$$E_k = c^2 dm = mc^2 - m_0 c^2$$

$$= m_0 c^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - 1 \right] \quad (9.5.6)$$

在低速极限下，其主导项正是牛顿力学的结果。一些相关的表达式有

$$mc^2 = E_k + m_0 c^2$$

$$= \frac{mc^2}{m_0 c^2} = \frac{E_k}{m_0 c^2} + 1$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$

其中  $m_0 c^2$  称为静止能量。常用的微观粒子的静止能量为

电子 0.511MeV

质子 938.3MeV

中子 939.6MeV

例 9.4 250MeV 的电子处于磁场中，轨迹的半径是  $3.0 \times 10^{-2} \text{m}$ ，求速率和磁场。

解：

$$= \frac{mc^2}{m_0 c^2} = \frac{E_k}{m_0 c^2} + 1 = \frac{2.50}{0.511} + 1 = 5.89?$$

$$= 0.985$$

$$B = \frac{rm_0 v}{qR} = r \frac{m_0 c^2}{q} \frac{\beta}{cR}$$

$$= 5.89 \times 0.511 \times 10^6 \text{V} \frac{0.985}{3 \times 10^8 \text{m/s} \times 3.0 \times 10^{-2} \text{m}} = 0.33 \text{T}$$

爱因斯坦引入质能 (mass - energy) 来表达动能和静止能量之和：

$$E = mc^2 \quad (9.5.7)$$

在牛顿力学中，分别有质量守恒和能量守恒，而在狭义相对论中，有质能守恒。质能和动量之间的关系可如下求得：

$$E^2 = m^2 c^4 - m_0^2 c^4 + m_0^2 c^4 = m^2 c^4 \left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) + m_0^2 c^4$$

$$= c^2 p^2 + m_0^2 c^4$$

即

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4} \quad (9.5.8)$$

对于  $m_0 = 0$  的粒子，有

$E = cp$ ,  $p = E / c$  (9.5.9) 对于有限的  $p$ ，必须趋向于 1。爱因斯坦认为，有静止质量  $m_0$ 、动量  $p$  和质能  $E$  就足够了，不必引入“动质量” $m$ 。因此，在这里  $m$  只是质能的代表而已。质能的变化是

$$E = mc^2 \quad (9.5.10)$$

在电子-正电子对湮灭 (pair annihilation) 过程中，

$$e + e^+ \rightarrow 2 \gamma$$

光子能量至少是 0.511MeV。为什么？对产生 (pair creation) 过程



$$e + e^+$$

不能单独发生，通常发生于原子核附近。（为什么？从能量和动量守恒考虑这一问题。）

历史上，质能守恒导致过新发现。例如，在发现中微子以前，人们无法解释中子衰变过程中丢失的动能，见下式：

$$n \rightarrow p + e + (\bar{\nu}_e)$$

$$939.6 \quad 938.3 \quad 0.511$$

在发现了中微子以后才圆满地解释了上述的衰变过程。（9.5.10）式对讨论原子问题很有用。在氢的离化过程中，

$$H \rightarrow p + e^- - Q$$

离化能为  $E_i = 13.58\text{eV}$ ，由此我们知道质量差是

$$m = E_i / c^2 = 1.48 \times 10^{-8} u$$

计算过程用了以下关系：

$$1u \times c^2 = 931\text{MeV}$$

$$1u = 1.66 \times 10^{-27} \text{kg} \quad (9.5.11)$$

（9.5.10）式对处理核物理问题也很有用。

例 9.5 求氦核的结合能。

解：

$$(m_n c^2 + m_p c^2) - m_{2H} c^2 = E_B$$

由于核结合能的数量级是 MeV，比原子结合能大得多，因此在核问题中，我们可以忽略原子结合能而利用原子质量得到

$$\begin{aligned} m_n c^2 + m_{1H} c^2 - m_{2H} c^2 &= (1.00867 + 1.00783 - 2.01410) u c^2 \times 931\text{MeV} / u \\ &= 2.23\text{MeV} \end{aligned}$$

在核能利用中，我们应提到裂变（fission）和聚变（fusion）。铀核  $^{235}\text{U}$  可通过裂变释放能量： $^{235}\text{U} \rightarrow 2\text{产物核} + \text{中子}$

这是因为铀核的质量大于产物的质量之和。氘核（deuteron）可通过聚变释放能量：

$$^2\text{H} + ^2\text{H} \rightarrow ^3\text{He} + m + (\bar{\nu}_e) + Q$$

质能公式也适用于宏观物体。

例 9.6 用质能关系来讨论太阳质量的流失。

解：太阳常数是  $1340\text{W} / \text{m}^2$ 。

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} m &= -\frac{1}{c^2} \frac{dE}{dt} \\ &= \frac{1}{c^2} 1340\text{W} / \text{m}^2 \times 4\pi \times (1.50 \times 10^{11} \text{m})^2 \\ &= 4.21 \times 10^9 \text{kg} / \text{s} \end{aligned}$$

相对损失率为

$$\begin{aligned}\frac{-\frac{d}{dt}m}{m} &= \frac{4.21 \times 10^9 \text{ kg/s}}{1.99 \times 10^{30} \text{ kg}} (\times 10^7 \text{ s/a}) \\ &= 6.6 \times 10^{-14} / \text{a}\end{aligned}$$

至今太阳只流失了它很小一部分质量。

$$\frac{-\frac{d}{dt}m}{m} \times 5 \times 10^9 \text{ a} = 0.03\%$$

在相对论动力学中加速度有可能不在力的方向上。从运动方程，

$$\begin{aligned}F = \frac{dp}{dt} &= \frac{d}{dt}(mv) = m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}v = ma + \frac{1}{c^2} \frac{dE_k}{dt}v \\ &= ma + (F \cdot v)v \quad (9.5.12)\end{aligned}$$

得到加速度

$$a = \frac{F}{m} - \frac{F \cdot v}{mc^2}v \quad (9.5.13)$$

显然，一般情况下加速度和力不共线，只有当力平行或垂直于速度时才共线。

例 9.7 从能量考虑来看  $c$  作为极限速率。

解：斯坦福直线加速器可将电子加速到  $E_k = 30\text{GeV} = 3.0 \times 10^{10}\text{eV}$ ，因此

$$\begin{aligned}&= \frac{E_k}{m_0 c^2} + 1 = \frac{E_k}{m_0 c^2} \sim 10^4 \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}\end{aligned}$$

经简单的计算可得

$$\frac{\Delta E_k}{E_k} = \gamma(\gamma + 1) \frac{\Delta \beta}{\beta} \approx \gamma^2 \frac{\Delta \beta}{\beta}$$

而在经典情形，

$$\frac{\Delta E_k}{E_k} = 2 \frac{\Delta \beta}{\beta}$$

当速度趋向于  $c$  时，两者差别是极其巨大的。为了增大速度，经典表达式要求的功率要小得多。这就是为何经典理论不存在速度极限的原因。

## 习 题

9.1. 如果电荷与观察者的速度无关，对于运动观察者来说电荷密度将增加还是减少？如果  $\rho_0$  是静止时的电荷密度， $\rho / \rho_0$  是多少？

9.2. 假定从地球测量宇宙的边缘是  $10^{10}\text{ly}$ ，一高速旅行者以  $v = 10^8$  运动，在他看来宇宙边缘是多远？

9.3. 一火箭静止长度为  $200\text{m}$ ，正在相对我们以  $v = 0.6c$  运动。火箭首尾各有一时钟，在火箭参考系中同步校准；在地上也有很多时钟，也全都同步校准；当火箭头部到达我们所在处时，我们的时钟和火箭头部的时钟读数都为  $t = 0$ 。

(a) 这时  $t = 0$  (对我们来说)，火箭尾部的时钟读数如何？

(b) 多久以后 (对我们来说) 尾部到达我们所在处?

(c) 这时尾部的时钟读数如何?

9.4. 气体动理学理论告诉我们:

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T$$

已知铁原子  $m = 9.3 \times 10^{-26} \text{ kg}$ .

(a) 计算铁原子处在 300K 的温度下的  $\overline{v^2}$ .

(b) 这些原子的  $\overline{v}$  是多少?

(c) 由于时间膨胀, 运动 (或加热) 的铁原子的样品辐射频率为  $f = (1/\gamma) f_0$ , 其中  $f_0$  是静止时的辐射频率. 处在 300K 的温度下铁原子, 其  $(f - f_0)/f_0$  是多少?

9.5. 一空间飞船以  $0.90c$  的速率飞离地球, 它发射 100MHz 的信号以向地球报告. 为了接收这些信号, 地球上的接收器应调谐在什么频率上?

9.6. 对类星体 (quasar, quasi-stellar objects) 发射的光的观察表明, 实验室中波长 500nm 的谱线移到了 1300nm. 问类星体的退行速度是多少?

9.7. 由于太阳的旋转, 其赤道上表面的点有速度  $1.85 \text{ km/s}$ . 从地球上, 太阳赤道上相对两边发射的光波长有什么差别. 假定固有波长为 546nm.

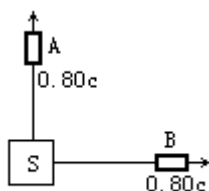
9.8. 一空间飞船以  $0.20c$  速度飞离地球. 飞船尾部的一束光, 在乘员看来是蓝的 ( $\lambda = 450 \text{ nm}$ ), 地球上的观察者看来是什么颜色?

9.9. 在类星体 3C9 的谱中有某些熟悉的氢谱线, 不过它们的波长已经红移至 3 倍长. 假定 3C9 相对地球完全是退行的, 相对论多普勒效应预言的退行速度是多少?

9.10. 一粒子沿 S 系的 x 轴以  $0.40c$  运动, 而 S 系以  $0.60c$  相对 S' 系运动. 在 S' 系中测定粒子的速度是多少?

9.11. 星云 A 以  $0.30c$  速度相对地球退行. 星云 B 在另一边以同样速率退行. 从我们的星云或星云 B 上的观察者看来, 星云 A 的退行速度各是多少?

9.12. 列车 A 和 B 从 S 站出发沿垂直铁轨开行. 图中标出的速度是相对于车站 S 的.



题9.12图

(a) 求列车 B 相对于 A 的速度  $v_{AB}$ .

(b) 求列车 A 相对于 B 的速度  $v_{BA}$ .

(c) 这两个速度并不反平行, 试加以评论.

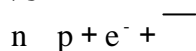
9.13. 一粒子以速率  $u$  沿与 x 轴成夹角  $\theta$  的方向运动. 在 S 系中的观察者看来, 速率  $u$  和夹角  $\theta$  如何取值?

9.14. 太阳流向地球的能量是  $1340 \text{ W/m}^2$ . 问每年太阳有多少质量流向

地球？

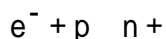
9.15. 20-kt 核弹需要多少裂变物质？（对于 TNT，燃烧值为  $C = 4.18 \times 10^9 \text{ J/t}$ ）

9.16. 自由中子衰变过程为



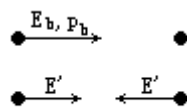
设自由中子原来静止，衰变后的质子也静止，求电子的动能。

9.17. 入射电子被质子俘获，生成中子和中微子：



若质子和中子均静止，求电子所需最小动能。

9.18. 高能加速器将质量为  $m$  的粒子束加速到总能  $E_b$ ，然后用之去轰击静止靶，但是用较低的能量  $E'$  的两束粒子能导致同样的碰撞，如图所示。证明：



题9.18图

(a)

$$\beta_{\text{com}} = \frac{E_b - mc^2}{p_b c} = \frac{p_b c}{E_b + mc^2}$$

(b)

$$E' = \left[ \frac{1}{2} mc^2 (E_b + mc^2) \right]^{1/2}$$

9.19.  $\mu$  子静止质量为  $m_0 = 105 \text{ MeV}/c^2$ ，半衰期为  $\tau = 2 \times 10^{-6} \text{ s}$ 。在  $t = 0$  时一  $\mu$  子从加速器中产生，此时动能为  $10395 \text{ MeV}$ 。(a)  $\mu$  子的总能量是多少？(b)  $\beta$  值是什么？(c) 速度和动量是多少？(d) 在实验室系中半衰期是多少？(e) 衰变掉以前，它能飞多远？

9.20. 对  $\gamma \gg 1$ ，证明下式成立：

$$p \approx \left( 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \right) \frac{E}{c}$$

## 第二部分 热物理

热运动是比机械运动更高级的运动形态。在热运动中，大数粒子各自按力学定律运动，除此之外它们还表现出总体行为，我们称这种系统为宏观系统。对于热现象，我们可以问如下问题：什么是热？温度是否与平均动能成比例？如果是，在零温度时所有粒子都静止吗？永动机 (perpetual motion machine) 是否可能？并期望得到合理的答案。实际上我们更感兴趣的是某些一般规律，诸如能量守恒、不可逆过程、相变等等。在基本的层次上，我们可以讨论时间之矢的问题——与熵有关的问题。另外，黑夜天佯谬和微波背景辐射等问题，也将在本书的第四部分中加以讨论。当然我们也愿意知道如何以宏观描述为依据从微观尺度上来洞察材料。

热力学 (Thermodynamics) 寻求在宏观变量 ( $P, V, \dots$ ) 之间建立起定量的关系。这类关系指的是一个变量与其它变量的关系或同一变量在系统的初态与终态的关系。热力学基于少数定律 (第零、第一、第二、第三定律) 和数学，有很大的普遍性和可信性，其缺点是不适于洞察物理过程的细节。

另一方面，气体动理学理论 (kinetics of gas molecules) 和统计物理学 (statistical Physics) 则寻求利用微观物理来解释宏观现象，同时洞悉微观世界的方法。它们适合于讨论涨落、临界现象等等，是基于对物质结构的假定和数学近似基础之上的。这里的所谓“假定”，涉及分子、能量状态、相互作用势等等。

## 第十章 温度

### § 10.1 平衡态

这里，我们将研究对象称为系统。热力学系统可以是任何有限的宏观物体，不管它们的物质的量以及所占的空间区域是怎样的。常见的对象有：空气、各种气体、橡皮带、金属材料、磁性材料（铁磁、铁氧）、铁电材料、液晶、表面和薄膜、化学物质等等。

系统通过物理的或想象的边界与周围环境（介质）相隔。一个重要的环境是热源或称热库。按照是否与环境交换能量或物质，系统可以分为孤立系、闭系或开系。孤立系不和环境交换能量或物质，是一种理想情形。闭系和环境交换能量但不交换物质。开系和周围介质既交换能量又交换物质。人体就是一个典型的开放系统。

相（phase）是系统中（化学组分和物理状态）均匀的部分。系统可以只有一个相，也可以有几个相。系统可以从一个相变到另一个相，例如从超导相转变到正常相，或反过来变化。

平衡态（equilibrium state）是系统的一种状态。若系统处于平衡态，则其宏观变量就有确定的值，并且只要外部条件不改变，它们将保持不变。这里所说的平衡是一种动力学平衡。在热力学范畴内，我们不承认涨落，并且也不涉及到流。有流而不随时间改变的情形叫做“定态”。日常经验告诉我们，只要时间足够长孤立系统总能达到平衡态。

当环境发生变化时，系统会偏离平衡态。在时间  $t$  以后，系统又将到达新的平衡态，这一时间  $t$  称作弛豫时间（relaxation time）。弛豫时间就是系统调整自己以追随环境变化所需要的时间。通常只需知道弛豫时间的数量级而不需要精确数值。例如，在尺寸约为  $L$ （ $0.1\text{m} \sim 1\text{m}$ ）的一带活塞的容器中注入气体，活塞抽动一下之后，气体将被扰动。我们预期扰动传送几个来回以后，气体可以达到新的平衡态。由于声速约为  $300\text{m/s}$ ，故该情况下弛豫时间的数量级为

$$\frac{L}{v} = \frac{0.3\text{m}}{300\text{m/s}} = 10^{-3}\text{s}$$

为了描述平衡态，我们引入态变量（state variables）。它们可以是

- 机械的：压强  $p$ ；
- 电磁的：电场  $E$ ，电极化强度  $P$ ，磁感  $B$ ，磁化强度  $M$ ；
- 几何的：体积  $V$ ，长度  $L$ ；
- 化学的：摩尔数  $n$ ，成分  $x_i$ ；
- .....

若态变量  $F$  满足  $F(n \text{ 个系统}) = nF(1 \text{ 个系统})$ ，就是广延量

（extensive），如  $V$ 、 $n$ ；若满足  $F(n \text{ 个系统}) = F(1 \text{ 个系统})$ ，则为强度量（intensive），如  $p$ 。

系统的态变量中只有部分是独立的，其余的为选定的态变量的函数。例如，根据

$$pV = nRT$$

我们可以选  $(p, V)$  作为变量，而  $T$  作为它们的函数；也可选  $(T, V)$  作为变量，而  $p$  作为函数。我们以  $p$ 、 $V$  为轴作坐标系，如图 10-1，则其中

的一点可以用来表示一个平衡态。从这个意义上，我们可以把态变量叫做热力学坐标。

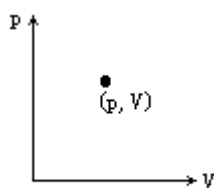


图10-1 状态图

系统的态可以改变。例如，一气体系统可以从初始的状态  $(p_i, V_i)$  改变到最终的状态  $(p_f, V_f)$ 。我们也关心状态变化的历史，即过程（图 10 - 2）。

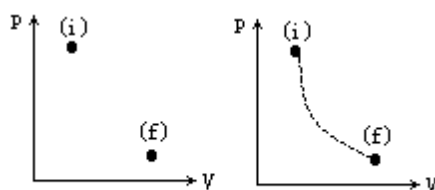


图10-2 状态变化和过程

在某过程中系统不可能总是处在平衡态。但是当过程经历的时间比弛豫时间长得多时，我们可以认为系统处于一系列的平衡态。例如，上面有关带活塞容器中气体的例子就是这样的情形：

$$t_{\text{活塞}} = 0.1\text{s}, \quad \tau = 10^{-3}\text{s}, \quad t \gg \tau$$

这种过程叫做准静态过程（quasistatic process）。准静态过程是进行得足够慢的过程。在准静态过程中态变量存在，且外“力”可以用系统的态变量来表示。除非特别说明今后凡是谈及过程都是指准静态过程。

我们可以在  $pV$  图上作出以下一些过程的曲线（图 10 - 3）：

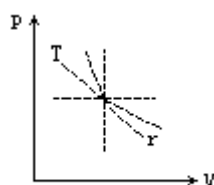


图10-3 过程线

- 等压（isobaric）过程；
- 等容（isochoric）过程；
- 等温（isothermal）过程；
- 等熵（isentropic）或绝热（adiabatic）过程。

非耗散的准静态过程是可逆的，而所有的自然过程（自发过程）是不可逆的。这种论断当然是十分强的，它充分体现了热力学理论的魅力。

## § 10.2 热平衡和温度

如图 10 - 4 所示，两个热力学系统 1、2 起初处于它们各自的平衡态  $(x, y)$  和  $(x_1, y_1)$ ，当用绝热板 (insulating wall) 相隔时，它们仍然可以处在各自的状态。绝热材料的例子有：厚木板、石棉、毛毡、混凝土等等。当两个热力学系统通过导热板 (diathermal wall) 接触时，一般不能分别保持各自的平衡态，它们的状态将发生改变。当复合系统达到平衡态时，我们就说两个系统处于热平衡 (thermal equilibrium)。薄金属片就是典型的导热板。通过导热板产生的接触称为热接触 (thermal contact)。

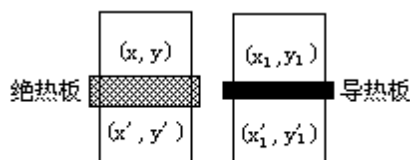


图10-4 绝热壁和导热壁

热力学第零定律 (the zeroth law of thermodynamics) 说：

· 两个系统中若每一个都与第三个处于热平衡，则它们也处于热平衡。此道理很简单，但并非显然如此。例如，两铁块都吸引磁铁，但它们彼此并不相吸。第零定律这一多少有些古怪的叫法是由于当时 (1909) 热力学的第 一、第二定律都已建立，但从性质上说它更基本而得名。

温度 (temperature) 是决定某系统是否可以与别的系统处于热平衡的一种物理性质。它是一个宏观概念，量化以后就是一个宏观量。上面的定义对温度的范围、方向甚至正负都未加限制。例如，摄氏 (Celsius) 最初选水的蒸汽点为 0，而冰点为 100。又如，下列定义与现有温度定义有一样的变化方向： $t = -1/T$ ；采用这种温标也未尝不可。



### § 10.3 经验温标

要对温度进行量化，首先必须确定温标。温标的选取不仅仅考虑实验上的方便，而要依据在表述物理定律时其是否有效而定。

要确定温标，需要利用物质的测温性质（thermometric property）和一个标准点。下面列出了一些测温性质：

机械的：保持等容的气体的压强  $p$ ，橡皮块的张力  $J$ ；

几何的：保持常压的气体的体积  $V$ ，液体的体积  $V$ ；

电学的：电阻  $R$ ，热电偶的电动势。确定温标的通常方法是假定温度  $T$  与对应于测温性质的量  $X$  之间存在某种关系，如假定：

$$T(X) = aX \quad (10.3.1)$$

这就就确定了一线性关系。自 1954 年起，水的三相点（the triple point）的温度被取作标准，即为  $273.16K$ 。取这样一个特殊值纯粹是历史所致。所谓三相点是指水、汽和冰共存时的温度和压强；通常这一点的温度可从三相点瓶胆（图 10-5）取得。利用（10.3.1）式，我们有

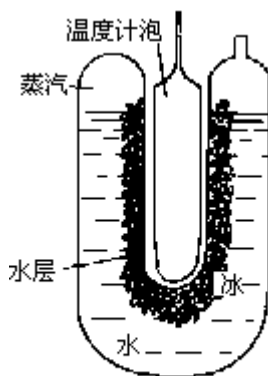


图10-5 三相点瓶胆

$$\frac{T(X)}{273.16K} = \frac{X}{X_{tr}} \quad (10.3.2)$$

例如，对电阻温标和气体体积温标，分别有

$$T(R) = 273.16K \frac{R}{R_{tr}}$$

$$T(V) = 273.16K \frac{V}{V_{tr}} \quad (\text{压强不变})$$

问题是，是否所有这些温标都保持一致。

我们来集中讨论定体（容）气体温标。此时， $T$  的表达式为

$$T = 273.16K \frac{P}{P_{tr}} \quad (\text{体积不变}) \quad (10.3.3)$$

利用图 10-6 的装置进行实验。气体在三相点的压强取决于气体的性质和量，而  $p_{tr}$  和  $p_{\text{蒸汽}}$  的值可决定蒸汽点的温度  $T_{\text{蒸汽}}$ 。减少气体的量做重复实验，可以得到一系列的  $(T_{\text{蒸汽}}, p_{tr})$  值。我们可以利用作图来外推至  $p_{tr} = 0$ 。

对于不同的气体，可以重复同样的步骤而把结果画在同一张图上（如图 10-7 所示）。可以看出对于不同量的不同气体，只有当  $p_{tr} = 0$  时才有一个公共值  $373.125K$ 。可以期望在这样的条件下不但蒸汽点如此，其它温度也会

一样．这对于真实气体自然是不可能的．我们设想存在一种“理想气体”，其行为如同无限稀薄的真实气体，不过它没有密度方面的限制．我们将在第十三章详细讨论理想气体．可以定义理想气体温标（the ideal gas scale）为

$$T = 273.16\text{K} \lim_{P_{\text{tr}} \rightarrow 0} \left( \frac{P}{P_{\text{tr}}} \right) \quad (10.3.4)$$

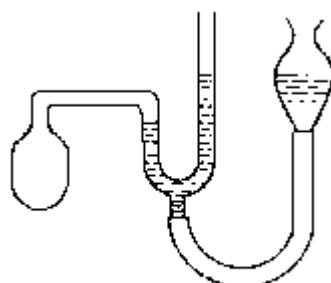


图10-6 定体温度计

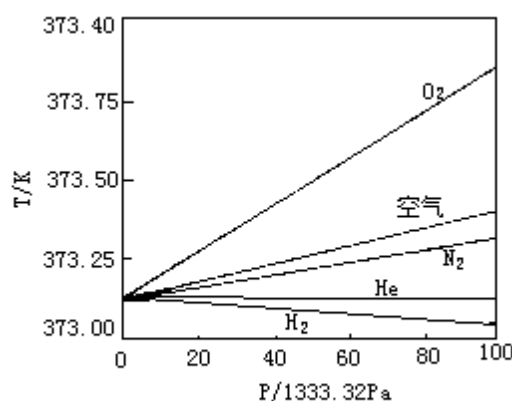


图10-7 各种气体定体温度计测温图

其它常用的温标有摄氏温标（Celsius scale）和华氏温标（Fahrenheit scale）．在数值上摄氏温标

$$T_{\text{C}} = T_{\text{理想气体}} - 273.15$$

在 1948 年第九届计量大会以前，曾称之为百分温标（centigrade scale）．在数值上华氏温标  $T_{\text{F}}$  与摄氏温标的关系为

$$T_{\text{F}} = 32^{\circ} + \frac{9}{5} T_{\text{C}}$$

除了经验温标以外，还有热力学温标或开尔文温标（Kelvin scale），它与任何具体物质的性质无关．在气体温度计适用的温度范围内，热力学温标和理想气体温标相同．热力学温度单位 K 是国际单位制的基本单位．

国际计量委员会采用的国际实用温标，它是用一些特殊点来标定的，如标定钨的正常熔点（NMP）为 3695K 等等．

现代技术涉及的温度范围可以从  $5 \times 10^{-8}\text{K}$  到  $5 \times 10^8\text{K}$ ．

## § 10.4 物态方程

物态方程 (equation of state) 是热力学坐标之间的泛函关系。它从实验中得到，所以只能和实验一样精确，并且只在测量值范围内适用。在准静态过程中，存在物态方程。物态方程也可以从气体动理学理论或统计物理理论推得，当然这需要对物质结构作一些假定。

固体和液体的物态方程可以用某些物理量来表示。这些物理量的值可以在一些手册上查到，下面介绍两个这类物理量即膨胀系数和等温压缩率。线膨胀系数定义为

$$\alpha_l = \frac{1}{L} \left( \frac{\partial L}{\partial T} \right)_p \quad (10.4.1)$$

上式表明温度  $T$  和压强  $p$  是两个独立变量，长度对温度的导数是在压强不变的条件下进行的。对于各向同性的材料，体膨胀系数为

$$\alpha_v = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{L^3} \left( \frac{\partial L^3}{\partial T} \right)_p = 3 \alpha_l$$

对各种材料，体膨胀系数变化范围是  $10^{-7} / K \sim 10^{-5} / K$ ；在通常的温度变化范围内，相对膨胀的量级为

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \alpha_v \Delta T \approx 10^{-5} \sim 10^{-3}$$

等温压缩率 (isothermal compressibility) 定义为

$$K_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad (10.4.2)$$

数值约为  $10^{-10} / Pa$ 。在通常的压强变化范围内，相对压缩率为

$$\left| \frac{\Delta V}{V} \right| \approx K_T \Delta p \approx 10^{-5}$$

由此我们得到印象，在通常的变化范围内相对体积膨胀或相对压缩率是较小的。实际上，一般情况下  $\alpha_v$  和  $K_T$  几乎为常量。微分关系

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V} &= \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT + \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp \\ &= \alpha_v(T) dT - K_T(p) dp \end{aligned}$$

为我们提供了一个物态方程：

$$V = V_0 (1 + \alpha_v T - K_T p)$$

在热力学中最常用的物态方程可能是理想气体的物态方程：

$$V = nRT$$

其中气体常量  $R = 8.31 J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$

这一方程可以从玻意耳-马略特定律 (Boyle - Mariotte law)

$$pV = C(T) \quad (10.4.3)$$

以及气体定压温标

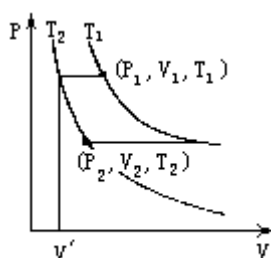


图10-8

$\frac{V}{T} = D(p)$  (10.4.4) 推得. 在图 10-8 中有两根等温线, 温度分别为  $T_1$  和  $T_2$ . 设想我们从  $(p_1, V_1, T_1)$  出发经过  $(p_1, V', T_2)$ , 最后到达  $(p_2, V_2, T_2)$ . 根据气体定压温标, 在  $p_1$  处有

$$\frac{T_1}{V_1} = \frac{T_2}{V'}$$

沿等温线, 根据玻意耳定律有

$$p_1 V' = p_2 V_2$$

上两式相结合, 有

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad (10.4.5)$$

根据阿伏伽德罗定律: 在相同的温度和压强之下相等体积的气体包含相同的分子数, 也可以说: 在相同的温度和压强之下气体的摩尔体积相等. 取“标准温度、压强” ( $T_0 = 273.15\text{K}$ ,  $p_0 = 101325\text{Pa}$ ) 下的摩尔体积, 即

$$V_{m0} = 22.414 \times 10^{-3} \text{m}^3 / \text{mol}$$

代入 (10.4.5) 式就得到气体常量.

玻意耳定律和阿伏伽德罗定律近似适用于稀薄的真实气体, 气体越稀薄近似程度越好, 可以认为它们适用于理想气体. 理想气体当然是一种抽象, 从微观的观点来看, 它是一种无相互作用的系统或者说分子间的相互作用力程比分子间平均距离小得多. 由于理想气体没有相互作用, 故它不能液化.

对于真实气体, 物态方程通常采用所谓位力 (Virial) 展式的形式:

$$pV = nRT [1 + B(T)p + C(T)p^2 + \dots]$$

$$pV = nRT [1 + B(T)\frac{n}{V} + C(T)(\frac{n}{V})^2 + \dots]$$

(10.4.6)

其中  $n$  为摩尔数, 而  $B(T)$ 、 $C(T)$  [以及  $B(T)$ 、 $C(T)$ ] 分别叫做第二、第三位力系数. 不同的气体其位力系数不同, 代表了真实气体对理想气体的偏离程度.

一个非常简洁的方程可以用来描述真实气体的某些方面, 这就是 1873 年范德瓦耳斯 (J. D. van der Waals, 1837—1923) 提出的方程:

$$[p + a(\frac{n}{V})^2] (V - nb) = nRT \quad (10.4.7)$$

后面我们将讨论它.

## 习 题

10.1. 在下列成对的温标中，什么温度有相同的读数？(a) 华氏和摄氏；(b) 华氏和开氏；(c) 摄氏和开氏。

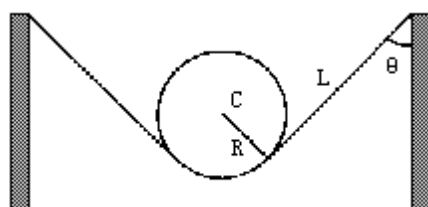
10.2. 考虑一个水银温度计。设其毛细管的横截面积为常量  $A_0$ ，0.00 时水银泡的体积为  $V_0$ 。若水银恰是在 0.00 时灌入的，试证明在  $t$  时水银柱的长度可以表示为

$$l = \frac{V_0}{A_0} (\beta - 3\alpha) t$$

即其长度正比于温度；式中  $\beta$  是水银的体膨胀系数， $\alpha$  是玻璃的线膨胀系数。

10.3. (a) 证明固体的转动惯量  $I$  随温度  $T$  的改变可表示为  $I = I_0 (1 + \beta T)$ ；(b) 证明物理摆的周期  $t$  随温度的变化为  $t = t_0 (1 + \beta T)$ 。

10.4. 如图，铝质圆柱用柔软的钢条对称地悬挂于两面直立的墙之间，要求圆柱的轴线  $C$  不因圆柱或钢条的热胀冷缩而有所改变，当  $T = 290K$ ， $L = 2.5m$ ， $\theta = 50^\circ$  时求圆柱的半径  $R$ 。如果取近似，应讨论其合理性。（忽略钢条的重量；钢的线膨胀系数为  $1.1 \times 10^{-5} K^{-1}$ ，而铝的为  $2.3 \times 10^{-5} K^{-1}$ ）



题10.4图

10.5. 边长为 20cm 的立方块飘浮在水银面上。若温度从 270K 上升至 320K，计算铝块浸入水银的深度的改变。（水银的线膨胀系数为  $1.8 \times 10^{-4} K^{-1}$ ）

10.6. 所谓 6-12 势如 (5.3.1) 式所示：

$$U = 4 \left[ \left( \frac{a}{r} \right)^{12} - \left( \frac{a}{r} \right)^6 \right]$$

(a) 求势能曲线的极值位置和极值大小。(b) 求当总能量为极值的 0.8 时，分子的运动范围和平均距离。(c) 相对膨胀率是多少？(d) 作势能曲线示意图，标明 (a)、(b) 中的结果。

10.7. Berthelot 状态方程为

$$\left( P + \frac{an^2}{TV^2} \right) (V - nb) = nRT$$

求它的第二位力系数。

## 第十一章 热力学第一定律

### § 11.1 功和内能

功不是新的概念。对于热力学研究来说，我们需要的是作一些约定。如不加特别说明，这里讨论的是环境对系统所做的功。

考虑一带活塞的柱形容器中注有气体的情形（图 11-1）。当活塞移动一个距离  $dx$  时，外力所做的功是

$$dW = p_{\text{ext}} A dx = p_{\text{ext}} dV_S = -p_{\text{ext}} dV$$

式中  $p_{\text{ext}}$  是外压强， $V_S$  是介质体积， $V$  是系统体积。在准静态过程中，

$$dW = -pdV \quad (11.1.1)$$

不管是否准静态过程，(11.1.1) 式对不变的外压强总是适用的。

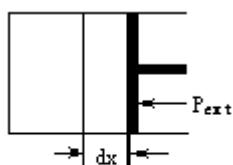


图11-1 压缩功

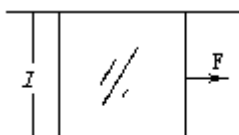


图11-2 对表面系统做功

对于张力为  $\gamma$  的表面系统（图 11-2），无限小功可以表示为

$$dW = F dx = 2 \gamma dx = \gamma dA \quad (11.1.2)$$

形式上，功可以写成广义力  $Y_i$  和广义位移  $dX_i$  的乘积，通常都用系统变量来表示：

$$dW = Y_1 dX_1 + Y_2 dX_2 + \dots \quad (11.1.3)$$

$$Y: -p, J, E, H, \mu$$

$$X: V, L, A, P, M, Q, n$$

它们分别是，压强和体积，张力和长度，表面张力和面积，电场强度和电极化强度，磁场强度和磁化强度，电动势和电荷；最后，化学势和摩尔数也可认为是这种成对的量。当考虑电致伸缩（electrostriction）和压电效应（piezo effect）时，我们应该取机械量和电学量两对相应的量。当考虑磁致伸缩（magnetostriction）和压磁效应（piezo-magnetic effect）时，则应选择机械量和磁学量。在大多数情形下，只需要一对量就可以了。我们常常论及气体，当然它并不是唯一感兴趣的系统，可以想象它是一种代表。对气体系统所得的结果作形式代换，就可以得到适用于其它系统的相应结果，当然推导过程中不能牵涉物态方程。

功依赖于路径，表达式

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p dV \quad (11.1.4)$$

并不是唯一的。这里所谓依赖于路径并不是在力学意义上的，而是指依

赖状态图上的路径即过程的意思。例如，在图 11 - 3 中，沿不同过程的功是不同的：

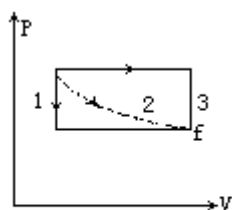


图11-3 沿不回路的功

$$W_1 = p_f (V_f - V_i)$$

$$W_3 = p_i (V_f - V_i)$$

$$W_2 \sim - \ln \frac{V_f}{V_i}$$

在力学中保守力所做的功只依赖于路径的两端点，这里有无类似的情形呢？此处，什么是路径？什么是端点？对应于坐标的是热力学坐标即状态变量；路径则是热力学过程如 pV 图中的曲线；而两端点对应于两个态即初态和终态。

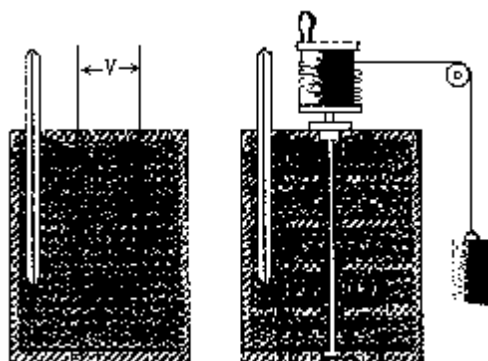


图11-4 焦耳实验

一个绝热包裹的系统仍然可以和环境耦合，环境仍然可以对它做功——绝热功。在英国物理学家焦耳（James Joule）的著名实验中所用的经典仪器（图 11 - 4）中的情形就是例子：电功  $I^2 R t$  和叶轮所做的机械功就是绝热功。从这些实验（和其它的实验），可以得到定量的关系。

如果系统从初态变到终态仅仅是由绝热手段引起的，那么所做的功都是一样的，不管这些手段是机械的、电的或磁的，甚至不管过程是否是准静态的。因此必然存在某种量，在数值上等于绝热功并连接着初态和终态，或者说三者之间存在着某种关系。

我们用环境对系统所做的绝热功  $W$  来定义两个状态 A、B 之间的内能函数  $U$  之差：

$U = U_B - U_A = W_{BA}$  (11.1.5)  $W_{BA}$  代表从状态 A 到 B 所作的功，这里“内”字的含义在于不考虑系统整体的机械运动。注意我们定义的是内能函数的差（试与引力势能函数的情形相比较）。这样，内能函数本身可以包括一个可加常量。若系统不能通过绝热过程从 A 到达 B，我们可以定义：

$$U_B - U_A = -W_{AB} \quad (11.1.6)$$

为了强调定义的是内能差，一般不用下列形式：

$$U_B + W_S = U_A \quad (11.1.7)$$



## § 11.2 热和热力学第一定律

热质的思想早年被亚里士多德、伽利略所采用（伽利略年代，热质称为 phlogiston）。法国化学家拉瓦锡（Antoine Lavoisier）对此作了改善，使之成为理论。按照热质说（caloric theory），热是一种流体——热质（caloric fluid）；热质应该没有质量、无色并且在宇宙间总量守恒；它总是从较热的物体流向较冷的物体，不能脱离物体而存在。大约在 1712 年，钮可曼（Thomas Newcomen）制作了第一台可工作的蒸汽机。1769 年，瓦特（James Watt）为其第一台有效蒸汽机申请了专利。热质理论就被用来解释蒸汽机的工作机制。在热质说中，蒸汽机被认为是与水轮机相当的，温差相当于水的落差。热容量、潜热等术语都是来自热质说。

然而，在解释所谓“问题现象”时，热质说遇到了困难。第一个问题现象就是摩擦。搓手变热并没有热源，热质说者解释说那是潜热释放出来了。在自由膨胀过程中如果热质浓度减小到一半，那么温度也将降低到一半。可是，事实上自由膨胀过程中温度是始终保持不变的（1807，由法国物理学家盖吕萨克实验证明）。汤普孙（Benjamin Thompson, 1753—1814）（后来为巴伐利亚的伦福伯爵 Count Rumford of Bavaria）于 1798 年完成了一个有名的实验：当时他在慕尼黑巴伐利亚的皇家兵工厂，测量了在钻炮筒时的热量，确信所产生的大量的热不可能是来自潜热，不可能由切碎材料而像“出血，那样流出来的。他证明了不产生任何切屑也能生热，只要用非常钝的钻头就可以做到不切削任何物质而源源不断得到热。他还发现切屑的比热容和原来的金属一样。他的结论是：热与运动相关、与功相关。\*按照热质说，钻削过程应该怎样解释？

在 18 世纪 40 年代，受汤普孙及其它人的工作鼓舞，焦耳开始了他有名的实验。他把热和功放在等价的位置上，测出了热的功当量为

$$1 \text{ cal}_{15} = 4.1858 \text{ J} \quad (11.2.1)$$

1 cal<sub>15</sub> 热量可把 14.5 的 1g 水加热到 15.5。

以上是关于热的概念的建立过程。现在我们回到 (11.1.6) 式。一般

$$U = W \quad (\text{除非 } W=WS)$$

它们的差

$$Q = U_f - U_i - W \quad (11.2.2)$$

叫做环境释放到系统的热量。这里没有提及温度差，换言之温度差不是热流的必要条件。热与功一样是系统和环境交换能量的一种形式。(11.2.2) 式可写为

$$U = W + Q \quad (11.2.3)$$

对无限小过程，有

$$dU = dQ + dW \quad (11.2.4)$$

(11.2.3) 式和 (11.2.4) 式是热力学第一定律的数学表述。内能是状态函数，与路径无关，其微分是全微分；而热与功与路径有关，在 (11.2.4) 式中采用了特殊的微分符号以示区别。热力学第一定律的另一种说法是：

· 第一类永动机是不可能的。

所谓第一类永动机（perpetual motion machine）指的是不需要提供能源（ $Q=0$ ）而能够周而复始（ $U=0$ ）运转的机器。热力学第一定律就是能量守恒定律。除了汤普孙以外，以下人物也作出了自己的贡献：

德国内科医生梅逸 (Julius Robert Mayer, 1812—1878) 1842 年在他的一本私人小册子 *Organic Motion in Its Connection with Nutrition* 中列举了 25 种能量形式。他认为太阳是终极能源。

焦耳 (James Prescott Joule, 1818—1889) 1847 年, 他受到开尔文爵士的支持, 时年 22 岁。焦耳代表作为 *Phil. Trans. Roy. Soc.* (1850) 140. [开尔文爵士 (Lord Kelvin, 1824—1907) 即苏格兰的汤姆孙 (William Thomson)]。

德国内科医生亥姆霍兹 (Hermann von Helmholtz) 著作有 *On the conservation of Force* (1847), 时年 26 岁。

法国工程师卡诺 (Sadi Carnot, 1796—1832) 著作有 *Reflections on the Motive Power of Fire* (1824)。

### § 11.3 热容和比热容

热容的定义是

$$C = \lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{Q}{T} \right) \quad (11.3.1)$$

其中  $Q$  是系统在某一过程中吸收的热量。热容  $C$  是广延量；比热容  $c$  / m、摩尔热容  $C_m = C / n$  则是强度量。

热容依赖于过程：

- $C > 0$  (吸热且升温  $T > 0$ )
- $C < 0$  (放热且升温  $T > 0$ ，如黑洞等引力体系)
- $C = 0$  (绝热  $Q = 0$ )
- $C = \infty$  (等温，如热源)

对于不同的过程，我们可以加一自明的下标加以说明。例如，定体热容  $C_V$ 、定压热容  $C_P$ 。

\* 平衡态的稳定性条件要求

$$C_V > 0 \quad (11.3.2)$$

而一般情况下

$$C_P - C_V = \frac{VT^2}{k} \quad (11.3.3)$$

一般来说热容是温度的函数。例如，水的比热容  $4.1860 \text{ kJ} / (\text{kg} \cdot \text{K})$  只是对某一温度范围而言的，见图 11-5。

在热力学中，热容可以通过实验测得。利用热力学第一定律，定体热容和定压热容可表示为

$$\begin{aligned} C_V &= \lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{Q}{T} \right)_V \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{U}{T} \right)_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \\ C_P &= \lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{Q}{T} \right)_P \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{U + PV}{T} \right)_P \\ &= \begin{cases} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_P + P \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \\ \left| \frac{\partial(U + PV)}{\partial T} \right|_P \equiv \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \end{cases} \quad (11.3.4) \end{aligned}$$

式中  $H$  称为焓 (enthalpy)。作形式变换后，它们可以分别是定磁极化热容、定磁场强度热容或者其它热容，参见 (11.1.3) 式。

热容比定义为

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \quad (11.3.5)$$

对气体的实验表明  $C_P$ 、 $C_V$  都是温度的函数。对 He、Ne、Ar 等单原

子分子气体和大多数金属蒸气，如 Na、Cd、Hg 的蒸气，有如下结果：

- $C_V$  在很大的温度范围内是常数且非常接近于  $3/2R$ ；
- $C_p$  在很大的温度范围内是常数且非常接近于  $5/2R$ ．对双原子分子气体，诸如空气， $H_2$ 、 $D_2$ 、 $O_2$ 、 $N_2$ 、 $NO$  和  $CO$ ，有
  - $C_V$  在普通温度下是常数，约等于  $5/2R$ ，且随温度升高而增加；
  - $C_p$  在普通温度下是常数，约等于  $7/2R$ ，且随温度升高而增加；
  - 在普通温度下是常数，约等于  $7/5$ ，且随温度升高而减小．多原子分子气体，如  $CO_2$ 、 $NH_3$ 、 $CH_4$ 、 $Cl_2$  和  $Br_2$ ，其化学性质十分活跃．它们的  $C_p$ 、 $C_V$  随温度而变，且变化随气体不同而不同．

根据以上的实验结果，理想气体的热容定义在表 11 - 1 中．真实气体的热容常常用相应的理想气体的值来近似表示．

表 11 - 1 理想气体的热容	
单原子分子	$C_V = \frac{3}{2}nR$
双原子分子	$C_V = \frac{5}{2}nR$
多原子分子	$C_V = \frac{7}{2}nR$

固体的摩尔热容如图 11 - 6 所示，其中温度以各固体的特征值 为单  
位．用了约化单位以后，曲线是普适的．在低温下，固体的热容有以下形式：

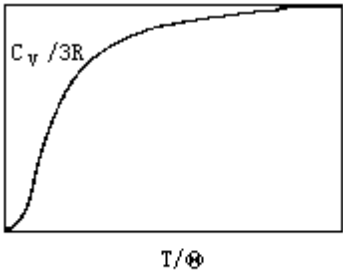


图11-6 固体的摩尔热容

$$C_V = T^3 + T \quad (11.3.6)$$

对绝缘体  $\sigma = 0$ ，而铜这样的导体  $\sigma \neq 0$ ．由此可以得出结论：该式中的线性项是传导电子的贡献．

比热容  $c$  的变化常常是相变 (phase transition) 的标志，图 11 - 7、图 11 - 8 给出了一些例子．所以除了热学目的而利用比热容以外，比热容研究还是洞察物质内部的重要手段，特别是发生相变的时候．

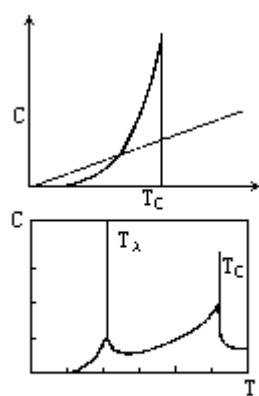


图11-7 超导电子比热容和  
 $^4\text{He}$ 低温比热容

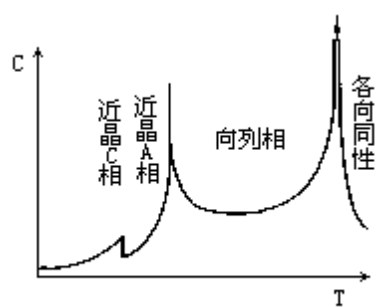


图11-8 液晶的比热容

## § 11.4 气体的自由膨胀和内能

如图 11-9 所示，容器壁是绝热的，气体和环境没有热交换。当气体从左边冲入右边真空时不做功。按照热力学第一定律，内能函数将不改变。超新星爆炸（如 1987A）在某些阶段就是这类自由膨胀。

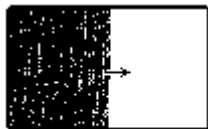


图11-9 自由膨胀

考虑  $U = U(T, V)$ ，则有

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_T dV$$

考虑  $T = T(U, V)$ ，则有

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \left[ \left(\frac{\partial T}{\partial U}\right)_V dU + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U dV \right] + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_T dV$$

比较两边，可以得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V &= \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial U}\right)_V} \\ \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T &= -\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = -C_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U \end{aligned}$$

1843 年，焦耳发现

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = 0 \quad (11.4.1)$$

这一偏导数叫做焦耳系数。由此，他推断说：对于气体，有

$$U = U(T) \quad (11.4.2)$$

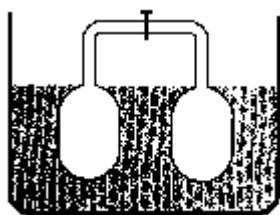


图11-10 焦耳自由膨胀实验

称为焦耳定律。焦耳把两个容器浸在水浴中，用带阀门的短管连接起来（如图 11-10）。一个容器装有高压空气，一个抽空。膨胀前后测量水温。事实上，焦耳的实验是不精确的，原因是固体和液体的热容比空气要大上千倍；焦耳无法检测到任何水温变化。后来，1852 年他和汤姆孙做了节流（throttling）过程实验，才较好地测得了气体温度的变化。

焦耳的结果只适用于理想气体；事实上，可以从定义理想气体状态方程推断出  $U = U(T)$ 。于是，内能函数为

$$\begin{aligned} dU(T) &= \frac{dU}{dT} dT = C_V dT \\ U &= C_V T + U_0 \end{aligned}$$

焓  $H$  也是  $T$  的函数：

$$H = U(T) + pV = U(T) + nRT = H(T)$$

对于一无限小准静态过程，

$$Q = C_V dT + p dV = (C_V + nR) dT - V dp$$

式中用了理想气体物态方程．在等压条件下，该方程变为

$$\frac{dQ}{dT} = C_V + nR$$

$$C_p = C_V + nR$$

结合 的定义，热容可以表示为

$$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$$

$$C_p = \frac{nR}{\gamma - 1}$$

## § 11.5 绝热方程

按照热力学第一定律,  $\delta Q = 0$  意味着

$$C_V dT + p dV = 0$$

将理想气体方程求微分, 有

$$V dp + p dV = nR dT = (\gamma - 1) C_V dT$$

利用以上两式联立, 消去含  $dT$  的项, 有

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

所以理想气体的绝热方程是

$$pV^\gamma = C \quad (C \text{ 为常量}) \quad (11.5.1)$$

利用理想气体方程, 又可以写作

$$TV^{\gamma-1} = C \quad (11.5.2)$$

有了绝热方程 (11.5.1) 式, 就可以计算出绝热功:

$$\begin{aligned} W_s &= - \int_{V_1}^{V_2} p dV \\ &= -C \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} \\ &= \frac{C}{\gamma-1} \left[ \frac{V_2^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right] \end{aligned}$$

式中

$$C = P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

所以

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{1}{\gamma-1} [p_2 V_2 - p_1 V_1] \\ &= \frac{nR}{\gamma-1} [T_2 - T_1] \\ &= C_V [T_2 - T_1] \end{aligned}$$

绝热压缩将导致产生高温. 在日常生活中, 自行车打气筒就是例子. 相反, 绝热膨胀是获得低温的有效手段.

声传播过程是绝热的还是等温的? 1719 年, 牛顿认为是等温的, 因此声速表示式中的体积模量就用了等温体积模量  $B_T$ .

$$B_T = -V \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = p$$

于是, 有

$$v = \sqrt{\frac{B_T}{\rho}} = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

这是在汤普孙提出热的正确概念 (1798 年) 前数十年的事.

1816 年, 拉普拉斯 (Laplace, 1749—1827) 提出声传播应该是绝热的, 所以



$$B_s = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s = p; \quad V = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

实测值支持后者。

## § 11.6 卡诺循环

在热力学中，有很多模型循环过程，最重要的可能是图 11-11 中所示的卡诺循环，它对于热力学的研究非常重要。卡诺循环由两条等温线（isotherms）和两条绝热线（adiabatics）组成。卡诺热机以理想气体为工作物质，并按这一循环运行。在所有关于热机的讨论中，功将指系统所做的功，这当然是一个自然的选择。

$$W = \int P dV$$

图 11-11 展示了组成卡诺循环的过程线。沿等温线  $T_1$ ，系统膨胀对外做功。由于理想气体的内能只是温度的函数，热机必须从热库吸热。定义  $Q_{12}$

$Q_1$ 。从 3 到 4 是一个压缩过程，系统向环境放热。按照约定， $Q_{34} < 0$ ；我们定义其净量为  $-Q_{34} = Q_2$ 。对于一个完整的循环，

$$U = 0$$

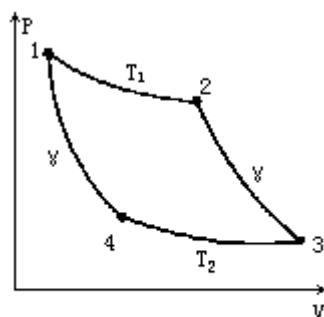


图11-11 卡诺循环

根据热力学第一定律，有

$$Q_{12} + Q_{34} - W = 0$$

热机的效率定义为

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{W}{Q_{12}} = \frac{Q_{12} + Q_{34}}{Q_{12}} \\ &= 1 + \frac{Q_{34}}{Q_{12}} \equiv 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (11.6.1) \end{aligned}$$

沿等温线  $T_1$ ，

$$U=0$$

所以

$$Q_1 \equiv Q_{12} = W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P dV = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

类似地

$$Q_2 \equiv -Q_{34} = -\int_{V_3}^{V_4} P dV = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$$

于是

$$\eta = 1 - \frac{T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

当然还可以作进一步简化．沿绝热线即 2 至 3 和 4 至 1，有

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}$$

最后可得到

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (11.6.2)$$

由此可以看到，效率只依赖于两个热库的温度．它适合于所有的可逆卡诺热机．

\*是否可令  $Q_2 = 0$ （所有  $Q_1$  转化为功）？ $Q_2 = 0$  将导致  $T_2 = 0$ ．沿 0K 等温线工作是否可能？（ $T = 0, C = 0$ ．）

## 习题

11.1. 一铁球从 10m 高处落至水泥地面上，第一次回跳高度为 0.50m．假设碰撞过程中机械能的损失只导致铁球能量的变化．（a）有没有热加到铁球上？（b）有没有对铁球做功？（c）铁球的内能有没有变化？如果有，数值是多大？（d）铁的比热容是  $0.50 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ，铁球温度升高多少？

11.2. 一种物质具有如下状态方程：

$$p = AT^3/V$$

其中  $p$ 、 $V$  及  $T$  分别为压强、体积和温度， $A$  为一个常量．该物质的内能为

$$U = BT^n \ln(V/V_0) + f(T)$$

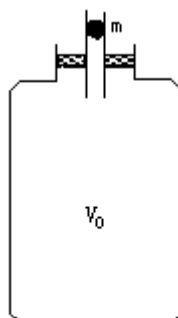
其中  $B$ 、 $n$  及  $V_0$  均为常量， $f(T)$  只依赖于温度．试确定  $B$  及  $n$ ．

11.3. 考虑大气的一个简单模型，不计风、对流及重力随高度变化等的因素．（a）设大气是等温的，求分子密度随高度的分布；（b）假设大气是绝热的，证明此时温度随高度的增加而线性减小，并求减小的速率．

$$\left[ \text{答案：(a)} n(h) = n_0 \exp(-mgh/k_B T), \text{(b)} \frac{dT}{dh} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{mg}{k_B} \right]$$

11.4. 一定质量的气体在  $101325 \text{ Pa}$  和  $300 \text{ K}$  时占据  $4.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  的体积，现将其绝热压缩至  $1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ ，确定（a）压缩后的压强、（b）气体最后的温度．设该气体为理想气体，且比热比为  $\gamma = 1.5$ ．

11.5. 一容器体积为  $V_0$ （如图），装有理想气体．玻璃管的横截面积为  $A$ ，有一个质量为  $m$  的小球正好封住管子并可以在管内无摩擦滑动．大气压为  $P_0$ ，管内压力略高于大气压．如果小球略偏离平衡位置，它将作简谐振动．设气体经历的过程是绝热的， $\gamma$  是比热比，求小球振动频率．



题11.5图

$$\left[ \text{答案: } \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma A^2 (P_0 + \frac{mg}{A})}{V_0 m}} \right]$$

11.6. 振幅纵波在理想气体中的速度为

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$$

式中  $P$  为作为介质的气体的压强， $\rho$  为相应气体的密度，试推导：(a) 等温压缩或等温膨胀时气体中的声速；(b) 绝热压缩或绝热膨胀时气体中的声速。

$$\left[ \text{答案: (a)} \sqrt{\frac{RT}{m}}, \text{ (b)} \sqrt{\frac{\gamma RT}{m}} \right]$$

11.7. 在宇宙大爆炸理论中，起初局限于小区域的辐射能量以球对称方式绝热膨胀，在膨胀的过程中辐射逐渐冷却。仅仅从热力学的角度考虑，试推导出温度  $T$  和辐射半径  $R$  的关系。

[答案:  $RT = \text{常量}$ ]

11.8. 一可逆热机以  $1.00 \text{ mol}$  单原子理想气体作工作物质并经历图示的循环过程。其中状态 2 至状态 3 为绝热过程。

(a) 分别对三个不同过程及整个循环计算热量的变化、内能的改变及气体所作的功；

(b) 若在状态 1 的初始压强为  $101325 \text{ Pa}$ ，计算气体在状态 2 和状态 3 时的体积及压强。

11.9. 理想的气轮机作 Joule 循环 (如图)，所有过程都是准静的。其中 A 到 B 和 C 到 D 为绝热过程。设热机中的工作物质为理想气体，其定压与定体比热之比为  $\gamma$ 。求热机的效率，用压强比来表示。

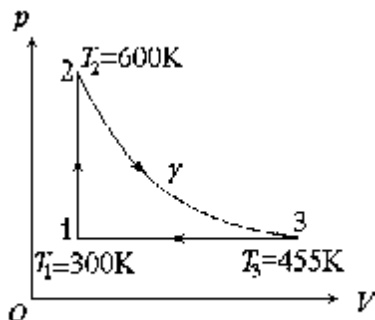
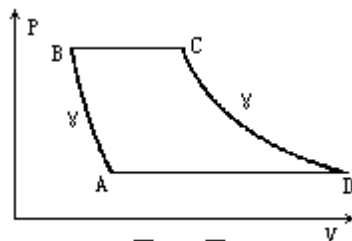


图11.8图

$$\left[ \text{答案: } \eta = 1 - \left( \frac{P_A}{P_B} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

11.10. 一可逆热机以 1mol 双原子理想气体作工作物质按图作 Otto 循环过程. 试以图中标出的体积表示热机的效率.



题11.9图

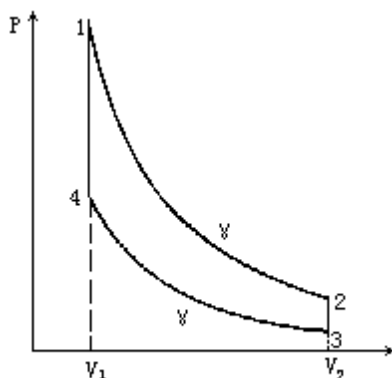
11.11. 若卡诺热机逆向运转, 我们将得到一理想的制冷机. 热量  $Q_2$  由温度为  $T_2$  的低温热源获得, 然后向温度为  $T_1$  的高温热源传送热量  $Q_1$ , 同时外界需对热机做功  $W$  以使之运行, (a) 证明

$$W = Q_2 \frac{T_1 - T_2}{T_2} . \quad (b) \text{ 制冷机的操作系数 } K \text{ 一般定义为从}$$

低温热源吸收的热量与外界对之所做的功之比, 即  $K = \frac{Q_2}{W}$ ,

证明在理想状态下  $K$  可表示为  $K = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ , 实际情况中  $K$

一般为 5 或 6 .



题11.10图

11.12. 一个空调装置可以用来降低室内温度, 它实质上是一个制冷器, 通过外界做功把热量从室内(温度较低)抽取出来释放到室外(温度较高). 设室内的温度为  $T_2$ , 室外的温度为  $T_1 > T_2$ , 空调设备按可逆卡诺循环运行, 其消耗功率为  $P$ .

(a) 每秒钟空调设备从室内抽取  $Q_2$  的热量并向室外放出  $Q_1$  的热量. 试用  $T_1$  和  $T_2$  来表示空调设备的工作效率  $Q_2 / P$ .

(b) 如果空调设备只工作 30% 的时间就可以在室外温度为  $30^\circ$  时使室内温度保持在  $20^\circ$ . 试问用此设备使室内温度保持在  $20^\circ$  时, 室外温度最高可达多少?

11.13. 具有系数  $\gamma$  的气体最初在汽缸中的体积为  $V_0$ , 温度为  $T_0$ , 压强为  $P_0$ , 然后缓慢地、绝热地压缩到  $V_0 / 2$ . 在该体积下, 让气体达到平衡温度  $T_0$

后,又让它缓慢并且等温地膨胀到原始体积  $V_0$  .试求活塞对气体所作的净功,用  $P_0$ 、 $V_0$ 、 $T_0$  来表示 .

$$\left[ \text{答案: } P_0 V_0 \left( \frac{2^{\gamma-1} - 1}{\gamma - 1} - \ln 2 \right) \right]$$

11.14. 一个为压缩氦气而设计的压缩机用来压缩空气时出现了过热现象,假定压缩机是近似绝热的,并且此两气体的初始压强相同,试解释这种现象 .

11.15. 地球上的人要在月球上居住,首要问题就是保持他们的起居室处于一个舒适的温度.现考虑用卡诺热机来作温度调节.设月球的昼间温度为  $100^\circ\text{C}$ , 而夜间温度为  $-100^\circ\text{C}$ , 起居室温度要保持在  $20^\circ\text{C}$ . 通过起居室墙壁导热的速率为每度温差  $0.5 \text{ kW}$ , 试求昼间与夜间所需供给卡诺热机的功率.

[答案: 昼间  $10.9 \text{ kW}$ ; 夜间  $24.6 \text{ kW}$ ]

## 第十二章 热力学第二定律

### § 12.1 热力学第二定律

热力学第二定律有两种说法：

(1) 开尔文-普朗克说法 (1851, Kelvin - Planck statement) :

不可能从单一热源吸热, 使它完全变为有用功而不产生其它影响。

(2) 克劳修斯说法 (1850, Clausius statement) :

不可能把热量从低温物体转移到高温物体而不产生其它影响。我们从形式逻辑的方法来证明两种说法是等价的。如果克氏说法不正确 (图中以  $C \times$  表示), 则可以设想图 12 - 1(a) 的配置, 其净效果如图 12 - 1(b) 所示。这就破坏了热力学第二定律的开尔文说法。所以克氏说法不正确就导致了开氏说法不正确。如果开氏说法不正确 (图中以  $K \times$  表示), 则可以设想图 12 - 2(a) 的配置, 其净效果是图 12 - 2(b)。这就违背了热力学第二定律的克氏的说法。所以开氏说法不正确导致了克氏说法不正确。由此我们可以得到结论: 这两种说法是等价的。

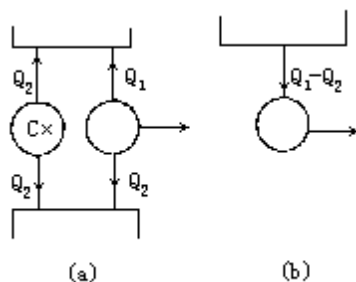


图12-1

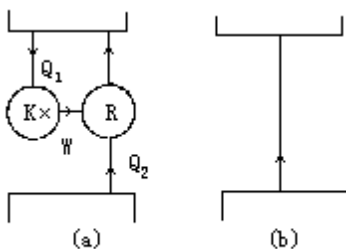


图12-2

热力学第二定律还有另一种表述：

· 第二类永动机是不可能的。

所谓“第二类”指的是不破坏第一定律, 但破坏第二定律。

\*每条等温线都有确定的温度, 因此等温线不能相交。绝热线也不能相交, 试考虑其原因。

## § 12.2 卡诺定理 热力学温标

卡诺定理说：任意热机的效率不可能大于可逆热机，

$$\eta_A(T_1, T_2) \leq \eta_R(T_1, T_2) \quad (12.2.1)$$

其中下标 A 代表“任意”，R 代表可逆。可以用反证法来证明这一定理。假设定理不真，则  $\eta_A > \eta_R$ ；用图 12-3 的记号，不等式为

$$\eta_A = \frac{W'}{Q_1} > \eta_R = \frac{W}{Q_1} \quad \text{即} \quad W' > W$$

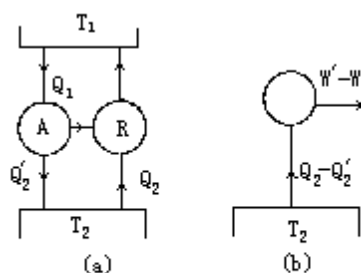


图12-3 卡诺定理的证明

另一方面，对同样的  $Q_1$ ，有

$$Q_1 - Q_2' > Q_1 - Q_2 \quad \text{即} \quad Q_2 < Q_2'$$

净效果如右图所示。它破坏了第二定律，所以假设不真，即

$$\eta_A \leq \eta_R$$

事实上，这个结论很强，它适用于所有热机，不管其工作物质是什么、循环过程怎样。

卡诺定理的一个引理是

$$\eta_R'(T_1, T_2) = \eta_R(T_1, T_2) \quad (12.2.2)$$

从上面可见，证明卡诺定理的关键步骤是用了第二定律。换言之，只有确立了第二定律，卡诺定理才能得到证明。

以上的研究当然不是为了工程的目的，主要是它导致了两个非常重要的结果：

(1) 从引理可知，两个温度可以确定所有工作于其间的可逆热机的效率，反之可逆热机的效率可以确定温差。选取固定点以后，应该可以定义温标。

(2) 从不等式  $\eta_A < \eta_R$  可知，“不可逆”和“可逆”是绝然不同的，应该有可能定量地区分它们。

从卡诺定理的引理以及效率的定义，可得

$$\eta_R = \eta_R(T_1, T_2), \quad \frac{Q_2}{Q_1} = f(T_1, T_2) \quad (1)$$

其中温度不必是标定过的。注意，这里我们没有提到工作物质是什么。对图 12-4 中三个循环过程分别写出上式的结果，有



$$\frac{Q_{43}}{Q_{12}} = f(\tau_h, \tau_m) \quad (2)$$

$$\frac{Q_{65}}{Q_{43}} = f(\tau_m, \tau_c) \quad (3)$$

$$\frac{Q_{65}}{Q_{12}} = f(\tau_h, \tau_c) \quad (4)$$

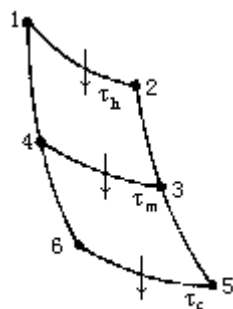


图12-4

(2) 式和 (3) 式左边项的乘积正好是 (4) 式左边的项，因此右边的项存在相应的关系：

$$f(\tau_h, \tau_m) f(\tau_m, \tau_c) = f(\tau_h, \tau_c) \quad (5)$$

其解是两个不同温度的函数的商，且两个函数形式一样：

$$f(\tau_h, \tau_c) = \frac{g(\tau_c)}{g(\tau_h)} \quad (6)$$

不管  $g$  是什么函数如指数、倒数等等，有这种结构的  $f$  都是解。开尔文作了最简单的选择： $g(\tau) = \tau$ 。于是我们有

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\tau_2}{\tau_1}, \quad \tau_1 = \tau_2 \frac{Q_1}{Q_2} \quad (12.2.3)$$

在选取水的三相点为固定点以后，

$$\tau = 273.16K \frac{Q}{Q_{tr}} \quad (12.2.4)$$

这一温标以  $Q$  为测温量，称为热力学温标 (thermodynamic temperaturescale)，与系统本身的性质无关，该温标与理想气体温标成正比：

$$\tau = \frac{Q}{Q_{tr}} \frac{T}{T_{tr}} \quad (12.2.5)$$

当采用同样的固定点时，两个温标相等。现在热机的效率为

$$1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (12.2.6)$$

### § 12.3 熵和熵原理

在讨论热机的时候，我们采用了系统吸多少热或放多少热的说法。这一节作理论研究时，统一用系统吸热来表示，放热可以说成是吸的热量为负。按照这一约定，卡诺定理的表达式是

$$\eta_A = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} \quad \eta_R = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (12.3.1)$$

这里，系统从  $T_1$  热源吸取了热量  $Q_1$ ，从热源  $T_2$  吸取了热量  $Q_2$  ( $< 0$ )。上式可以改写为  $\sum_{i=1}^2 \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$  (12.3.2)

应该注意的是  $T_i$ ，对于不可逆过程它们是热源的温度，对于可逆过程它们是热源的温度也是系统的温度。推广到一般情形，可将如图 12 - 5 所示的一般过程划分成很多小过程，同样有

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad (12.3.3)$$

或

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad (12.3.4)$$

这就叫克劳修斯不等式 (Clausius inequality)。

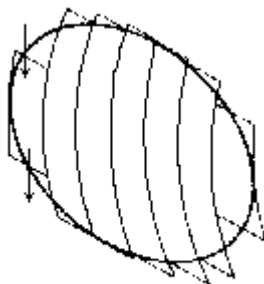


图12-5 一般过程

对于可逆过程，

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad (12.3.5)$$

这意味着  $\delta Q/T$  是全微分 (试与引力情形作比较)，可写作

$$\frac{\delta Q}{T} = ds \quad (12.3.6)$$

式中  $T$  是系统的温度，而  $S$  称作熵 (entropy)。熵是状态 (状态图上的点) 的函数，它随状态 (而不是过程) 变化。对于状态  $A$ 、 $B$ ，有

$$S_B - S_A = \int_A^B \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_R \quad (12.3.7)$$

在这种情形，熵可以包括一个可加常数。此处下标 ( $R$ ) 代表可逆过程。对于包含不可逆过程的循环，我们有

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0 \quad (12.3.8)$$

假定闭合过程如图 12 - 6 所示，积分可以写成


$$\int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{IR} + \int_B^A \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_R < 0$$


图12-6 闭合过程

对于可逆部分，过程可以翻转：

$$\int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{IR} - \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_R < 0$$

利用 (12.3.7) 式，我们有

$$S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{IR} \quad (12.3.9)$$

对无限小过程，

$$dS > \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{IR} \quad (12.3.10)$$

其中  $dS$  是两个很邻近的态的熵差。

熵原理 (entropy principle) 的数学表达式是

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad (12.3.11)$$

对于绝热过程， $\delta Q = 0$ ，可以用可逆绝热过程连接的两个态，其  $dS = 0$ ，它们是等熵的 (isentropic)；对不可逆情形， $dS > 0$ ，熵增加。

对于孤立系统，任何过程都有  $\delta Q = 0$ ，在任何可逆过程中熵不变，而任何不可逆过程中熵增加。我们知道一个孤立系统最终将趋向平衡，最后的平衡态一定是熵最大的状态。

我们把常见的熵变或熵差归结为下面几种情形：

(1) 已知熵的表达式，两个平衡态的熵差为  $S = S_f - S_i$ 。熵是态函数，追问连接两态的过程是不必要的。例如，为求理想气体的熵可从下式出发：

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{T} (dU + pdV) \\ &= C_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \quad \text{积分得到} \\ S_f - S_i &= C_v \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i} \end{aligned}$$

或

$$S = C_v \ln T + R \ln V + S_0 \quad (12.3.12)$$

利用上式求熵差直截了当。对于自由膨胀，温度保持常数，熵差为

$$S_f - S_i = nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i}\right) > 0$$

(2) 热库的熵变最容易求，因为热库有确定的温度。

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \int \delta Q = \frac{\Delta Q}{T}$$

(3) 对于可以用准静过程连接的两个态，熵变可直接由积分求得：

$$\Delta S = \int_{(i)}^{(f)} dS = \int_{(i)}^{(f)} \frac{\delta Q}{T}$$

其中  $\delta Q$  在等压过程中是  $C_p dT$ ，在等容过程中是  $C_v dT$ 。

(4) 对于由不可逆过程连接的两个态，可以找一个可逆过程连接这两个态。熵是状态函数，沿可逆过程的积分将导致同样的熵差。例如在自由膨胀中，系统的态从  $(T, V_i)$  变到  $(T, V_f)$ 。我们知道自由膨胀是不可逆过程；但是我们可以找一个可逆过程，比如等温过程连接这两个态，于是有

$$\Delta S = \int dS = \int \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \int p dV = nR \ln \frac{V_f}{V_i}$$

这似乎令人困惑：怎么在可逆过程中熵会增加？实际上等温过程必然牵涉到热库，而熵原理适用于绝热过程或孤立系统，如果我们将系统和热库看作一个大的孤立系统，其中进行的可逆过程将不改变总熵。当然我们只关注系统状态间的熵差，但是不应忘记环境作为热库也有熵变。

混合是一个不可逆过程。不同温度流体的混合过程可用以上同样的步骤来考虑。通常在这类问题中应先求混合后的温度，即

$$Q = m_1 C_1 (T_f - T_1) + m_2 C_2 (T_f - T_2) = 0$$

$$T_f = \frac{m_1 C_1 T_1 + m_2 C_2 T_2}{m_1 C_1 + m_2 C_2}$$

其次，找一可逆过程连接问题中的初态和终态。

对于不同惰性气体间的扩散，我们可以简单地处理为两个自由膨胀，可以想见会有有限的熵增加。应该强调的是“不同”二字，这当然不是必要的，因为扩散完全可在相同气体间发生，问题在于当处在相同的压强和温度的相同气体混合时将不引起熵增加。可是，按照情形(4)则仍有熵增加，这就是著名的吉布斯佯谬(Gibbs paradox)。对此一般热力学书中都有讨论。

(5) 从非平衡初态到平衡终态，如果对于初态可以定义局部的熵，熵变仍然可以计算。

考虑一绝热包裹的棒，如图 12-7 所示。当它的两端分别与热源  $T_0$  和  $T_L$  相接触时，产生均匀的温度梯度；当热源移去时，棍棒处于非平衡态。可以预期最终将弛豫到平衡态。考察在  $x$  处的某一微元。在热源移去的瞬间，它的温度是

$$T(x) = T_0 - \frac{T_0 - T_L}{L} x$$

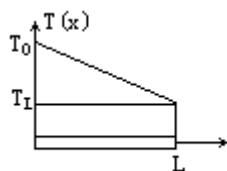


图12-7

末温度可以由下列条件决定：

$$Q = \int dq(x) = \int dm c \int_{T(x)}^{T_f} dT$$

$$= cPA \int_0^L dx \int_{T(x)}^{T_f} dT = 0$$

其实，可以断定为

$T_f = \frac{T_0 + T_L}{2}$  我们用可逆过程来代替弛豫过程。想象用两个系列的热源不断地与棒两端接触直到  $T=T_f$ ，总的熵增加可算得为

$$S = \int_0^L CPAdx \int_{T(x)}^{T_f} \frac{dT}{T}$$

$$= \frac{CPAL}{T_0 - T_L} \int_{T_L}^{T_0} dT(x) \int_{T(x)}^{T_f} \frac{dT}{T}$$

$$= CPAL \left\{ 1 - \frac{1}{T_0 - T_f} \left[ T_0 \ln\left(\frac{2T_0}{T_0 + T_L}\right) + T_L \ln\left(\frac{T_0 + T_L}{2T_L}\right) \right] \right\}$$

按照熵原理，花括号中的量是大于等于零的。但从数学上看，并不是一目了然的。

**熵和不可逆性 (irreversibility)**

在自由膨胀、燃烧、破碎和混合等明显的不可逆过程中， $S > 0$ 。

**熵的微观解释**

按照玻耳兹曼 (Boltzmann) 关系，一个宏观态的熵为

$$S = k_B \ln W \quad (12.3.13)$$

式中  $W$  是相应于该宏观态的微观状态数，也叫做热力学概率。

自由膨胀前后两个宏观态对应的微观状态数目相差很大：膨胀前  $W = 1$ ，膨胀后  $W = 2^N$ 。如果每一个微观态出现的机会是一样的，那么对于大数粒子系统而言，终态出现的机会是压倒性的。这个例子可以使我们从统计的观点来理解不可逆性。\*如果  $N = N_A$ ，终态出现的概率和熵是多大？

棋盘游戏可以使我们清楚的区分宏观态和微观态。参见《熵》一书 (1) 和习题 12.9。

**熵和无序 (disorder)**

无序可以是位置无序、指向无序、能态占据无序等等。粗略地讲，熵和无序成正比；严格说，无序度  $D$  还应该和可区别的态数  $n$  有关 (7)。

$$\frac{\dot{D}(n)}{D(n)} = \frac{\dot{S}(n)}{S(n)} - \frac{\dot{n}}{n \ln n}$$

**时间之箭 (2) (4) 和开放系统**

在决定论的经典物理中，存在时间反演对称，即在基本的层次上我们无法区分  $t$  或  $-t$  的运动。然而时间的单向性一直是人们思索的问题。大数粒子组成的孤立系统的演变使我们有可能对时间的先后作出判断。例如，一滴墨水在水中的扩散程度就是与熵的大小、时间的先后有关。需注意的是熵增加的结论是统计性的。另外，对于开放系统，随着有序程度增加，熵完全可以

减小。例如，生物系统就是这样的一个典型的开放系统。

#### 熵和有用功

自由能（数值上能用来做功的那部分能量） $F = U - TS$ 。似乎系统有序程度越高（熵越小），做功本领就越大。

#### 宇宙的热寂（heat death）

“宇宙最后达到平衡，熵最大，一切死寂”这种看法是杞人忧天。对于无限宇宙模型，我们可以说热力学不适用。对于有限宇宙模型，朗道（Landau）认为引力场不能包括在这一孤立系统中。不断变化的引力场相当于非静态的几何条件。孤立系当然要求外部条件不变。用热容的语言说，引力系统有着负的热容，不满足热力学平衡的稳定性条件，因此宇宙作为引力系统不可能达到平衡态。

#### \*熵原理的起源

在量子力学中，如果力学量的算符 A、B 的对易式满足：

$$[A, B] \sim \hbar$$

则这两个物理量的测量过程不能同时进行或交换次序，即存在不可逆性。所以熵原理可能与普朗克常量  $\hbar$  有一定的关系；也可能是基本粒子间的某些弱相互作用起了一定的作用，因为那里时间反演对称被破坏了。

熵与信息论也有密切关系（5）。

## § 12.4 热力学势

从上一小节中我们知道：

$$\delta Q = TdS$$

与热力学第一定律相结合，可得

$$dU = TdS - PdV + \mu dn \quad (12.4.1)$$

上式右边最后一项是化学势  $\mu$  和摩尔数增量  $dn$  的乘积。事实上这一项提供我们以化学势的意义，即系统增加单位物质时内能的增量。对于闭系，我们可简单地置  $dn = 0$ 。注意，

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,n} = T, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,n} = -p, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{S,V} = \mu \quad (12.4.2)$$

而  $U$  是一个广延量，

$$U(S, V, n) = U(S, V, n) \quad (12.4.3)$$

对  $U$  求导再置  $n=1$ ，可得

$$U = TS - pV + \mu n \quad (12.4.4)$$

需要注意的是， $U$  是一个广延量是有条件的；当存在长程相互作用时显然就不再是了。系统体积扩大为原来的两倍时，总内能应该是两部分独立存在时的内能加其中的相互作用。

利用所谓的勒让德变换 (Legendre transformation)，可以得到另一个微分表达式：

$$dU = TdS - pdV - Vdp + Vdp + \mu dn$$

$$d(U + pV) = TdS + Vdp + \mu dn \quad (12.4.5)$$

式中  $U + pV = H$  称作焓。类似地，可以得到

$$d(U - TS) = -SdT - pdV + \mu dn = dF \quad (12.4.6)$$

$F$  称为亥姆霍兹自由能 (Helmholtz free energy)。

另一勒让德变换引入：

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dn \quad (12.4.7)$$

其中  $G$  称为吉布斯 (Gibbs) 自由能。可以用对  $U$  一样的运算求得：

$$G(T, p, n) = G(T, p, n)$$

$$G = \mu n \quad (12.4.8)$$

所以，化学势不过是摩尔吉布斯自由能  $G_m$ 。对 (12.4.8) 式求导并将其与 (12.4.7) 式比较，我们可得吉布斯-杜罕 (Gibbs - Duheim) 方程：

$$d\mu = -S_m dT + V_m dp \quad (12.4.9)$$

吉布斯自由能的全微分是

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{P,n} dT + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{T,n} dp + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{T,P} dn$$

$$= -SdT + Vdp + \mu dn$$

二阶导数应该相等：

$$\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right) = \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial P}$$

$$\text{即} \quad -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,n} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,n} \quad (12.4.10)$$

这种关系叫做麦克斯韦关系 (Maxwell relation)。对于上面的每一全微分表达式，我们都可以有类似于 (12.4.10) 式的三个关系。

麦克斯韦关系在热力学的推导中有广泛的应用。例如

$$dU = TdS - pdV$$

$$= T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV - PdV \text{ 其中用了由 (12.4.6) 而导致的关系:}$$

$$= C_V dT + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV - PdV$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

由此可推出

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

利用理想气体的状态方程即可推出  $U = U(T)$ 。

\* 例如，磁系统（磁场强度为  $\tilde{H}$ 、磁化强度为  $M$ ）的基本微分表达式为

$$dU = TdS - pdV + \tilde{H}dM$$

相应的  $G$  满足

$$dG = -SdT + Vdp - M d\tilde{H}$$

麦克斯韦关系是

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \tilde{H}}\right)_{T,P} = \left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_{T,\tilde{H}}$$

左边是磁致伸缩效应而右边是压磁效应。完全形式的推导竟明确地说这两个效应数值上相等。另一个麦克斯韦关系是

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \tilde{H}}\right)_T = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\tilde{H}} \quad (1)$$

参考焦耳定律的推导，可知上面的方程的左边是

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \tilde{H}}\right)_T = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\tilde{H}} \left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{H}}\right)_S = -\frac{C_{\tilde{H}}}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{H}}\right)_S$$

假定材料遵照居里定律 (Curie's law) :

$$M = \frac{CV}{T} \tilde{H} \quad (2)$$

则 (1) 式的右边是

$$\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\tilde{H}} = -\frac{1}{T} M$$

最后我们有

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{H}}\right)_S = \frac{M}{C_{\tilde{H}}} > 0$$

在低温（比热较小）下，绝热去磁 (demagnetization adiabatically) 是得到极低温的一个有效方法。

热力学平衡的判据 (criteria)

对于一个孤立系， $S \rightarrow 0$ ，平衡态是熵最大的态。如果介质介入，则在平衡点附近，总熵



$$S_t = S + S_0 = S - \frac{Q}{T_0}$$

$$= S - \frac{U - W - \mu n}{T_0} \quad (12.4.11)$$

或

$$(U)_{S, V, n} = 0 \quad (12.4.12)$$

即  $S$ 、 $V$ 、 $n$  固定的态是内能最小态。类似地，我们有

$$(F)_{T, V, n} = 0 \quad (12.4.13)$$

$$(G)_{T, P, n} = 0$$

### 最大功

对于  $n$  固定的系统，(12.4.12) 式可以写为

$$W = U - T_0 S \quad (12.4.14)$$

在等温条件下 ( $T = T_0$ )，系统所做的功

$$W_S = -W = pdV + W_{\text{free}} = -(U - TS) \quad (12.4.15)$$

即系统等温做功自由能减少。这就是称那部分能量为“自由”的原因。

### 平衡条件

想象图 12-8 中的系统分为两部分 A 和 B，中间有一边界。直觉告诉我们平衡要求温度和压强分别相等，

$$T_A = T_B, P_A = P_B \quad (12.4.16)$$

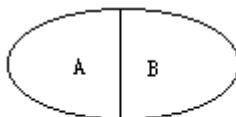


图12-8 系统的局域平衡

否则将出现“流”。这一想法可以推广到另一个广义力  $\mu$ ：

$$\mu_A = \mu_B \quad (12.4.17)$$

否则物质会流动。这里边界是想象的，但是也可以是实在的，如相界——汽液界面。因此，以上条件也适于相的平衡。在多相系平衡态中，界面两边的那些强度量必须相等。

由于常温、常压条件很普遍，(12.4.13) 式有非常广泛的应用。应用到化学反应中时<sup>(6)</sup>，我们可以比较反应物 (reagents) 和生成物 (products) 状态的吉布斯自由能。 $G = G_r - G_p > 0$  是反应可以进行的必要条件。但是，有时候反应速率极低以至实际上不可能进行。反应过程的示意图见图 12-9，其中  $G_a$  称为激活自由能 (activation)。

通常，温度越高，反应物的能量越大，其自由能等于或大于激活自由能  $G_a$  的可能也越大。为了提高反应的速度常常使用催化剂 (catalyst)。催化剂并不改变初态和终态的  $G$ ，而是降低激活自由能的高度，使反应得到加速。这一点对于生物学是很重要的，因为所有的生物化学反应都是催化的。催化剂是酶 (enzyme)，一类特殊的蛋白质。然而更有意思的是对于开放系统，催化剂不但可以改变势垒，还可以改变初态和终态的自由能。而生物体正是

开放系统 .

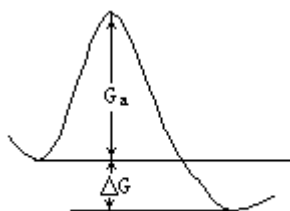


图12-9 化学反应条件

自由能判据还可以用来判断疏水性 (hydrophobicities) . 例如, 氨基酸 (amino acids) 溶于水和乙醇的自由能不等, 其差值可以用作反映疏水程度的测度. 表 12 - 1 中列出了 20 种氨基酸两种溶液的自由能之差, 可以看到色氨酸疏水性最强而谷氨酰胺最为亲水 (hydrophilic) 性最

表 12 - 1 氨基酸的疏水性 :  $G / ( 4.18 \text{ J / mol } )$

1 . 色氨酸 Tryptophan ( Trp )	3000	11.丙氨酸 Alanine ( Ala )	730
2 . 异亮氨酸 Isoleucine ( Ile )	2970	12 . 精氨酸 Arginine ( Arg )	730
3 . 酪氨酸 Tyrosine ( Tyr )	2870	12 . 半胱氨酸 Cysteine ( Cys )	650
4 . 苯丙氨酸 Phenylalanine ( Phe )	2650	14 . 谷氨酸 Glutamic acid ( Glu )	550
5.脯氨酸 Proline ( Pro )	2600	15 . 天门冬氨酸 Aspartic acid ( Asp )	540
6 . 亮氨酸 Leucine ( Leu )	2420	16 . 苏氨酸 Threonine ( Thr )	440
7.缬氨酸 Valine ( Val )	1690	17.丝氨酸 Serine ( Ser )	40
8 . 赖氨酸 Lysine ( Lys )	1500	18.甘氨酸 Glycine ( Gly )	0
9 . 组氨酸 Histidine ( His )	1400	19 . 天门冬酰胺 Asparagine ( Asn )	-10
10 . 甲硫氨酸 Methionine ( Met )	1300	20 . 谷氨酰胺 Glutamine ( Gln )	-100

强 .

10. 又名蛋氨酸 ; 19. 又名氨羧丙氨酸

## \* § 12.5 相对论热力学

有相对运动时，热力学系统的温度如何？热力学量在  $S$  系和  $S'$  系之间如何变换？还是洛伦兹变换吗？这些问题属于相对论热力学<sup>(7)</sup>的范畴。物理学的这一分支并不成熟，还有待人们去进一步研究。下面我们简要地陈述一下有代表性的几种观点。

沿用第九章的记号  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ ，热力学量的变换应该和  $\gamma$  有关。首先我们讨论热量的变换，设

$$\delta Q' = f(\beta) \delta Q \quad (12.5.1)$$

当  $S$  系和  $S'$  系重合时，热量将没有差别：

$$f(1) = 1 \quad (12.5.2)$$

对准静态过程，根据热力学第二定律，有

$$T dS = \delta Q \quad (12.5.3)$$

设  $S'$  系中对应的关系为

$$T' dS' = (\gamma) \delta Q' \quad (12.5.4)$$

类似于 (12.5.2) 式，有

$f(1) = 1$  (12.5.5) 为了寻求其中的函数  $f(\beta)$  和  $(\gamma)$ ，我们引用大多数人所采用的假定：

$$S' = S \quad (12.5.6)$$

因为熵和热力学概率有关，这样的假定似乎是合理的。另外，狭义相对论还提供了以下结果：

$$p' = p$$

$$V' = \frac{1}{\gamma} V$$

$$dU = (\gamma) (dU' - u \cdot dp)$$

根据以上关系，可得

$$\begin{aligned} T' dS' &= (\gamma) \delta Q' = (\gamma) f(\beta) \delta Q \\ &= (\gamma) f(\beta) T dS \\ &= (\gamma) f(\beta) (dU + p dV) \\ &= (\gamma) f(\beta) (\gamma) (dU' - u \cdot dp + p dV') \end{aligned}$$

由上式可以得到：

$$T = (\gamma) f(\beta) T' \quad (12.5.7)$$

以及

$$\left(\frac{\partial S'}{\partial V'}\right)_{U',P} = (\gamma) f(\beta) \frac{P}{T'} \quad (12.5.8)$$

在静止坐标系中，相应的公式为

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{P}{T} \quad (12.5.9)$$

这可以作为比较对象。

以下三种提案是具代表性的观点：

(1) 普朗克-爱因斯坦观点 (1907 年) 认为热力学的形式不变，即 (12.5.4) 式和 (12.5.8) 式应分别与 (12.5.3) 式和 (12.5.9) 式有相同的形式。这就要求

$$f(\gamma) = 1, \quad f(\gamma) f(\gamma) = 1$$

或

$$f(\gamma) = 1/\gamma$$

由 (12.5.7) 式可得到温度的变换关系：

$$T' = \frac{1}{\gamma} T < T \quad (12.5.10)$$

(2) 有人认为热力学第二定律不变，即 (12.5.4) 式不变，且  $f(\gamma) = 1/\gamma$ 。于是 (12.5.8) 式变成

$$\left(\frac{\partial S'}{\partial V'}\right)_U = \gamma^2 \frac{P}{T'}$$

即热力学关系有所变化，而温度则由 (12.5.7) 式得：

$$T' = T > T$$

运动物体较热。

(3) 第三种观点认为温度不变，且  $f(\gamma) = 1/\gamma$ 。由此可得：

$$f(\gamma) = 1/\gamma \quad \text{这样 (12.5.4) 式将发生变化。}$$

就温度而言，三种结论各不相同，孰是孰非，尚未可知。这表明相对论热力学仍是有待发展的领域。

试回想第四章中关于引力红移的讨论，我们可以从能量的观点认为那是能量的变化。然而，引力红移本质上是广义相对论效应：由于引力场的存在，时间（时空）发生了变化。在引力场中，热力学系统平衡时温度并不均匀。因此，热问题同样存在广义相对论效应。

## \* § 12.6 黑洞热力学

在 § 4.2 中, 我们提到过引力半径:  $r_g = 2Gm/c^2$ . 在 § 32.4 中, 那是施瓦氏半径( Schwarzschild radius )  $r_s$ . 它给出了黑洞的视界( eventhorizon ), 其面积为

$$A = 4 \pi r_g^2 = 4 \pi \left( \frac{2Gm}{c^2} \right)^2 = \frac{16 \pi G^2 m^2}{c^4}$$

在其表面上, 引力场强度为

$$g \sim \frac{Gm}{r_g^2} = \frac{c^4}{4Gm}$$

这两个量分别和黑洞的熵以及温度有关.

为了确定黑洞的温度  $T$  或  $k_B T$ , 我们设想可以采用与能量有关的不确定关系 (见 § 23.4). 为此, 需要找到特征时间. 由于黑洞的特征长度是引力长度, 可以认为特征时间是

$$t_1 \sim \frac{r_g}{c} \sim 10^{-5} \frac{m}{m} \quad (12.6.1)$$

由不确定关系  $t_1 \cdot k_B T \sim \hbar / 2$ , 我们有

$$T = \frac{\hbar c}{2r_g k_B} = \frac{\hbar c^3}{4Gm K_B} \quad (12.6.2)$$

除了多  $1/2$  因子以外, 它与如下广义相对论的结果吻合:

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi Gm K_B} \quad (12.6.3)$$

根据 (4.2.22) 式, 上式可以用引力场强度来表达:

$$T = \frac{\hbar g}{2\pi c k_B} = 6.18 \times 10^{-8} \text{ K} \cdot \frac{m_\odot}{m} \quad (12.6.4)$$

熵则可通过积分得到:

$$dS = \frac{1}{T} dU = \frac{8\pi G K_B m}{\hbar c^3} \cdot c^2 dm \quad (12.6.5)$$

$$S = \frac{4\pi G K_B}{\hbar c} m^2 = \frac{c^3 K_B}{4\hbar G} A \quad (12.6.6)$$

由此可见, 黑洞熵与面积有关. 利用 (12.6.3) 式, 可将熵写成

$$S = \frac{\hbar c^5}{16\pi G K_B T^2} \quad (12.6.7)$$

取对数并求导即可得到热容为负的结果:

$$\ln S = \ln \left( \frac{\hbar c^5}{16\pi G K_B} \right) - 2 \ln T$$

$$C = T \frac{dS}{dT} = -2S < 0 \quad (12.6.8)$$

实际上, 对于自引力系统这一结果并不奇怪. 由于引力是长程力, 这样

的系统的内能必须包含相互作用能，这时内能不再是广延量、系统不再均匀。垂直液柱底部密度较大就是例子。对于液体中任何一个宏观上无限小、微观上无限大的水平切片，热容量仍是正的，但是由于片间的相互作用势能使得整个系统的热容为负。

## 习题

12.1 水的比热容为  $4.186 \text{ kJ} / (\text{kg} \cdot \text{K})$ ，可近似看成与温度无关。(a) 0 的  $1.0 \text{ kg}$  水突然与  $100^\circ\text{C}$  的热库接触，当水达到  $100^\circ\text{C}$  时，求水和热库的总熵变。(b) 如果 0 的  $1.0 \text{ kg}$  水先与  $50^\circ\text{C}$  的热库接触，平衡后再与  $100^\circ\text{C}$  的热库接触，求整个系统的熵变。

[答案：(a)  $0.18 \text{ kJ/K}$  (b)  $0.096 \text{ kJ/K}$ ]

12.2. 假设某系统的熵  $S$ 、体积  $V$ 、内能  $U$  和粒子数  $N$  之间的关系为

$$S = A (nVU)^{1/3}$$

其中  $A$  为常量。求下列各物理量之间的关系：(a)  $U$ 、 $n$ 、 $V$  和  $T$ ；(b)  $p$ 、 $n$ 、 $V$  和  $T$ ，以及 (c) 系统的定容比热。

12.3. 温度为  $T_i$  的一物质依次与温度为  $T_i + \Delta T, T_i + 2\Delta T, \dots, T_i + N\Delta T = T_f$  的热源相接触而使自身温度变为  $T_f$ 。假定物质的热容量与温度  $T$  无关，计算由物质和热源构成的整个系统的总熵变。在  $N \rightarrow \infty$  而  $T_f - T_i$  不变时，其熵变是多少？

[答案： $N \rightarrow \infty$  时， $S = 0$ ]

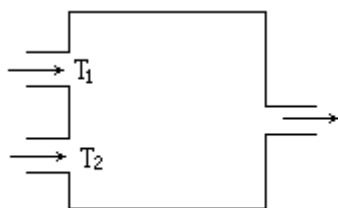
12.4. 两个全同的物体，其内能为  $U = CT$ ，式中  $C$  为常量。初始时两物体的温度分别为  $T_1$  和  $T_2$ 。现在分别以两物体作为高低温热源驱动一卡诺热机运行，最后两物体达到一共同温度  $T_f$ 。求：(a)  $T_f$ ；(b) 卡诺热机所做的功。

12.5. 3 个有限大物体热容量为常量，开始时分别处于  $400\text{K}$ 、 $400\text{K}$  和  $100\text{K}$  的温度下。如果用热机或制冷机工作其间以提高其中一个物体的温度，问最高可能温度是多少？

12.6. 现在有两个完全一样的物体，其热力学性质由 12.2 题中的状态方程所描述。初始温度分别是  $T_1$  和  $T_2$ ，有一热机工作于这两个物体之间，最终两物体达到一共同温度  $T_f$ 。(a) 求温度  $T_f$  的范围；(b) 求最大功  $W_{\max}$ 。求解这些问题时，可以考虑可逆过程，也可以考虑不可逆过程。

$$\left[ \begin{array}{l} \text{答案：(a) } T_{\max} = \left( \frac{T_1^{3/2} + T_2^{3/2}}{2} \right)^{2/3}; T_{\min} = \left( \frac{T_1^{1/2} + T_2^{1/2}}{2} \right)^2 \\ \text{(b) } W_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A^3 n V}{3}} \left[ T_1^{3/2} + T_2^{3/2} - 2 \left( \frac{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}}{2} \right)^3 \right] \end{array} \right]$$

12.7. 考虑如图所示的水力机。从左端输入温度分别为  $T_1$  和  $T_2$  的等量的冷热水稳流，从右端输出唯一的水的喷流。假设单位质量水的热容量  $c$  与温度无关。机器处于稳定的工作状态，其输入水流的动能可以忽略不计。(a) 用  $T_1$ 、 $T_2$  和  $T$  表示喷出水的速率，其中  $T$  为喷口处水的温度。(b) 最大可能的喷出速率是多少？



题12.7图

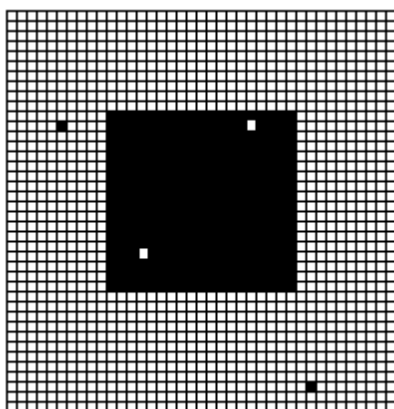
12.8. 容器中 1mol 的气体初始处于温度 127 。在绝热条件下它突然膨胀到初始体积的两倍。然后在保持恒温下，缓慢地压缩到它原来的体积。最终发现温度是 -3 ，该气体的 值是多少？如果有熵的变化，又是多少？

12.9 .W .Atkins 设计的棋盘游戏：棋盘为 40 × 40 格，中间 10X10 = 100 格为系统 ，外部 1500 格点为系统 （如图）。开始时 100 个棋子全部集中在系统 ，此时两个子系统的熵均为零，整个棋盘系统的熵也为零。当有一个棋子从系统 移到系统 时，系统的熵分别为

$$S = k_B \ln 100 = 4.61 k_B$$

$$S = k_B \ln 1500 = 7.31 k_B$$

$$S = S + S = 11.92 k_B$$



题12.9图

(a) 以系统 中的棋子数为横轴，作三条熵曲线。(b) 求系统熵的极值。(c) 求系统熵处于极值时，子系统 和 中的密度。

12.10. 橡皮带绝热拉伸时变热。当加热而保持张力不变时，橡皮带将膨胀还是收缩？

12.11. 证明：

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 P_V}{\partial T^2}\right)_V, \left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 C_V}{\partial T^2}\right)_P$$

12.12. 证明：

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial V_m}\right)_T = V_m \left(\frac{\partial P}{\partial V_m}\right)_T$$

12.13. 证明：

$$TdS = C_p dT - TV\alpha dp, TdS = C_v dT + T \frac{dV}{k}$$

式中 和 k 分别为膨胀系数和等温压缩率。

12.14 . 证明：

$$\frac{K_T}{K_S} = \frac{C_P}{C_V}$$

从而说明等温压缩率大于绝热压缩率 .



### 第十三章 理想气体的微观模型

在第五章中，我们讨论了力学的“多体系统”。在大多数情况，我们只考虑两体问题。再多了就将出现困难。例如，对于三体问题，我们有 9 个二阶微分方程。需要 18 个第一积分。可是我们只有 10 个守恒量：总能量、质心位置、总动量和总角动量，已经证明不存在更多的第一积分。当然，如果不限于解析解，数值模拟是可能的。

宏观系统本身是由大数粒子组成，这样的系统粒子数可多达  $10^{23}$  的量级。就力学描述而言，需要同样数量级的微分方程和初始条件，即使用当今最先进的计算机来求解联立方程，也仍然是困难的。是否“粒子越多问题越困难”呢？当我们关心系统的宏观性质而不是个别粒子的行为时，统计规律性使问题得到简化。最终只需要不多的变量，这相应于宏观热力学平衡态。

## § 13.1 理想气体

理想气体的宏观描述是通过以下两方面实现的。

(1) 从玻义耳-马略特定律和定压温标可以推断出在极限条件下气体的物态方程：

$$pV = nRT$$

理想气体则是在所有条件下都满足这一方程的气体。

焦耳定律也曾经作为理想气体必须满足的定律，从 § 12.4 可知这是不必要的。

(2) 理想气体的热容也分别作了规定。例如，单原子分子理想气体的热容是

$$C_V = \frac{3}{2} nR$$

理想气体的微观描述有以下几点：

- 它是由  $N$  个全同分子组成的， $N$  很大。
- 这些分子的运动遵循牛顿定律。
- 分子间的平均间距比分子本身的尺度大得多，或者说比相互作用力程大得多。
- 碰撞是弹性的，碰撞时间可忽略。

我们来讨论压强 (pressure) 的微观意义。考虑动量为  $P (P_x, P_y, P_z)$  的一个分子。它与器壁 A 碰撞后动量的  $x$  分量的变化是

$$P_x = P_f - P_i = (-mv_x) - mv_x = -2mv_x$$

碰撞周期是

$$t = \frac{2l}{v_x}$$

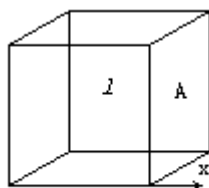


图13-1 压强

对一个周期平均，器壁 A 上的力是

$$\bar{F} = -\frac{P_x}{t} = \frac{2mv_x}{\frac{2l}{v_x}} = \frac{mv_x^2}{l}$$

对于单个分子，一个周期内只在可忽略的瞬间与器壁碰撞一次，基本上都在自由飞行。这种平均当然只有当分子数量巨大时才有意义。把所有分子的贡献加起来，

$$\begin{aligned} \frac{1}{l^2} \sum_{n=1}^N F_i &= \frac{m}{l^3} (v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \cdots) \\ &= \frac{Nm}{l^3} \times \frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \cdots}{N} \end{aligned}$$

最后一个分式是每一分子 $v_x^2$ 取值的平均（每一分子都有它自己的 $v_x^2$ 取值），我们也可以说成是每一个 $v_x^2$ 值上占有若干分子数。其实这正是我们所感兴趣的分子数按速度分布。假定有 $n_1$ 个分子速度的 $x$ 分量为 $v_{x(1)}$ ， $n_2$ 个为 $v_{x(2)}$ ，如此等等，前式可以写为

$$\frac{1}{l^2} \sum_{n=1}^N F_i = \frac{Nm}{V} \times \frac{n_1 v_{x(1)}^2 + n_2 v_{x(2)}^2 + \dots}{n_1 + n_2 + \dots} \quad (13.1.1)$$

从统计的观点来看，压强与微观粒子的平均动能有关：

$$p = \frac{Nm}{V} \overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \frac{Nm}{V} \overline{v^2} = \frac{1}{3} P \overline{v^2} \quad (13.1.2)$$

这当然只在 $N \gg 1$ 时才有意义。上式中用了各向同性条件：

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

方均根速率定义为

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}} \quad (13.1.3)$$

而绝热声速 $v_s$ 与之有关，

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma}{3}} v_{rms} \approx 0.68 v_{rms} \quad (13.1.4)$$

例 13.1 求空气中的声速。

解：气体密度是

$$\rho = \frac{Nm}{V} = \frac{n N_A m}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{M}{V_{m0}}$$

其中 $V_{m0} = 22.41383 \times 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{mol}$ （273.15K， $1.0135 \times 10^5 \text{ Pa}$ ），而 $M$ 是摩尔质量。空气的摩尔质量大致为

$$\overline{M} = \left( 28 \times \frac{4}{5} + 32 \times \frac{1}{5} \right) \text{ kg / kmol} = 28.8 \text{ kg / kmol}$$

或

$$\overline{M} = (28 \times 76.9\% + 32 \times 23.1\%) \text{ kg / kmol} = 28.9 \text{ kg / kmol}$$

方均根速率是

$$v_{rms} = 483 \text{ m/s}$$

声速是

$$v_s = \sqrt{\frac{7}{5} \times \frac{1}{3}} v_{rms} = 343 \text{ m/s}$$

现在我们讨论温度 $T$ 和内能 $U$ 的微观解释。（13.1.2）式可写为如果我们承认这里 $p$ 就是宏观变量压强，我们也应该接受：

$$nRT = \frac{2}{3} N \left( \frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) \quad (13.1.6)$$

或

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} \frac{nR}{N} T = \frac{3}{2} k_B T \quad (13.1.7)$$

式中 $k_B$ 为玻耳兹曼常量，

$$k_B = R / N_A = 1.3805 \times 10^{-23} \text{ J / K}$$

利用各向同性条件，还可以知道每一个平动自由度的平均动能都是  $k_B T / 2$ 。

前面所说的理想气体分子遵守牛顿定律，给问题加上了限制。从上面结果可以看到当温度趋向于零时，分子只能全部静止。这正是经典物理的结果。在第二十七章中，我们可以看到量子体系的结果。

关于内能，有

$$U = N \left( \frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) + U_0 = \frac{3}{2} nRT + U_0 \quad (13.1.8)$$

于是热容为

$$C_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = \frac{3}{2} nR \quad (13.1.9)$$

对双原子分子气体，

$$\frac{U}{n} = \frac{3}{2} RT + 2 \times \frac{1}{2} RT + \frac{U_0}{n} \quad (13.1.10)$$

其中加上了两个自由度，即两个旋转自由度。如果涉及到更高的能量，则分子的振动自由度也可以激发，这时振动动能和势能将会提供另一个  $RT$ 。更进一步需要考虑的是氢分子等的量子效应。

利用 (13.1.7) 式，方均根速率是

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

这一结果常被用作同位素分离的原理。例如， $^{235}\text{U}$  的丰度只有 0.7%，而  $^{238}\text{U}$  是 99.3%，这就可以利用它们之间微小的质量差，将两者逐步分离开。

热量  $Q$  的可能微现解释是什么？

## § 13.2 平衡分布

在上一节中，我们用到了速度分量的平方平均。对于速度的平方平均，有

$$\begin{aligned}\overline{v^2} &= \frac{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_N^2}{N} = \frac{n_1 v_1^2 + n_2 v_2^2 + \cdots}{n_1 + n_2 + \cdots} \\ &= \sum_i v_i^2 \left( \frac{n_i}{N} \right) \rightarrow \int v^2 \frac{dn}{N} \quad (13.2.1)\end{aligned}$$

由于在大数分子系统中，具有每一速度值的分子都只占极小的比例。精确地说，某一速度值附近小范围内的分子和总分子数相比很小，因此最后一行可以将求和用积分来代替。 $dn/N$  就代表在间隔  $v_x \rightarrow v_x+dv_x, v_y \rightarrow v_y+dv_y, v_z \rightarrow v_z+dv_z$  中的分子数占总分子数的比例；对一个分子而言，就是指它处在上述速度间隔中的概率。这一概率当然和所取的间隔大小成正比。设在一个方向上概率形如  $f(v_x) dv_x$ 。由于分子间的频繁碰撞，3 个方向上的分布不应该有什么不同。此外，在 3 个方向上，运动是独立的，按照概率论，同时事件的概率应该是各独立事件概率的乘积。那么我们可以期望：

$$\frac{dn(v_x, v_y, v_z)}{N} = f(v_x) dv_x f(v_y) dv_y f(v_z) dv_z \quad (13.2.2)$$

各向同性要求分布只和速度的大小——速率有关，而和某一方向速度的特定值无关。因此，

$$f(v_x) f(v_y) f(v_z) = \phi(v^2) = \phi(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad (13.2.3)$$

最简单的解是

$$f(v_x) \sim \exp(-v_x^2)$$

对无限大速率， $f$  应趋向于零，负指数是必要的：

$$f(v_x) = C \exp(-v_x^2)$$

概率满足归一化条件，因此，

$$1 = \int \frac{dn}{N} = C^3 \left[ \int \exp(-v_x^2) dv_x \right]^3$$

$$C = 1 / \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-v_x^2) dv_x = 1 / \sqrt{\pi}$$

式中用到了高斯积分，详见附录 F。于是，总概率

$$\frac{dn(v_x, v_y, v_z)}{N} = \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^3 \exp[-(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)] dv_x dv_y dv_z$$

其中常数 待定。从上节我们知道：

$$\overline{v^2} = \frac{3K_B T}{m}$$

通过用分布求平方平均，可以建立关系：

$$\overline{v^2} = \int v^2 \frac{dn(v_x, v_y, v_z)}{N} = \frac{3}{2}$$

结合以上两式可以得到

$$^2 = \frac{2K_B T}{m}$$

于是，

$$\frac{dn(v_x, v_y, v_z)}{N} = \left(\frac{m}{2\pi K_B T}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) / K_B T\right\} dv_x dv_y dv_z \quad (13.2.4)$$

对于单位体积，总粒子数  $N$  应换成数密度  $n_0$ ：

$$dn(v_x, v_y, v_z) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi K_B T}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) / K_B T\right\} dv_x dv_y dv_z \quad (13.2.5)$$

这就是麦克斯韦速度分布 (Maxwell velocity distribution, Maxwellian)。这是一种连续分布，注意应该将速度间隔和分布函数写在一起。由此我们还可以推导出速率分布：

$$dn(v) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi K_B T}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}mv^2 / K_B T\right\} 4\pi v^2 dv \quad f(v)dv \quad (13.2.5)$$

从这一表达式，我们可以求得最概然速率 (the most probable speed)：一个分子以这一速率运动的概率最大；或者以单位间隔而论，以这一速率运动的分子最多。方法是，对分布求导：

$$\frac{d}{dv} f(v) = 0 = \frac{d}{dv} [v^2 \exp(-\frac{1}{2}mv^2 / K_B T)]$$

结果是

$$v_m = \sqrt{\frac{2K_B T}{m}} \quad (13.2.7)$$

利用这一表式可以把分布写成

$$\frac{dn(v)}{N} = 4\pi \left(\frac{1}{\pi v_m^2}\right)^{3/2} \exp(-\frac{v^2}{v_m^2}) v^2 dv \quad (13.2.8)$$

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{1}{\pi v_m^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty v \exp(-v^2 / v_m^2) v^2 dv$$

$$\text{平均速率可求得为} = \frac{4}{\sqrt{\pi} v_m} \int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2K_B T}{m}} \quad (2)$$

$$= \sqrt{\frac{8K_B T}{\pi m}} \quad (13.2.9)$$

现在我们列出三个特征速率 (参见图 13 - 2) 如下：

$$\begin{cases} V_m = \sqrt{\frac{2K_B T}{m}} = 1.41 \sqrt{\frac{K_B T}{m}} \\ \bar{V} = \sqrt{\frac{8K_B T}{\pi m}} = 1.59 \sqrt{\frac{K_B T}{m}} \\ v_{rms} = \sqrt{\frac{3K_B T}{m}} = 1.73 \sqrt{\frac{K_B T}{m}} \end{cases}$$

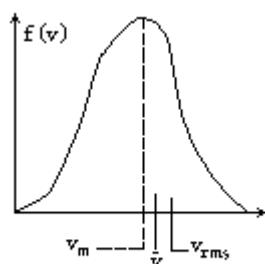


图13-2 三个速率

一般的平均可以有两种写法：

$$\overline{v} = \frac{1}{n_0} \int v f(v) dv = \frac{\int v f(v) dv}{\int f(v) dv} \quad (13.2.10)$$

\*平均自由程 (Mean free path) 是分子无碰撞运行的平均距离。考虑一个由直径为  $d$  的球形分子组成的系统。如果分子数密度为  $n$ ，从量纲分析可知平均自由程

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{n\pi d^2} \quad \frac{1}{\pi} \quad (13.2.11)$$

数值系数取决于相对速率的计算。严格的计算按下列步骤进行。设  $t$  时间内的碰撞数为  $N$ ，则平均碰撞频率定义为

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{N}{t} \\ &= \frac{\pi d^2 \overline{v_r} t n}{t} = \pi d^2 n \overline{v_r} \end{aligned}$$

其中平均相对速率

$$\overline{v_r} = \overline{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} = \sqrt{2} \overline{v}$$

这可以直接从麦克斯韦分布求得。所需的表达式是

$$\overline{v_r} = \frac{1}{n^2} \iint |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2$$

于是，平均自由程

$$\bar{\lambda} = \frac{\overline{v}}{\bar{f}} = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2}$$

### \* § 13.3 能量均分定理

麦克斯韦分布是玻耳兹曼分布的一种．玻耳兹曼分布给出的占据能量  $E$  的概率为

$$\frac{e^{-E(p,q)} dp dq}{\iint e^{-E(p,q)} dp dq} \quad \left( = \frac{1}{K_B T} \right) \quad (13.31)$$

其中  $p$  和  $q$  是广义动量和位移．对于在引力场中的粒子，有

$$E = \frac{1}{2m} p^2 + mgz$$

对于一个简谐振子，有

$$E = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

能量均分定理 (Equipartition theorem) 说：对于单粒子能量为

$$E = Ap^2 + Bq^2 \quad (13.3.2)$$

的系统，能量中每一动量或位移的平方项都有同样的平均值：

$$\begin{aligned} \overline{Ap^2} &= \frac{\iint Ap^2 e^{-(Ap^2+Bq^2)} dp dq}{\iint e^{-(Ap^2+Bq^2)} dp dq} \\ &= A \left[ -\frac{\partial}{\partial A} \right] \ln \left[ \iint e^{-(Ap^2+Bq^2)} dp dq \right] \\ &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2} K_B T = \overline{Bq^2} \quad (13.3.3) \end{aligned}$$

因此，以上提到的能量中，除引力场中的势能外平均值均为  $k_B T / 2$ ．



## 13.4 泻流

怎样从实验上来检验粒子的分布规律呢？早在 1920 年斯特恩 (Stern) 以及后来 1930—1934 年查特曼和葛正权 (Zartman and Ko) 就进行了研究。实验装置如图 13-3 所示，从高温炉中射出的银或铋分子束经准直后射入旋转

的记录器中。假定射出的银或铋分子淀积在  $pp'$  段壁上。

设淀积在  $p$  处的分子具有初速  $v$ ，记录器的角速度为  $\omega$ ，则有



图13-3 查特曼和葛正权实验

$$t = \frac{2R}{v}$$

$$\widehat{pp'} = R \cdot (\omega t) = \frac{2\omega R^2}{v}$$

因此可得速度与位置的关系为

$$v = \frac{2\omega R^2}{\widehat{pp'}}$$

不同速度的分子将淀积在不同的位置，由此可得到各种速度的分子数。米勒和库什改善了实验条件，做了进一步的工作。为减少空气分子的碰撞，他们将实验的真空度提高到  $10^{-6}\text{Pa}$ 。

分子束中的速率分布  $d$  与高温炉中的速率分布  $dn$  果真一样吗？事实上是不一样的，当然，它们有密切的关系。因此需要找到从分子束中的速率分布推算平衡分布的关系式。

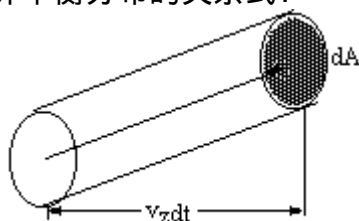


图13-4 碰撞数

如图 13-4 所示，在时间间隔  $dt$  撞击面元  $dA$  的分子数是

$$d \cdot dA dt = \int \int_{v_x, v_y} v_z dt dA dn \quad (v_z > 0)$$

$$d(v_z) = n_0 v_z \left( \frac{m}{2k_B T} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2} m v_z^2 / k_B T} dv_z \quad (v_z > 0) \quad (13.4.1)$$

这里  $d$  和  $n_0$  之间的量纲关系显然是正确的：

$$\dim d = \dim n_0 \cdot \dim v = L^{-3} L T^{-1} = L^{-2} T^{-1}$$

单位时间内碰撞在单位面积上的分子总数是

$$\Gamma = n_0 \int_0^\infty v_z \frac{1}{\sqrt{p v_m}} e^{-v_z^2 / v_m^2} dv_z = \frac{n}{2\sqrt{p}} v_m = \frac{n}{4} \bar{v} \quad (13.4.2)$$

式中 $n_0$ 、 $v_m$ 、 $\bar{v}$ 等都是容器中平衡分布的量。

当器壁上开以小孔时，就有分子束射出，称为泻流 (effusion)。泻流中的速率分布可以推导如下：

$$d \quad dA dt = \int_0^{p/2} \sin \theta \quad d \quad \int_0^{2p} d\mathbf{j} f(v) v^2 dv dA \cdot v \cos \theta \quad dt \quad (13.4.3)$$

$$\begin{aligned} d &= \int_0^{p/2} \sin \theta \cos \theta \quad d \quad \int_0^{2p} d\mathbf{j} f(v) v^3 dv \\ &= f(v) v^3 dv \\ &= n_0 \left( \frac{m}{2pk_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^3 dv \quad (13.4.4) \end{aligned}$$

注意  $f(v)$  仍然是容器中的平衡分布函数。泻流分子束中的平均速率是

$$\begin{aligned} \bar{v}_\Gamma &= \frac{\int v d\Gamma}{\int d\Gamma} = \frac{\int e^{-v^2/v_m^2} v^4 dv}{\int e^{-v^2/v_m^2} v^3 dv} = v_m \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{p} \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (13.4.5) \end{aligned}$$

这里采用了前面所述平均值的第二种写法，其优点是不必记忆数值常数和碰壁总数，当然代价是多做一次积分。上式中的  $v_m$  只是为书写方便引入的参数，而不是泻流中的最概然速率。

## § 13.5 输运现象

本节中，我们首先给出关于物质、能量、动量等输运过程的宏观规律，稍后给出输运系数的微观理论。

热转移有多种途径。系统和环境之间可以有准静热流。在等温（膨胀或压缩）过程中，

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta U - \Delta W}{\Delta t} \quad (13.5.1)$$

在  $T = 0$  的情形，可引入一系列热源： $T_i, T_i + dT, \dots, T_f$ ，交换的热量为

$$Q = \int_{T_i}^{T_f} C_p dT \quad (13.5.2)$$

**热传导 (conduction)**

当存在温度梯度时，高温热源流出的热流是

$$-\dot{Q} = J_Q A = -kA \frac{dT}{dx} \quad (13.5.3)$$

式中  $A$  为流过的面积。于是流密度为

$$J_Q = -k \frac{dT}{dx} \quad (13.5.4)$$

这就是傅里叶定律（1815），以法国数学家、物理学家傅里叶（Jean Baptiste Fourier, 1768- 1830）的名字命名。式中的系数  $k$  称为热导率，其单位是  $W / (m \cdot K)$ 。

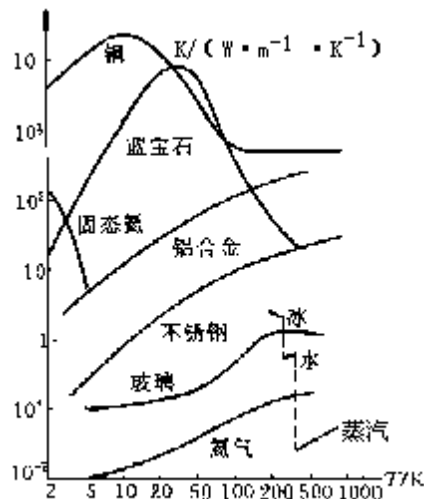


图13-5 热导率和温度的关系

通常热导率是温度的函数，它与物质以及物质的相有关。在图 13 - 5 中，我们可以看到几种材料包括水的三相的热导率。

考虑一段单位长中空圆柱。其内外壁分别与温度为  $T_1$  和  $T_2$  的热源相接触。假定其间没有源和漏，则热流为

$$\dot{Q}_r = C = - 2 \pi r L \frac{dT}{dr}$$

$$\text{整理后积分：} -k \int_{T_1}^{T_2} dT = \dot{Q} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{2\pi r L}$$

$$\text{可得 } \dot{Q} = \frac{2\pi k (T_1 - T_2) L}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

### 对流 (convection)

对流可以在存在温度梯度、压强梯度时自然进行，也可以在泵、风扇等的作用下强迫进行。形式上对流的定律是

$$\dot{Q} = hA (T_1 - T_2) \quad (13.5.5)$$

对流系数  $h$  的定量研究是很困难的，但也并不是十分必要的。影响  $h$  的因素有：流体的密度、黏性、热容、热导率、流速等等，另外流是片流还是湍流，以及器壁的曲率对  $h$  也都有影响。

### 热辐射 (thermal radiation)

所有的辐射，包括从无线电波到  $\gamma$  射线，都是电磁波。所谓热辐射指的是从红外到可见光波段的电磁波。一温度为  $T$  的物体可以辐射、吸收能量。如果入射能量流密度为  $J$ ，当照射到物体表面时通常只有一部分可以被吸收，其吸收率用  $\alpha$  表示。表 13 - 1 列出了几种物质的吸收率。

表 13 - 1 几种物质的吸收率

抛光的金属表面	0.03 ~ 0.08
灯黑	0.95
湿冰	0.97
黑体	1

温度为  $T$  的黑体，其辐射能流密度

$$J_B = \sigma T^4 \quad (13.5.6)$$

这就是斯特藩-玻耳兹曼定律，式中  $\sigma = 5.6703 \times 10^{-8} \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ 。同样温度的普通物体可以辐射能流

$$J = \alpha J_B \quad (13.5.7)$$

称之为基尔霍夫定律 (Kirchhoffs law)。

在地球表面上，来自太阳的辐照是  $J_{ir} = J_{B\odot}$ ，地面吸收的能流是

$$\alpha J_{ir} ; \text{地球的辐射是}$$

$$J_r = \sigma T^4$$

于是地球的吸热率是

$$\dot{Q} = A (\alpha J_{ir} - J_r) \quad (13.5.8)$$

事实上  $J_{ir}$  是和太阳常量  $1340 \text{ W} / \text{m}^2$  相关的。

### 扩散 (diffusion)

扩散是指质量的输运。德国生理学家费克 (Adolf Fick, 1829—1901)

首先发现了扩散定律，其思想是分子流密度  $J_m$  正比于浓度梯度，即

$$J_m = -D \frac{\partial p}{\partial x} \quad (13.5.9)$$

这就是费克定律， $D$  是扩散系数。除了浓度梯度以外，压强梯度、温度梯度、化学势的差都可以造成质量流。

黏性 (viscosity)

黏性是动量的传递。对于动量的运输 (如图 13-6)，我们有牛顿输运定律，即动量流密度  $J_p$  正比于速度梯度：

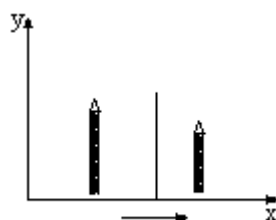


图13-6 动量的运输

$$J_p = -\eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad (13.5.10)$$

式中  $\eta$  是黏度系数。

输运过程中的守恒

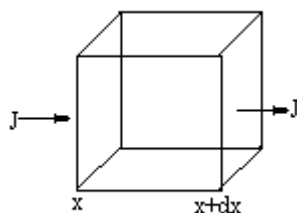


图13-7 流密度

如果密度变化是由流密度变化引起的，那么质量守恒要求

$$\rho \, dA \, dx = J(x) \, dA \, dt - J(x+dx) \, dA \, dt$$

$$\approx -\frac{\partial J}{\partial x} dx \, dA \, dt$$

$$\text{即 } \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x} \quad (13.5.11)$$

与扩散方程相结合，我们有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (13.5.12) \text{ 这就是连续性方程 (continuity equation). 同样，}$$

能流守恒和动量守恒将要求

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (13.5.13)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \quad (13.5.14)$$

这些都是无源无漏的情形，否则应考虑产生和吸收。若有源或漏，则累积=扩散造成的得失+产生-吸收作为例子，我们考虑一正比于密度的源项。这种情况下，有

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + Cp \quad (13.5.15)$$

对于定常态，

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0, \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{C}{D} p = 0 \quad (13.5.16)$$

例如，反应堆中的中子就可用 (13.5.16) 式模拟。

中子数密度  $n$  满足

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + B^2 n = 0$$

驻波解 ( $x=0, a$  处,  $n=0$ ) 是

$$n = N \sin(Bx) \quad \left( B = \frac{\pi}{a} \right)$$

式中  $N$  为常量。

在热传导问题中，我们可以加一损失项。

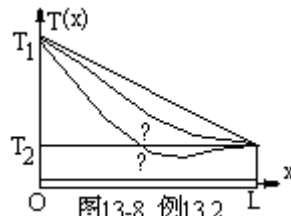


图13-8 例13.2

例 13.2 如图 13-8 所示，一均匀棒两端与温度为  $T_1$  和  $T_2$  的热源相接触。试求存在正比于当地温度的损失项时棒内的温度分布。

解：热传导方程为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_v} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - aT$$

对定常情形，有

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho C_v a}{k} T = 0, \quad \frac{\rho C_v a}{k}$$

绝缘包裹时， $a = 0$ ，有温度分布：

$$T = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{L}$$

如果  $a$  是有限的，解是

$$T = A e^{bx} + B e^{-bx}$$

考虑到边界条件，解可以写为

$$T = T_1 \frac{\sinh b(L-x)}{\sinh bL} + T_2 \frac{\sinh bx}{\sinh bL}$$

从定常方程

$$T'' = \frac{\rho C_v a}{k} T > 0$$

可知曲线是凹的。

可以定性地判断当  $a$  足够大时， $L$  处的斜率（温度的一阶导数）可以为正。

类似地，对于动量守恒方程，也可以有附加项：

$$\frac{f_{v_y}}{f_t} = \frac{h f^2 v_y}{p f x^2} + \frac{1}{p} F \quad (13.5.17)$$

### 输运系数的微观理论

对于定常流，假定存在各向同性的动力学局域平衡，即微观量只是空间坐标的函数。考虑  $x$  处的一个面积元  $dA$ ，如图 13-9 所示。在平均自由程的范围  $(x \pm \bar{\lambda})$  内分子可以无碰撞地抵达这一面积。

这当然是在平均意义上说的。进而可以假定大致只有  $1/6$  应该计入。

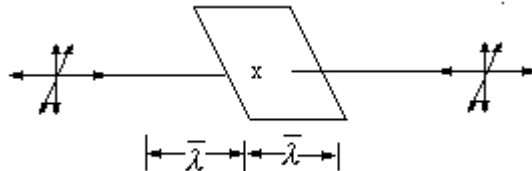


图13-9 输运的微观模型

所输运的微观量 和相应的宏观量 是

$$= m, \quad \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T, m v_y$$

$$= M, Q, P$$

在  $dt$  时间间隔内，

$$d = \frac{1}{6} dA \bar{v} dt \left[ n(x - \bar{l}) \mathbf{x}(x - \bar{l}) - n(x + \bar{l}) \mathbf{x}(x + \bar{l}) \right] \quad (13.5.18)$$

式中  $n$  是分子数密度。

对于质量输运， $mn =$  ，则

$$dM = \frac{1}{6} dA \bar{v} dt \left[ nm(x - \bar{l}) - nm(x + \bar{l}) \right]$$

$$= \frac{1}{6} dA \bar{v} dt \left[ -2 \bar{l} \frac{f p}{f x} \right]$$

$$JM_\infty \frac{dM}{dA dt} = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{l} \left( \frac{f p}{f x} \right) \quad (13.5.19)$$

与 (13.5.9) 式相比较可得扩散系数

$$D = \frac{1}{3} K_B \bar{v} \bar{l} \quad (13.5.20)$$

温度梯度可以造成热流。假定密度是均匀的，有

$$n \frac{3}{2} K_B T = C_V T$$

$$dQ = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{l} C_V \left( \frac{f T}{f x} \right) dA dt \quad (13.5.21)$$

于是热传导是

$$= DC_V \quad (13.5.22)$$

类似地， $nm =$  ，

$$dp = -\frac{1}{3}v \overline{I} r \left( \frac{\overline{v}_y}{\overline{v}_x} \right) dA dt \quad (13.5.23)$$

黏度系数为

$$=D \quad (13.5.24)$$

在标准状态 ( $T = 273\text{K}$ ,  $p = 1.01 \times 10^5 \text{Pa}$ ) 之下的氢有如下数据:

$$m = 3.33 \times 10^{-27} \text{kg}$$

$$n = p / k_B T = 2.68 \times 10^{25} / \text{m}^3$$

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} = 1.69 \times 10^3 \text{m/s}$$

如果氢分子半径  $r = 1.12 \times 10^{-10} \text{m}$ , 则

$$\overline{I} = \frac{1}{\sqrt{2n\pi r^2}} = 1.67 \times 10^{-7} \text{m}$$

由此可以算得扩散系数和热导率为

$$D = 9.42 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}, \quad \kappa = 8.71 \times 10^{-2} \text{W}/(\text{m} \cdot \text{K}) \text{ 相应的实验值为:}$$

$$D = 1.28 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}, \quad \kappa = 1.68 \times 10^{-2} \text{W}/(\text{m} \cdot \text{K}) \text{ 对此你有何评论?}$$

## 习题

13.1. 质量为  $1000\text{kg}$  的火箭射入太空. 假设所有星体具有相同的平均质量  $10^{23}\text{kg}$ , 并以平均速率  $10\text{km/s}$  作随机运动. 那么, 该火箭发射了相当长时间后, 平均速率  $v$  为多少?

[答案:  $v = c$  (光速)]

13.2.  $^{23}\text{Na}$  蒸气在气体放电管中发射  $5890 \text{\AA}$  的强黄线. 如果蒸气处于室温, 试粗略估计由于热运动而引起的多普勒频移使这条谱线显示的宽度是多少  $\text{\AA}$ .

[答案:  $0.012 \text{\AA}$ ]

13.3. 一体积为  $2V$  的盒子被一薄片分为体积相等的两部分. 初始时, 左边含有压强为  $p_0$  的理想气体, 右边为真空. 隔片上开有面积为  $A$  的小孔. 试求左边压强  $p_1$  随时间变化的函数关系. 假定两边温度都是常量, 将结果用平均速度  $v$  表示出来.

$$\left[ \text{答案: } p_1(t) = \frac{p_0}{2} \left( 1 + e^{-\frac{Avt}{2V}} \right) \right]$$

13.4. 体积相等 ( $V_1 = V_2 = V$ ) 的两个容器, 用小“针孔”管连接起来. 这两个容器分别保持在恒温  $T_1$  和  $T_2$  下. 所有的气体分子都具有质量  $m$ . 压强比仅为  $T_1$  和  $T_2$  的函数. 求压强比.

13.5. 稀薄气体中的声速  $v_s$ , 由绝热压缩率表示:

$$\left[ v_s = \left( \frac{\overline{p}}{\overline{\rho}} \right)_s \right]^{-1}$$

(a) 对室温下的空气, 求下列数值结果: (1) 声速; (2) 平均分子碰



撞频率；(3) 分子平均自由程；(4) 平均自由程与声波波长之比。

(b) 用上述结果解释为什么绝热近似是合理的假设。

采用  $m$  为分子的平均质量,  $k_B$  为玻耳兹曼常量,  $C_V$  为热容比。

$$\left[ \begin{array}{l} \text{答案: (a): (1) } v_s = 350 \text{ m/s}; (2) f = 1.2 \times 10^8 \text{ Hz}; \\ (3) \bar{e} = 4 \times 10^{-6} \text{ J}; \\ (4) \bar{e}/k_B = 3.4 \times 10^{-6} \end{array} \right]$$

13.6. 求速率大于最概然速率的分子数。

13.7. 推导二维平衡速率分布。

13.8. 推导平衡能量分布。

13.9. 温度为  $T$ 、分子质量为  $m$  的气体满足麦克斯韦速度分布。一个干净的固体表面暴露在此气体中时, 它以速率  $W$  ( $\text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$ ) 吸收分子。如果某一分子的法向速度分量小于  $v_T$  时吸收概率为 0, 大于  $v_T$  时的吸收概率为 1。试推导  $W$  的表达式。(分子数密度为  $n$ )

$$[\text{答案: } W = n \left( \frac{k_B T}{2\pi m} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m v_T^2}{2k_B T}}]$$

13.10. 气体分子从容器壁上的小孔中泻出, 求其能量的平均值。设温度为  $T$ , 气体分子数密度为  $n$ 。

13.11. 已知: 平均日-地距离为  $1.5 \times 10^8 \text{ km}$ ; 平均日-海王星距离为  $4.5 \times 10^9 \text{ km}$ ; 太阳到地球的辐射通量  $J = 1.4 \text{ kW/m}^2$ 。试作出合理的假设, 以估计海王星的表面温度。忽略任何可能的内部热源。

[答案: 52K]

13.12. 太阳的辐射近似于一个温度为 5700K 的黑体。若有一个理想的黑色铜球在离太阳 1AU 的距离处受到日光的辐射, 它将达到多高的平衡温度? (太阳直径对地球张角为  $0.50^\circ$ )

13.13. 一个日-地模型将太阳和地球设想为真空中的两个黑体球。太阳温度是 6000K, 地球上大气和海洋有效的传热把地球调节成为一个表面温度均匀的球。地球和太阳的半径分别是

$$R_\odot = 6.37 \times 10^6 \text{ m}, R_\oplus = 6.96 \times 10^8 \text{ m}, \text{日-地距离为 } d = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}.$$

(a) 求地球温度; (b) 求地球所受的辐射压力。

[答案: (a)  $T_\oplus = 17^\circ \text{C}$ , (b)  $6 \times 10^8 \text{ N}$ ]

13.14. 以你所知的数据估计标准状况下空气的扩散系数  $D$ 。

[答案:  $D = 3.1 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ]

## 第十四 章相变

### § 14 . 1 范德瓦耳斯方程

理想气体的物态方程是  $pV = nRT$  . 对于实气体, 这一方程要从两个方面进行修正, 即必须考虑分子间的相互作用和分子的有限大小. 范德瓦耳斯 (J . D . van der Waals , 1837—1923 ) 对此作了以下处理. 当压强趋于无穷时, 期望  $1\text{mol}$  的分子密积到一个有限的体积  $b$  :

$$V = \frac{nRT}{p} + nb \quad (14.1.1)$$

式中第一项为理想气体体积, 而第二项为密积体积. 我们也可以将上式写成

$$p = \frac{nRT}{V - nb} \quad (14.1.2)$$

这是分子为有限大小的无相互作用气体的物态方程. 分子间相互作用 (见第三章图 3 - 5) 的计及较困难. 最简单的处理是假定分子间只有一个吸力, 这一作用将使压强减小一定的程度. 现假定力是两体的. 想象在系统内部有一边界, 力将正比于两边的分子对的数目; 对于均匀的情形, 有

$$p = a \left( \frac{n}{V} \right)^2$$

与无相互作用系统相比, 压强应该小上面这样一个量, 即应为

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - a \left( \frac{n}{V} \right)^2 \quad (14.1.3)$$

结合以上两个因子, 我们有范德瓦耳斯方程 (1873年) :

$$\left[ p + a \left( \frac{n}{V} \right)^2 \right] (V - nb) = nRT \quad (14.1.4)$$

将它展开为级数 :

$$pV = nRT \left[ 1 + \frac{a}{p} \left( \frac{n}{V} \right)^2 \right]^{-1} \left[ 1 - b \frac{n}{V} \right]^{-1} = nRT \left[ 1 + \left( b - \frac{a}{RT} \right) \frac{n}{V} + \dots \right]$$

可得第二位力系数是

$$B(T) = b - \frac{a}{RT}$$

表 14 - 1 列出了一些简单气体的范德瓦耳斯常量  $a$ 、 $b$  的数值 .

表 14 - 1 范德瓦耳斯常量

气体	$a$ ( Pa · m <sup>3</sup> /mol )	$b$ ( m <sup>3</sup> / mol )
H <sub>2</sub>	0.02476	0.02661
He	0.003456	0.02370
CO <sub>2</sub>	0.3639	0.04267
H <sub>2</sub> O	0.5535	0.03049
O <sub>2</sub>	0.1378	0.03183
N <sub>2</sub>	0.1408	0.03913

根据范德瓦耳斯方程所作的等温线如图 14-1 所示，其中数字为  $T/T_C$ 。临界点是一个拐点 (inflection point)。在这一点上的  $p$ 、 $V$ 、 $T$  的值  $p_C$ 、 $V_C$ 、 $T_C$  可从下列条件求得：

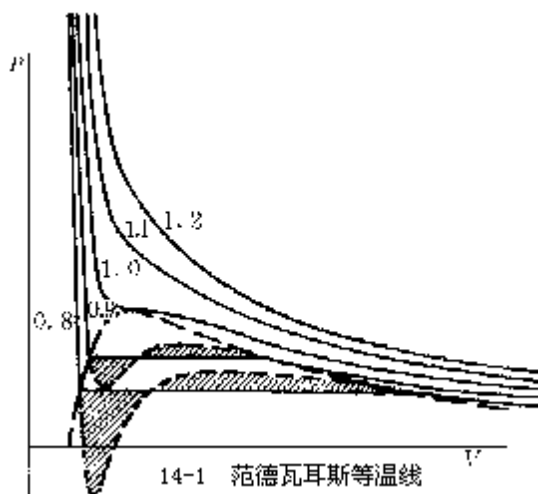
$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = 0$$

用  $p_C$ 、 $V_C$ 、 $T_C$  作单位，我们可以得到普适的方程。

稳定性要求：

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T > 0$$

这意味着等温线的正斜率段系统是不稳定的，特别是零压强线以下的部分是非物理的。对此范德瓦耳斯的导师麦克斯韦提议了一种结构。根据热力学，如果与等温线相交的水平线正好能构成两个等面积，则沿此线吉布斯函数是极小。用此线段代替交点之间的弯曲线则解决了存在的两个问题。交点的连线则构成了共存区。在共存区内原来等温线上两段负斜率部分仍然是可能的——亚稳态 (metastable)，相应于过热液体和过饱和蒸气。



范德瓦耳斯方程可以用以描述汽液相变，这是较之理想气体方程强的地方。在这一方面，多年来并无多大进展。但是这一方程毕竟是过分简化，“范德瓦耳斯气体”不存在固相。从统计的观点来说，这是一个最简单的模型。\* 在图 14-1 中，3 个区域如何分别判断？

## § 14 . 2 相和相图

相 (phase) 是系统中有着清晰边界的均匀部分。所谓均匀指的是物理性质和化学成分都是均匀的。通常造成系统中的物质从一个相转变到另一个相的因素是温度变化。但是也不总是如此，在某些情况下，也可以是压强。我们都熟悉固-液-汽相变。实际上相变的发生极其广泛：从工业（冶金、化工、……）到气象、从科学研究到日常生活无所不在。

由一种分子组成的系统叫纯系统。为简化问题，我们只讨论纯系统。一个纯  $p$ 、 $V$ 、 $T$  系统有相变是一件很普通的事。真实系统有相变，是因为它们的分子间有相互作用。粗略地讲，分子间的力有一个排斥的核、一个短程的吸引区和一个长尾巴（见第三章图 3 - 5）。理想气体是永久气体。就真实系统而言，极化氢  $H_2$  可能是永久气体。

一个基本问题是，对于热力学变量的一定取值，系统处在什么相？换言之，我们需要有一个相图，以相边界来划分不同的相。图 14 - 2 是一个模型的相图。其中有四个区，相应于四个相：固相、液相、汽相和流体相。这些相分别由升华 (sublimation) 曲线  $OA$ 、融化 (fusion, melting) 曲线  $AB$ 、汽化 (vaporization) 曲线或蒸气压曲线  $AC$  划分开。我们叫这些曲线为相界。沿着这些曲线两个相共存，所以它们又叫做共存曲线或相平衡曲线 (coexistence or phase equilibrium curves)。所有这些名称都和从低温到高温相的相变相匹配。流体是由两条虚线划出来的。在这个区域内我们无法区别液体和蒸气。\* $pV$  图上，相图也象图 14—2 吗？

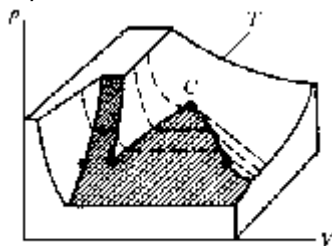


图14-3 三维相图

也可能存在亚稳相。如曲线  $CA$  延伸到固相区可是仍然保持液相。这是过冷液相 (supercooled liquid phase)。当曲线  $BA$  延伸到蒸气区，我们有过热液体。而当曲线  $OA$  延伸到液体区，那是过饱和蒸气。水的融解曲线是很特别的，其斜率是负的。这一特性使得溜冰成为可能。

与面和线相比，相图上的点特别有意思。A 是三相点（水的三相点的温度被取作标准的固定点）。蒸气压曲线结束于点 C。点 C 叫做临界点。超过这一点就是流体相。由于它的存在，液-汽相变可以不经过相界。曲线  $AB$  也有象 C 一样的终点吗？或者说有没有一个区域，其中固、液无法加以区别？回答是否定的。其原因是固、液本身的对称性不同。\*液晶 (§ 30 . 1) 是否是固、液无法区别的相？

物态方程  $f(p, V, T) = 0$  实际上是三维“空间”中的一个曲面，而  $pT$  或  $pV$  相图则是这一曲面的投影，如图 14 - 3 所示。

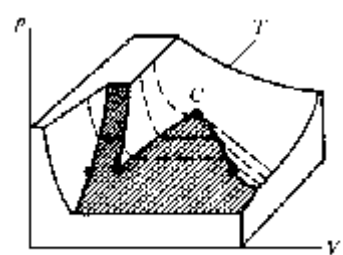


图14-3 三维相图

### § 14 . 3 克拉珀龙方程

沿图 14 - 2 中曲线之一，相平衡条件要求（指标 指高温相）

$$\mu \quad (T, p) = \mu \quad (T, p)$$

$$d\mu = d\mu \quad (14.3.1)$$

按照吉布斯-杜罕方程（12 . 4 . 9）式，

$$-S_m^I dT + V_m^I dp = -S_m^I dT + V_m^I dp$$

沿共存曲线，我们有

$$\left( \frac{dp}{dT} \right)_{co} = \frac{S_m^I - S_m^{II}}{V_m^I - V_m^{II}} \quad (14 . 3 . 2)$$

利用关系  $\mu = H_m - TS_m$ （即  $G = H - TS$ ）可知跨越相界有

$$0 = H_m - T S_m$$

（14 . 3 . 2）式可以写为

$$\left( \frac{dp}{dT} \right)_{co} = \frac{\Delta H_m}{T \Delta V_m} = \frac{\ell}{T \Delta V_m} \quad (14.3.3)$$

这个方程叫做克拉珀龙方程（Clapeyron's equation）。它给出了共存曲线的斜率，其中  $\ell$  叫做潜热（latent heat）。从低温相变到高温相，物质吸收潜热。前面已经提到过，潜热的来源是热质说。从本质上讲，潜热是由于物质在不同的相有着不同的结合能。例如，融解潜热就是与固相结合能及液相结合能之差有关。

由于液相的摩尔体积  $V_{mL}$  比气相的  $V_{mV}$  小很多，而对于气相，理想气体近似适用：

$$V_{mL} \ll V_{mV} = \frac{RT}{p}$$

汽化曲线的斜率可写为

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\ell_{vp}}{RT^2} \quad (14 . 3 . 4)$$

在沸点  $T_b$  附近，对它积分可得：

$$\ln \frac{p}{p_c} = C - \frac{\ell_{vb}}{RT}$$

利用以下数据，

$$\ell_{vb} (T \sim 0.6T_c) = 5.4RT_c$$

或所谓的 Trouton 法则（Trouton's rule），

$$\frac{\ell_v}{RT_b} = 9 \quad (14.3.5)$$

可以作进一步计算。

实用的固体的蒸气压与温度的关系为

$$\ln p = A - \frac{B}{T} + CT + D \ln T \quad (14 . 3 . 6)$$

克拉珀龙方程适合于一级相变。由于

$$S_m = - \left( \frac{\partial m}{\partial T} \right)_{n,p}, \quad V_m = \left( \frac{\partial m}{\partial p} \right)_{n,T}$$

$S_m$ 、 $V_m$  的不连续意味着化学势的一阶导数不连续，这就是命名的根据。

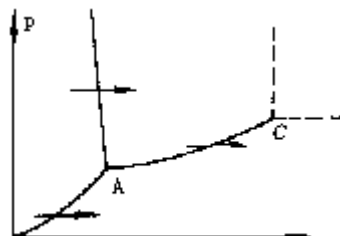


图14-4 水的相图

水的pT图如图14-4所示。融解曲线叫做冰线，升华曲线叫做霜线 (frost line)，汽化曲线叫做蒸汽线 (steam line)。对蒸汽线，在远离  $T_C$  时，可以认为对小的温差  $\ell_v$  是常量。

在沸点附近，我们可以利用以下数据计算水的蒸汽线的斜率：

$$V_{mv} = 1.6730 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

$$\ell_v = 22.3 \times 10^5 \text{ J} / \text{kg}$$

$$T = 373.15 \text{ K}$$

计算结果是

$$\frac{dp}{dT} = 3.62 \times 10^3 \text{ Pa} / \text{K}$$

而实验结果是

$$\left( \frac{dp}{dT} \right)_{\text{exp}} = 3.61 \times 10^3 \text{ Pa} / \text{K}$$

我们也可以应用 Trouton 法则，所用近似将导致，

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\ell_v}{T_b V_{mv}} = \frac{\ell_v}{RT_b} \frac{R}{V_{mv}} = 9 \frac{p}{T} = 2.44 \times 10^3 \text{ Pa} / \text{K}$$

对此结果有何评论，太坏吗？

冰点 (Ice point) 是在大气压之下，当空气加水蒸汽、冰以及空气加水共存时的平衡温度。为简化起见，我们把它近似作为冰和纯水的平衡温度。已知冰的摩尔体积  $V_{mi}$  大于水的摩尔体积  $V_{mw}$ ，这造成了融解曲线非常特殊的负斜率，冰点  $T_{ice}$  必然低于三相点  $T_{tr}$ 。沿着冰线（融解潜热为  $\ell_F$ ）有

$$\begin{aligned} T &= T - T_{tr} \\ &= \frac{T(V_{mw} - V_{mi})}{\ell_F} \Delta p \\ &= \frac{273 \text{ K} \times (1.00 \times 10^{-3} - 1.09 \times 10^{-3}) \text{ m}^3 / \text{kg}}{3.34 \times 10^5 \text{ J} / \text{kg}} \\ &\quad \times \left( 760 \text{ mmHg} - 4.584 \text{ mmHg} \times \frac{101325 \text{ Pa}}{760 \text{ mmHg}} \right) \\ &\approx -0.0075 \text{ K} \end{aligned}$$

空气的溶入贡献一个附加的-0.0023K。所以

$T_{ice} = T_{tr} - 0.0098K$  273.15K 通常 pVT 系统不只有一个固相。冰在直到  $10^{10}Pa$  的范围内至少有 9 个不同的相，其相图见图 14 - 5。



## § 14.4 高级相变

艾伦弗斯特 ( Ehrenfest ) 给了一个相变阶数的定义：如果化学势的第  $N$  阶导数是第一个不连续导数，则这个相变就是第  $N$  级相变。这与上一节所述相一致。

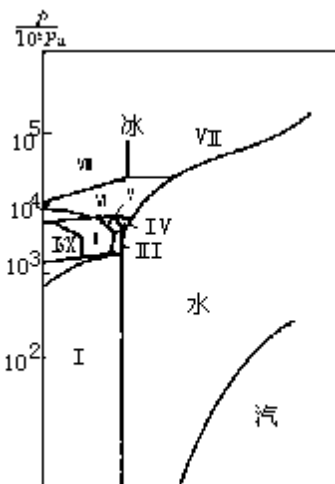


图14-5 冰的九个相

在一级相变中熵和体积不连续，而在高阶相变中，熵和体积是连续的。图 14 - 6 中，显示了熵变化的两个例子。在高阶相变中，化学势的高阶导数如比热容、压缩率、磁化率等等是不连续的：

$$c \sim T \frac{dS}{dT} \sim T \frac{\mathcal{I}^2 m}{\mathcal{I} T^2}$$

$$T \sim -\frac{1}{v} \frac{\mathcal{I} V}{\mathcal{I} p} \sim V \frac{\mathcal{I}^2 m}{\mathcal{I} p^2}$$

$$x \frac{\mathcal{I} M}{\mathcal{I} \tilde{H}}$$

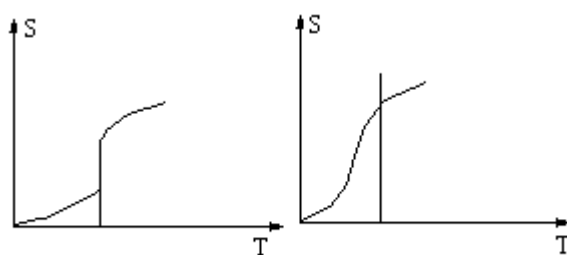


图14-6 熵变化的例子

从图 14 - 1、图 14 - 2 和图 14 - 4 我们知道  $pVT$  系统存在着临界点、临界等温线等等。在临界点，系统行为非常特殊，物理学家们进行了很多研究。事实证明，所谓临界现象其实就是二级相变。所以水就是具有二级相变的系统。但是由于历史的原因，临界现象的名称还是被广泛地使用。磁系统是另一个具有高级相变的系统，它与  $pVT$  系统是非常相似的（为方便起见，我们称后者为  $p$ 、 $T$  系统）。两者的临界点和等温线的对比情况显示于图 14 - 7 之中。

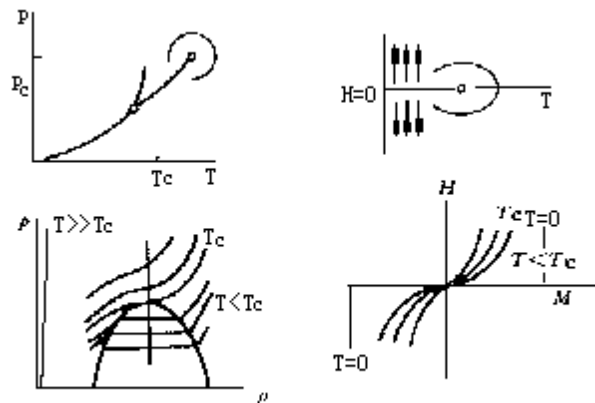


图14-7 磁系统与P、P、T系统的相似性

超导电性 (superconductivity) 最早是在 1911 年由昂尼斯 (Onnes) 首先发现的。巴丁、库柏和施立弗 (Bardeen - Cooper - Schrieffer) 于 1957 年，提出了超导电性的 BCS 理论 (3) 并因此而获诺贝尔奖。

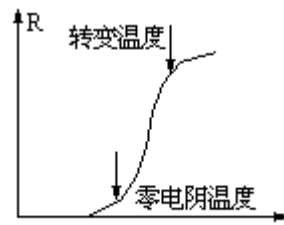


图14-8 电阻-温度曲线T

超导电性的主要特征是无限电导和理想抗磁性 (diamagnetism)。典型的电阻-温度曲线如图 14-8 所示，图中标出了转变温度和零电阻温度。

$$T = T_c; R = 0; \frac{1}{P} =$$

对于钇钡铜氧 (YBaCuO) 等氧化物超导体，转变温度达到了液氮温区，而其中  $T_c$  最高的汞系氧化物可达  $T_c \sim 134K$ 。注意，理想导体如银、铜等并没有超导相变。

究竟超导的哪一个特征更基本呢？实验上，我们有迈斯纳效应 (Meissner effect)。图 14-9 显示出对一超导体加磁场，磁通会全部在体外；而当在正常相时加磁场，磁通可以穿透。但是，当温度降至转变温度以下时，磁通被完全排出超导体外。根据电磁学理论，我们有

$$-\frac{1}{C} \frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times E$$

$$\nabla \times \left( \frac{j}{s} \right) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} B = 0$$

这样，由无限电导造成磁感应强度是常值，而迈斯纳效应进一步说这个常值只能是零。在这个意义上，完全抗磁性比无限电导更为基本。磁通不能穿过超导体还与持久电流 (persistent current) 现象相一致。如图 14-10 所示，当移去磁场时，磁通不能横过超导体。中间部分得以保留下来。而根据零电阻解释，则是电流维持着中间的磁通。

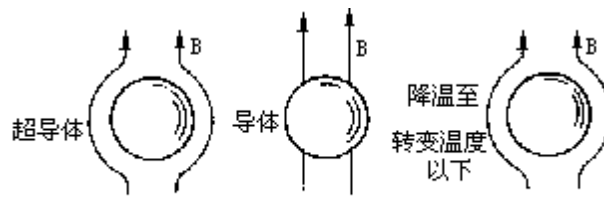


图 14-9 迈斯纳效应

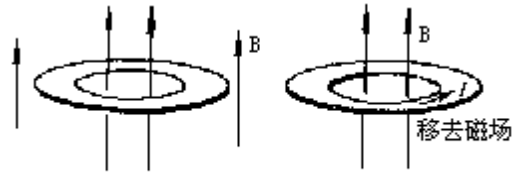


图14-10 持久电流图

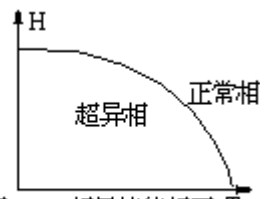


图14-11 超导体的相图  $T_c$

超导相变的相图见图 14 - 11 . 当磁场为有限时, 相变是一级的. 磁场为零时, 相应于高级相变. 在超导-正常相变中, 比热容的不连续现象可参见图 11 - 7 .

艾伦弗斯特的分级方案存在一些问题. 在某些情形  $C_p$  趋向无穷; 在有些相变 (KT 相变) 中, 热力学函数是奇异的:

$$F \sim \exp\left(-\frac{b}{t^{1/2}}\right) \left(t \equiv \frac{T - T_c}{T_c}\right)$$

再加之二级以上的相变极少, 因此, 该方案并不理想. 在现代相变理论中只区别一级和高级相变.

## \* § 14.5 现代相变理论中的一些概念

一般说低温相比较有序，而高温相不太有序或根本无序。为了表达有序的程度，我们定义一些参量，它们在不有序相是零而在有序相取有限的值，这就是序参量（order parameter）。序参量可以是标量、矢量、张量或复数。序参量的数目可以是1个、2个、3个……。例如，液体和伊辛（Ising）磁系统  $n=1$ ，超导和超流  $n=2$ ，海森伯（Heisenberg）磁系统  $n=3$ 。液气密度差、磁极化强度就是序参量的例子（图4-12）。

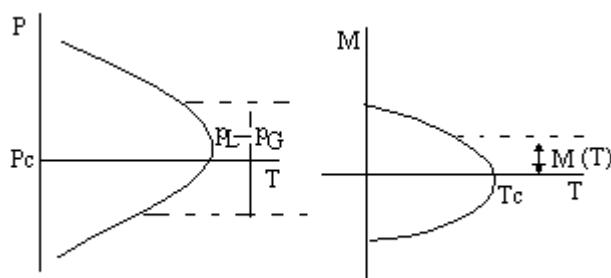


图14.12 P、P、T系统和磁系统的序参量

磁系统的序参量  $s$  是用最大磁化约化的磁化强度矢量。

$$M = n \langle \mu \rangle$$

$$s = \frac{M}{M_0} = \frac{\langle m \rangle}{m_0} \quad (14.5.1)$$

当构成体系的所有磁矩都整齐排列时，序参量的大小为1，而当磁矩完全杂乱无章时序参量为零。

在高级相变中  $S = V = 0$ ，序参量是连续变化的，而对称性却发生突变。图14-13是结构相变的例子，格点参数无论怎样小的变化都会使对称元素突然减少。左边方格有8个对称元素，而右边只有4个。对于一个磁系统只要有无限小的一个磁化  $M \rightarrow 0^+$  就会引起对称破缺（symmetry breaking）。

\* 严格的一维系统不存在连续相变。

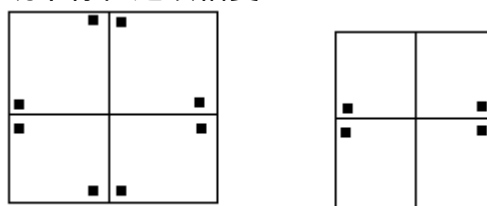


图14.13 结构相变中的对称性降低

为了描述序参量  $M(T)$ 、

$(L - G) / C$  以及（二级）相变点上不连续的量  $c$ 、 $x$  等在临界点的行为，引入临界指数（critical exponents）、 $\beta$ 、 $\gamma$  等等。例子如下；

$$M(T) \sim (T - T_c)^b$$

$$\frac{M(t)}{M(0)} = B \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^b [1 + \dots] \quad (14.5.2)$$

$$\frac{p_L - p_G}{p_c} = B \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^b [1 + \dots] \quad (14.5.3)$$

$$C_v = \begin{cases} A'(-e)^{-a'} [1 + \dots] (e < 0) \\ A(e)^a [1 + \dots] (e > 0) \end{cases} \left( e = \frac{T - T_c}{T_c} \right) \quad (14.5.4)$$

按照范德瓦耳斯方程，指数  $b = 1/2$ 。

1945 年古根汉姆 (E. A. Guggenheim) 收集了 8 种气体的汽液共存数据，发现最好的拟合指数是  $b = 1/3$ ，

$$\frac{p_L - p_G}{p_c} = \frac{7}{2} \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^{1/3} \quad (14.5.5)$$

这一结果被认为是相变研究的里程碑，自此开始了现代相变研究的新纪元。

**统计模型 (statistical model)** 是研究临界现象的有力工具。最简单的磁系统可以用伊辛模型 (1920, Lenz - Ising model) 来模拟。模型由格点上的自旋组成，自旋只能取  $\pm 1/2$  两个数值。1944 年昂萨格 (Onsager) 求得了二维伊辛模型的严格解。在一次学术会议上他写下了  $b = 1/8$ 。可是直到 1976 年逝世，他都没有发表有关细节。一般公认的是杨振宁 1952 年发表的结果 (5)。三维伊辛模型更接近现实的磁体，可是尚未有严格解。

相变现象可能远比我们想象的广泛。例如长途电话的挂通与否与其途经的各节点的畅通概率有关，这类问题属于所谓几何相变，也包括网络或渗流 (percolation) 问题。其中造成相变的因素是节点的占据概率。相变现象也许还将延伸到包括夸克的核系统、宇宙弦、真空相变等等。在生物学的领域中，存在着与结构相变很类似的变化。例如蛋白质分子是长链螺旋结构，当加热或酸、碱作用下螺旋结构将解体而变成无规线团。这种螺旋-线团变化 (helix-coil transition) 是突然发生的。在溶液中蛋白质折叠成球状，加热等作用也能使之改性 (denaturation)，出现球和无规线团结构的变化。这时蛋白质的一级结构并未破坏。煮熟的鸡蛋不能孵出小鸡来，就是因为其中的蛋白质已经改性了。具有双螺旋结构的脱氧核糖核酸 (DNA, deoxyribonucleic acid) 在加热到 65 ~ 70 °C 时也会发生螺旋和无规线团的变化，同时溶液的黏性和光学性质也要发生变化。非常特殊的情形是离子阱 (ionic trap)。当离子 (比如说 2 ~ 50 个) 约束在激光阱中时，可以呈现云雾相和晶相——库仑团簇。霍分奈格 (Hoffnagle) 等人认为其中存在着序和混沌相变 (6)。

## 习题

14.1.1 mol 服从范德瓦耳斯状态方程的气体，如果它的内能由式  $u = cT - a/V_m$  给出，其中  $V_m$  为摩尔体积， $a$  是状态方程的常量之一， $c$  为常量。计

算摩尔热容量  $C_V$  和  $C_p$  .

$$\left[ \text{答案: } C_V = c, C_p = c + \frac{R}{1 - \frac{2a(V-b)^2}{RTV^3}} \right]$$

14.2. 范德瓦耳斯临界等温线有一个拐点——临界点. 求临界点的参数  $p_C$ 、 $V_C$ 、 $T_C$  (用  $a$ 、 $b$ 、 $nR$  来表示) .

14.3. 以  $p_C$ 、 $V_C$ 、 $T_C$  作单位度量  $p$ 、 $V$ 、 $T$ , 将范德瓦耳斯方程无量纲化 .

$$\left[ \text{答案: } \left( \tilde{p} + \frac{3}{\tilde{V}^2} \right) (3\tilde{V} - 1) = 8\tilde{T} \right]$$

14.4. 氦的三相点温度是 24.57K. 在这一温度融解潜热和汽化潜热分别为

$$\ell_F = 335 \text{ J/mol}, \ell_V = 1804 \text{ J/mol}$$

求升华潜热  $\ell_S$  和 1 mol 液氦蒸发时的熵变  $S$  .

14.5. 设气体遵循下列 Dieterici 方程:

$$p(V-b) = RTe^{\frac{a}{RTV}}$$

求临界点处的  $\frac{P^V}{RT}$  的值 .

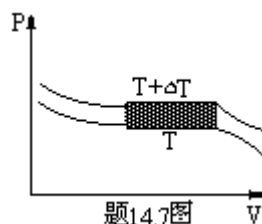
14.6. 水在 298.15K 时蒸汽压是 3166 Pa, 在 273.16K 时蒸汽压是多少? 已知在这两个温度的汽化潜热为

$$\ell_V(298.15\text{K}) = 44010 \text{ J/mol}, \ell_V(273.16\text{K}) = 45068 \text{ J/mol}$$

14.7. (a) 图中给出  $pV$  图上温度分别为  $T$  和  $T+\Delta T$  的两条等温线, 这两条等温线正好通过气液相变区. 考虑在图上阴影区建立一个卡诺循环, 试导出相变区蒸气压与温度所满足的方程:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\ell}{T\Delta V}$$

其中  $\ell$  为摩尔潜热,  $\Delta V$  为 1mol 物质的气液体积差. (b) 在压强为一个大气压时, 液氦的沸点为  $T_0 = 4.2\text{K}$ . 现在不断地抽取氦气, 使蒸气压减小到  $p_m \ll p_0$ . 假定潜热不依赖于温度, 而氦蒸气的密度远小于液体的密度, 求与蒸气平衡的液体的近似的温度  $T_m$ , 并把结果用  $\ell$ 、 $T_0$ 、 $p_0$ 、 $p_m$  和其他一些常数表示出来.



$$\left[ \text{答案: } (b) T_m = \frac{T_0}{1 + \frac{RT_0}{\ell} \ln \frac{p_0}{p_m}} \right]$$

14.8. 氢的三相点温度为  $T = 14\text{K}$ . 在这一点上, 液氢的密度为  $71\text{kg/m}^3$ , 固氢的密度是  $81\text{kg/m}^3$ . 液体的蒸气压由下式给出:

$$\ln(p/\text{Pa}) = 18.3 - \frac{122}{T/\text{K}} - 0.3 \ln(T/\text{K})$$

而融化温度为

$$\frac{T_m}{K} = 14 + \frac{1}{33} \times \frac{p}{101325\text{Pa}}$$

(a) 计算 3 个潜热在三相点的数值. 用  $R$  表示, 精确到 5%. (b) 计算三相点上固体曲线的斜率.

14.9. 在一级相变过程中证明: (a) 整个系统的熵变是总体积的线性函数: (b) 能量变化是

$$U = L \left( 1 - \frac{d \ln T}{d \ln p} \right)$$

14.10. 超导-正常相变的边界可由临界磁场公式来表达:

$$H_C(T) = H_C(0) \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^2 \right]$$

利用自由能的微分表式

$$dG_m(T, H) = -S_m dT - BdH$$

其中  $B$ 、 $H$  分别为磁感应强度和磁场强度, 求沿相界的熵差、潜热. 试对潜热加以讨论.

14.11. 范德瓦耳斯气体有气液相变. 范德瓦耳斯等温线的麦克斯韦结构可以表达为

$$\int_{V_L}^{V_G} p(T, V) dV = p(V_G - V_L) \quad (1)$$

$$p(V_G) = p(V_L) \quad (2)$$

证明: 利用约化变量

$$e = \frac{T}{T_c} - 1, v = \frac{V}{V_c} - 1$$

(1) 式和 (2) 式可分别写为

$$\{ 4 - v - 4 - v^2 + v^3 \} = 0 \quad (3)$$

$$\{ 4 - v - 6 - v^2 + v^3 \} = 0 \quad (4)$$

式中  $\Delta$  表示对汽液两相的值求差. 注意到  $v_G > 0$ ,  $v_L < 0$ , 实际上 (3) 式和 (4) 式给出了范德瓦耳斯气体的一个临界指数:  $\gamma = 1/2$ .

## 第十五章 静电场

### § 15.1 电荷和库仑定律

电荷 (charge) 是基本粒子的一个性质, 它不能存在于这些粒子之外. 电荷是一个基本概念, 只能通过其存在的后果来描述. 下面我们将对此一一叙述.

电荷有两种. 1747 年富兰克林 (Benjamin Franklin) 发现了电, 并命名了正电和负电. 我们沿袭这样的约定: 用丝绸摩擦的玻璃棒带正电, 用毛皮摩擦的塑料或封蜡棒带负电. 实际上, “正”和“负”的规定是完全随意的. 我们将在 § 29.5 中通过粒子衰变过程在基本层次上定义“正”和“负”.

熟知的事实是所有的电荷都是等价的, 代数可加的; 同号电荷相斥, 异号电荷相吸. 电中性的物体是自然界中最常见的.

电荷是量子化的, 即离散变化的. 基本电荷是

$$= 1.60217733(49) \times 10^{-19} \text{C} \quad (15.1.1)$$

这里 C (库仑) 为电荷的 SI 单位, 它是导出单位. A (安培) 是 SI 基本单位.  $1\text{C} = 1\text{A} \cdot \text{s}$ . 那么  $e$  是否是最基本的呢? 在夸克模型 (quark model) 中, 夸克带分数电荷, 相应的“反夸克”带等量而符号相反的电荷:

上 (up) 夸克 下 (down) 夸克 奇异 (strange) 夸克

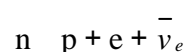
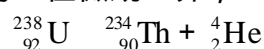
$$\frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e$$

在这一模型中, 夸克被认为是受到“禁闭”的, 这也许是对找不到自由夸克的一种自圆其说. 在 1977 年 ~ 1981 年间, 费尔坂克等 (B. Fairbank et al.) 曾报导了在实验中发现超导铌球上存在分数电荷  $\pm e/3$ , 他们用的铌球直径约  $280 \mu\text{m}$ 、质量约  $10^{-7} \text{kg}$ . 然而尚未见到有关这方面的进一步报导 (3) (4) (5). 也许令人难以置信, 就在检测基本电荷的同时有可能发生了第一例观察到分数电荷的事件, 1909 年密立根 (Millikan) 在一篇论文 (1) 的结论段中写道:

"...I have discarded one uncertain and unduplicated observation apparently upon a singly charge drop, which gave a value of the charge on the drop some 30 per cent lower than the final value of  $e$ ."

意思是在一个油滴上出现的数据, 由于不太确定、未重复出现而被他丢掉了; 这一电荷数据比最终得到的  $e$  值低 30% 左右. 我们赞赏密立根对单个数据处理的严谨态度, 而这一段文字使得他有可能成为第一个观察到分数电荷 (fractional charge) 的人. 到目前为止, 分数电荷仍然是一个悬而未决的命题. 不过应注意的是, 即使分数电荷存在, 它们仍然是量子化的, 只不过新的基本电荷是原来的  $1/3$  而已.

另一个重要事实是不管在宏观尺度上还是在微观尺度上, 电荷总量是守恒的. 在微观世界,





每一粒子都有对应的反粒子（如 $e^+$ 、 $p^-$ ），它们的质量、半衰期等相同、但电荷量相反（详见第三十章）。如果把所有的粒子换成反粒子而反粒子换成粒子这样形成的世界与我们现在的世界是不可区分的，这叫做电荷共轭对称（Charge conjugate symmetry）。

有电荷就有质量，换言之，零静止质量的粒子只能是电中性的。

库仑（Charles Augustin de Coulomb，1736—1806）于 1785 年提出了后来以他的名字命名的定律——库仑定律。该定律说电荷  $q_1$  作用在电荷  $q_2$  上的力为

$$F_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{g}_{12} = -F_{12} \quad (15.1.2)$$

其中常数  $k$  可用库仑扭秤（Coulomb torsion balance）来测定（后来卡文迪许用扭秤来测量引力常量）：

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \quad (15.1.3)$$

式中常数  $\epsilon_0$  是真空电容率（permittivity），

又称真空介电常量（dielectric constant）：

$$\epsilon_0 = 8.854187818 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \quad (15.1.4)$$

库仑定律只适用于点电荷，所以其中的两电荷间的距离  $r_{12}$  永不趋于零。物理上一个点电荷可以是 nm、 $\text{\AA}$ 、fm 尺度。有限大小的电荷之间的力当然无法用单一的距离来表达，这种情况下，可以考虑在小体积元之间应用库仑定律，然后通过矢量的求和或积分来求合力。库仑定律是两体相互作用。当存在两个以上点电荷时，只存在两两之间的作用。

库仑定律与牛顿万有引力定律类似，也是超距作用。按照现代观念，相互作用是由场以有限速度传播的。库仑定律与万有引力定律都是平方反比规律，在数量级上比较而言，引力要弱得多。至于库仑定律是否是严格的平方反比关系，可以把  $r^{-2}$  写作

$$\frac{1}{g^{2+\epsilon}}$$

而考察偏差  $\epsilon$  是否为零来证实。现代实验表明：

$$(2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$$

早年的几组实验所显示  $0.06$ （John Robinson）， $0.02$ （Henry Cavendish）。\* 有限的  $\epsilon$  是和光子质量的有限值相联系的（6）。假如库仑定律偏离平方反比关系，则光子将有有限的静止质量。

例 15.1 在氢原子玻尔模型（Bohr model）中，电子和质子的平均距离是：

$$\langle r \rangle_{e-p} = 0.53 \text{\AA}$$

试分别估算库仑力和引力。

解：库仑力为

$$\begin{aligned}
F_e &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \langle g \rangle^2} \\
&= 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2 (1.6 \times 10^{-19} C)^2}{C^2 (0.53 \times 10^{-10} m)^2} \\
&= 8.1 \times 10^{-8} N \\
\text{引力为} \\
F_g &= G \frac{m_e m_p}{\langle g \rangle^2} \\
&= 6.7 \times 10^{-11} \frac{m^3 (9.1 \times 10^{-31} kg) (1.7 \times 10^{-27} kg)}{kg \cdot s^2 (0.53 \times 10^{-10} m)^2} \\
&= 3.7 \times 10^{-47} N
\end{aligned}$$

所以在这一系统中，两者之比为  $\frac{F_e}{F_g} \propto 10^{39}$

库仑作用占绝对优势。

库仑定律的适用范围很广。宏观物体诸如电缆以至我们的人体主要都是靠原子、分子间的库仑力（而不是引力）维系的。多亏了库仑作用，电子和核能够形成原子，原子和原子能够形成分子。原子核的情况又如何呢？我们知道：

$Z$ （原子数）+  $N$ （中子数）=  $A$ （质量数）（15.1.5）而核的大小约为  $r = A^{1/3} \times 10^{-15} m$

每一对质子间（ $r_{p-p} = 4.0 \times 10^{-15} m$ ）的库仑力为

$$F = \frac{(9 \times 10^9 N \cdot m^2 / C^2) (1.6 \times 10^{-19} C)^2}{(4.0 \times 10^{-15} m)^2} = 14 N$$

既然有排斥作用， $Z$  个质子又是怎么能挤在这么小的空间范围内呢？要能形成原子核，必定存在一种强的吸引力，这就是核力或强相互作用。对于核力，目前我们并没有完全搞清楚，我们所知道的是：

- 它作用于一对核子（中子或质子）之间；
- 力程甚短，仅在最近邻核子间起作用；
- 它随着质量数  $A$  的增加而趋向饱和。

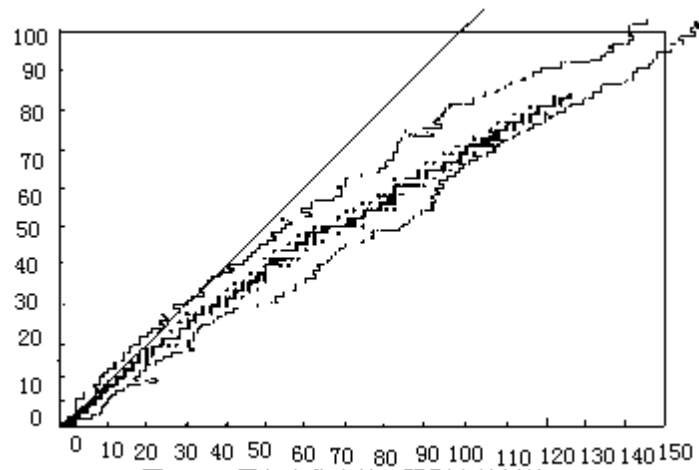


图15-1 黑色为稳定核、阴影为放射核

在图 15 - 1 中，可以看到轻核处在  $N=Z$  线上，库仑力相对而言不太重要。对于较稳定的重核，则包含较多的中子以冲淡总的库仑斥力。

核裂变和衰变都是库仑作用效应。粗略地说，它们都是排斥、分裂趋向的结果。

## § 15.2 静电场

库仑力是一种超距作用,它是一电荷瞬时直接地作用在其它电荷上的.现代物理的观点认为,一电荷的作用通过围绕着它的场传递到其它电荷上,这种情况与质量周围的引力场作用完全相同.电场可以看作是一个力场或力的分布.以后我们会发现电场具有独立存在性,这和电荷对物质的依附性是截然不同的.

电场强度的操作性定义为

$$E = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{F}{q_0} \quad (15.2.1)$$

式中  $q_0$  是检验电荷,  $F$  为检验电荷所受的力.对于取极限的过程,我们应该区别是物理上的还是数学上的极限.从物理上说,至少在目前阶段我们不能要求电荷小于  $e$ .由于这一操作性定义来自于力,所以电场也是一个矢量场,矢量叠加法则适用.点电荷  $q$  周围的场可以容易地求得为

$$E_q = k \frac{qq_0}{g^3} \mathbf{g} \times \frac{1}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{g^2} \hat{\mathbf{g}} \quad (15.2.2)$$

为了使电场的分布形象化,表达某一点电场的方向和大小可以采用“电场线”的概念.首先,让电场线上任一点的切线给出那一点场的方向,即

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (15.2.3)$$

其次,使通过单位截面的场线数目正比于场的大小.电场线可以加深我们对电场的印象,但是难于给出定量的描述,特别是对运动电荷来说就更困难.

例 15.2 求点电荷周围的电场线方程.

解:电荷周围的电场为

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{g^3} (xi + yj + zk)$$

在  $xy$  平面,我们可以写

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{y}{x}$$

容易得到曲线族的方程为

$$y = kx$$

它是从点电荷辐射出的一族直线.

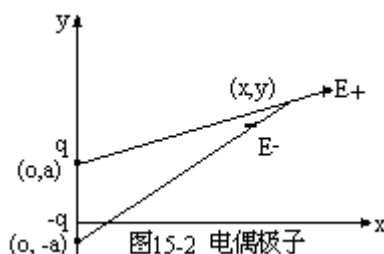


图15-2 电偶极子

对于电荷组的电场,我们可用矢量叠加法则来求解.最简单的点电荷组合是等量异号电荷对,如图 15-2 所示.我们称之为电偶极子 (electric dipole).电偶极子周围的电场可以计算如下:

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} \quad (15.2.4)$$

其中

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{qx}{[x^2 + (y-a)^2]^{3/2}} + \frac{-qx}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}} \right\} \quad (15.2.5)$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q(y-a)}{[x^2 + (y-a)^2]^{3/2}} + \frac{-q(y+a)}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}} \right\}$$

可以通过编制一个小小的计算机程序而得到电场分布图。而我们真正感兴趣的是远离电荷对 ( $r \gg a$ ) 的区域 (称之为远场区) 的场, 这种情况下, 可以将  $a/r$  作为小参数而把上面的表达式展成级数, 就有

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} (q \cdot 2a)$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} (q \cdot 2a) \quad (15.2.6)$$

这种场称为偶极场 (dipole field), 而  $q \cdot 2a$  称为偶极矩 (dipole moment)。

除了角度因子外, 偶极场的数量级是

$$E \sim \frac{q}{g^2} \left( \frac{a}{g} \right)^1 \quad (15.2.7)$$

由于偶极子的净电荷为零, 偶极场将不包含量级为  $q/r^2$  的项——单极场 (monopole field)。

对偶极场的计算也可以用矢量形式 (图 15-3) 进行:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{|\mathbf{g}-\mathbf{a}|^3} (\mathbf{g}-\mathbf{a}) - \frac{q}{|\mathbf{g}+\mathbf{a}|^3} (\mathbf{g}+\mathbf{a}) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{g^2} \left\{ \frac{\mathbf{g}}{g} \left[ \frac{g^3}{|\mathbf{g}-\mathbf{a}|^3} - \frac{g^3}{|\mathbf{g}+\mathbf{a}|^3} \right] - \frac{\mathbf{a}}{g} \left[ \frac{g^3}{|\mathbf{g}-\mathbf{a}|^3} - \frac{g^3}{|\mathbf{g}+\mathbf{a}|^3} \right] \right\} \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{g^2} \left[ 6 \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}}{g^2} \frac{\mathbf{g}}{g} - 2 \frac{\mathbf{a}}{g} \right] \\ &\equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{g^3} \left[ 3(P \cdot \mathbf{e}_g) \mathbf{e}_g - P \right] \quad (15.2.8) \end{aligned}$$

位置矢量垂直或平行于偶极矩时的场可求得为

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{g^3}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2P}{g^3} \quad (15.2.9)$$



图15-3 电偶极子

对于偶极矩我们可以作一般的定义。对于一个点电荷，可以定义为它的偶极矩，其中  $r$  为从坐标原点  $O$  指向点电荷  $q$  的位置矢量。显然这样定义的偶极矩与坐标系有关。对于一组点电荷，偶极矩是

$$p = \sum_i q_i r_i \quad (15.2.11)$$

可以证明当净电荷为零时，偶极矩与坐标原点的选择无关（试证明之）。这意味着只有对这种系统，偶极矩才有实质性的意义；而净电荷不为零的系统的偶极矩只有相对意义。应该区别偶极子与偶极场的概念。一般说电偶极子周围的电场可以分解为偶极场、四极场 (quadrupole field)、八极场 (octupole field) 等等。对于间隔无限小的有限的偶极矩，情况比较简单，这时只有偶极场。

对给定的场  $E$ ，点电荷  $q$  所受的力是  $qE$ 。一个偶极子在均匀电场中（图 15-4）将根本不受力，

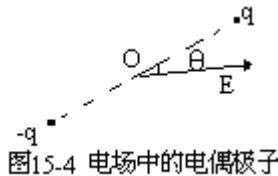


图15-4 电场中的电偶极子

$$F = qE + (-q)E = 0 \quad (15.2.12)$$

但是可能受到力矩。关于原点  $O$  的力矩是

$$M = a \times (qE) + (-a) \times (-qE)$$

$$= 2qa \times E$$

$$= p \times E \quad (15.2.13)$$

于是，偶极子的运动方程是

$$-pE \sin \theta = I \ddot{\theta} \quad (15.2.14)$$

式中  $I$  为偶极子转动惯量。该方程有振动解，小振动的周期是

$$T = 2 \sqrt{\frac{I}{pE}} \quad (15.2.15)$$

在非均匀场中，一个电偶极子将受到力和力矩的作用，力以及关于中心的力矩分别为

$$F = -qE(r-a) + qE(r+a)$$

$$= -q[E(r) - a \cdot \nabla E(r) + \dots] + q[E(r) + a \cdot \nabla E(r) + \dots]$$

$$= (P \cdot \nabla) E(r) \quad (15.2.16)$$

$$M = (r-a) \times F_- + (r+a) \times F_+$$

$$= P \times E + r \times F$$

对于平衡问题，仍然是用势能曲线的方法求解较好。我们可以用外力矩  $M_{\text{ext}}$ （逆着均匀电场的力矩）所做的功  $W_{\text{ext}}$  来定义一个电偶极子在静电场中的势能  $U$ ：

$$\begin{aligned}
 W_{\text{ext}} &= \int_0 M_{\text{ext}} d \\
 &= \int_0 pE \sin \theta d \\
 &= -pE \cos \theta - [-pE \cos \theta_0] \\
 U(\theta) &= U(\theta_0) \quad (15.2.17)
 \end{aligned}$$

式中

$U = -p \cdot E + C$  (15.2.18)  $C$  是常量，它取决于势能零点的选择。

当电荷是连续分布时，我们可以将上面的结果加以推广。一电荷分布  $q$  ( $r'$ ) 周围  $r$  处的电场为

$$\begin{aligned}
 E(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (15.2.19)
 \end{aligned}$$

利用电荷分布的几何对称性将使计算简化。

例 15.3 求电荷线密度为  $\lambda$  的无限长线电荷周围的电场。

解：采用柱坐标较适合。如图 15-5 所示，根据对称性，我们知道场只有分量  $E_z$ 。

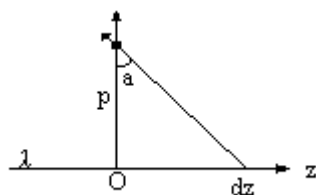


图15-5 例15.3

$$\begin{aligned}
 E &= E_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz}{g^2} \cos \theta \\
 &= \int_{-p/2}^{p/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda p \sec^2 \theta da}{p^2 \sec^2 \theta} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{p}
 \end{aligned}$$

例 15.4 求电荷线密度为  $\lambda = q/2\pi R$  的圆环周围的电场。

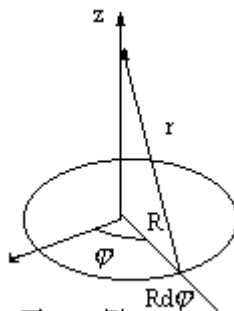


图15-6 例15.4

解：如图 15-6 所示，电场与  $\phi$  无关（旋转对称）且上下对称。我们只列出最简单的结果——过环心沿垂直轴的场。

$$E = E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{q}{2pR} \times \frac{R d\mathbf{j}}{g^2} \times \frac{\mathbf{z}}{g}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{g^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

对于  $z \gg R$ ,  $E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2}$ , 即点电荷场。  
这一结果可以推广到电荷盘。

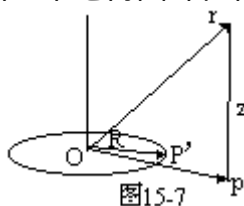
$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2p dp s z}{(z^2 + p^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2ps z \left[ -\frac{1}{(z^2 + p^2)^{1/2}} \right]_{p=0}^R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2ps \left[ \operatorname{sgn} z - \frac{z}{(z^2 + p^2)^{1/2}} \right]$$

对于无限大电荷平面，也可求得为

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2 \operatorname{sgn} z$$

下面我们以矢量形式给出一个电荷圆环在任意场点的解，参见图 15-7，



$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{g} - \mathbf{r}}{|\mathbf{g} - \mathbf{r}|^3} \frac{q}{2\pi R} R d\theta$$

保留到  $(R/r)^2$  的结果是

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{g^2} \times$$

$$\left\{ e_r + \frac{3R^2}{4r^2} \left[ \left( 5\frac{r^2}{r^2} - 2 \right) - 2\frac{\mathbf{r}}{r} e_p \right] + \dots \right\}$$

注意辨认花括号中的第一项是单极场，而第二项为四极场。这里没有偶极场，因为带电圆环相对于中心的偶极矩是零：

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \rho d\tau = 0$$



### § 15.3 高斯定律

对于一个矢量场  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ，通过面积  $A$  的质量通量为

$$\dot{m} = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \quad (15.3.1)$$

对于一个外向法线的闭合面，有

$$\Phi \begin{cases} > 0, \text{有源} \\ = 0, \text{无源、无漏} \quad (15.3.2) \\ < 0, \text{有漏} \end{cases}$$

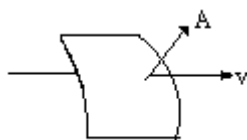


图15-8 质量通量

电场是一个矢量场。电场通过具有外向法线的闭合面的通量为

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (15.3.3)$$

高斯定律 (Gauss's law) 指出，

$$\Phi_E = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}; \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q_{in} \quad (15.3.4)$$

其中  $q_{in}$  是闭合面内的电荷。

我们可以从高斯定律推得库仑定律。对于一个点电荷，由于它所具有的对称性，选取球形高斯面是适合的，球面上的电场  $\mathbf{E}$  必定处处垂直于面元  $d\mathbf{S}$ ，且有相同的大小。根据高斯定律，得

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (15.3.5)$$

电场强度和检验电荷  $q_0$  所受的力分别是

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}; \quad \mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2}$$

如果从库仑定律出发，考虑电荷  $q$  中的一部分  $dq$  所产生的电场  $d\mathbf{E}$ ，它造成的通量为

$$\begin{aligned} d\Phi &= \oint_S d\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{dq(\mathbf{g}')}{|\mathbf{g} - \mathbf{g}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\Omega} dq d\Omega \quad (15.3.6) \end{aligned}$$

$$\text{式中 } d\Omega \equiv \frac{(\mathbf{g} - \mathbf{g}') \cdot d\mathbf{S}}{|\mathbf{g} - \mathbf{g}'|^3}$$

是面元  $d\mathbf{S}$  相对于矢量  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  的原点 (即  $dq$ ) 所张的立体角，只有  $dq$  在  $S$  面内部的部分  $q_{in}$  贡献一个结果  $4\pi$ 。所以

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq_{in} \cdot 4\pi$$

对此进一步积分可得到高斯定律。虽然净电通量只是曲面内的电荷所贡献的，但就电场而言曲面上每一点的场仍然是全部电荷造成的总场。根据上面的论述可能会认为高斯定律和库仑定律似乎是等价的，其实高斯定律对任何  $E(t)$  都适用，在这个意义上它比库仑定律更为基本。

\* 由高斯定律可以得到关于  $E$  的微分方程（需要用到矢量分析中的散度定律）：

$$\oint E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int dV, \quad \left[ \nabla \cdot E - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right] dV = 0$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

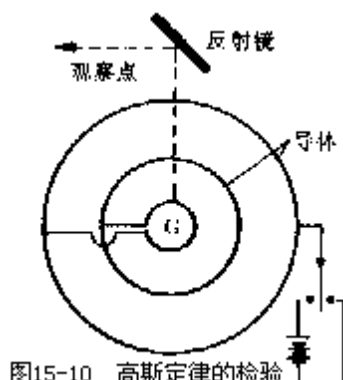
当一孤立导体上有过剩电荷时，导体内部会出现电场。这一电场将驱动电荷运动直至达到静电平衡态。这时电荷不再运动，内部电场为零；电荷也不会沿表面运动，平行于表面的电场分量也为零。整个过程的弛豫时间的数量级是 ns。当然我们这里谈的是宏观场，它是在大约  $10^{-5}m$  的宏观尺度上的平均（这里，孤立导体中组分和温度的均匀性是必要的，否则完全可能出现非零的内场）。取表面下非常接近表面处的高斯面（如图 115 - 9），对之使用高斯定律。零内场将导致为零的净内部电荷。这一结论直接来自高斯定律。因此可用来检验高斯定律和库仑定律。1755 年富兰克林就着手过此项研究，他将一导体杯充电，然后检查内壁和外壁。富兰克林得到了肯定的结果。此后乃至近代实验都用与平方反比律（库仑定律）的偏差来表达这一结果：

$$F \sim \frac{1}{g^{2+\epsilon}}$$

图 15 - 10 是一种检验高斯定律的装置。当外壁充电后，如果有电荷流向内壁我们可以读取电流计读数。实验结果表明并没有这种电荷运动的迹象。根据仪器灵敏度的知识，可以估算出 的上限。实验得到最好的结果是

$$(2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$$

这几乎是一种示零实验。我们可以提及与下列物理量或客体有关的示零实验：



- 惯性质量和引力质量之差；
- 以太；
- 光子质量；

- 中微子质量；
- 磁单极；
- 分数电荷。

有关这类实验的评论可参见 § 9.1。

例 15.5 求电荷线密度为  $\lambda$  的无限长导线的场。



图15-11

解：由于对称性，场在径向。对如图 15-11 的柱形闭合高斯面运用高斯定律：

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$q_{in} = \lambda h$$

所以有径向场

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r$$

将此处的求解方法与例 15.3 比较，显然用高斯定律求解要简洁得多。然而这种优点只有当电荷对称分布时才存在，否则仍然需要求助于一般的积分方法。

例 15.6 求电荷面密度为  $\sigma$  的无限大电荷片的场。

解：几何决定了场是均匀的且垂直于平面。对图 15-12 所示闭合面用高斯定律，得

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$q_{in} = \sigma A$$

$$\text{所以 } \mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_n$$



图15-12

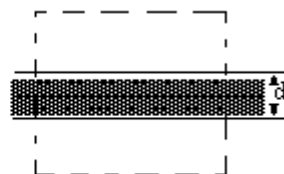


图15-13

例 15.7 求厚度为  $d$  的无限大电荷片的场。

解：与上题的差别在于还要计算  $z < d/2$  的电场，高斯面如图 15-13 所示，有

$$z < d/2, \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{z}{d/2} \right) \mathbf{e}_n$$

我们可以将电荷密度分布  $\rho$  和电场分布  $\mathbf{E}$  表示在图 15-14 中。

\*以上步骤对讨论所谓 p-n 结 (p-n junction) 的场是很有用的。在 p 型和 n 型半导体材料的界面区，存在着注有反号载流子的反型层。这两层形成了一个 p-n 结。在 p 型一边 ( $x=0$  到  $x=x_p$ )，密度是  $-n_A e$ ，而在 n 型一边 ( $x=-x_n$  到  $x=0$ ) 密度是  $n_D e$ 。电中性要求  $n_D x_n = n_A x_p$ 。直接应用高斯

定律得到：

$$E_n = \frac{n_D e}{\epsilon_0} (x_n + x), \quad -x_n \leq x \leq 0$$

$$E_p = \frac{n_A e}{\epsilon_0} (x_p - x), \quad 0 \leq x \leq x_p$$

$E=0$  其它地方

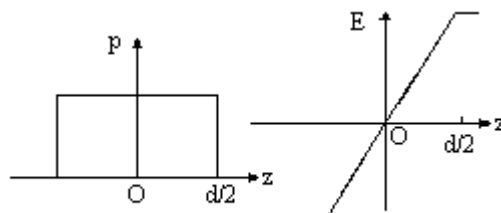


图15-14

例 15.8 求电荷面密度为  $\sigma$  的导体表面的场。

解：对图 15-15 底面积为  $A$  的柱形高斯面应用高斯定律，因为  $E_{in}=0$

（见第十六章），有

$$= EA$$

$$q_{in} = \sigma A \quad E_{in}=0$$

$$\epsilon_0 EA = \sigma A$$

所以

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

如果导体厚度为  $d$ ，电荷面密度  $\sigma$  将导致什么样的场？将结果与无限电荷板比较。是否矛盾？

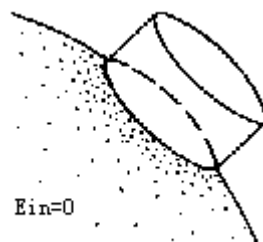


图15-15 例15.8

应用高斯定律来求球对称电荷分布或均匀分布

$$= \rho(r) (r \leq R)$$

$$= C$$

的场特别方便。\*可否将这一方法用来处理引力问题？

例 15.9 地球表面有一向下电场  $E \sim 130 \text{ N/C}$ ，求地球表面的电荷密度。

解：可以用高斯定律得出电荷

$$Q = \oint_0 E \cdot dS = - \epsilon_0 E_r 4 \pi R_\oplus^2$$

$$-Q = 5.92 \times 10^5 \text{ C}$$

电荷面密度为

$$\begin{aligned}
 - &= \frac{Q}{4\pi R_{\oplus}^2} \\
 = & \epsilon_0 E_r = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9} \times 130 \text{ C/m}^2 \\
 &= 1.15 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2
 \end{aligned}$$

例 15.10 介电强度 (dielectric strength)  $E_b$  是使材料被击穿的最小场强. 对于空气,

$$E_b \geq 3 \times 10^6 \text{ N/C}$$

求半径为  $R$  的球上, 所能容的最大电荷量.

解: 用高斯定律及介电强度的定义, 有

$$Q \leq 4\pi R^2 E_b$$

当  $R = 10^{-2} \text{ m}$ ,  $Q = 3.3 \times 10^{-8} \text{ C}$ ; 而当  $R = 1 \text{ m}$ , 则  $Q = 3.3 \times 10^{-4} \text{ C}$ . 由此可以看出  $1 \text{ C}$  是多么大的电荷量!

高斯定律用于原子模型(图 15-16)的讨论可以直接得到结果. 在汤姆孙的布丁模型中, 正电荷均匀分布在整個球上, 则表面场强约为

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \sim 4.4 \times 10^{13} \text{ N/C}$$

当卢瑟福(Rutherford)用  $\alpha$  粒子轰击金箔时, 发现了背向散射事件. 他认为假如汤姆孙模型是正确的话, 这些事件就象用  $38 \text{ cm}$  炮弹轰击一张纸片而居然飞回来打你. 若按照他本人提出的有核原子模型, 正电荷集中在原子中心, 则涉及的电场比汤姆孙模型的要强得多, 可达

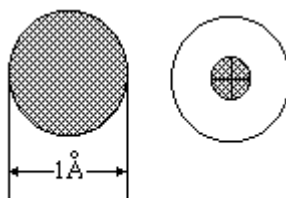


图 15-16

$$E = 2.3 \times 10^{21} \text{ N/C}$$

那么正电荷集中在多大的区域? 对于带电粒子间的散射, 可以参见 § 4.4; 利用库仑力和引力同为平方反比的事实, 容易直接得到所需结果.

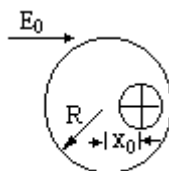


图 15-17

例 15.11 求原子在外电场  $E_0$  中的感应偶极矩.

解: 从图 15-17 可知, 原子核所在处合场强为

$$E_{\text{core}} = E_0 + \frac{1(-Ze)x_0}{R^3} = 0$$

$$x_0 = 4\pi \epsilon_0 \frac{E_0 R^3}{Ze}$$

感应电偶极矩为

$$\rho = Zex_0 = 4 \quad 0E_0R^3$$

如果  $E_0$  突然撤去，将会发生什么？

## § 15.4 电势

点电荷周围的电场为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}$$

由于

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla \frac{1}{r}$$

电场可以改写为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left( -\nabla \frac{1}{r} \right) \\ &= -\nabla \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C \right) \\ &= -\nabla V \end{aligned} \quad (15.4.1)$$

式中  $V$  称作电势，而  $C$  是一常量。当指定的参考点的电势决定以后，这个常量就决定了。电势的 SI 单位是 V(伏特)，所以电场的单位就是 V/m。由于梯度算符是线性的，所以电势满足叠加原理。

人们似乎更愿意做微分而不是积分，引入电势至少可以部分地满足这种偏爱。考虑在电场中沿某一曲线  $C$  (图 15-18) 上 A、B 两点间的积分：

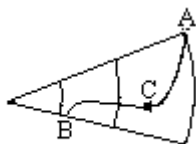


图15-18 全微分的积分

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B d\mathbf{l} \cdot \nabla V$$

由于

$$d\mathbf{l} \cdot \nabla V = dx \frac{\partial V}{\partial x} + dy \frac{\partial V}{\partial y} + dz \frac{\partial V}{\partial z} = dV$$

是全微分，所以上述积分只依赖于上下限而与所选的路径无关，即

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B dV = V_B - V_A \quad (15.4.2)$$

这一结果可以清楚地从点电荷的情形得到验证：

$$\int_{(C)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int E d\ell \cos\theta = - \int_{r_B}^{r_A} E dr = \int_{r_A}^{r_B} E dr$$

现在对给定的电荷分布，我们可以两种方法来处理电学问题。一种是先求电势，然后求导得到电场，另一种是先用直接方法或高斯定律计算电场，然后积分求得电势。这两种方法是等价的。

\*泊松在 1813 年首先引入静电势，它是泊松方程：

$$\nabla^2 V = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$$

的解. 在得到了高斯定律的微分形式以后, 结合(15.4.1)式就可得出泊松方程.

电偶极问题可以利用电势表示来求解.

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{|r-a|} + \frac{(-q)}{|r+a|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left[ \frac{r}{|r-a|} - \frac{r}{|r+a|} \right] \end{aligned}$$

利用展开式:

$$\frac{r}{|r \mp a|} = 1 \pm \frac{a \cdot r}{r^2} + \dots$$

电势是

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \frac{2a \cdot r}{r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot r}{r^3} \end{aligned}$$

电场是

$$\begin{aligned} E = \nabla V &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\nabla(p \cdot r)}{r^3} + (p \cdot r) \nabla \frac{1}{r^3} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(p \cdot e_r) e_r - p] \end{aligned}$$

对于连续分布的电荷, (15.2.19)式适用:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r') d\tau'}{|r-r'|^3} (r-r')$$

相应的电势的表达式是:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r') d\tau'}{|r-r'|} + C \quad (15.4.3)$$

\* 点电荷的积分中密度表达式如何写呢? 可利用狄拉克函数(见附录).

例 15.12 写出均匀电荷圆盘轴线上的电势.

解: 设圆盘半径为  $R$ , 电荷面密度为  $\sigma$ , 则电势为

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma 2\pi \rho d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma [(z^2 + R^2)^{1/2} - |z|] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|z|} & z \gg R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma |z| & z \ll R \end{cases} \end{aligned}$$

试讨论  $z \ll R$  的情形. 在盘面附近电势应该如无限大平面的情形, 所以我们写出了无限大平面的结果. 可是从前面的表达式以及近似结果并非如此. 原因何在? 务必搞清楚.



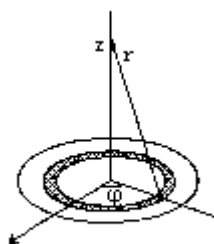


图 15-19 例15.12

例 15.13 求无限大电荷片周围的电势.

解：已知无限大电荷片的场是

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

取片的电势为零，则

$$V = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}d$$

对于带电球或球壳，读者可查看第四章关于引力势类似的结果.

等势面 (equipotential surface) 是具有相等电势的点构成的曲面. 在点电荷的情形，有

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = C$$

可见，等势面为同心球壳. 如果要求画出点电荷情形下具有一定势差的等势面，我们有

$$-dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr, \quad dr = C'r^2$$

对于一个电偶极子，可以取柱坐标系，z 轴在 a 方向而原点在两电荷的中间，有

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|r-a|} - \frac{1}{|r+a|} \right]$$

该表达式为 a 的奇函数. 所以电势相对于 z = 0 的平面呈反对称，平面 Z = 0 相应于 V = 0，而整个电势分布与角度 无关.

沿等势面上 A、B 两点间的任何路径，因  $V_A = V_B$ ，据 (15.4.2) 式有

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

由于路径是任意的，这意味着电场 E 处处为零或处处垂直于等势面.

## § 15.5 电势能

考虑两个电荷  $q_1$  和  $q_2$  构成的系统. 如果我们增加它们之间的间隔  $r$ , 外力必须做功. 若电荷反号则做正功, 否则作负功. 外力做功  $W_{\text{ext}}$  可以表示为

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \Delta r \\ &= \Delta \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \right) \Delta U \end{aligned} \quad (15.5.1)$$

这一结果表明, 外力做功已转换成一种储存在电荷系统中的能量  $U$  这里

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} + C \quad (15.5.2)$$

以间隔  $6.0 \times 10^{-15}\text{m}$  的两个质子为例, 电势能为

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = 2.4 \times 10^5 \text{eV}$$

这比起热能来是相当大的.

按照氢原子的玻尔模型, 氢原子中电子绕质子作圆周运动, 轨道半径为

$$a_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.53 \text{\AA}$$

称为玻尔半径(Bohr radius). 运动方程、动能、势能和总能量分别为

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0^2} &= m \frac{v^2}{a_0}, \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0}, U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0} \\ E = T + U &= \frac{1}{2} U = -13.6 \text{eV} \end{aligned}$$

\*这里可以求得电子的速度为

$$\begin{aligned} v &= \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m a_0} \right]^{1/2} \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \left( 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} \right)} \right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} c \quad \alpha c \end{aligned}$$

其中

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \quad (15.5.3)$$

这一无量纲量就是所谓的精细结构常数. 在原子尺度上, 这一常数十分重要.

我们也可以考虑外力逆着电场对电荷  $q_0$  做功, 这与电势紧密相关. 设外力大小与电场力相等但方向相反, 当电荷从  $A$  点移动到  $B$  点时外力做功

$$W_{BA} = \int_A^B \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{l} = -q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ = q_0(V_B - V_A)$$

可以认为外力做功造成了电荷—电场系统的势能增加，也可以说是电荷在场中的能量增加了。这和(15.5.1)式相一致。

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \\ = V_1 q_1 \\ = \frac{1}{2} [V_1 q_1 + V_2 q_2] \quad (15.5.4)$$

式中  $V_1$  是  $r_1$  处的电势， $V_2$  是  $r_2$  处的电势。

对于点电荷组，有

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N U_{ij} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \\ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{r_{ij}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i \quad (15.5.5)$$

上式的第一行适合于分立电荷，常用来作数量级估计，类似于引力问题。比如一个星系由  $1.6 \times 10^{11}$  颗星组成，每颗的半径和质量大约为  $R \sim 10^{21} m$ 、 $m \sim 2 \times 10^{30} \text{kg}$ ，则引力势能为

$$U = -\frac{1}{2} N(N-1) G \frac{m^2}{R} = -4 \times 10^{51} \text{J}$$

(15.5.5)式的第二行则适合于用来推广到连续分布情形。这里  $V_i$  是除了  $q_i$  以外所有其它电荷在  $r_i$  的电势。

考虑一离子晶体模型(参见 § 26.3)，见图 15-20。其中正负离子相间排列，间距为  $a$ 。我们先计及一个离子在所有其它离子的场中的库仑能，不妨称此离子为 1 号，则

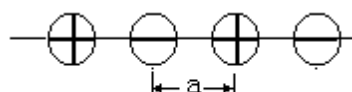


图15-20

$$U_C = \frac{1}{2} N \sum_{i=1} U_{i1}$$

其中

$$\sum_{i=1} U_{i1} = 2Ze \left( -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{a} \right) \left[ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \right] \\ = 2 \ln 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Ze)^2}{a}$$

这里  $2 \ln 2$  叫做晶体的马德隆常数(Madelung constant)。它是离子晶体的结合能的测度。

讨论：如果链是有限长的，结果将怎样呢？可以写一个程序以链长作为输入参数。如果最后的间隔是  $a-d$  或  $a+d$  而不是  $a$ ，则可以考虑哪一种结构更稳定。\*提示：考虑一半无限长的链，此时解析解是可能的。在计算过程中，边缘（或端点）的情况将影响一有限链中间的结果。这种影响叫做边缘噪声（edge-noise）。

对于连续的电荷分布，有

$$U = \frac{1}{2} \int V(r') \rho(r) d\tau \quad (15.5.6)$$

一个半径为  $R$  的球状分布电荷  $q$  的自能可计算如下：

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q}{2R} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right) \rho 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R} \end{aligned} \quad (15.5.7)$$

利用另一种方案来计算也许更简便：

$$\begin{aligned} U &= \int V_{<r} \rho(r) 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{q}{r} \left(\frac{r}{R}\right)^3 \rho 4\pi r^2 dr \end{aligned} \quad (15.5.8)$$

假定电子具有有限结构，但又缺乏关于密度分布的进一步知识，我们可以作量纲分析，定义出经典电子半径(classical electron radius)。

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0} &= m_0 c^2 \\ r_0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_0 c^2} = 2.82 \times 10^{-15} \text{ m} \end{aligned} \quad (15.5.9)$$

这就是所求的经典电子半径。

电势能  $U$  位于何处？是在电荷周围吗？在讨论引力的时候，我们只提及系统的引力势能而没有对这样的问题作进一步探究。现在我们期望有一个较好的陈述，不过在静电范围内实际上无法说清楚能量究竟在何处。若过渡到电磁场，我们可以说哪儿有场那儿就有能量。利用算符的性质，我们可以证明下列积分就是电势能：在上式的第四行利用散度定理得到的一个闭合面积分，当闭合面远离电荷时可忽略不计：

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int E \cdot E d\tau \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int (-\nabla V) \cdot E d\tau \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int [-\nabla \cdot (VE) + V \nabla \cdot E] d\tau \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2} \oint VE \cdot dS \propto \frac{1}{r^3} r dr \rightarrow \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{2} \int V \rho d\tau \end{aligned} \quad (15.5.10)$$

所以能量可以用场来表示，电场的能量密度为

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \quad (15.5.11)$$

当把这一表达式用于点电荷时会出现问题.在这种情况下,有

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^\infty \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r} \Big|_0^\infty \end{aligned}$$

即当  $r \rightarrow 0$  时出现发散.当考虑如此小距离范围的能量密度时,点电荷的概念不再有意义.此时我们可以试着赋予点电荷一定的结构(球、球壳或其它形状),就能避免发散.解决此问题的另一途径是任能量无限大而只考虑能量的变化.

当两个电荷存在时,场是两者的场的叠加.相互作用能量是

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) d\mathbf{r} = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E}_1^2 d\mathbf{r} + \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E}_2^2 d\mathbf{r} \\ &\quad + \epsilon_0 \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\mathbf{r} \end{aligned}$$

利用(15.5.10)式所采用的方法,上式可以表示为

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2) d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2) \end{aligned}$$

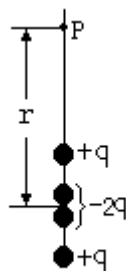
这恰恰是(15.5.4)式.这说明场的概念有助于我们理解(15.5.4)式或

## 习 题

15.1. 两个自由点电荷分别带电  $q$  和  $4q$ , 相距  $d$ . 若放入第三个点电荷并使整个系统保持平衡, 求第三个点电荷的位置和所带的电荷量. 该系统的平衡是稳定的吗?

15.2. 粗略估计一杯水中所有正电荷的电荷量. 设一杯水的体积为  $250\text{cm}^3$ .

15.3. 如图, 一种典型的电四极子是由两个电偶极子组成, 试证明在轴线上距中心  $r$  (设  $r \gg a$ ) 的  $P$  点的电场强度为



题15.3图

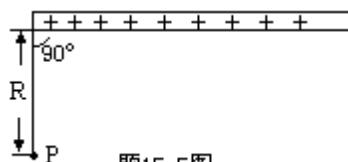
$$E = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 r^4}$$

式中  $Q = 2qa^2$  称为电荷分布的电四极矩.

15.4. 一个立方形的导体有 5 个面接地, 而第 6 个面与其余 5 个面绝缘, 电势为 0, 问立方体中心的电势是多少?

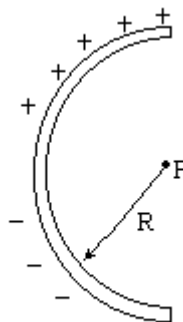
[答案:  $0/6$ ]

15.5. 如图所示, 一根半无限长的绝缘棒均匀带电, 电荷线密度为 . 试求图中 P 点的电场强度的大小及方向.



题15.5图

15.6. 一根细玻璃棒弯成半径为 R 的半圆形, 等量的正负电荷 +Q 与 -Q 分别均匀地分布在玻璃棒的上下两部分(如图). 求圆心 P 处的电场强度 E.

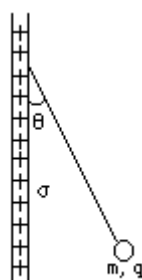


题15.6图

15.7. 一质量为  $m$ 、带电  $q > 0$  的粒子具有初动能  $T$ , 从无穷远处向一个带电量为  $Q$  的重原子核运动, 设该原子核在我们的实验室参照系中是固定的. (a) 如果带电粒子很精确地正对着原子核运动, 则粒子与核的最近距离是多少? (b) 若粒子的运动与(a)中相比有所偏离, 且粒子与核的最近距离为(a)中结果的两倍, 求粒子在最近处的速度大小.

[答案: (a)  $qQ / (4\pi\epsilon_0 T)$ ; (b)  $\sqrt{T/m}$ ]

15.8. 如图, 质量为  $m = 1.0 \times 10^{-3} \text{g}$  的小圆球带有电量  $2.0 \times 10^{-8} \text{C}$ . 用丝线将它悬挂在一块垂直放置的大绝缘带电板上, 丝线与板的夹角为 . 试计算板上的电荷面密度 .



题15.8图

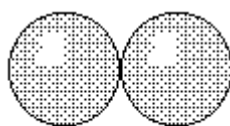
15.9 求具有相等厚度反型层而电荷密度为  $\rho(x) = -eax$  的 p-n 结的电场.  $a$  是常量.

[答案：  $E(x) = \frac{ea}{8\epsilon_0}(x_m^2 - 4x^2)$ ]

15.10. 求电荷密度为  $\rho = ax$  ( $x$ ) ( $d - x$ ) 的无限大电荷板的电场.  $a$ 、 $d$  是常量， $\rho$  为阶梯函数：

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

15.11 图中所示为  $^{235}\text{U}$  裂变时的理想化模型. 假设两裂片体积相等，带电量相同；并假设原先  $^{235}\text{U}$  的半径为  $8.0 \times 10^{-15}\text{m}$ ，原子核的组分具有相同的密度. (a) 计算两个裂片之间的相互排斥力；(b) 求两个裂片间的相互作用能.



题 15.11 图

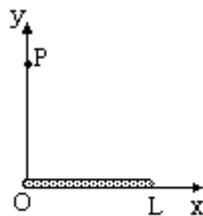
[答案：(a)  $3.0 \times 10^3\text{N}$  (b)  $240\text{MeV}$ ]

15.12. 电荷  $Q$  均匀分布在半径为  $r$  的球面上. 证明：带有电荷  $dq$  的小面元所受到的力沿径向向外，并由公式  $dF = \frac{1}{2}Edq$  给出，其中  $E$  为球面上的电场强度.

15.13. 给一半径为  $R_0$  的肥皂泡缓慢充以电荷  $q$ . 由于表面电荷的互相排斥，肥皂泡的半径将略微增大至  $R$ . 设大气压为  $p$ ，肥皂泡初始的体积为  $V_0$ ，则体积膨胀至  $V$  时，泡内压强将降为  $p(V_0/V)$ . 证明：

$$q^2 = 32 \pi^2 \epsilon_0 p R (R^3 - R_0^3).$$

15.14. 如图，长度为  $L$  的细棒水平放置在  $x$  轴上，其一端正位于原点 ( $x=0$ )，棒上电荷分布的线密度为  $\lambda = kx$ ，其中  $k$  为常量. (a) 设无穷远处的静电势为零，求  $y$  轴上一点  $P$  的电势. (b) 由 (a) 的结果计算  $P$  点场强的竖直分量  $E_y$ ；再利用积分的方法直接计算其结果. (c) 为什么  $P$  点场强的水平分量  $E_x$  不能由 (a) 的结果求导得到呢？



题 15.14 图

15.15 在两个半径分别为  $r_1$  和  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ) 的同心球之间填有电荷密度为  $\rho$  的绝缘物质. 求距球心  $r$  处的电势. 分别考虑：(a)  $r > r_2$ , (b)  $r_2 > r > r_1$ , (c)  $r < r_1$ . (d) 在  $r = r_1$  和  $r = r_2$  处电势连续吗？

## 第十六章 导体和电介质

导体的特征是具有大量的自由电子. 我们也可以从能量的观点来说明, 构成导体的原子的能级通常有不满的壳层, 例如,  $11\text{Na}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ . 当形成晶体的时候, 将存在能带(见第二十八章)而不是能级, 如图 16 - 1 所示. 在导体中存在一个满带, 一个禁带和一个导带. 在绝缘体中, 禁带较宽而导带是空的. 半导体也有一个空的导带; 但是其较窄的禁带造成了可变的电导, 出现热激发也是可能的.

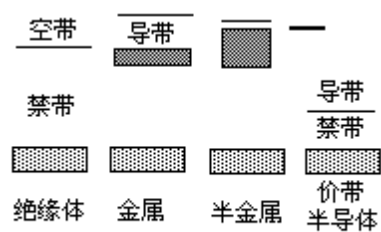


图16-1 能带结构示意图



## § 16.1 静电场中的均匀导体

从 § 15.3 我们知道：静电平衡意味着导体内部宏观电荷密度为零，导体内部电场  $E_{in} = 0$ ，电荷分布在表面上。这是在发现高斯定律或库仑定律以前就知道的实验事实。另外，导体表面切向电场  $E_{\parallel} = 0$ ，否则将有电荷沿表面流动。对表面上任意两点 A 和 B，我们有

$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (16.1.1)$$

即导体表面是等势面。 $E_{in} = 0$  也意味着导体中的电势直到非常接近表面的地方都是常数。由功的表达式

$$W_{BA} = q_0(V_B - V_A) \quad (16.1.2)$$

表明电势是连续的，所以我们有

$$V_{in} = V_s = C$$

这意味着整个导体是等势体。在大多数涉及导体的静电问题中，往往给出电势而不是电荷。至于电场的垂直分量，我们可以用高斯定律得到，为  $E_{\perp} = \sigma / \epsilon_0$ 。在微观尺度上，电场当然不是阶梯函数。图 16-2 显示了一个模型计算<sup>(1)</sup>的细节。

**静电屏蔽**(electrostatic shield-ing)现象如图 16-3 所示。导体中有一空腔。由于导体是等势体，空腔的边界即导体内壁的电势为常量。由于电势是连续的，可以期望空腔内电势也是常量。因此  $E = 0$ ，外部世界将不影响空腔内的情况。当在空腔内放入一带电体时，导体的内壁和外壁都将有感应电荷。对图中的高斯面应用高斯定律，可知内部的总电荷为零。即内壁感应的异号电荷总量恰和放入空腔的电荷抵消。而外壁电荷总量等于放入电荷。然而外壁电荷的分布只与导体的几何有关。即外壁电荷全然不知导体内部空腔壁或空腔内电荷的存在。实际上，由于导体内场强为零意味着内、外电荷没有相互作用。

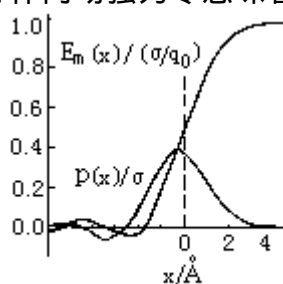


图16-2

当放入电荷与内壁接触时，它将与导体内壁的电荷中和。净效果相当于将放入空腔的电荷转移到导体(表面)上。\*这一过程被用来使范得格拉夫发电机(Van de Graff generator)的球形“帽子”充电直到很高的电势。

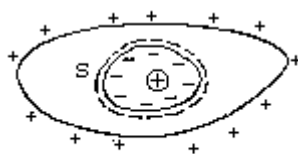


图16-3 静电屏蔽

所谓高压带电操作则主要是利用趋肤效应.

电荷面密度和表面曲率有关.所谓尖端放电,大致反映曲率半径小的地方电场强度大,或者说电荷密度大.一个简单的模型可以给我们一些概念.假定两个球形导体半径分别为  $r$ 、 $R$ , 带电  $q$ 、 $Q$ ; 用一细导线连接它们如图 16 - 4. 由于系统是等势体, 我们有



图16-4 电势和表面电荷

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

电荷面密度是

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \quad \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{R}{r}$$

就是说电荷面密度反比于曲率半径.由于表面附近电场强度正比于电荷面密度, 所以较小的曲率半径相应于较高的电场:

$$E \sim \frac{\sigma}{\epsilon_0} \sim \frac{1}{\rho}$$

电晕放电 (corona discharge) 现象是强电场引起的.尖端电极处于高电势时, 其周围的场强可以很高.当场强高达  $3 \times 10^6 \text{N/C}$  时, 空气中的少量离子被加速到很高的速度而撞击空气分子, 由此造成大量离子, 形成包围电极的电晕.空气分子因碰撞而发光, 因此可以看到辉光 (glow).

## § 16.2 电容

一个孤立导体的电容(capacitance)的操作性定义为：导体上的电荷  $q$  与电势  $V$  之比，即

$$C = \frac{q}{V}$$

电容依赖于导体的几何. 提供电容的器件就是电容器.

例如，半径为  $R$  的球或球壳的电势和电容分别为

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}, \quad C = \frac{q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

电容的 SI 单位是 F(法拉). 常用的还有  $\mu F$ 、 $pF$  等.

$$1F = 1C/V$$

$$1\mu F = 10^{-6}F$$

$$1pF = 10^{-12}F$$

两个导体 A、B 的电容可以定义如下：

$$C_{AB} = \frac{q_A}{V_A = V_B} \quad (16.2.2)$$

在平行板电容器中，如果忽略边缘效应，有电场

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

上下两板之间的电势差是

$$V_U - V_L = -\int E \cdot dl = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

于是电容为

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} d} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

利用电容的操作性定义，我们可以得到计算并联和串联电容的公式：

$$C_p = \sum_i C_i, \quad \frac{1}{C_s} = \sum_i \frac{1}{C_i} \quad (16.2.3)$$

例 16.1 求同心球壳的电容.

解：假定内外球壳的半径分别为  $R$  和  $R'$ . 让内球壳带电荷  $q$ . 间隙中的电场是

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} (R < r < R')$$

电势差是

$$V_R - V_{R'} = -\int_{R'}^R E \cdot dl$$

$$= \int_R^{R'} E \cdot dl$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} - \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)$$

我们有

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R'}$$

上式还可以改写为电容串联公式：

$$\frac{1}{C} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R}$$

而所求电容为

$$C = \frac{q}{V_R - V_R'} = 4\pi\epsilon_0 \frac{RR'}{R' - R}$$

当半径  $R$  趋向无穷时，它趋向于半径为  $R$  的孤立球壳的电容。当  $R$  和  $R'$  都趋向无穷而  $R' - R$  保持为常数  $d$ ，则系统变成平行板电容器，其电容

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R(R+d)}{d}$$

$$= 4\pi\epsilon_0 R^2 \frac{(1 + \frac{d}{R})}{d}$$

$$= \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

\*同心圆柱电容器的电容表达式是什么？试讨论类似的极限过程。

从 § 15.4 我们知道，能量储存在场中。假定电池做功，将电荷  $dq$  从平行板电容器的一个板移到另一板，则所做的功是

$$dW = V dq = \frac{q}{C} dq$$

即

$$W = \int dW$$

$$= \frac{1}{2C} q^2 = \frac{1}{2} C V^2 \quad U \quad (16.2.4)$$

$$U \text{ 即电场的能量，而能量密度是 } u = \frac{U}{Ad} = \frac{\frac{1}{2} C (\Delta V)^2}{Ad} = \frac{\frac{1}{2} \epsilon_0 A}{d} \frac{(\Delta V)^2}{Ad}$$

这正是(15.5.11)式。

\*下面我们讨论电容器极板的受力情况。当电容器极板上的电量固定时，外力拉开其中一板需做功

$$F_{ext} dx = -F_x dx = dU$$

极板所受的电力表达式为

$$F_x = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_q$$

我们已经知道面积为  $A$ 、间隔为  $d$  的平行板电容器中的能量为

$$U = \frac{1}{2C} q^2 = \frac{x}{2\epsilon_0 A} q^2$$

于是力为

$$F_x = - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_q = - \frac{1}{2\epsilon_0 A} q^2$$

这是吸力，当然是可以预料到的。

当电容器两极板和电池相连接时，电势差是常量。这种情况下外力(抵抗电力  $F_x$ )做功和电池做功使能量增加：

$$-F_x dx + dW^B = dU$$

其中，电池所做的功

$$dW^B = V dq = d(qV) = d[C(\Delta V)^2] = 2dU$$

因此

$$F_x dx = dU$$

静电力

$$F_x = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_{\Delta V}$$

由于能量的表达式为

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{x} (\Delta V)^2$$

相应的力是

$$F_x = - \frac{\epsilon_0 A}{2x^2} (\Delta V)^2$$

## § 16.3 电导率和欧姆定律

金属是导体，它的载流子是电子. 电解液(electrolyte)和等离子体(plasmas)也是导体，它们分别以离子或离子和电子为载流子. 下面采用简单的模型来研究导体中的电流，当数密度为  $n$  的自由电子在导体中运动时，电流密度为

$$\mathbf{J} = n(-e)\langle \mathbf{v} \rangle \quad (16.3.1)$$

可以求得平均速度

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}(k_B T) + \mathbf{v}_{\text{drift}}(E) \rangle = \langle \mathbf{v}(E) \rangle = \frac{-eE}{m} \tau \quad (16.3.2)$$

其中， $\tau = \bar{\lambda} / V_{\text{rms}}$ . 于是电流密度为

$$\mathbf{J} = \frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E} \quad (16.3.3)$$

式中  $\sigma$  称作电导率(conductivity). 如果电导率是常量，上面的关系称为欧姆定律(的微分形式). 电导率是导体的特征量，其 SI 单位是  $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ . 表 16 - 1 列出了一些物质的电导率的值.

电导率可以不是标量而是张量，这意味着  $x$  方向的电场可以引起  $y$  方向的电流密度. 其次电导率可以依赖于场，这就是说在电流密度和场之间可能存在非线性效应. 我们将利用电阻率或电阻来表达这一点.

表 16 - 1 电导率

材料	电导率/ $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$
银	$6.2 \times 10^7$
铜	$5.8 \times 10^7$
水	$2 \times 10^{-4}$
熔石英	$10^{-17}$

电流可以通过以下关系与电阻以及电阻上的电压相关：

$$\begin{aligned} I &= JA = \sigma EA \\ &= A \frac{V}{\ell} = \frac{V}{\rho \frac{\ell}{A}} \\ &= \frac{V}{R} \end{aligned}$$

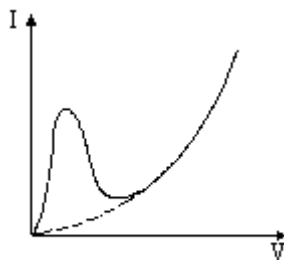


图 16-5 非线性  $V$ - $I$  曲线

上面出现的电阻  $R$  只有当它是常量时才有意义. 换言之，电压与电流间有线性关系. 在某些情形， $V$  -  $I$  曲线并不是直线. 图 16 - 5 是隧道二极管相应的

曲线.在这种情形，可以不用一般的电阻概念，而定义微分电阻：

$$R = \frac{dV}{dI} \quad (16.3.4)$$

当微分电阻小于零时，我们有所谓的负阻效应。

通常金属的电导率随温度上升而减小，电介质和半导体的趋势是不同的，电导率随温度上升而上升。

\*电流可以认为是电荷的输运。

$$J_e = -e n \nabla V$$

这个方程完全类似于能量输运方程：

$$J_Q = -\kappa \nabla T$$

传导电子也输运能量和动量。人们可以期望在电导率和热导率之间存在某些关系。1900年特鲁得(Drude)曾用自由电子模型推导了热导率 $\kappa$ 和电导率 $\sigma$ 之间的一个关系，时间是在汤姆孙发现电子后的第三年。特鲁得想象电子是气体分子那样的经典粒子，遵守麦克斯韦分布。所以热容量是

$$C_V = \frac{3}{2} \frac{n}{N_A} R$$

$$= \frac{3}{2} n k_B$$

式中 $n$ 是数密度。他又假定电子以方均根速度 $v_{rms}$ 运动，故热导率为

$$\kappa = \frac{1}{3} v_{rms} \bar{\lambda} n \left( \frac{3}{2} k_B \right)$$

与电导率的表达式

$$= \frac{ne^2 \tau}{m} \approx \frac{ne^2}{m} \frac{\bar{\lambda}}{v_{rms}}$$

相结合，可得比率是

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{1}{2} m v_{rms}^2 \frac{k_B}{e^2}$$

$$= \frac{3}{2} k_B T \frac{k_B}{e^2}$$

或者构成普适常量形式：

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{3}{2} \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 1.11 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{ } / \text{ K}^2$$

正确的理论结果应是

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 = 2.43 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{ } / \text{ K}^2$$

除了概念上的错误以外，特鲁德还犯了一个数值上的错误，并因此得到了所求的比率为 $2.22 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{ } / \text{ K}^2$ 。他的结果与当时的实验吻合得“非常好”。这一成果大大鼓舞了物理学家对固体理论的研究。可是后来人们发现他的热容值比正确值大了一百来倍，而速率比正确的平均速率小了一百多倍。问题的关键是电子遵守的是费米-狄拉克统计(见第二十七章)。

## § 16.4 电介质

我们可以列举另一类所谓电介质的物质：纸张、空气、熔石英、塔夫隆、琥珀、云母、真空等等。电介质的特性是电绝缘性，其中的电子作绕核运动而不是自由运动。如果考虑单位体积的物质，我们有偶极矩密度——极化强度 (polarization)：

$$\frac{d(\sum p)}{dV} = P = n \cdot p \quad (16.4.1)$$

式中是  $n$  偶极密度。可以用极化强度予以很好描述的物质叫做电介质。电介质分三类：极性电介质、非极性电介质和铁电体。

极性电介质 (polar dielectric) 的分子有永久电偶极矩。例如：

$$\text{H}_2\text{O}, 6.03 \times 10^{-30} \text{C} \cdot \text{m}$$

$$\text{CO}, 4.00 \times 10^{-30} \text{C} \cdot \text{m}$$

$$\text{HCl}, 3.43 \times 10^{-30} \text{C} \cdot \text{m}$$

在极性电介质中，我们考虑的对象是原子或分子的电偶极矩。一个自由电偶极子在电场中有势能

$$U = -p \cdot E + C = pE \cos \theta + C \quad (C \text{ 为常量})$$

如果大数偶极子遵从玻耳兹曼统计，则偶极矩的平均为

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \frac{\int p e^{-U/k_B T} d\Omega}{\int p e^{-U/k_B T} d\Omega} \\ &= kp \frac{\int \cos \theta e^{\eta \cos \theta} d \cos \theta}{\int e^{\eta \cos \theta} d \cos \theta} \end{aligned} \quad (16.4.2)$$

式中  $\eta = pE/k_B T$ ，由此可得出

$$\begin{aligned} \frac{\langle p \rangle}{p} &= k \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \int_{-1}^1 e^{\eta y} dy \\ &= k \left( \coth \eta - \frac{1}{\eta} \right) \end{aligned} \quad (16.4.4)$$

括号中的函数称为朗之万函数 (Langevin function)，如图 16-6 所示。在通常的温度下， $\eta < 1$ ，即使电场  $E$  高到材料的介电强度仍然如此。在此条件下，曲线呈线性关系，朗芝万函数给出

$$\begin{aligned} \frac{\langle p \rangle}{p} &= k \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \int_{-1}^1 e^{\eta y} dy \\ &= k \left( \coth \eta - \frac{1}{\eta} \right) \end{aligned} \quad (16.4.3)$$

可以看出，除了数值因子偶极矩的大小以外，决定因素是势能和热运动能量之比。热运动使各偶极子趋向混乱，平均值变小；电场则趋向使偶极子排列整齐，平均值变大。通常我们写



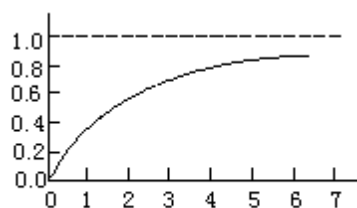


图16-6 朗之万函数

$$P = \epsilon_0 E \quad (16.4.5)$$

比例系数 称作极化率(susceptibility).

非极性电介质(non-polar dielectric)分子没有永久偶极矩.这种介质的例子有氧、氮等等.一个电子绕核运动可以看作是一个旋转的电偶极子.我们可以问所有偶极矩之和是否有限?根据物理情况,大体上应该为零.那么当加上一个电场以后,会怎样呢?有理由想象存在一个有限的偶极矩.在外场的作用下,电子云发生形变,负电中心相对于核出现位移造成了感应偶极矩.从 § 15.3 最后一例知,感应电偶极矩为

$$\begin{aligned} p &= 4 \pi \epsilon_0 R^3 E_0 \\ &= \epsilon_0 E_0 \end{aligned}$$

对双原子分子,这一模型预言:

$$p = 2 \pi \epsilon_0 E_0$$

除了电场以外,引力、惯性力、胁强也可以引起感应矩.

铁电体(ferroelectric)有自发电极化强度,即使没有外场材料本身也有有限的电极化强度.铁电体的电极化强度数值不大但能任意翻转.钛酸钡(Barium titanate, BaTiO<sub>3</sub>)就是例子.

介电强度是使得电介质被击穿的电场强度.例 15.10 给出了干空气的介电强度为  $3 \times 10^6 \text{ V/m} = 3 \text{ kV/mm}$ .

由于历史的原因,更多的是用介电常数来描述电介质而不是用电极化率.当然它们是密切相关的.

## § 16.5 电矢量

法拉第发现：如果在电容器的两板间插入电介质(如云母)而保持电势差不变，板上的电荷量将变大即  $q_d > q$ . 因此电容也发生了变化：

$$\frac{C_d}{C} = \frac{q_d}{q} \quad \epsilon_r \geq 1 \quad (16.5.1)$$

如果保持电荷不变而插入电介质，我们将有一个较小的电势差，因此

$$\frac{C_d}{C} = \epsilon_r = \frac{\Delta V}{\Delta V_d} \quad (16.5.2)$$

上两个结果是一致的.

有电介质的平行板电容器的电容

$$C_d = \epsilon_r C = \epsilon_r \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon A}{d} \quad (16.5.3)$$

其中  $\epsilon_r$  叫做介电常数或介电函数.  $\epsilon_r$  是相对介电常数，是无量纲量. 对于云母，相对介电常数  $\epsilon_r = 5.4$ .

一般介电函数是外场的频率的函数. \* 例如，离子晶体的介电函数与外场的角频率的关系有如下结构：

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(\infty) + \frac{\epsilon(\infty) - \epsilon(0)}{\frac{\omega^2}{\omega_p^2} - 1}$$

其中  $\epsilon(0)$  是静态介电常数，而高频介电常数  $\epsilon(\infty)$  与折射率  $n$  有关 [见 (21.1.7)]：

$$\sqrt{\epsilon(\infty)} = n$$

介电函数是基础研究和材料研究中极其重要的物理量之一. 除了光学性质以外，它也能反应介质的其它性质诸如粒子束在介质中的能量损失等等.

充有电介质的电容器电势差较小，原因是介质表面的感应电荷  $q'$  部分地抵消了自由电荷  $q$  的作用. 对图 16-7 所示的高斯面运用高斯定律，有

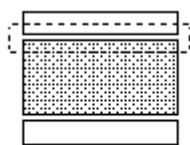


图16-7 充有电介质的电容器

$$\epsilon_0 E_d A = q - q'$$

$$E_d = \frac{q - q'}{\epsilon_0 A}$$

电场也可以完全用自由电荷来表示：

$$E_d = \frac{\Delta V_d}{d} = \frac{\Delta V}{\epsilon_r d} = \frac{E}{\epsilon_r} = \frac{q}{\epsilon_r \epsilon_0 A}$$

容易求得两种电荷之间的关系：

$$q - q' = \frac{q}{\epsilon_r}$$

$$q' = q(1 - \frac{1}{\epsilon_r})$$

我们可以把高斯定律写成下面的形式：

$$\oint_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q - q'$$

$$= \frac{q}{\epsilon_r}$$

或

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_f \quad (16.5.4)$$

其中  $\mathbf{D}$  是电位移(electric displacement)矢量：

$$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (16.5.5)$$

我们把(16.5.4)式作为高斯定律的最终形式.

例 16.2 求插有电介质片的电容器的电容(图 16-8).

解：情形 1： $q$ =常量.

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}, \quad q = C_0 V_0, \quad E_0 = \frac{\Delta V_0}{d}$$

在空隙中，电场

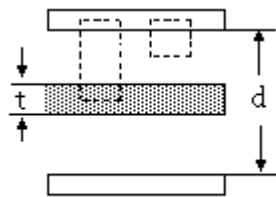


图16-8 例16.2

$$E_{\text{gap}} = \frac{q}{\epsilon_0 A} = \frac{q}{C_0 d} = \frac{\Delta V_0}{d} = E_0$$

$$Dd = \frac{q}{A} = \epsilon_r \epsilon_0 E_d$$

在电介质中，我们可以先求  $\mathbf{D}$ ，这不牵涉极化电荷.

$$E_d = \frac{q}{\epsilon_r \epsilon_0 A} = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

电势差是

$$V = - \int_L^U \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^d E d\ell = E_0(d - t) + E_d t$$

$$= E_0[d - t(1 - \frac{1}{\epsilon_r})] = \frac{\Delta V_0}{d}[d - t(1 - \frac{1}{\epsilon_r})] < V_0$$

电容是

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\Delta V_0}{\Delta V} = \frac{d}{d - t(1 - \frac{1}{\epsilon_r})} = \begin{cases} 1 & t \rightarrow 0 \text{ 或 } \epsilon_r \rightarrow 1 \\ \epsilon_r & t \rightarrow d \end{cases}$$

情形 2：  $V$ =常量.

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}, \quad q_0 = C_0 V_0, \quad E_0 = \frac{\Delta V}{d}$$

在空隙和电介质中，电场分别为

$$E_{\text{gap}} = \frac{q}{\epsilon_0 A}, \quad E_d = \frac{q}{\epsilon_r \epsilon_0 A}$$

其中  $q$  为未知量. 从电势差计算发现：

$$\begin{aligned} V &= E_{\text{gap}}(d - t) + E_d t \\ &= \frac{q}{\epsilon_0 A} \left[ d - t \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \right] \end{aligned}$$

于是电荷为

$$\begin{aligned} q &= \frac{\Delta V \epsilon_0 A}{d - t \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right)} \\ &= q_0 \frac{d}{d - t \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right)} \end{aligned}$$

而电容比率为

$$\frac{C}{C_0} = \frac{q}{q_0} = \frac{d}{d - t \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right)}$$

在两种情形下，电容都一样，这是当然的. 但电场却可以不一样，例如，在后一种情形下，有  $E_d > E_0$  .

我们可以重写上例中电荷关系为

$$\frac{q}{A} = \epsilon_0 \frac{q}{\epsilon_r \epsilon_0 A} + \frac{q' d}{A d}$$

等式右边第二项是极化电荷面密度  $\sigma_p = P \cdot e_n$  的特例，整个关系式是下列构成关系 (Constitutive relation) 的特例：

$$D = \epsilon_0 E + P \quad (16.5.6)$$

当电极化强度与外电场成正比  $P = \epsilon_0 \chi E$  时，我们有

$$\epsilon_r E = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi E \quad (16.5.7)$$

$$\epsilon_r = 1 + \chi$$

在介质分界面附近，场量满足边界条件 (boundary conditions). 对图 16-9 所示高斯面应用高斯定律，可得到

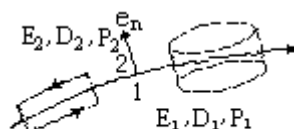


图16-9 边界条件

$$\epsilon_0 [E_2 \cdot e_n + E_1 \cdot (-e_n)] A = \sigma A$$

$$(E_2 - E_1) \cdot e_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (16.5.8)$$

对电位移矢量，我们有

$$(D_2 - D_1) \cdot e_n = f \quad (16.5.9)$$

当不存在自由电荷时，电位移的法向分量连续， $D_{1n} = D_{2n}$ ，或  $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$ 。当材料 1 是导体时， $E_1 = 0$ ， $D_n = f$ 。

从跨界面的无限小路径的功的表示式[参见(16.1.2)式]，可知界面两边的电势是连续的。沿图16-9所示的环路积分  $\oint E \cdot dl = 0$  得到

$E_{2t} = E_{1t}$ ，说明电场的切向分量连续。

当牵涉到电介质时，静电能量及能量密度公式应作修改。根据充有电介质的电容器的例子，我们可以得到一个方程，实际上它是一般表式的特例。当电容器充以电介质时，电容将增加到  $\epsilon_r C_0$ 。从能量表达式出发，我们有电场能量

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} (\epsilon_r C_0) (\Delta V)^2$$

能量密度是

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{1}{Ad} \frac{1}{2} \left( \epsilon_r \frac{\epsilon_0 A}{d} \right) (\Delta V)^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Delta V}{d} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 \Delta V}{d}$$

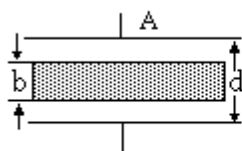
它是下面一般表式的特例：

$$u = \frac{1}{2} E \cdot D \quad (16.5.10)$$

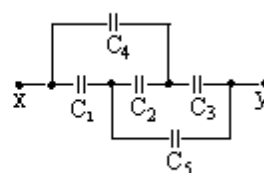
## 习 题

16.1. 如图，厚度为  $b$  的铜片插入一平行板电容器中。铜片处于两平板的正中间。求铜片插入前及插入后电容器的电容。

16.2. 求图中  $x$  与  $y$  间的等效电容。假设电容  $C_2 = 10 \mu F$ ，且其它电容均为  $4.0 \mu F$ 。



题 16.1 图



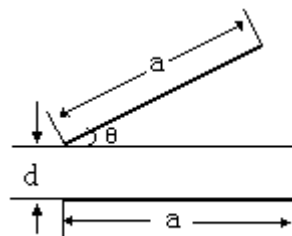
题16.2图

16.3. 如图，一电容器的两平板均为边长为  $a$  的正方形，但彼此形成一角度  $\theta$ 。证明：当  $\theta$  较小时，该电容器的电容由下式给出：

$$C = \frac{\epsilon_0 a^2}{d} \left( 1 - \frac{a\theta}{2d} \right)$$

16.4. 厚度为  $b$ ，介电常数为  $\epsilon_r$  的电介质置于平板电容器之间，平板面积为  $A$ ，两极板相距  $d$ 。电介质插入前将电容器充电至电势差  $V_0$ ，然后便断开

电源.假设  $A = 100\text{cm}^2$ ,  $d = 1.0\text{cm}$ ,  $b = 0.50\text{cm}$ ,  $r = 0$ ,  $V_0 = 100\text{V}$ . (a) 计算介质板插入前的电容  $C_0$ ; (b) 计算极板上的自由电荷; (c) 分别计算极板间空气隙和介质中的电场强度; (d) 计算介质板插入后两极板间的电势差; (e) 有百分之几的电场能量储存在空气隙中? 又有多少储存在介质板中?



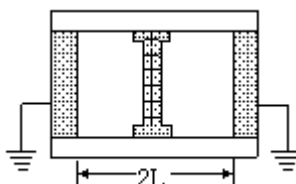
题16.3图

16.5. 一个带总电荷  $Q$ 、半径为  $R$  的导体球被切成两半, 若要保持两半球还在一起, 需要多大的力?

[答案:  $\frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2}$ ]

16.6. 有一内半径为  $R$ , 外半径为  $R$  的柱形长电容器, 试求单位长度上的电容. 若在外筒壁上有细微的凸起, 试定性分析会产生什么结果.

16.7. 如图, 一密封容器的两个相对的侧面是两块接地的导体, 容器内有一竖直的面积为  $A$  的导体隔板带有电荷  $Q$ , 该隔板与容器的其他部分是绝缘的, 并且能不漏气地沿容器内壁无摩擦地滑动. 开始时隔板两边的空气的压强均为  $p_0$ , 求隔板处于平衡时的位置.



题 16.7 图

[答案: 距容器中间  $L(1 - \frac{4p_0 A^2}{\epsilon_0 Q^2})^{1/2}$ ]

16.8. 由两同轴金属柱构成一空气电容器, 内、外圆柱半径分别为  $R_1$ 、 $R_2$ . (a) 在大气介质不被击穿的前提下, 应该如何选择内圆柱的半径以使两导体的电势差最大; (b) 在同样的前提下, 应如何选择内半径以使电容器的贮能最大.

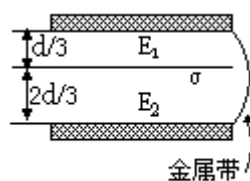
16.9. 已知一个平行板电容器, 极板面积为  $0.2\text{cm}^2$ , 间隙为  $1\text{cm}$ , 充电至  $1000\text{V}$  后断开电源. (a) 若把极板间隙拉开一倍, 需要作多少功? (b) 电容器的终了电压是多少?

[答案: (a)  $8.9 \times 10^{-5}\text{J}$ ; (b)  $2000\text{V}$ ]

16.10. 如图, 两块大的金属平板, 彼此相距为  $d$ , 它们的一个末端由一金属带连接. 有一塑料薄片, 电荷面密度为  $\sigma$ , 置于两金属板之间, 与上板距离为  $d/3$ . 试求靠近上板和下板的电场  $E_1$  和  $E_2$ .

16.11. 已知两个平行板电极相距  $d$ , 电势分别为  $0$  和  $V_0$ . 如果低电势的电极上有一电子源, 电子从中由静止开始运动, 忽略碰撞, 求两极板间所流过

的空间电流密度.



题16.10图

[答案:  $-\frac{4\epsilon_0 V_0}{9d^2} \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$ ]

## 第十七章 磁场

### § 17.1 磁场

天然磁石或永久磁铁有南北两磁极,磁极间或吸引或排斥.这与电荷有正负,电荷间或吸引或排斥非常相似.我们关心的是磁作用是超距作用还是通过场而作用呢?也同样关心是否存在磁单极以及磁性的起源等问题.人们发现除了磁铁—磁铁相互作用以外,电流—磁铁、电流—电流之间也都存在这类相互作用.

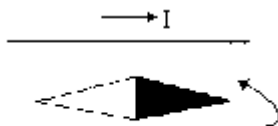


图17-1 奥斯特实验

1819年,丹麦教师奥斯特(Hans Christian Oersted)在一次课上做了一个演示实验,以证明电与磁之间没有联系.他在一磁针附近的导线中通以电流.用他的学生的话来说,当看到磁针震荡得很厉害时,他非常困惑而惊讶.这就是电流的磁效应(图 17-1).用带电螺线管来做实验发现其作用就象一根永久磁铁.一方面,磁铁可以吸引或排斥带电线圈,另一方面磁铁也可以用另一带电线圈代替.

对于磁性,超距的概念和场的概念在历史上几乎是同时出现的.1820年10月,毕奥-萨伐尔(Biot-Savart)给出了电流周围磁场的定量关系式.同年12月安培(Ampère)提供了电流—电流相互作用的表示式.

我们首先来考察有关磁场力的实验事实.在永久磁铁、载流导体或运动电荷附近,静止电荷不受力,即  $v = 0$  导致  $F = 0$ ;而运动电荷将感受到力.设一检验电荷  $q_0$  以速度  $v$  运动,所受力为  $F$ .容易测得力的大小与  $v$ 、 $q_0$  成正比.磁场的方向通过下列步骤确定:

- (1)改变  $v$  而保持速率不变,发现力  $F$  总是垂直于  $v$ .
- (2)当  $v$  在某些方向时,  $F = 0$ .定义该方向为磁感强度  $B$  的方向.
- (3)当  $v$  垂直于  $B$  时,力达到极大  $F_{\max}$ .定义  $B = F_{\max}/q_0v$ .于是我们可以

归纳出矢量  $B$  满足下面的关系,

$$F = q_0 v \times B \quad (17.1.1)$$

实际上这正是磁感强度  $B$  的操作性定义.磁感强度的 SI 单位是 T(特斯拉):

$$1T = 1N/(A \cdot m) \quad (17.1.2)$$

永久磁铁、载流导体或运动电荷都可以在它们的周围产生磁场.现在我们来集中考虑恒定电流的磁效应.

安培提出了一个类似于库仑定律的公式.他指出载流线圈  $I_1$  和  $I_2$  之间的作用力为(参见图 17-2)



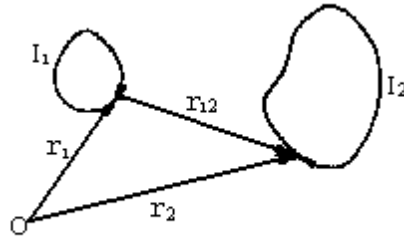


图17-2 安培定律

$$F_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{2,1} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} \quad (17.1.3)$$

式中

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

是真空磁导率(permeability). (17.1.3) 式中的一部分可以定义为磁感强度

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (17.1.4)$$

这就是毕奥-萨伐尔定律, 由毕奥-萨伐尔和拉普拉斯于 1820 年 10 月提出. 在 (17.1.4) 式中位置矢量  $\mathbf{r}$  从源点(电流元)指向场点. 这样 (17.1.3) 式可写为

$$F_{21} = \oint I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_2 \quad (17.1.5)$$

其中  $\mathbf{B}_2$  指电流环 1 在电流环 2 的线元  $d\mathbf{l}_2$  处产生的磁感强度. 一个电流元对磁场的贡献是

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (17.1.6)$$

\*(17.1.4) 式还可以写为

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint d\mathbf{l}' \times \left( -\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint (\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}) \times I d\mathbf{l}' \end{aligned} \quad (17.1.7)$$

注意电流的线积分可以化作电流密度的体积分:

$$\int_C I d\mathbf{l} = \int_C I d\boldsymbol{\ell} = \int_{CS} (\mathbf{J} d\mathbf{S}) d\boldsymbol{\ell} = \int_{\tau} \mathbf{J} d\tau$$

磁感强度可以表达为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau'$$

利用矢量分析公式

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{f}) = \varphi (\nabla \times \mathbf{f}) + (\nabla \varphi) \times \mathbf{f}$$

我们可以把上式改写为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathbf{r} - \mathbf{r}'} d\tau' \\
 &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})
 \end{aligned}
 \quad (17.1.8)$$

例 17.1 求通电长直导线的磁场.

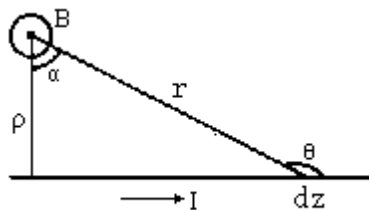


图17-3 例17.1

解：根据(17.1.6)式可以决定  $\mathbf{B}$  在  $\phi$  方向.

$$dB = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi r^2} \sin \theta$$

利用变量变换：

$$\sin \theta = \cos \alpha$$

$$\frac{dz}{r^2} = \frac{\rho^2}{r^2} \frac{dz}{\rho} \frac{1}{\rho} = \frac{dz}{\rho}$$

得磁场是

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}$$

例 17.2 求有限宽度  $b$  的无限长通电导体板周围的磁场.

解：如图所示，将平板划分成无数细条. 细条  $dx$  在  $P$  点所贡献的磁感强度为

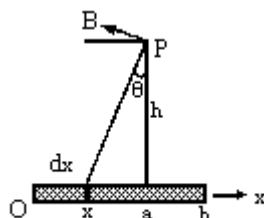


图 17-4 例17.2

$$\begin{aligned}
 dB(h, a) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2(\frac{1}{b} dx)}{r} (-\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b} \frac{-h\mathbf{i} + (a-x)\mathbf{j}}{(a-x)^2 + h^2} dx
 \end{aligned}$$

对宽度积分，得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(h, a) &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_0^b \frac{h\mathbf{i} + (x-a)\mathbf{j}}{(a-x)^2 + h^2} dx \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \left[ \left( \arctan \frac{b-a}{h} + \arctan \frac{a}{h} \right) \mathbf{i} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(b-a)^2 + h^2}{a^2 + h^2} \right) \mathbf{j} \right]
 \end{aligned}$$

试讨论  $P$  点远离平板的情形.

例 17.3 求沿圆环电流垂直轴的磁场.

解：设圆环半径为  $R$ ，取柱坐标系，如图所示，注意到位置矢量可以表达为

$$\mathbf{r} = R\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{k}$$

于是我们直接有

$$\begin{aligned} d\mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I R d\varphi \times (z\mathbf{k} - R\mathbf{e}_\rho)}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(z^2 + R^2)^{3/2}} d\varphi (ze_\rho + R\mathbf{k}) \\ \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{k} \end{aligned}$$

其中没有电荷环电场中的  $\text{sgnz}$  那样的项. 定义磁偶极矩 (magnetic dipole moment) 为

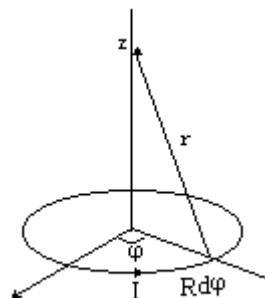


图17-5 例17.3

$$\mu = IS = R^2 I \pi \quad (17.1.13)$$

简称磁偶极或磁矩. 利用它  $\mathbf{B}$  可以表示为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \approx_{z \gg R} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{z^3}$$

在任意(远源)场点，有

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\mu \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r - \mu]$$

例 17.4 求线电流圆环平面上的磁场.

解：结合上面的结果，参见图 17-6，我们可以得到在圆心处的磁场为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 2\mu}{4\pi R^3}$$

无穷远处磁场趋于零，而靠近圆环导线时，磁场趋向无穷.

例 17.5 计算图 17-7 中一个旋转电荷圆盘沿轴的磁场  $\mathbf{B}$ .

解：设圆盘的电荷面密度  $\sigma$ . 取柱坐标系，磁感强度的  $z$  分量是

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dip^2}{r^3} 2\pi$$

式中

$$di = \frac{dq}{dt} = \frac{\sigma(\rho d\varphi dp)}{dt} = \sigma\omega\rho dp$$

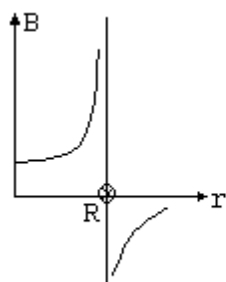


图17-6

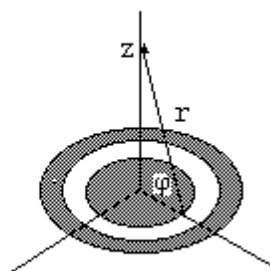


图17-7

经过简单积分，我们得到

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} \sigma \left[ \frac{2z^2 + R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} - 2|z| \right]$$

例 17.6 有人提出地球的磁偶极矩是地球内部的环流造成的. 若如此，试用前面的结果估算这一环流.

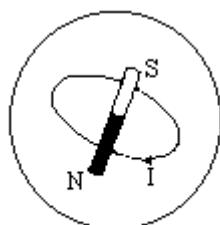


图17-8 例17.6

解：假定环流的半径为 5000km. 由于极点附近的磁场约  $10^{-4}\text{T}$ ，而

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I R^2}{r^3}$$

因此电流约为

$$I = \frac{B r^3}{\frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi R^2} \approx 3.4 \times 10^9 \text{ A}$$

例 17.7 求图 17-9 中沿螺线管轴的磁场 B.

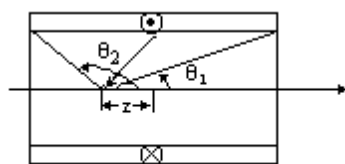


图17-9 例17.7

解：设螺线管半径为 R，单位长度匝数为 n，则轴线上的磁场为

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I (ndz) R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

用变量变换  $z = R \cot \theta$ ，得

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi n I d(\cot \theta)$$

积分将得到

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} 2 \pi n I (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

对于无限长螺线管， $\theta_1$  和  $\theta_2$  分别为 0 和  $\pi$ 。于是

$$B_z = \mu_0 n I$$

\*在(17.1.8)式中出现的量  $A$  称为矢量势。在求磁场时可以先求矢量势，再求其旋度而得到磁感强度。对于一个理想螺线管，在柱坐标系中，有

$$\text{内部: } \begin{cases} B_r = B_\phi = 0 \\ B_z = B \end{cases}$$

$$\text{外部: } B = 0$$

可以验证下列矢量势正好导致以上的磁场：

$$\text{内部: } \begin{cases} A_r = A_z = 0 \\ A_\phi = \frac{Br}{2} \end{cases}$$

$$\text{外部: } \begin{cases} A_r = A_z = 0 \\ A_\phi = \frac{BR^2}{2r} \end{cases}$$

$$\text{利用 } B_z = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right]$$

容易求得螺线管内外唯一不为零的磁场分量是

$$\text{管内: } B_z = B$$

需注意的是矢量势为零与否并不与磁场对应。这一点似乎是相当奇怪的。在(17.1.8)式中引入矢量势时仅仅作为一个辅助的量，并没有赋予其任何物理意义。因此矢量势为零与否不与磁场对应这件事没有什么可以进一步评论的。另外矢量势不是唯一的。这一点和一般的势函数一样。但是对于矢量势而言，不单可以差一个常量；从矢量分析知道，任何函数的梯度都是无旋的，所以矢量势加上一个任意函数的梯度

$$A \rightarrow A + \nabla \chi$$

将不会对磁感强度产生任何影响。

## § 17.2 磁高斯定律和安培环路定律

磁高斯定律(magnetic Gauss law)的表示式是电磁学的基本方程之一. 通过面积  $S$  的磁通量定义为

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (17.2.1)$$

磁通量的 SI 单位是 Wb(韦伯),

$$1\text{Wb} = 1\text{T} \cdot \text{m}^2$$

磁高斯定律说:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (17.2.2)$$

对应于静电情形的表达式, 我们有高斯面内的电荷作为电场线的源. 现在, 右边的 0 意味着不存在磁感应线的源. 换句话说不存在磁荷或磁单极子.

安培环路定律(Ampère's Circuital law)的表示式也是电磁学的一个基本方程. 在静电情形下,

$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

因此, 我们说静电场是无旋的. 对于磁场, 则环路积分不为零.

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I \quad (17.2.3)$$

这就是安培环路定律. 根据(17.1.7)式我们可以“推导”出(17.2.3)式, 反之亦然(要用到一些矢量分析的知识). 那么两者中哪一个更

基本或者是否等价呢? 实际上, (17.1.7)式或(17.1.4)式只是定义式而已. (17.2.3)式则是电磁学的一个基本方程. 需要注意的是方程中的面积  $S$  是以环路  $C$  作为其边界的; 环路与曲面法线成右手螺旋关系. 环路的方向可以随意选择而不影响物理结果. (17.2.3)式右边的电流  $I$  是流过面积  $S$  正方向的数值. 由此我们可以用“右手法则”决定磁感应线的

方向: 以右手握住导线, 拇指沿电流方向, 则四指大致表明了绕电流的磁场的方向. 然而, 我们从例 17.1 早就知道了磁场的确切方向, 那是根据毕奥-萨伐尔定律直接求得的. 这说明“法则”可以用, 定律是根本. (17.2.3)式适用于静态情形, 即电场或其通量不随时间变化, 也没有磁性材料的影响. 也许你可以猜测磁性材料的介入将要求方程有所改变, 就象静电情形一样:

$$\oint_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_f \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_f$$

例 17.8 用安培定律求长直通电导线的磁场.

解: 由于对称性, 选垂直导线平面内以导线为圆心的圆形环路, 有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_\phi 2\pi\rho = \mu_0 I$$
$$B_\phi = \frac{\mu_0 2I}{4\pi\rho}$$

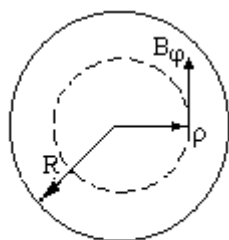


图17-10

例 17.9 求均匀通电的无限长圆柱的磁场.

解: 设图 17-10 剖面上电流密度为  $J = I / \pi R^2$ . 在圆柱内, 有

$$B_\phi 2\pi\rho = \mu_0 I_{in} = \mu_0 I \pi \rho^2 / R^2$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{\rho}{R}$$

柱外磁场即为例 17.8 的结果.

例 17.10 求理想螺线管的磁场 B.

解: 对于一无限长螺线管我们期望磁场全都在管内.

$$B_{in}L = \mu_0 nLI$$

$$B_{in} = \mu_0 nI$$

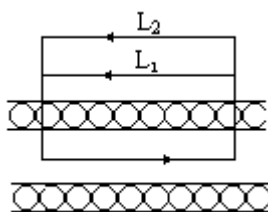


图17-11

为了确信外部的  $B_z$  是零, 我们取如图 17-11 所示两个环路, 它们的主要不同是在外部. 由于对称性, 任何径向分量将抵消. 由于所围电流相同, 我们有

$$\int_{L_1} B_z(L_1) dz = \int_{L_2} B_z(L_2) dz, \quad B_z(L_1)L_1 = B_z(L_2)L_2$$

$$B_z(L_1) = B_z(L_2)$$

即是常量. 为了避免能量困难, 取此值为零. 实验家的态度则是直截了当地进行测量.

在螺线管外部我们可以发现一个  $B_\phi$  分量. 在距离远大于螺线管半径的地方, 紧绕或松绕并没有什么差别. 垂直于轴的环路平面只切割一根导线. 在远处看来螺线管和直导线在这里几乎是等同的, 所以

$$B_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{\rho}$$

与  $z$  分量相比:

$$\frac{B_\phi}{B_z} = \frac{1}{2\pi n\rho}$$

取  $n = 5000/\text{m}$ ,  $R = 0.04\text{m}$ , 比值仅为  $10^{-3}$ .

例 17.11 求通电螺绕环(toroid)的磁场 B.

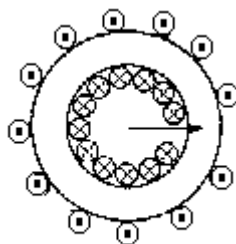


图17-12 例17.11

解：安培环路定律给出

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 NI$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

$N$  为环上线圈匝数.形式上很象长直导线的结果,意义当然不同.取大半径极限,有

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} B_\phi &= \lim_{r \rightarrow \infty} \mu_0 \frac{N}{2\pi r} I \\ &= \mu_0 nI \end{aligned}$$



### § 17.3 磁力

磁场对电荷和电流会施加作用力。磁偏转和磁约束广泛用于很多科学和技术领域，就是磁力作用的结果。下面先讨论磁场对电流和电流环的作用。(17.1.5)式给出

$$\mathbf{F} = \oint \mathbf{I} d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

左手定则与此关系一致。这里倾向于用定律来处理问题而尽量避免用法则、定则。

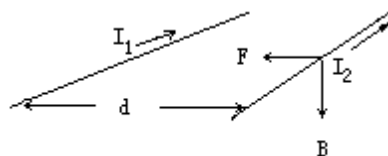


图17-13 平行导线间的磁力

利用(17.1.5)式和长直导线周围磁场的表达式，可以求得通电平行导线(图17-13)所受的力

$$\mathbf{F} = I_2 \mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$\frac{F}{l} = I_2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{d} \quad (17.3.1)$$

A(安培)作为SI基本单位之一，通过下面的关系定义：

$$2 \times 10^{-5} \frac{N}{m} = 10^{-7} \frac{2 \times (IA)^2}{0.01m} \quad (17.3.2)$$

实际上使用的装置是电流天平，如图17-14所示。

均匀磁场中的电流环将不受任何磁力的作用：

$$\mathbf{F} = \oint \mathbf{I} d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{I} \oint d\mathbf{l} = 0$$

但可能受到磁力矩的作用。如图17-15所示，矩形电流环所受的相对于中心O的总磁力矩是

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= -\frac{b}{2} \times (\mathbf{I} \mathbf{a} \times \mathbf{B}) + \frac{a}{2} \times (\mathbf{I} \mathbf{b} \times \mathbf{B}) + \frac{b}{2} \times (-\mathbf{I} \mathbf{a} \times \mathbf{B}) \\ &\quad + \left(-\frac{a}{2}\right) \times (-\mathbf{I} \mathbf{b} \times \mathbf{B}) \\ &= b \times (\mathbf{I} \mathbf{a} \times \mathbf{B}) + a \times (\mathbf{I} \mathbf{b} \times \mathbf{B}) \\ &= I (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B} \\ &= \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (17.3.3)$$

其中 $\boldsymbol{\mu}$ 是磁偶极矩。上面的表达式类似于电偶极子在电场中所受的力矩：

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

\*B的方向是否影响(17.3.3)式的推导？

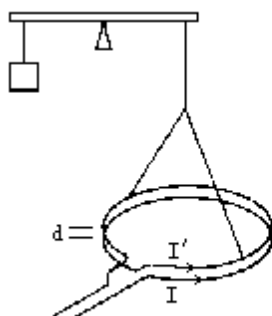


图17-14 电流天平

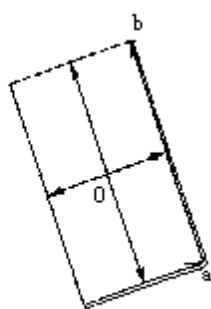


图17-15 矩形电流环

假定一个外力矩  $M_{\text{ext}}$  抵抗磁场力矩  $M_B$  做功

$$W_{\text{ext}} = \int_0^{\theta} M_{\text{ext}} d\theta = \int_0^{\theta} |M_B| d\theta = \int_0^{\theta} \mu B \sin \theta d\theta$$

$$= (-\mu B \cos \theta) - (-\mu B \cos 0)$$

于是我们可以定义一个磁偶极子在均匀磁场中的势能

$$U = -\mu \cdot B + C \quad (C \text{ 为常量}) \quad (17.3.4)$$

选择当电流环的法线与  $B$  垂直时,  $U$  为零 (注意零未必是最小), 则常量  $C$  为零, 就有

$$\frac{U}{\mu} = -\cos \theta$$

这样容易作图并找出稳定点。

\*灵敏电流计 (galvanometer) 空隙中的磁场是在径向的, 如图 17-16 所示。利用  $\mu$  以及线框 (长宽分别为  $a$ 、 $b$ ) 所在处的场, 即可求得力矩

$$M = NI \cdot ab \cdot B$$

(考虑线框上的力  $F = NIb \times B$ , 当然可以求得力矩)。扭力矩  $M$  与线圈转过角度  $\theta$  成正比

$$M = k\theta$$

当力矩  $M$  与扭力矩平衡时, 我们有

$$\theta = \frac{NabB}{k} I$$

这一例子告诉我们, 在理想情形电流计的刻度应该是等间距的。经过校准, 电流计即可使用。

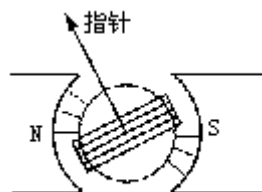


图17-16

从磁场的操作性定义, 我们已经知道运动电荷受的是磁力——洛伦兹力的作用。与电场力相结合, 我们有电磁力

$$F = q_0 (E + v \times B) \quad (17.3.5)$$

这样电荷的运动方程为

$$\frac{dp}{dt} = q_0 (E + v \times B) \quad (17.3.6)$$

这一方程是洛伦兹不变的，即在洛伦兹变换之下保持同样形式．这一结论在狭义相对论表述以前就为洛伦兹和庞加莱所证明．

对于电场  $E = 0$ ，运动方程是

$$\frac{dp}{dt} = q_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (17.3.7)$$

可以得到

$$\frac{dp^2}{dt} = 0, \quad p^2 = C \quad (C \text{ 为常量})$$

这在经典力学或相对论力学中，都意味着速率、动能都保持不变：

$$\text{经典力学：} p = mv, \quad \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) = 0$$

$$\text{相对论力学：} p = m_0 v, \quad (E - m_0 c^2) = 0$$

这一结论与磁力对运动电荷做功为零相一致．

$$dW_m = F_m \cdot dr = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = 0$$

运动方程 (17.3.7) 已在 §9.5 中解出，有

$$= -\frac{q}{m} B$$

即负电荷的回转运动与磁感应强度成右手螺旋关系，角速度的大小即为回转频率 (cyclotron frequency)，而回转半径 (cyclotron radius) 是

$$= \frac{v_{\perp}}{qB} = \frac{mv_{\perp}}{qB} \quad (17.3.8)$$

运动轨迹是圆 ( $v_z = 0$ ) 或螺旋线 ( $v_z \neq 0$ ) ．

\*下面我们讨论电荷在交叉的电磁场 ( $E \perp B$ ) 中的运动．定性地，我们知道：

B 越强，电荷局域得越厉害；

E 越强，电荷运动得越厉害．

当仅有磁场存在时，电荷作匀速圆周运动．当加上电场后，电荷加速得到能量而沿较大的圆弧运动；减速时，电荷失去能量而沿较小的圆弧运动．那么如图 17-17 所示的螺旋线轨迹，对应的电场在什么方向呢？向左还是向下？也许你认为（对于负电荷）毫无疑问应该向左，可是正确的答案是向下！对于螺旋线轨迹，我们相信可以找到一参考系  $S'$ ，电荷在其中作匀速圆周运动． $S'$

系相对实验室参考系  $S$  以速度  $u$  运动（我们尚不知道这一速度在什么方向）．定量的描述需要数学．有时候不多的数学对考虑问题却有很大帮助．假定  $E$  是在  $y$  方向，而  $B$  在  $z$  方向，初速度在  $xy$  平面内，如图 17-18 所示．对于  $v \ll c, E \ll cB$ ，伽利略变换适用．设在  $S'$  系中，电荷运动速度为  $v'$ ，则在  $S$  系中它满足下列运动方程：

$$m \frac{d}{dt} (\mathbf{v}' + \mathbf{u}) = q[E\mathbf{j} + (\mathbf{v}' + \mathbf{u}) \times B\mathbf{k}]$$



图17-17

我们可以要求消去  $E + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$  项，而使得方程变成匀速圆周运动的方程；从而可

知速度在  $x$  方向，数值为  $E/B$ 。

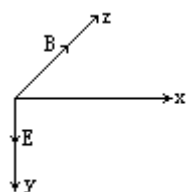


图17-18

于是运动方程变为

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = q (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

这是一个匀速圆周运动，角速度和回旋半径分别为

$$\omega = -\frac{q}{m} B, \quad r = \frac{mv}{qB}$$

回到  $S$  系，根据  $v$  和  $u$  的比率之不同，电荷将描出不同的轨迹，如图 17-19 所示：

- 当  $v = u$ ，轨迹是旋轮线 (cycloid)；
- 当  $v > u$ ，轨迹是长幅旋轮线 (prolate cycloid)；
- 当  $v < u$ ，轨迹是短幅旋轮线 (curtate cycloid)。

这些旋轮线从几何上可以如下画出：让一个半径为  $R = v / \omega$  的轮子在一直轨道上滚动，在轮沿上的点画的是正常旋轮线；半径上离圆心距离小于  $R$  的点描出短轴旋轮线，而距离大于  $R$  的点描出长轴旋轮线。

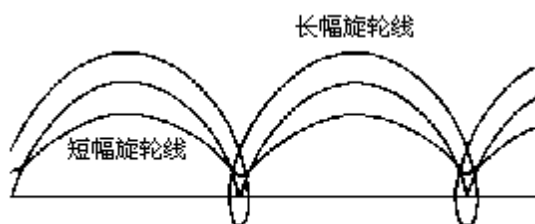


图17-19

在相对论情形，运动方程是

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

其中  $S$  系中的电场和磁场是 [ (L. 17) 式]：

$$\mathbf{E} = [\mathbf{E} + \mathbf{c} \times \mathbf{B}] - (-1) \mathbf{e} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{E})$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B} - \frac{1}{c} \times \mathbf{E}] - (-1) \mathbf{e} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{B}) \quad (17.3.9)$$

对于同样的  $u$ ，我们有

$$\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

这相当于具有较小的角速度和较大的回转半径。

磁偏转和磁约束效应有很多应用。下面给出一些典型的例子。

(1) 气泡室 (bubble chamber) 当带电粒子穿过气泡室时，使室内的液氢离化并留下踪迹。由于磁场的存在这些踪迹就提供了较多的信息。气泡室可以用来检测宇宙射线或基本粒子的反应和衰变。

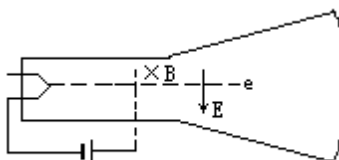


图17-20 阴极射线示波管

(2) 阴极射线示波管 (cathode-ray oscilloscope) 这是汤姆孙发现荷质比装置的现代改进仪器。当然用它能够测荷质比。在很多仪器中，阴极射线示波管也许是最重要的显示部件。如图 17-20 所示，当  $E = B = 0$  时，光斑处在荧光屏的中心。有限的电场造成偏转，偏转量为

$$y = \frac{eE}{2m} \frac{L^2}{v^2}$$

若加磁场使之不偏，则应该有  $eE = evB$ ，由此得

$$\frac{e}{m} = \frac{2yE}{BL^2}$$

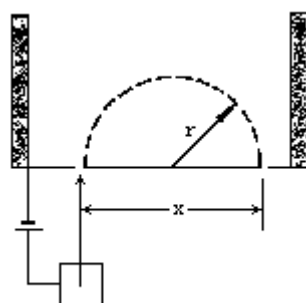


图17-21 质谱仪

(3) 质谱仪 (mass spectrometer) 它是一种动量分析器，如图 17-21 所示。当带电粒子加速到能量  $qV$  时，在均匀磁场影响下，它划过半圆最后碰到屏上。质量不同的带电粒子在屏上的分布可通过基本的计算得到：

$$qV = \frac{1}{2}mv^2, \quad m \frac{v^2}{x/2} = qvB$$

即

$$m = \frac{qB^2}{8V} x^2$$

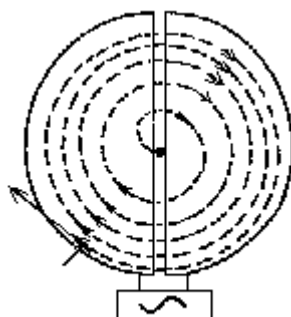


图17-22 回旋加速器

(4) 回旋加速器 (cyclotron) 同步稳相回旋加速器 (synchrocyclotron) 和同步加速器 (synchrotron) 回旋加速器主要由两个 D 形金属空腔组成 (图 17-22)。金属壁可以屏蔽外电场。两者之间的电位差约  $10^5V$ 。带电粒子跨越间隙 100 次以后可得到约 10MeV 的能量。对一定的粒子和确定的  $B$ ，回旋频率、角速度是一定的。最大速率、能量决定于金属腔的大小：

$$v_{\max} = R = \frac{qBR}{m}$$

$$T = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m}$$

对较高的能量，必须考虑相对论效应，即

$$m = \frac{m_0}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}} \quad (\frac{v}{c} = \frac{v}{c})$$

可是我们知道带电粒子的回旋频率与质量之间有如下关系：

$$\omega = \frac{qB}{m} = C$$

所以必须调整频率  $f$  以适应  $m$  的变化。这就是同步稳相回旋加速器的原理。同步加速器则是一种“空心回旋加速器”，即有着环状空腔。粒子运行半径是确定的。从 (17.3.9) 式可知，磁场必须调整，同时也必须调整频率以适应变化的  $B$  和  $m$ 。同步加速器节省了空间，磁场只需加在环形轨道部分，大大降低了成本和维护费用。巴特维亚同步加速器共有磁铁 954 个，周长约 6.3km。质子可以在其中加速到 500 ~ 1000GeV。

磁镜和磁瓶技术是很有用的。在一个缓变磁场  $B$  中，我们有

$$B v_{\perp}^2 = C$$

结合 (17.3.9) 式或类似的表达式，有

$$\frac{v_{\perp}^2}{B} = C$$

考虑到  $v^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2 = v_0^2$ ，从图17-23不难理解磁镜和磁瓶效应。利用磁瓶效应来约束热等离子体时，叫做电磁聚焦。

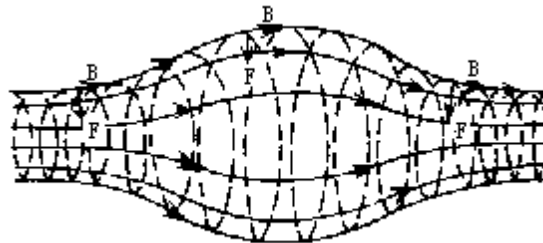


图17-23 磁瓶效应

在自然界中也存在类似现象。范爱伦辐射带 (vanAllen radiation belt) 就是其中之一。范爱伦辐射带位于离地面 800km 至 4000km 之间，由于地球的磁场，很多带电粒子被俘获其中。

## § 17.4 霍尔效应

在 1897 年发现电子以前，人们不知道导体中的载流子是什么。假定有一电流在铜块中向右流过（图 17-24），则正电荷向右或负电荷向左运动其效果是一样的。电流  $I = JA = EA$ ， $A$  为铜块的截面积。当加上一个向上的磁场时，不同的载流子受到了相同方向的力： $q(v_d \times B)$  或  $-q(v_d \times B)$ ，其中的漂移速度方向当然是相反的。但是当达到平衡时，铜块将呈现不同的载流子积累。部分载流子，不管是正的或负的，将聚集到边缘而形成附加的电场。这一电场称作霍尔电场 (Hall electric field)，由下式决定：

$$q(E_H + v_d \times B) = 0, E_H = -v_d \times B \quad (17.4.1)$$

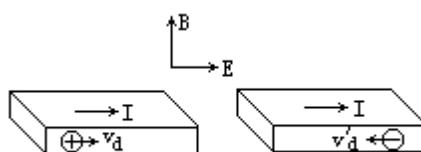


图17-24 霍尔效应

不同的漂移速度决定了不同的电场。实验证明载流子是负电荷，这由霍尔 (E. H. Hall) 于 1879 年最早提出，那是在电子发现前 8 年。这对于电子的发现、对于洞察固体结构和原子结构都有着重要的意义。

如果我们写  $J = nev_d$ ，则霍尔电场是

$$E_H = v_d B = \frac{J}{ne} B \quad (17.4.2)$$

正常电导率定义为  $\chi_x = J_x / E_x$ ，霍尔电导率 (Hall conductivity) 定义为

$$\chi_{xy} = \frac{J_x}{E_y} = \frac{ne}{B} \quad (17.4.3)$$

它是与磁场有关的。霍尔系数 (Hall coefficient) 是

$$\begin{aligned} \frac{E_H}{JB} &= \frac{1}{ne} \sim \frac{1}{6 \times 10^{23} / \text{cm}^3 \times 1.6 \times 10^{-19} C} \\ &\sim 10^{-5} \sim 10^{-4} \text{ cm}^3 / C \end{aligned} \quad (17.4.4)$$

需要注意的是实际上自由电子模型并不适用于非单价金属、磁性材料、和半导体。

在两类半导体界面附近的反型层中，存在着二维电子系统。对于二维系统，霍尔电阻

$$RH = \frac{VH}{I} = \frac{VH}{Jd} = \frac{EH}{J} = \frac{1}{\chi_{xy}} \quad (17.4.5)$$

二维电导率  $\chi_{xy}$ 、 $\chi_{xx}$  呈现了令人惊讶的特性，它们仍然是与  $B$  有关的。然而其倒数  $R_H$  与  $B$  的曲线（如图 17-25）不是简单的线性，而是出现一些平台：

$$RH = \frac{h}{ne^2}$$

$$(n = 2, 3, \dots, h \text{ 为普朗克常量}) \quad (17.4.6)$$

在平台范围内，正常电阻率为零。从式中的普朗克常量  $h$ ，我们可以猜测这一效应有着量子起源。事实正是这样，这种现象叫做量子霍尔效应 (quantized Hall effect)。其中的霍尔电导率或霍尔电阻取离散的数值，后者以  $h/e^2$

为单位，其精度可达  $10^{-8}$ ，且对不同的几何、不同的处理过程、甚至不同材料制作的样品都一样，因此在定标等科学和技术应用方面很有前途，自 1990 年起下列数值成为国际标准：

$$h/e^2 = 25812.806$$

它又可用以确定精细结构常数

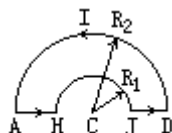
$$h/e^2 = 25812.806$$

1980 年，克立钦 (Klaus von Klitzing) 发现了整数量子霍尔效应，1985 年他因此而获得了诺贝尔物理奖。崔琦等 (D. C. Tsui et al.) 于 1982 年发现了分数量子霍尔效应。

量子霍尔效应激励物理学家探索低维系统的性质。事实上，钇钡铜氧 (YBaCuO) 材料的高温超导性正是出现在铜氧面上的，那也是二维几何。有些理论家指出了量子霍尔效应和高温超导之间存在的可能联系。现在，不同维度的物理仍然是富有吸引力的课题。

## 习题

17.1. 图中 C 点为两半圆 AD 和 HJ 的共同圆心，两半圆半径分别为  $R_2$  和  $R_1$ ，回路中通以电流  $I$ ，求 C 点的磁感强度。



题17.1图

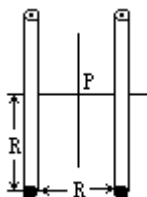
17.2. 亥姆霍兹线圈由两个完全相同的 300 匝的圆形线圈构成，它们之间的距离恰好等于它们的半径 (如图所示)。若  $R = 5.0\text{cm}$ ， $I = 50\text{A}$ ，(a) 画出磁感强度  $B$  在轴线上从  $x = -5.0\text{cm}$  到  $x = 5.0\text{cm}$  之间的变化情况，令 P 点为  $x = 0$  的点；(b) 若两线圈间的距离  $z$  为一变量，试证明：当  $z=R$  时，不仅  $dB/dx$  为零， $d^2B/dx^2$  也为零。

17.3. 边长为  $a$  的正方形线圈中通以电流  $I$ ，证明 (a) 其中心处的磁感强度为

$$B = \frac{2\sqrt{2} \mu_0 I}{a}$$

(b) 该正方形的轴线上距中心  $x$  处的磁感强度的大小为

$$B = \frac{4 \mu_0 I a^2}{(4x^2 + a^2)(4x^2 + 2a^2)^{1/2}}$$

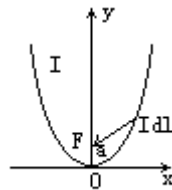


题17.2图

17.4. 如图，抛物线形状的无穷长导线载有电流  $I$ ，焦点 F 到顶点 O 的距离为  $a$ ，试求焦点处的磁感强度  $B$ 。



[答案:  $B = \frac{\mu_0 I}{4a} k$ ]



题17.4图

17.5. 设正  $n$  边形线圈的外接圆半径为  $R$ , 线圈中通以电流  $I$ . 证明其中心处的磁感强度为

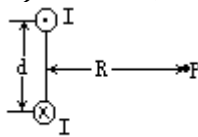
$$B = \frac{\mu_0 n I}{2 R} \tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

17.6. 截面为  $5.0\text{cm} \times 5.0\text{cm}$ 、匝数为 500 的螺绕环的内半径为  $15\text{cm}$ , 通以电流  $0.8\text{A}$ . (a) 在截面中心处 (即距离圆心  $17.5\text{cm}$ ) 的磁感强度  $B$  的大小是多少? (b) 通过螺绕环截面的磁通量是多少?

17.7. 内外半径分别为  $R$  和  $R$  的中空圆柱中沿轴线方向通有均匀分布的电流  $I$ , (a) 证明圆柱截面上距圆心  $r$  ( $R < r < R$ ) 处的磁感强度  $B$  为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 (R^2 - R^2)} \frac{r^2 - R^2}{r}$$

当  $R=0$  时检验该结果; (b) 画出  $B$  从  $r=0$  到  $r$  的变化情形.

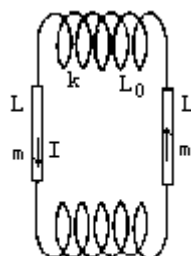


题17.8图

17.8. 两根相距  $d$  的长直导线通以反向等量电流  $I$ , 如图所示, 求与两导线距离相等的  $P$  点的磁感强度的大小和反向.

17.9.  $2\text{keV}$  的正电子射入大小为  $0.10\text{T}$  的匀强磁场  $B$  中, 其速度方向与磁场  $B$  的夹角为  $89^\circ$ . (a) 证明正电子的路径为一螺旋线, 其轴线沿  $B$  的方向. (b) 求该螺旋线的周期、螺距以及半径.

17.10. 一束质量均为  $m$ 、电荷量均为  $q$  的离子在点  $P$  处以同一速率  $v$  沿  $xy$  上半平面中的各个方向射出. 垂直于  $xy$  平面的均匀磁场  $B$  将这些离子聚焦于点  $R$ ,  $R$  与  $P$  相距为  $2a$ , 离子的轨道应该是轴对称的. 试确定磁场区的边界. 设离子间的相互作用可以忽略.



题17.11图

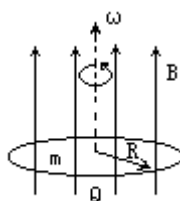
17.11. 两根平行金属棒与金属弹簧构成回路, 如图. 已知棒长为  $L$ 、质量为  $m$ , 系统只能作左右对称的运动, 边缘效应可以忽略. 设弹簧的劲度系数为  $k$ , 原长为  $L_0$ . 假设以某种方式使回路中有恒定的电流  $I$ , 且电磁感应可以忽略, 试求两棒围绕平衡位置作小振动的周期.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{答案: } T = \sqrt{\frac{m}{(1+a)k}}, \text{ 其中} \\ a = \left[ \sqrt{1 + \frac{\mu_0 I^2 L}{k L_0^2}} - 1 \right] / \left[ \sqrt{1 + \frac{\mu_0 I^2 L}{k L_0^2}} + 1 \right] \end{array} \right]$$

17.12 .霍尔效应实验中 , 一长、宽、厚分别为 4.0cm、1.0cm、 $1.0 \times 10^{-3}\text{cm}$  的导体置于强度为 1.5T 的匀强磁场中 , 导体中沿长度方向通以 3.0A 的电流 , 磁场垂直穿过导体 , 结果在横向方向产生  $1.0 \times 10^{-5}\text{V}$  的霍尔电势差 . 由上述数据 , (a) 计算导体中带电粒子的漂移速率 ; (b) 计算带电粒子的密度 ; (c) 作图表示导体上霍尔电势的极性分布 ( 假设带电粒子为电子 ) .

17.13 . 如图所示半径为 R、质量为 m 的匀质细圆环均匀带电 , 总电量为 Q (  $Q > 0$  ) , 放在光滑的水平桌面上 . 环内外有垂直向上的均匀磁场 B . 若将圆环以角速度  $\omega$  绕着圆环的竖直轴匀速转动 , 试求环内因为这种转动而形成的附加张力 .

$$\left[ \text{答案: } \frac{R}{2} (QB + m \omega^2) \right]$$



题17.13 图

## 第十八章 电磁感应

### § 18.1 法拉第电磁感应定律

当一个电荷带着它的电场运动时，将引起电荷的重新分布．我们就说它引起了感应电荷．那么，当一电流带着它的磁场运动时，是否会产生感应电流 (induction current) 呢？回答是肯定的．

实验表明电流的位置和数值的改变都将感生电流，而恒定电流则没有这种效应．如果用一个永久磁铁代替电流环，也可以产生同样的效应．乐于采用场概念的人会说那是变化的磁场感生了电流．换句话说，就是变化的磁场产生了感应电动势 (electromotive force, emf)．事实上，在静场情形，

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int [\nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{A})] \cdot d\mathbf{S} = 0$$

法拉第 (Michael Faraday, 1791—1867) 电磁感应定律说：

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (18.1.1)$$

环路  $C$  和面积  $S$  的法线方向  $\mathbf{e}_n$  符合右手螺旋关系．当有导体存在时，上式可以写作：

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (18.1.2)$$

其中  $\mathcal{E}$  是导体环路上的电动势，而  $\Phi$  是通过导体环路所围面积的磁通．

在 (18.1.1) 式中只牵涉到场，而没有电荷或电流．电场包括感应场  $\mathbf{E}_i$  和静场  $\mathbf{E}_s$  两部分．

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s) \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = 0$$

电场的感应部分是非保守的，不能对它定义势．

例 18.1 在半径为  $R$  的范围内存在均匀磁场，磁感应强度  $B$  随时间变化，求感应电场．

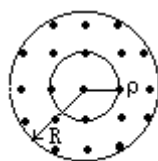


图18-1 例18.1

解：直接用法拉第定律可以求得电场如下：

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$E \cdot 2\pi r = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$E = - \frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi}{dt}$$

注意在没有  $\mathbf{B}$  (根据 § 17.1, 可以存在非零的矢量势  $\mathbf{A}$ ) 的空间，仍有非零的  $\mathbf{E}$ ．取顺时针路径将导致同样的结果，这当然是应该的．在这种情形下，磁通量是负的．对于同样的磁感强度变化率，沿这一路径的电场将反号．

当有一半径为  $r$  的导线环放在其中时，我们可以谈及电动势 (和电流) ．

$$= -\frac{1}{2} R^2 \left( -\frac{dB}{dt} \right) \quad (r > R)$$

$$= -\frac{1}{2} R^2 \left( -\frac{dB}{dt} \right) \quad (r < R)$$

例 18.2 求通有脉动电流的螺线管内外的电场。

解：取柱坐标系，在螺线管内，

$$B_{in} = \mu_0 n I(t)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \left( B_{in} \pi r^2 \right)$$

$$E = -\frac{1}{2} \mu_0 n \left( -\frac{dI}{dt} \right) r$$

在螺线管外，

$$B_{out} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \left( B_{in} \pi R^2 \right)$$

$$E = -\frac{1}{2} \frac{R^2}{r} \mu_0 n \left( -\frac{dI}{dt} \right)$$

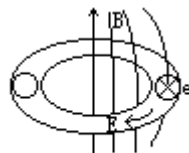


图18-2 电子加速器

电子加速器 (betatron) 有时戏称为 ausserordentlich-hoch-geschwindigkeit-s-electronen-twickeldenschwea rbeitsbeigollitron (版权属于 E. C. Hill)。图 18-2 中显示了电子加速器特殊形式的磁场，在电子运动平面内，磁场在 z 方向。运动电子在管道内受到一个力

$$-e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = eBv(-\mathbf{e}_r)$$

这是向心力。当电子偏离轨道平面时，磁场的径向部分将产生回复力：

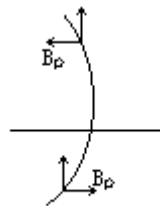


图 18-3

$$\text{偏上时 } F = -e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}_r] = eB_r v(-\mathbf{e}_r)$$

$$\text{偏下时 } F = -e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}_r] = eB_r v \mathbf{e}_r$$

因此回旋运动是稳定的 (图 18-3)。在运动过程中，有

$$\frac{mv^2}{R} = eB_r v(R), \text{ 即 } p = eRB_r(R)$$

当磁场按正弦波规律变化时，它能在环形管道内感生出一个电场  $\mathbf{E}$ 。电场对管道中的电子起加速作用。只考虑最初的四分之一周期 ( $dB/dt > 0$ )，

感应电场在顺时针方向上（见图 18-2），现在考虑加速过程，感应电场可如下求得：

$$E \cdot 2\pi R = -\frac{d}{dt} \int_0^R B(r) 2\pi r dr = -\frac{d}{dt} (\bar{B} \pi R^2)$$

$$E = -\frac{1}{2} R \frac{d\bar{B}}{dt}$$

电子的运动方程为

$$\frac{dp}{dt} = \frac{e}{2} R \frac{d\bar{B}}{dt}$$

$$p = p_0 + \frac{1}{2} e R \bar{B}$$

其中初动量  $p_0$  可以取为零，一个典型的小型电子加速器有以下参数：

$$R = 0.5\text{m}, \quad \bar{B} \sim 0.5\text{T}, \quad pc = \frac{1}{2} e c R \bar{B} \sim 35\text{MeV}$$

在 (18.1.2) 式和 (18.1.3) 式中的符号实际上隐含着楞次定律 (Lenz's law)。楞次定律说：

磁通变化感生的电流的方向是在它能阻止磁通变化的方向上。这可以从能量守恒来理解。假设电流加强磁通，则磁通转而产生更强的电流，这种“正反馈”过程将破坏能量守恒，使得第一类永动机成为可能，上述假设显然不能成立。

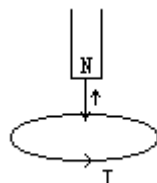


图18-4 楞次定律

当一永久磁铁以 N 极趋近一导线环时，感应电流  $I$  的方向应该在图 18-4 所示方向上。因为只有这样它产生的磁场才逆着磁铁运动的方向。

楞次定律可以简单地解释为什么一导体片可以屏蔽变化的磁场。实际上任何磁场变化只能部分地被抵消。所谓涡流制动闸原则上也是楞次定律的应用。如图 18-5 所示，一导体圆盘正在旋转，在  $a \times a$  的小区域加上磁场。在离开这区域的边缘，感应电流应该能产生一个磁场以增加通量。在进入这一区域的边缘感应电流将是顺时针的。电流在磁场中将受到一阻尼力矩使得盘慢下来。感应电动势、感应电流和阻尼力矩可以计算如下（设圆盘厚度为  $t$ ）：

$$\sim B \frac{dS}{dt} = B \frac{rd}{dt} a = Bra$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{E_{at}}{R} = \frac{B a^2 r}{R} \quad t$$

$$M = rF = r (Ia) B = B^2 a^2 r^2 \quad t$$

## § 18.2 动生电动势

在上一节中，主要讲磁场随时间变化而引起磁通的改变。但是从磁通的表达式  $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  可以想到线框的位置、取向、形状等等的变化也都可以改变磁通。

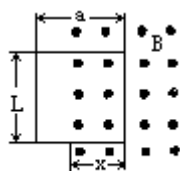


图18-6 例18.3

例 18.3 讨论运动线框中的感应问题。

解：如图所示，磁场分布于右半空间，线框中的磁通是

$$= \begin{cases} B\ell x & (a > x > 0) \\ B\ell a & (x > a) \end{cases}$$

当  $a > x > 0$ ，我们可以得到感生电动势和电流：

$$\begin{aligned} &= -\frac{d}{dt} \\ &= -B\ell v \\ I &= \frac{| |}{R} = \frac{B\ell v}{R} \end{aligned}$$

线框所受磁力（以及在相反方向的外力）是

$$F = I\ell B = \frac{B^2 \ell^2 v}{R}$$

当线框的电阻为  $R$  时，外力的功率和焦耳热分别为

$$P = Fv = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R}, \quad P_Q = I^2 R = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R}$$

当不存在线框时，则没有电流而只有电场。

当场中存在导体时，动生电动势也可以通过洛伦兹力来分析。受力运动使载流子累积而造成电场。

例 18.4 讨论运动导体棒中的感应问题。

解：当棒开始运动时，有一个暂态过程。如图 18-7 所示，棒的匀速运动中，载流子处于平衡状态。电磁力为零：

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E}_i + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$$

感应电场和电动势为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= \int \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = vB\ell \end{aligned}$$

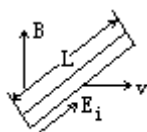


图18-7 例18.4

在棒参考系中，相对论效应使观察者不但看到磁场还看到电场[参见

(L17) 式]：

$$\mathbf{B} = B \mathbf{k}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{v} \times B \mathbf{k}$$

因此，在该观察者看来是电荷的再分布产生的电场抵消上式的电场，致使导体内部场为零。不同观察者对电荷积累及其所产生的场观点是一致的，但是对整个现象解释显然不同。

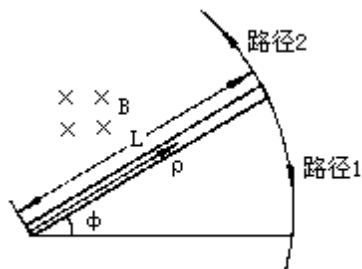


图18-8

例 18.5 讨论旋转导体棒中的感应问题。

解：如图 18-8 所示，取柱坐标，设  $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ ， $\mathbf{B} = B \mathbf{k}$ ，感应电场和电动势分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) &= -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= -(\omega \mathbf{r} \times \mathbf{k}) \times B \mathbf{k} \\ &= -(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}) \omega B \mathbf{k} = B \omega r \mathbf{e}_r \\ &= \int_0^L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} B \omega L^2 \end{aligned}$$

讨论：想象一个环路，比如说路径 1，我们得到磁通及感应电动势为

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} (L \cdot L) B > 0 \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{2} B \omega L^2 > 0, \quad \mathcal{E} < 0 \end{aligned}$$

我们也可以选择路径 2，得到：

$$\begin{aligned} \Phi &= -\left(L^2 - \frac{1}{2} L^2\right) B < 0 \\ \mathcal{E} &> 0, \quad \mathcal{E} < 0 \end{aligned}$$

两个结果一致但却是有点问题的。虚拟环和棒上的电场、电场积分显然不一样。电动势对导体棒才有意义，在虚拟路径段只有场的积分。所以这种方法不宜采用。

例 18.6 求法拉第圆盘（感应发电机）中的感应电动势。

解：设  $\mathbf{B} = B \mathbf{k}$ ，圆盘以角速度  $\omega$  旋转。离轴心  $r$  处的线速度为  $\mathbf{v} = \omega \mathbf{r} \times \mathbf{k} = \omega r \mathbf{e}_\phi$ ，感应电场和电动势分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= -\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\omega r B \mathbf{e}_r \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{2} B \omega R^2 \end{aligned}$$

以下数据：

$$f = 1000 \text{ Hz}, B = 0.1 \text{ T}, R = 0.2 \text{ m}$$

给出电动势为 12V .

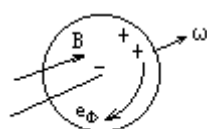


图18-9 例18.6



### § 18.3 电感

在静电学中已经讲过导体具有电容，它依赖于导体的几何以及介电材料。当充电时，电荷量通过下式与电势差相关联：

$$q = CV$$

我们可以猜测对于一个线框是否也存在一个量使其中的电流（或其它电流）与线框处的磁场或其通过线框所张的面积磁通相关。磁场可以有空间分布，而通量则是与线框密切相关的一个确定值。也许后者较合适。我们写出平行的关系：

$$LI = \quad (18.3.1)$$

其中比例系数  $L$  称为电感（inductance）。当论及线框中自身的电流及该线框所围面积上磁通量的比例关系时，特称该系数为自感。对于一个螺线管（ $N = n\ell$ ），自感为

$$= N \Phi = n\ell BA = n\ell \cdot n\mu_0 I \cdot A = \mu_0 n^2 \ell A I$$

$$L = \mu_0 n^2 \ell A \quad (18.3.2)$$

可见自感只包括几何参数。单一电流框的自感是多少？上式可否借鉴？直觉是这样的自感  $L$  较小。但是根据例 17.4，在线电流附近磁感强度  $B$  趋向无穷。详细计算表明通量也是无穷，从而  $L$  是无限。解决矛盾的要点在于线径的大小必须考虑。在这个意义上线电流很类似于静电学中的点电荷。

例 18.7 求同轴电缆的自感。

解：如图 18-10 所示，电流回路在无穷远处闭合。设电缆内径、外径分别为  $R_1$  和  $R_2$ ，我们取一长度  $\ell$  并认为它是“无限长”，则通量和自感分别为

$$\begin{aligned} &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0}{4} \frac{2I}{r} \ell dr \\ &= \frac{\mu_0}{4} 2I \ell \ln \frac{R_2}{R_1} \\ L &= \frac{\mu_0}{4} \left( 2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \ell \end{aligned}$$

讨论：如果考虑芯线大小或外壁厚度，结果怎样？

对于变化的电流，将 (18.3.1) 式代入法拉第定律得到：

$$= - \frac{d}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (18.3.3)$$

这样我们就有了自感的操作性定义：

$$L = - \overline{\left( \frac{dI}{dt} \right)} \quad (18.3.4)$$

由此通过实验求自感十分方便。当然这决不意味自感依赖于电流的变化率。自感和电容一样，只依赖于几何。电感的单位是 H（亨利）。

$$1H = 1 \frac{V \cdot s}{A}$$

下面我们讨论磁能。考虑一电感回路，电阻可以忽略。为了建立起电流

I, 电池须做功

$$dW^B = - I dt$$

按照法拉第定律和电感的定义 (18.3.1) 式, 感应电动势为

$$= - \frac{d}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

功为

$$dW^B = Id = LIdI$$

从 0 到 I 积分, 可得总功的表达式, 即磁能的增加:

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} I^2 = \frac{1}{2L} I^2 \quad (18.3.5)$$

在螺线管这一特殊情形,

$$L = \mu_0 n^2 \ell A, \quad B = \mu_0 nI$$

$$u_m = \frac{U_m}{\ell A} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \left( \frac{B}{\mu_0 n} \right)^2$$

或

$$u_m = \frac{1}{2\mu_0} B \cdot B \quad (18.3.6)$$

这就是磁能的一般表达式, 严格的推导见 § 19.2.

对于一同轴电缆, 从能量密度可推算出自感来:

$$u_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0}{4} \frac{2I}{r} \right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8} \frac{1}{r^2}$$

$$U_m = \int_a^b u_m \cdot \ell 2\pi r dr = \frac{\mu_0}{4} I^2 \ell \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$L = \frac{2U_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{4} \left( 2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \ell$$

当两个带电线框相距不远时, 每一个都在两个线框内产生通量:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_{11} I_1 + L_{12} I_2$$

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} = L_{21} I_1 + L_{22} I_2 \quad (18.3.7)$$

可以证明

$$L_{12} = L_{21} = M \quad (18.3.8)$$

M 叫做互感 (mutual inductance). 可以期望当两个线框相隔甚远时, 互感很小. 实际上, 互感往往用实验手段确定.

\*证明 (18.3.8) 式.

$$B_{12} = \frac{\mu_0}{4} \int_{C_2} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

$$\Phi_{12} = \int B_{12} \cdot d\mathbf{S}_1$$

$$= \frac{\mu_0}{4} \int_{C_2} \oint_{C_1} \left[ I_2 d\mathbf{l}_2 \times \left( -\nabla_1 \frac{1}{r_{12}} \right) \right] \cdot d\mathbf{S}_1$$

$$\begin{aligned}
L_{12} &= \frac{\mu_0}{4} \oint_{C_2} \int_{C_1} dS_1 \cdot \left( \nabla_1 \frac{1}{r_{12}} \times dl_2 \right) \\
&= \frac{\mu_0}{4} \oint_{C_2} \int_{C_1} \left( dS_1 \times \nabla_1 \frac{1}{r_{12}} \right) \cdot dl_2 \\
&= \frac{\mu_0}{4} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{1}{r_{12}} dl_1 \cdot dl_2
\end{aligned}$$

最后一行显然是对下标 1、2 对称的。

在一些简单的情形下，我们可以求得  $M$ 、 $L_1$ 、 $L_2$  之间的关系。假定匝数为  $N_1$ 、 $N_2$  的两个螺线管双线并绕。它们的截面相同，则自感分别为

$$L_1 = \frac{N_1^2 \mu_0}{l} ; L_2 = \frac{N_2^2 \mu_0}{l}$$

互感是

$$M = \frac{N_1 N_2 \mu_0}{l} = \frac{N_2}{N_1} L_1$$

由于螺线管是并绕的，就 1 匝而言：

$$11 = 21 ; 22 = 12$$

所以有

$$M = \frac{N_1 N_2 \mu_0}{l} = \frac{N_2}{N_1} L_1$$

由此可得：

$$M_2 = L_1 L_2 , M = \sqrt{L_1 L_2}$$

一般情况下， $M$  与  $L_1$ 、 $L_2$  以及它们的相对位置有关，从量纲分析可知，

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (0 \leq k \leq 1)$$

其中  $k$  叫做耦合系数。

主要利用其电感的器件叫做电感器，简称电感。电感可以串联或并联。当  $L_1$ 、 $L_2$  串联并相隔甚远时，

$$\begin{aligned}
I_1 &= I_2 = I \\
U &= U_1 + U_2 = -L_1 \frac{dI}{dt} - L_2 \frac{dI}{dt} \\
&= -(L_1 + L_2) \frac{dI}{dt} \\
L_S &= L_1 + L_2
\end{aligned}$$

对并联的电感，有

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= I \\
\frac{1}{L} &= \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \text{总电感是} \\
L &= \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}
\end{aligned}$$

如果电感串联而相隔不远时，必须考虑互感。当两电感反串联时，总电

感是

$$L = L_1 + L_2 - 2M$$

对电感系统的能量表达式可以作类似于 (18.3.5) 式的推导。对通电线框做的微功是

$$I_i M_{ij} dl_j + I_j M_{ji} dl_i = M_{ij} d(I_i I_j)$$

积分，并包括自感部分，有

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i < j}^n M_{ij} I_i I_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i I_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N M_{ij} I_i I_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \quad \quad \quad (18.3.9) \end{aligned}$$

其中  $M_{ij} = L_i$ ，而

$$I_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} I_j \quad (18.3.10)$$

是所有线框的磁场在第  $i$  线框中的通量。

\*刚性线路间的力和力矩

考虑一组刚性线路，其中之一在磁力作用下移动了  $dr$ 。当所有电流保持不变时，电池必须提供能量以维持这些电流。

$$\begin{aligned} F_{\text{ext}} \cdot dr &= -F \cdot dr \\ -F \cdot dr + dW^B &= dU \end{aligned}$$

其中电池做的功是

$$dW^B = - I dt = I \frac{d}{dt} dt$$

能量的变化是

$$dU = d \left( \frac{1}{2} I^2 \right) = I dI$$

所以

$$dW^B = 2dU$$

而

$$\begin{aligned} F \cdot dr &= dU \\ F &= -(\nabla U) \quad (18.3.11) \end{aligned}$$

当线路和电池隔离时，运动将改变所有线路中的电流。按照楞次定律，由于感应电动势造成电流的变化将使得通过线路的通量保持不变，则

$$-F \cdot dr = dU$$

所以

$$F = -(\nabla U) \quad (18.3.12)$$

作用在线路上的磁力矩  $M$  可以由类似步骤求得。

$$M = \left( \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{I}} \right)_I$$

$$M = \left( -\frac{\mathcal{U}}{\mathcal{I}} \right) \quad (18.3.13)$$

## § 18.4 E 和 B 的相对性

在 § 18.2 我们讨论了运动导体中的感应电动势。如果导体不动而场运动情况如何呢？根据相对性原理，应该有相同的结果。这一陈述需要具体化。

假定处于惯性系 S 中的方形线圈（我们姑且称为“源线圈”）中通有稳定电流，产生磁场。圆形线圈（称“场线圈”）以速度  $u$  运动，感受到磁通的变化，如图 18-11 所示。另一方面，如果圆形线圈处于惯性系 S 中，而方形线圈相对它运动，情况又怎样呢？从附着在方形线圈上的 S 系看来，圆形线圈中的电磁感应应该相同，因为决定物理的是相对速度<sup>(2)</sup>。问题的要害在于这里所说的相同只是相对于源线圈（或场线圈）的同一立场而言的，与源线圈（或场线圈）相对于实验室坐标系（假定是惯性系）是静止或运动毫无关系。

如果认为上述强调是平庸的，那就是一种疏忽。如果认为从源线圈和场线圈所在的坐标系看来电磁感应都一样，则是一种误解。在一般的讨论中，容易产生这种疏忽和误解。对场线圈来说，非但磁场不同于源线圈坐标系中所看到的，它还可能感受到电场。这牵涉到电磁场的相对论变换。有关的推导见附录 L。下面我们通过具体例子来说明将电磁场划分为电场、磁场完全是相对的。

想象一导线，其中离子固定，电子以漂移速度  $v_d$  约  $10^{-2} \text{ cm/s}$  运动。一个检验电荷  $q_0$  也以  $v_d$  沿电子运动方向运动（如图 18-12）。假设在离子参考系（实验室系）中导线是中性的（也可以假设电子相对静止时导线呈中性，这种假设也许更易接受）。这时其周围没有电场，电力是零。可是有限的电流  $I = ne v_d$  产生磁场，它附近的运动电荷将受到磁力。而在电子参考系中，检验电荷的速度是零。即使离子流产生磁场，检验电荷也不受磁力。

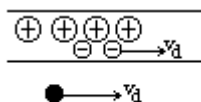


图18-12 E和B的相对性

根据狭义相对论，运动电荷的线密度 将增加：

$$\rho = \frac{\rho_0}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}} = \gamma \rho_0 \quad (18.4.1)$$

在离子参考系，离子电荷线密度  $\rho_+$  和电子电荷线密度  $\rho_-$  满足：

$$\rho_+ = \rho_+^0, \quad \rho_- = -\rho_+^0, \quad \rho = 0$$

电场及检验电荷所受电场力为

$$E = 0, F_e = 0 \quad (18.4.2)$$

另一方面，电流产生磁场，检验电荷受到磁力作用取（柱坐标系），有

$$J = -\rho_- v_d = \rho_+ v_d \quad k$$

$$B = \frac{\mu_0}{4} \frac{2J}{R} (-e) = \frac{\mu_0}{4} \frac{2\rho_+ v_d}{R} (-e)$$

$$F_m = q_0 \times B = \frac{\mu_0}{4} \frac{2\rho_+ v_d^2}{R} q_0 e \quad (18.4.3)$$

在电子参考系中，净电荷密度为有限。

$$\rho_- = -\rho_0 = -\frac{q_0}{4\pi R^2}, \quad \rho_+ = \frac{q_0}{4\pi R^2}, \quad \rho_{net}$$

$$\rho_{net} = \rho_+ + \rho_- = \frac{q_0}{4\pi R^2} > 0 \quad (18.4.4)$$

该密度导致了一个电场  $E$ ，其大小为

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{net}}{R^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2v^2}{R} \quad (18.4.5) \end{aligned}$$

检验电荷受到的电场力

$$F_e = q_0 E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2v^2}{R} q_0 \quad (18.4.6)$$

注意

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}, \quad \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \quad (18.4.7)$$

数值上这个电力大于实验室系中的磁力（如果  $v^2$  不能忽略）：

$$F_e = F_m \quad (18.4.8)$$

在电子参考系中，存在有限的电流。由于检验电荷静止，有：

$$\begin{aligned} J &= -qv \\ B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2qv}{R} = B \quad (18.4.9) \end{aligned}$$

$$F_m = q_0 \cdot 0 \times B = 0$$

狭义相对论中的一般变换公式是 (L17) 式：

$$E = \gamma [E + c \times B] - (\gamma - 1) \frac{v}{c^2} (v \cdot E)$$

$$B = \gamma [B - \frac{1}{c} \times E] - (\gamma - 1) \frac{v}{c^2} (v \cdot B)$$

(18.4.10)

据此，我们容易校核上面关于电磁场的结果。其实我们的本意就是在于研究  $E$  和  $B$  的变化。

在  $S$  系中：

$$E = 0, \quad E = 0$$

$$E = 0, \quad B = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2qv}{R} e \quad (18.4.11)$$

在  $S'$  系中：

$$E = \gamma \times B (-e) = r Be$$

$$B = B \quad (18.4.12)$$

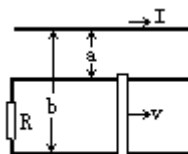
注意：如果忽略  $v^2$  项，则两个坐标系中的差别消失。特别是

$$E = \frac{\mu_0}{4} \frac{2}{R} v e$$

$$= \frac{1}{4} \frac{2}{R} v e \sim e \quad (18.4.13)$$

### 习题

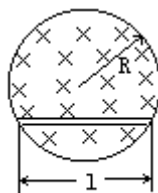
18.1. 图中表示一电阻为  $R$  的铜棒沿两根平行的导电轨道运动，速度为  $v = 5.0 \text{ m/s}$ 。轨道近旁有一平行的长直导线，通以电流  $I = 100 \text{ A}$ ，设  $a = 1.0 \text{ cm}$ ， $b = 20 \text{ cm}$ 。计算铜棒中的感应电动势。



题18.1图

18.2. 设有一匀强磁场  $B$  分布在一半径为  $R$  的柱形区域，并以速率  $dB/dt$  变化。长度为  $\ell$  的金属棒按图中形式放置。证明由此棒中产生的感应电动势由下式给出：

$$= \frac{dB}{dt} \frac{\ell}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$$



题18.2图

18.3. 一  $N$  匝闭合线圈，半径为  $r$ ，电阻为  $R$ ，自感为  $L$ ，置于均匀磁场  $B$  中，该线圈绕一与  $B$  垂直的直径转动。(a) 当线圈以常角速度  $\omega$  转动时，求线圈中的电流与角度  $\theta$  的函数关系。这里  $\theta$  是线圈平面的法向方向与  $B$  之间的夹角；(b) 为了维持上述转动，需加多大的外力矩  $M$ ？

$$\left[ \begin{array}{l} \text{答案：(a) } I(t) = \frac{r^2 NB}{\sqrt{R^2 + L^2}} \sin(\omega t - \phi) \\ \quad \quad \quad (b) \quad M = \frac{(r^2 NB)^2}{\sqrt{R^2 + L^2}} \sin \omega t \sin(\omega t - \phi) \\ \quad \quad \quad (\phi = \arctan \frac{L}{R}) \end{array} \right]$$

18.4. 一平行板电容器由两块半径为  $R$  圆板构成，板间距为  $d$ ，板上所加电压为  $V = V_0 \cos \omega t$ ，假定  $d \ll R \ll c/\omega$ ，因而电场的边缘效应及推迟效应均可略去。(a) 确定电容器中电场及磁场与时间的函数关系；(b) 求导线中的电流及极板上的电流面密度与时间的函数关系。

18.5. 两根平行的长直导线（通以反向等量电流）中心相距  $d$ ，忽略通过导线自身的磁通量，证明在导线上长度为  $l$  的部分的电感为



$$L = \frac{\mu_0 l}{r} \ln \frac{d-r}{r}$$

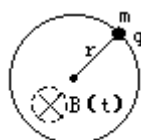
其中  $r$  是导线的半径。

18.6. 设两同轴线圈 A、B，半径均为  $r$ ，相距为  $d$ ，电流  $I = k_0 t^2$  通过线圈 A，而线圈 B 的电阻为  $R$ 。证明：若自感可以忽略，作用在线圈 B 上的力为

$$\frac{24}{(4\pi)^2} \frac{r^8 k_0^2 t^3}{d^7 R}$$

并指出力的方向。

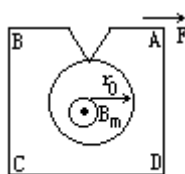
18.7. 图中质量为  $m$  的小珠可沿半径为  $r$  的圆形轨道运动，环面为水平面。小珠带有固定的正电荷  $q$ 。设在以环形轨道为其正截面的柱体内有均匀的随时间  $t$  变化的磁场，磁感应强度的方向垂直于环面。已知  $t=0$  时， $B=0$ ，小珠静止于环上； $0 < t < T$  时， $B$  随时间  $t$  线性地增长； $t=T$  时， $B=B_0$ 。设重力和摩擦力可忽略。试求：在  $0 \sim T$  时间内小珠的运动状态及小珠对轨道的作用力。



题18.7图

$$\left[ \text{答案：} N = \frac{q^2 B_0^2 r t^2}{4mT^2} \right]$$

18.8. 图中 ABCDA 是闭合导体回路，总电阻为  $R$ ，AB 段的一部分绕成初始半径为  $r_0$  的小圆圈。圆圈所在区域有与圆圈平面垂直的均匀磁场  $B_m$ 。回路的 B 端固定，C、D 端为自由端。A 端在沿 BA 方向的恒力  $F$  的作用下向右移动，从而使圆圈缓慢缩小。设在圆圈缩小的过程中，始终保持圆的形状，并设导体回路是柔软的，阻力可以忽略。试求此圆圈从初始的半径  $r_0$  到完全消失所需的时间  $T$ 。



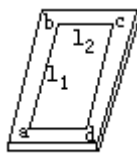
题18.8图

18.9. 如图所示，在一半径为  $R$ ，质量为  $m$ ，可以无摩擦地自由转动的匀质绝缘盘中部装有一细长螺线管，其半径为  $r$ ，单位长度上绕有  $n$  匝线圈，线圈中通以稳恒电流  $I$ 。在圆盘的边缘上均匀地嵌着  $N$  个带等量正电荷  $q$ 。设开始时螺线管中的电流为  $I$ ，圆盘静止，然后将电流切断。试求圆盘转动的角速度。

$$\left[ \text{答案：} \omega = \frac{r^2 \mu_0 n N q I}{m R^2} \right]$$

18.10. 如图所示，在水平桌面上平放着长方形线圈 abcd，已知 ab 边长  $l_1$ ，bc 边长  $l_2$ ，线圈总电阻为  $R$ ，ab 边正好指向北方。现将线圈以南北方向

为轴翻转  $180^\circ$ ，使  $ab$  与  $cd$  互换位置，在翻转过程中测得通过导线的总电量为  $Q_1$ 。然后，维持  $ad$  边（东西方向）不动，将线圈绕  $ad$  边转动  $90^\circ$ ，使之竖直，测得在竖直过程中流过导线的总电量为  $Q_2$ 。试求该处地磁场  $B$  的大小。



题18.10图

18.11. 由半径为  $1.0\text{mm}$  的导线构成的半径为  $10\text{cm}$  的圆形线圈处于超导状态。开始时线圈内通有  $100\text{A}$  的电流。一年后测出线圈内电流的减小量不足  $10^{-6}\text{A}$ 。试粗略估计此线圈电阻率的上限。

[答案： $10^{-26} \quad \Omega \cdot \text{m}$ ]

18.12. 一圆柱金属块放在高频感应炉中加热（如图）。设感应炉的线圈产生的磁场是均匀的，磁感应强度的方均根值为  $B$ ，频率为  $f$ 。金属圆柱的直径为  $D$ ，高为  $h$ ，电导率为  $\sigma$ ，柱轴与磁场平行。设涡电流产生的磁场可以忽略。试证明在金属圆柱内因涡电流产生的平均热功率为

$$\overline{P} = \frac{1}{32} \pi^2 \sigma f^2 B^2 D^4 h$$

## 第十九章 物质的磁性

安培可能从宏观现象得到启发，提出了关于磁性本质的假说——分子电流假说。据此，磁性是来源于材料中的原子环流。事实上，物质的磁性除与来源于电子绕原子核的环流的磁矩有关外，还应包括与电子、原子核的自旋（spin）有关的磁性。

## § 19.1 微观粒子的磁偶极矩

在简单的原子模型中，电子绕核作匀速圆周运动。对运动的电子，有两个物理量是密切相关的：力学量角动量和环流造成的磁矩。

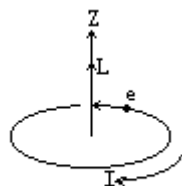


图19-1 角动量和磁偶极矩

对图 19 - 1 所示的运动，角动量是

$$L = r \times p = rm \quad k$$

而磁偶极矩  $\mu_L$  与环流有关：

$$\begin{aligned}\mu_L &= I \quad r^2 \quad (-k) \\ &= \frac{ev}{2} \quad r^2 \quad (-k) \\ &= \frac{e}{2m} m \quad r \quad (-k)\end{aligned}$$

两者通过下式相关联：

$$\begin{aligned}\mu_L &= - \frac{e}{2m} L \\ &= - \frac{e\hbar}{2m} \frac{L}{\hbar} \\ &= - \mu_B \frac{L}{\hbar} \\ &= rL \quad (19.1.1)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\mu_B &= \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.27 \times 10^{-24} \frac{J}{T} \\ &= 9.27 \times 10^{-24} A \cdot m^2\end{aligned}$$

称为玻尔磁子 (Bohr magneton) 。 ( 19 . 1 . 1 ) 式中出现的普朗克常量通常取两种形式：

$$h = 6.626 \times 10^{-34} J \cdot s$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \times 10^{-34} J \cdot s$$

对于第一玻尔半径 ( first Bohr radius )

$$\langle r \rangle = a_0 = 4 \pi^2 \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-10} m \quad 0.5 \text{ \AA}$$

电子的角动量为

$$\begin{aligned}L &= a_0 m \quad v = \left( 4 \pi^2 \frac{\hbar^2}{me^2} \right) m \left( \frac{1}{4 \pi^2} \frac{e^2}{\hbar c} \right) c \\ &= \hbar\end{aligned}$$

而磁矩为

$$\mu_L = \mu_B$$

上面的结果来自经典力学和电磁学。在量子力学中，角动量是离散的，依赖于电子所处的状态。

1926 年乌伦贝克和高兹密特 (Uhlenbeck and Goudsmit) 引入了电子自旋角动量，这完全是量子力学的概念。电子并不自转。至少在现阶段电子是没有结构的粒子，这就使得自转不可能。事实上，自旋是微观粒子的内禀特性。电子相应于自旋角动量  $S$  的自旋磁矩为

$$\begin{aligned}\mu_s &= -\frac{e}{m} S \\ &= -2 \mu_B \frac{S}{\hbar} \quad (19.1.2)\end{aligned}$$

对于电子，自旋角动量的分量可以有两个值：

$$\left(\frac{S}{\hbar}\right)_z = \pm \frac{1}{2} \quad (19.1.3)$$

于是电子的总磁矩为

$$\mu = \mu_L + \mu_s = -\frac{e}{2m} (L + 2S) \quad (19.1.4)$$

对于一个有限模型（即有结构的，例如球状分布电荷），自转可以造成类似的磁矩。可是，如果你坚持认为这就是实际情况的话，你将发现难以解释中性粒子的自旋。例如，中子不带电，可是有磁矩。原子核也有磁矩。我们先定义一个核玻尔磁子 (nuclear Bohr magneton)：

$$\begin{aligned}\mu_N &= \frac{e\hbar}{2m_p} = 3.15 \times 10^{-8} \frac{eV}{T} \\ &= 5.05 \times 10^{-27} \frac{J}{T} < < \mu_B\end{aligned}$$

虽然核子的自旋有着和电子一样的  $z$  分量

$$S_z = \pm \frac{1}{2} \hbar$$

不过它们的磁矩并不等于

$$2 \mu_N \frac{S}{\hbar}$$

质子和中子的磁矩分别为

$$\begin{aligned}\mu_p &= +2.792847386 \mu_N \\ \mu_n &= -1.91304275 \mu_N \quad (19.1.5)\end{aligned}$$

磁化强度 (magnetization) 正比于磁矩的平方：

$$M \sim (N \mu) \frac{\mu B}{k_B T} \sim \mu^2$$

所以核磁矩  $\mu$  对磁化强度的贡献比电子小得多。然而核磁矩有着重要的应用。

在磁场  $B = -B\mathbf{k}$  中，核磁矩将在力矩

$$\mathbf{M} = \mu \times \mathbf{B}$$

作用之下进动。根据经典模型（轨道或自旋角动量的）进动角速度为

$$p = \frac{\Delta}{\Delta t}$$

$$\text{由于} \quad = \frac{\Delta S}{S \sin} = \frac{\Delta t}{S \sin} = \frac{\mu B \sin \Delta t}{S \sin}$$

$$\text{所以} \quad p = \frac{\mu B}{S} = B$$

例如，一个质子在 0.50T 的磁场中，进动频率

$$f_p = \frac{\Omega_p}{2} = \frac{\mu_p B}{2 \hbar / 2} \quad 21 \text{MHz}$$

这接近于无线电短波 的上限即 22MHz .

核磁共振 (nuclear magnetic resonance) 在物理、化学、生物物理、生物化学、医学等领域有着广泛的应用 . 如图 19 - 3 所示，样品置于垂直均匀磁场中 . 核自旋角动量的运动方程是

$$\frac{dS}{dt} = \mu \times B$$

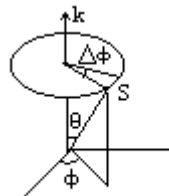


图19-2 核磁矩的进动

</PGN0354.TXT/PGN>

即

$$\frac{d\mu}{dt} = r \mu \times B \quad (19.1.6)$$

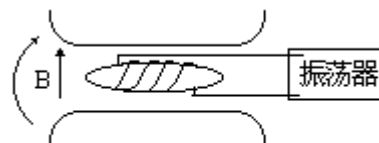


图19-3 核磁共振

与 (9.5.4) 式相比较，可以确信方程的解是

$$\mu_x = \mu_0 \cos ( \quad | \quad | t + \quad )$$

$$\mu_y = -\mu_0 \operatorname{sgn} ( \quad ) \sin ( \quad | \quad | t + \quad )$$

$$\mu_z = C \quad (19.1.7)$$

即前面所说的进动，其中  $\omega^2 = \gamma^2 B^2$ . 在水平方向上再加一弱的交变场  $B_1$ ，该场可以分解为两个在相反方向旋转的偏振场：

$$B_1 = B_1 \cos ( \quad t + \quad ) i$$

$$= \frac{1}{2} B_1 \cos ( \quad t + \quad ) i + \frac{1}{2} B_1 \sin ( \quad t + \quad ) j$$

$$+ \frac{1}{2} B_1 \cos ( \quad t + \quad ) i - \frac{1}{2} B_1 \sin ( \quad t + \quad ) j \quad (19.1.8)$$

第一行是逆时针旋转场，而第二行是顺时针旋转场. 对于  $\gamma > 0$ ， $\mu$  逆时针旋转 . 偏振场的第二部分与其方向相反，相对角速度是很大的 . 可以相

信力矩平均起来是抵消的.实际上,对  $B$  的第一部分即使使同向也是一样.只有当  $\omega$  等于核磁矩的进动角速度即

$$\omega = \frac{\mu B}{S}$$

时,这时矢量  $\mu$  和圆偏振场之一同步,谈力矩才有意义.我们以上式为共振条件.调整  $B$  或水平场  $B$  的频率可以达到这一条件.共振时力矩把磁矩从平行翻转到反平行状态.这时可观察到  $2|\mu \cdot B|$  能量的吸收.

布洛赫和普赛耳 (F. Bloch and E.M. Purcell) 由于发展了核磁精密测量的新方法及其相关的发现而获 1952 年诺贝尔奖.

原子和离子的总磁矩为

$$\mu = \sum_i (\mu_L + \mu_s) \quad (19.1.9)$$

实际上,以上的求和完全是形式的.对于不同的原子或离子,核外电子的量子组态可以有很大的不同,因此,它们显示出完全不同的磁性质.以下我们将分别予以讨论.

有些原子和离子有永久磁矩,例如:

过渡元素  $Mn^{++}$  ;

稀土元素 (51 - 71)  $Gd^{+++}$  ;

超铀元素 (89 - 103)  $U^{++++}$  ;

Al ;

$CrK(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$  (chromium potassium alum) .

它们都有着不满的壳层(特别是内层),有关核外电子的排布情况见 § 25.5.由这类原子构成的材料中,磁矩的取向由于热运动将有一个统计分布,有关计算与电偶极矩类似.

其它诸如惰性气体则有着满壳层,其中的电子都是成对的.所有轨道和自旋磁矩都分别抵消,没有永久磁矩.但是在外磁场中,它们仍可以有感应磁矩.按照楞次定律,这些原子将呈现抗磁性.这一类原子、离子或分子可罗列如下:

惰性气体 He, Ne, Ar, Kr, Xe ;

碱金属离子  $Li^+$ ,  $Na^+$ ,  $K^+$ ,  $Rb^+$ ,  $Cs^+$  ;

卤素 (halide) 离子,  $F^-$ ,  $Cl^-$ ,  $Br^-$ ,  $I^-$ ,  $At^-$  ;

Cu, Ag, Au, Hg,  $CO_2$ ,  $H_2$ ,  $N_2$ , ;

钻石.超导体是理想抗磁体,即  $B = 0$  (迈斯纳效应) .

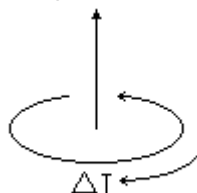


图19-4 感应磁偶极矩

下面我们来计算感应磁矩.按照法拉第定律和楞次定律(第十八章),感应磁矩反平行于外磁场,在柱坐标中有

$$E_\phi = -\frac{1}{2} \frac{dB}{dt}$$

$$M = \int \mathbf{r} \times (-e) \mathbf{E}_\phi \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{2} e^2 \frac{dB}{dt}$$

角动量的变化率和增量分别为

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} e^2 \frac{dB}{dt}$$

$$L = \frac{1}{2} e^2 (B - 0)$$

感应磁矩和角动量的增量成正比：

$$\mu = -\frac{e}{2m} L = -\frac{1}{4m} e^2 B$$

假如我们用  $x^2 + y^2$  代替其中的  $L^2$ ，并令

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{1}{3} \overline{r^2}$$

我们有

$$\mu = -\frac{e^2}{6m} \overline{r^2} B \quad (19.1.10)$$

这一结果碰巧和量子力学中的正确结果一样。  
通常感应磁矩比永久磁矩小得多。



## § 19.2 磁矢量

有了微观粒子磁偶极矩的知识，我们可以想象在一定的温度之下样品的总磁偶极矩  $\mu_t = \sum \mu_i$  为：

$$\mu_t = N \langle \mu_i \rangle \quad (19.2.1)$$

在下节中，我们将知道当  $\mu_B \ll k_B T$  时，其大小可估算为

$$\mu_t \sim N \mu \frac{\mu_B}{k_B T}$$

样品的磁化强度 (magnetization) 定义为

$$M = \frac{\mu_t}{V} \quad (19.2.2)$$

考虑图 19 - 5 所示螺绕环 (Rowland ring)，设总匝数为  $N$ ，半径为  $r$ ，截面积  $A$ 。在体积  $Adl$  中，磁矩为

$$d\mu = M \cdot Adl$$

不管磁化的机制是什么，都可以想象它是由于一个电流——磁化电流  $I_M$  引起的。由此磁矩是

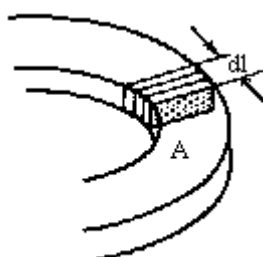


图 19-5 螺绕环

$$d\mu = (ndl i_M) A$$

于是

$$\frac{N}{2\pi r} i_M = M$$

$$N i_M = M 2\pi r = \oint M \cdot dl \quad (19.2.3)$$

计及这一附加电流，我们可以把安培定律写成

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 (I + I_M) \quad (19.2.4)$$

把 (19.2.3) 式代入得到

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 (I + \oint M \cdot dl) \quad (19.2.5)$$

或

$$\oint \frac{B - \mu_0 M}{\mu_0} \cdot dl = I \quad (19.2.6)$$

定义

$$H = \frac{B - \mu_0 M}{\mu_0} \quad (19.2.7)$$

(19.2.6) 式变成

$$\oint H \cdot dl = I \quad (19.2.8)$$

历史上物理量  $H$  被命名为磁场强度，且沿用至今。磁感应强度  $B$  是基本物理量，而磁场强度  $H$  是一个辅助量。形式上，我们可以认为：

$H$  与真实电流有关；

$B$  与所有“电流”有关。

对某些磁性材料

$$M = \chi H \quad (19.2.9)$$

我们称这种材料为线性介质。系数  $\chi$  叫做磁化率 (magnetic susceptibility)，通常是温度的函数，这一点可以从磁化强度的意义看出：磁场倾向于将磁偶极矩沿其方向排列，而热运动是无规的。磁化率可以是正的或负的：相应的材料称作顺磁的或抗磁的。磁化率的数量级为  $10^{-8} \sim 10^{-5}$ 。

对线性介质，我们有

$$B = \mu_0 (1 + \chi) H$$

$$\mu_0 \mu_r H \quad (19.2.10)$$

$\mu H$  系数  $\mu$  叫做磁导率 (permeability)， $\mu_r$

相对磁导率。

所谓非线性介质，即是指其磁导率、磁化率是磁场强度的函数而不是常量的材料。某些材料的相对磁导率可以高达  $10^5$ 。由于非线性，磁导率不能用单一常数来表达，为了实际目的，常常提供  $\mu_r - H$  关系图。图 19

- 6 所示就是硅钢材料的这种关系图。

有磁性媒质介入时的磁能

在真空中磁能密度是 (§ 18.3)

$$u_0 = \frac{1}{2\mu_0} B_0^2 = \frac{1}{2} B_0 \cdot H_0$$

对于线性介质 ( $H$  与材料无关)，

$$B = \mu H = \mu H_0$$

$$= \frac{\mu}{\mu_0} B_0$$

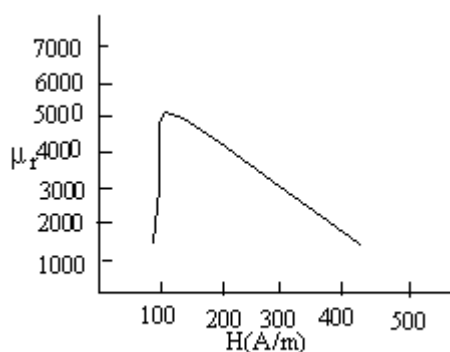


图19-6 硅钢的相对磁导率

我们可以期望，它的磁能密度为

$$u = \frac{1}{2} B \cdot H = \frac{\mu}{\mu_0} \cdot u_0 \quad (19.2.11)$$

这是普遍正确的结果。上式可利用定义磁场强度的方程， $B = \mu_0 H + \mu_0 M$ ，表示为

$$u = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H \cdot M \quad (19.2.12) \quad \text{第一项可解释为真空中的磁}$$

场；第二项解释为材料在磁场中的势能。

\* 磁能密度可以如下求得：

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_k I_k \int B \cdot dS_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_k I_k \int dS_k \cdot (\nabla \times A) \\ &= \frac{1}{2} \sum_k I_k \oint A \cdot dl_k \\ &= \frac{1}{2} \int J \cdot A dV \quad (19.2.13) \end{aligned}$$

根据 (19.2.8) 式，有

$$\begin{aligned} \int_s J \cdot dS &= \oint H \cdot dl \\ &= \int_s dS \cdot (\nabla \times H) \end{aligned}$$

将所得电流密度代入 (19.2.13) 式可得

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int (\nabla \times H) \cdot A dV \\ &= \frac{1}{2} \int (\nabla \times A) \cdot H dV - \frac{1}{2} \int \nabla \cdot (A \times H) dV \\ &= \frac{1}{2} \int B \cdot H dV - \frac{1}{2} \oint dS \cdot (A \times H) \quad \text{第三行第二项的闭合面} \\ &= \int u dV \end{aligned}$$

积分可以取为物理无限大。磁场按  $r^{-3}$  趋向于零，而在远源区  $A$  总是衰减的。这样  $A \times H$  趋向零的速度快于面积的增长。因此积分为零。所以能量密度为

$$u = \frac{1}{2} B \cdot H \quad (19.2.14)$$

在边界面上，磁矢量满足一定的条件。

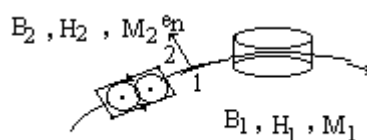


图19-7 边界条件

根据磁高斯定律

$$\oint B \cdot dS = 0$$

从图 19 - 7，我们有

$$B_2 \cdot e_n - B_1 \cdot e_n + 0 = 0$$

即

$$(B_2 - B_1) \cdot e_n = 0 \quad \text{或} \quad B_{1n} = B_{2n} \quad (19.2.15)$$

对图 19 - 7 中的环路，我们有

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

由此得切向的边界条件

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{e}_t = J \quad (19.2.16)$$

当面电流密度为零时，切向边界条件是

$$H_{2t} = H_{1t} \quad (19.2.17)$$

### § 19.3 宏观物体的磁性

一个宏观物体可以处于下列各相之一：

顺磁相、抗磁相、铁磁 (ferromagnetic) 相、反铁磁 (antiferromagnetic) 相和亚铁磁 (ferrimagnetic) 相。

在图 19-8 中, 尖磁极附近的磁场比平磁极强得多. 一个铋 (bismuth) 样品将受到尖磁极的排斥, 它是抗磁的 ( $\chi < 0$ ). 当置入铝样品时, 它将受到尖磁极的吸引, 是顺磁的 ( $\chi > 0$ ).

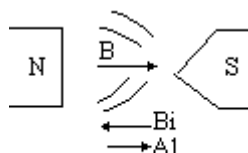


图19-8 顺磁性和抗磁性

通过简单的计算可以解释以上现象. 从磁化的定义, 我们可知单位体积样品在磁场  $B$  中的势能是

$$u = -M \cdot B + C \quad (C \text{ 为常量}) \quad (19.3.1)$$

在非均匀磁场中, 所经受的力是

$$\begin{aligned} F &= -\nabla u = \nabla (M \cdot B) \\ &= (M \cdot \nabla) B + M \times (\nabla \times B) \end{aligned} \quad (19.3.2)$$

由安培定律

$$\oint_C B \cdot dl = \int_S (\nabla \times B) \cdot dS = \mu_0 \int_S J \cdot dS \quad (19.3.3)$$

可知当电流密度是零时, (19.3.2) 式中的第二项为零. 对于线性介质, 力是

$$F = (M \cdot \nabla) B = (\chi H \cdot \nabla) (\mu H) \quad (19.3.4)$$

由此可以从力的方向判断出磁化率的正负.

顺磁材料中的原子有永久磁矩. 在外磁场中, 磁能和热能相互竞争, 样品的磁化强度是

$$M = \frac{N \langle \mu \rangle}{V} = n \langle \mu \rangle \quad (19.3.5)$$

其取值范围为  $0 \leq M \leq M_{\max} = n \mu$ . 利用经典统计模型, 平均磁矩可以计算为

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\int \mu \exp[-U/(k_B T)] d\Omega}{\int \exp[-U/(k_B T)] d\Omega} \\ &= k_B \frac{\int_{-1}^1 \cos \theta \exp[\mu_1 B \cos \theta / (k_B T)] d \cos \theta}{\int_{-1}^1 \exp[\mu_1 B \cos \theta / (k_B T)] d \cos \theta} \quad \text{最后一行的近似条} \\ &\quad \frac{1}{3} \mu \quad k \left( \frac{\mu_1 B}{k_B T} \right) \end{aligned} \quad (19.3.6)$$

件是  $\mu B \ll k_B T$ . 根据磁化率的定义, 可得

$$\chi = \frac{1}{3} \frac{N \mu^2 \mu_0}{k_B T} \quad (19.3.7)$$

这样我们得到了居里定律 (1895, Curie's law) 的表达式:

$$M = C \frac{B_{\text{eff}}}{T} \quad (19.3.8)$$

图 19 - 9 中显示了适用于整个温度范围的理论结果以及居里定律.

抗磁材料中的原子没有永久磁矩, 但有感应磁矩. 从感应磁偶极矩的表达式 (19.1.10) 和磁化率的定义式 (19.2.9), 我们知道:

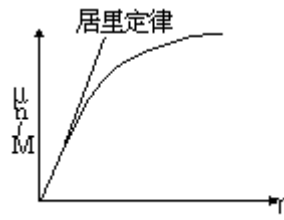


图19-9 居里定律

$$\mu = -\frac{e^2}{6m} \overline{r^2} B$$

$$M = N \mu \chi H$$

因而

$$\chi = -\frac{N \mu_0 e^2}{6m} \overline{r^2} \quad (19.3.9)$$

例 19.1 求自由电子气的总磁化率.

解: 顺磁和抗磁磁化率之和为

$$\chi = \frac{1}{3} \frac{N \mu^2 \mu_0}{k_B T} - \frac{N e^2 \mu_0}{6m} \overline{r^2}$$

利用显然的关系

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \left( -\frac{e}{2m} L \right)^2 \\ &= \frac{e^2}{2m} \frac{L^2}{2m r^2} = \frac{e^2}{2m} 2 \cdot \frac{1}{2} k_B T \cdot \overline{r^2} \end{aligned}$$

合磁化率  $\chi$  为零. 计及量子效应则将导致附加的结果.

有些材料在不存在外磁场时仍可以有磁化, 这种磁化叫做自发磁化, 有这种性质的材料称为铁磁材料. 我们可以期望温度越低, 磁化越强; 当高于某一温度时, 它们可能失去所有的磁化, 这一温度称为居里温度  $T_c$ . 表 19 - 1 列出了一些铁磁材料的居里温度. 低于居里温度  $T_c$ , 我们有铁磁相, 磁化情况如图 19 - 10 所示. 高于  $T_c$  时, 只有加外场才能维持磁化. 这时磁化强度正比于外场:

$$M = \frac{C}{T - T_c} H$$

表 19 - 1 一些铁磁材料的居里温度

Fe	1403K
Co	1393K
Ni	631K
Gd	289K
Dy	105K

这叫居里-外斯定律 (Curie - Weiss law) .

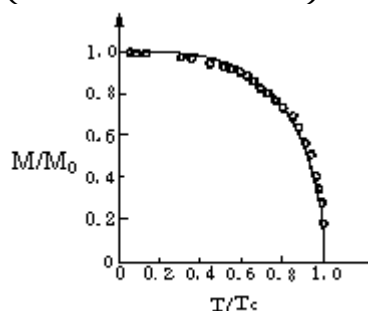


图19-10 自发磁化

铁磁材料的磁化十分复杂.如果我们写

$$B = \mu H$$

磁导率  $\mu$  将是  $H$  的函数, 并且依赖于磁化的历史. 而  $B - H$  的关系可以通过实验决定. 螺绕环就可用作这一目的. 当绕组是空心的时, 我们有  $i - B_0$  关系. 当有铁磁材料芯时, 螺绕环呈现附加的磁感应  $B_M$ . 总磁感应强度  $B = B_0 + B_M$  可由另一绕组测出, 如图 19 - 11 所示; 并可对

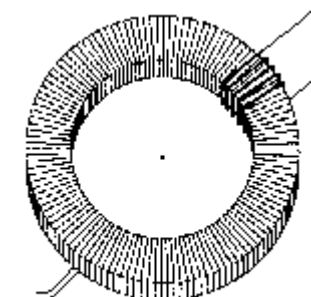


图19-11 螺绕环

图 19 - 12 所示的磁滞回线 (Hysteresis loop), 反映的就是铁磁材料的磁化过程. 当  $H$  降到零时, 残余的磁感应叫做剩磁 (remanence); 而使  $B = 0$  的磁场强度叫做矫顽力  $H_c$  (coercive force) .

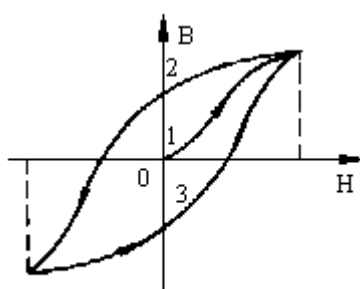


图19-12 磁滞回线

铁磁材料并不总是呈现自发磁化. 为了解释这一现象, 外斯于 1907

年提出了一个假说：大块材料可以划分为很多磁畴（domain）。每一磁畴都有自发磁化。材料的总磁化强度是所有磁畴磁化的矢量和。只有当磁畴在同一方向磁化时，才相互加强。这一点通过附加一弱外场即可实现。单晶和多晶的铁磁结构如图 19 - 13 所示。

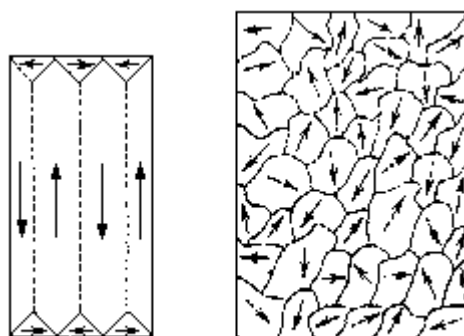


图19-13 单晶和多晶的磁畴结构

铁磁性是量子力学效应，是所谓自旋-自旋交换作用造成的。与此相联系的能量是

$$U_{\text{ex}} = -JS_i \cdot S_j = -\frac{J}{r^2} \mu_i \cdot \mu_j \quad (19.3.10)$$

式中自旋角动量前面的系数是“交换积分”，决定了自旋相互作用的强度，它比偶极-偶极相互作用要强的多。

磁性介质可以构成磁路，如图 19 - 14 所示。一个  $N$  匝的线圈绕在铸铁芯环上，线圈通电时，磁感应线基本上限于环内，环外的通量近乎为零。这样沿环路磁通保持不变：

$$=B_1A_1=B_2A_2=B_{\text{gap}}A_{\text{gap}}$$

式中的  $A$  为相应的截面积。环路定律为

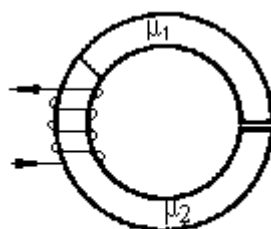


图 19-14 磁路

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$$

这导致

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_{\text{gap}} l_{\text{gap}} = NI$$

或

$$\frac{B_1}{\mu_1} l_1 + \frac{B_2}{\mu_2} l_2 + \frac{B_{\text{gap}}}{\mu_0} l_{\text{gap}} = NI$$

上式可写为

$$\left[ \frac{l_1}{\mu_1 A_1} + \frac{l_2}{\mu_2 A_2} + \frac{l_{\text{gap}}}{\mu_0 A_{\text{gap}}} \right] = NI \text{ 方括号中的量叫做磁阻抗}$$

（reluctance），方程的右边的  $NI$  叫做磁通势（magnetomotive force），和电动势相对应。



可用的关系为  $B_{1n}=B_{2n}$ ，空隙截面比环的横截面略大但可以认为近似相等。

反铁磁和亚铁磁可以简单地用图 19 - 15 表示，箭头代表磁矩的大小和取向：

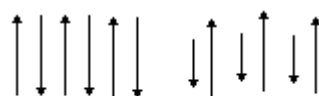


图19-15 反铁磁和亚铁磁结构示意图

## \* § 19.4 地球的磁性

地球的磁场与一个棒状磁体的磁场相似，其分布如图 19 - 16 所示. 地磁轴与自转轴的交角为  $11.5^\circ$ . 地磁两极在地面上的位置是经常变化的. 1970 年磁南极的地理坐标是在北纬  $78.6^\circ$  , 西经  $70.1^\circ$  . 纬度每十年增加  $0.04^\circ$  , 经度每十年增加  $0.07^\circ$  . 磁极处的场强为  $60 \mu\text{T}$  , 磁赤道处的强度为  $30 \mu\text{T}$  . 地球的磁场在时空上都有变化. 地域上 , 由于铁矿或其它磁性矿物存在 , 地磁可以有相当大的差异. 在时间上 , 地磁存在长期变化和短期变化. 长期变化与地球内部物质运动有关 , 磁场的偏角和倾角 (magnetic declination and inclination) 可以逐年变化. 磁极变化可达  $8\text{km/a}$  . 考古发现 , 磁极在过去  $4 \times 10^6\text{a}$  间 , 曾发生倒转九次之多. 短期变化来自电离层以及太阳活动的影响. 太阳风是太阳抛出的高速质子和电子流 , 宁静期风速平均为  $400\text{km/s}$  , 活动期可高达  $1000\text{km/s}$  . 大的干扰是全球性的 , 称作磁暴 (magnetic storm) . 由于磁暴对电离层的干扰 , 可使短波无线电通讯中断. 当质子和电子被地球磁场俘获时 , 构成了所谓的辐射带 (Van Allen radiation belt) . 高纬地区出现极光则是由高速电子与大气相互作用引起的.

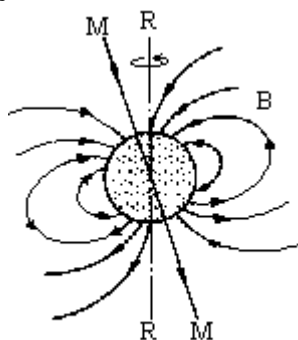


图 19-16 地球的磁场

### 习题

19.1. 一原子被置于磁场  $B$  中. 原子中的电子作半径为  $r$  和频率为  $\nu$  的圆周运动 , 轨道平面与  $B$  垂直. (a) 求不存在磁场时原子的磁矩 ; (b) 求存在磁场时原子的磁矩 ; (c) 如果材料的原子数密度为  $2.8 \times 10^{28}/\text{m}^3$  , 磁化率为  $-10^{-6}$  , 求原子的半径.

19.2. 如上题. 如果另有一电子在同样的轨道上以同样的频率反方向运动 , 求有磁场和无磁场时原子的磁矩.

19.3. 石蜡包含很多质子. 质子自旋为  $1/2$  , 磁矩为  $1.4 \times 10^{-26}\text{J/T}$  . 石蜡置于  $3\text{T}$  的磁场中. 为了使 75% 的质子的自旋与外场平行 , 温度应该是多少 ?

19.4. 半径为  $r$  的介电圆环上均匀分布有电荷  $Q$  . 求圆环绕通过中心、垂直环面的轴以角速度  $\omega$  旋转时的磁矩.

19.5. 半径为  $r$ 、质量为  $m$  的介电球上均匀分布有电荷  $Q$  . 求当它绕通过球心的轴旋转时的自旋角动量和磁矩以及它们之比.

19.6. 电子自旋磁矩为  $9.285 \times 10^{-24}\text{J/T}$  . 在  $1\text{T}$  的磁场中 , 磁矩反平行和平行时磁能的差是多少 ? 相当于这一能量的热能对应的温度是多

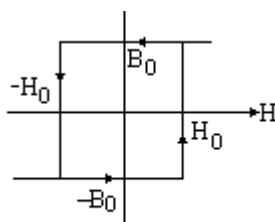
少？

19.7. 铁磁金属镍的饱和磁化强度是  $4.7 \times 10^5 \text{ A/m}$ . 镍的原子量是 58.71, 密度是  $8.90 \text{ g/cm}^3$ . 试计算单个镍原子的磁矩.

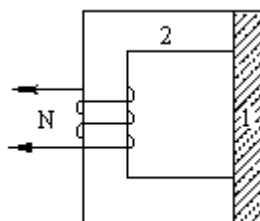
19.8. 在居里温度以上, 金属钆 Gd (gadolinium) 的磁化率的倒数有如下数值: 温度 600K 时, 为  $5.82 \times 10^3 \text{ cm}^3/\text{g}$ , 1000K 时, 为  $1.35 \times 10^4 \text{ cm}^3/\text{g}$ . (a) 求居里温度. (b) 作  $1/\chi - T$  曲线.

19.9. 某种特殊磁性材料的磁滞回线近乎矩形, 如图. 由此它可用作记忆元件. 这种材料的螺绕环内外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 厚度为  $t$ , 载流线圈为  $N$  匝. (a) 当通电流 1A 时, 使之饱和的最少匝数是多少? (b) 当电流降至 0 时, 磁化强度是多少?

19.10. 两种非线性材料组成如图的磁路. 两部分的长度和截面分别为  $l_1, l_2$  和  $A_1, A_2$ . 根据安培定律和通量连续性, 得到从  $(B_1, H_1)$  求  $(B_2, H_2)$  的方程. 由此可以从一种材料的磁化曲线求另一种材料的磁化曲线.



题19.9图



题 19.10 图

19.11. 地球的磁场可以用磁偶极场来近似. 偶极矩为  $8.0 \times 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ .

(a) 根据磁偶极场的公式证明: 离地心距离为  $r$  处的磁场的水平和垂直分量可以由下式近似表示:

$$B_h = \frac{\mu_0 \mu}{4 r^3} \cos \theta_m, \quad B_v = \frac{\mu_0 \mu}{2 r^3} \sin \theta_m$$

其中  $\theta_m$  是磁纬度;

(b) 证明磁纬度  $\theta_m$  处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4 r^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta_m}$$

(c) 证明磁倾角  $i$  与磁纬度的关系是

$$\tan i = 2 \tan \theta_m$$

## 第二十章 麦克斯韦方程组

### § 20.1 准方程和磁单极子

将 (16.5.4) 式、(17.2.2) 式、(18.1.1) 式和 (19.2.8) 式集中在一起, 我们有以下一组方程:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 - \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + 0$$

此外, 我们还有电矢量和磁矢量的构成关系式:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$$

从形式对称考虑, 上面 4 个方程中的后 3 个方程似乎都缺少一项, 我们期望由下面 3 项来分别取代那里的 0.

$$\mu_0 q_m, \mu_0 g, \mu_0 I_m = \mu_0 \frac{dg}{dt}, \frac{d}{dt} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (20.1.1)$$

其中  $q_m$  叫做磁荷或磁单极子,  $I_m$  显然是磁荷流. 至此我们还不能确定这些方程是否可作为电磁学的基本方程, 姑且称为准方程. 本节中我们将集中讨论磁单极子. 从其出现的位置可知,  $\mu_0 g$  的量纲和磁通相同, 单位为 Wb. 而磁单极子的量纲为  $(\text{dim} Q) \cdot \text{LT}^{-1}$ , 与电荷相差一个速度的量纲. 我们将对磁单极子作半经典的处理. 应该提到, 最早的磁单极子理论来自狄拉克 (Dirac) <sup>(1)</sup>.

如果存在磁单极子  $g$ , 则磁高斯定律应为  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 g$  (20.1.2)

相应的磁感应强度是

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 g}{4} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (20.1.3)$$

考虑一个电子沿  $z$  轴方向运动, 掠过磁单极子, 碰撞参量为  $b$ , 如图 20-1 所示. 如果速度足够大, 电子几乎是不偏转的. 当电子经过磁单极正上方时开始计时, 则电子经受到的力为

$$\begin{aligned} F_y &= e \mathbf{B}_x \\ &= e \frac{\mu_0}{4} \frac{g}{(b^2 + v^2 t^2)} \frac{b}{(b^2 + v^2 t^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

电子动量的变化为

$$\begin{aligned} p &= \int F_y dt \\ &= e \frac{\mu_0}{4} g b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

作变量变换:  $t/b = \tan \theta$ , 代入上式得

$$p_y = \frac{\mu_0 eg}{4b} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sec^2 d}{\sec^3} \\ = \frac{\mu_0}{4} \frac{2eg}{b}$$

这个力不是有心力，因此角动量不守恒。角动量 z 分量  $L_z$  的变化是

$$L_z = r_x p_y = 2e \times \frac{\mu_0}{4} g$$

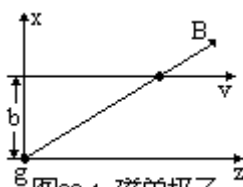


图20-1 磁单极子

这是纯粹的经典结果。哥德哈勃 (Goldhaber)<sup>(2)</sup> 提出了所谓的狄拉克量子化条件 (Dirac quantization condition)：

$$\Delta L_z = 2e \times \frac{\mu_0}{4\pi} g = n\hbar \quad (20.1.4)$$

就象通常对微观粒子所做的那样，认为角动量只能取分立的值。以此代入 (20.1.2) 式，得

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 g = \frac{4}{2e} \frac{n\hbar}{2e} = n(2\phi_0) \quad (20.1.5)$$

$$\text{式中 } \phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.07 \times 10^{-15} \text{ Wb} \quad (20.1.6)$$

叫做通量量子 (fluxon)，它是超导电性的通量量子。从 (20.1.4) 式，

$$\text{我们发现在电荷与磁荷之间存在一个关系：} eg = n\left(\frac{2}{\mu_0} \frac{\hbar}{2e}\right) \quad (20.1.7)$$

这一关系意味着即使宇宙间只存在一个磁单极子，它将制约每一个电子电荷的取值。

\*磁精细结构常数 (magnetic fine structure constant)

$$\frac{\mu_0 g^2}{4\hbar c} = \frac{1}{4} \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{4}{2e} \frac{n\hbar}{2e}\right)^2 \frac{1}{\hbar c} = \frac{n^2}{4} \left(\frac{4}{e^2} \frac{\epsilon_0 \hbar c}{e^2}\right) = \frac{137}{4} n^2 \gg 1 = \frac{1}{137} \quad (20.1.8)$$

斯坦福大学的一个研究组曾报导过几起磁单极子事件。他们用了四绕组的线圈，还用了超导量子干涉器件 (superconducting quantum interference device, SQUID) 作磁强计 (magnetometer)。当一个磁单极子穿过线圈时，将造成一个通量  $8\phi_0$ ，如图 20-2 所示。1982 年卡布里拉等 (Cabrera et al) 记录到一个事件<sup>(3)(4)</sup>，表明磁单极子通过地球表面的上限为  $6.1 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}$

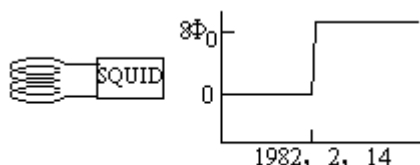


图20-2 卡布里拉的观测

其中 sr 是球面度 (steradian). 1983 年, 他们把上限更新为

$$3.7 \times 10^{-11} \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}$$

由于还没有其它捕捉到磁单极子的报导, 卡布里拉的结果尚不能作为定论.

\* 大统一磁单极子<sup>(5)</sup> (The grand unified monopole, GUM) 一些新的理论思想使磁单极子的概念大大超越了狄拉克时代. 本质上说, 理论工作者发现磁单极子或多或少是各种大统一理论 (Grand unification theory) 的必然结果. GUM 是由特霍夫 (t'Hooft) 和玻利雅可夫 (Alexander Polyakov) 提出的. 根据他们的理论工作, 如果 GUM 存在, 则每一个都将超过大统一质量, 也就是说约为  $10^{16}$  质子质量, 或象阿米巴菌 (amoeba) 那么重, 这样就不可能是点粒子. 它们应具有复杂的内部结构, 由象洋葱皮层那样的力区组成.

按照标准的大爆炸理论, 宇宙间磁单极子应和原子一样多. 这使理论工作者非常地尴尬. 很清楚, 肯定有什么地方搞错了, 而且错得厉害. 问题是如何排除那些不要的东西. 麻省理工学院的谷斯 (Guth) 发明了宇宙暴涨理论 (inflationary scenario)<sup>(5)</sup>, 而其初衷却是为了达到磁单极子不存在的结果. 暴涨理论自动地解决了磁单极子问题, 因为巨大的膨胀有效地使它们稀释到零密度.

## § 20.2 位移电流和感应磁场

在这一节中我们将讨论假定在上节的第四个方程应该存在的项. 它应该有电流的量纲, 也许形如:

$$\frac{\partial \Phi_D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (20.2.1)$$

根据输运理论, 我们知道电荷守恒将导致连续性方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

或

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int dv = \int \nabla \cdot \mathbf{J} dv$$

也可以写为

$$\frac{\partial q_{in}}{\partial t} = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

从电荷分布和系统的几何是对称的, 如图 20-3 所示情形, 可以期望电流也是对称的. 连续性方程可以直接给出:

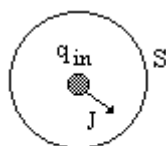


图 20-3

$$\frac{\partial q}{\partial t} = J(r) 4\pi r^2$$

对稳定情形, 物理量不随时间变化. 我们有

$$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

这并不意味着电流是零, 而应该说电流是连续的. 粗略地说, 对于任意形状的外向法线闭合面上的面元,  $\mathbf{J}_{in} \cdot d\mathbf{S} < 0$ , 而  $\mathbf{J}_{out} \cdot d\mathbf{S} > 0$ . 面元对积分的贡献逐块抵消. 考虑有共同边界 C 的两个表面  $S_1$  和  $S_2$ , 法线如图 20-4 所示. 当没有源或漏在其间时, 电流是连续的. 这样必定有

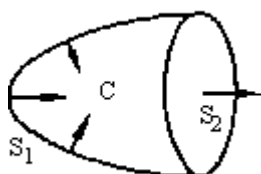


图20-4 连续流

$$\int_{S1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

将两个表面看作是具有外向法线的闭合面, 则有

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

这就是我们所期待的.

对高斯定律求导, 有

$$\oint \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

或

$$\oint (J + \frac{\partial D}{\partial t}) \cdot dS = 0$$

现在括弧中的量是连续的. 这提供了包括含时情形的可能; 例如电容器的充、放电过程 (图 20-5) .

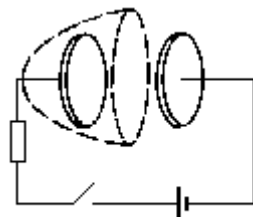


图20-5

麦克斯韦在安培定律中引入了一个位移电流项, 以代替原来的安培定律:

$$\begin{aligned} \oint H \cdot dl &= \int (J + \frac{\partial D}{\partial t}) \cdot dS \\ &= \int J \cdot dS + \frac{\partial}{\partial t} \int D \cdot dS \quad (20.2.2) \end{aligned}$$

其中的偏导数项是位移电流 (displacement current), 它和电流一样激发磁场. 这一点当然需要实验证实. 但是这里, 至少位移电流的引入使得方程更加协调. 至此, 我们有了四个一组的麦克斯韦方程组——电磁学的基本方程.

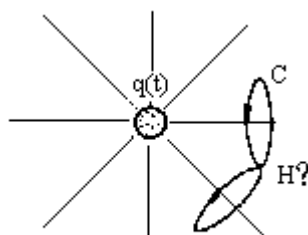


图 20-6 例20.1

例 20.1 在均匀介质中, 存在一球对称电荷分布及各向同性的电流. 在电流周围, 存在有限的磁场场强  $H$ . 选取两个相切的锥面. 相切处的磁场场强如何? 两个场线似乎方向相反, 也许场强为零是合理的结果?

解: 如图所示, 对  $S_C$  所张的立体角  $\Omega$  中, 电电流是

$$I_C = \int_{S_C} J(r) \cdot dS = \frac{\Omega}{4} \oint J(r) \cdot dS = \frac{\Omega}{4} I$$

电位移矢量也在径向方向上,

$$\int_{S_C} D \cdot dS = \frac{\Omega}{4} \oint D \cdot dS$$

$$\oint_C H \cdot dl = I_C + \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_C} D \cdot dS$$

$$\text{磁场强度是} = \frac{\Omega}{4} \oint (J(r) + \frac{\partial D}{\partial t}) \cdot dS$$

$$= \frac{\Omega}{4} (I + \frac{\partial q}{\partial t}) = 0$$



在真空中， $J=0$ ， $H=B/\mu_0$ ， $D=\epsilon_0 E$ ，由式(20.2.2)可得：

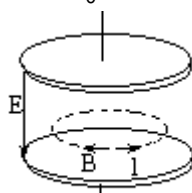


图20-7 例20.2

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$$

位移电流项当然有着电流的量纲，但它本身就是电通量的变化率，从场的观点，我们可以说变化的电场也感生磁场。

例 20.2 求圆形平板电容器边缘的磁场。

解：如图 20-7 所示，设圆板的半径为  $R$ ，在柱坐标系中有：

在  $r < R$  处，

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = B_\phi 2\pi r$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = -\mu_0 \epsilon_0 r^2 \frac{\partial E}{\partial t}$$

令

$$B = -B_\phi$$

有

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_0 r \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$= \frac{\mu_0}{4} \frac{2}{r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 E \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4} \frac{2}{r} \left( R^2 \frac{\partial \sigma_q}{\partial t} \frac{r^2}{R^2} \right)$$

其中  $r$  是任何环路的半径，而  $\sigma_q$  是电荷面密度。

在  $r > R$  处，

$$B = \frac{1}{2r} \mu_0 \epsilon_0 R^2 \frac{\partial E}{\partial t}$$

对于电容器边缘，取数值

$$r = R = 5.0\text{cm}, \quad \frac{\partial E}{\partial t} = 10^{12} \text{ V} / (\text{m} \cdot \text{s})$$

则磁感应强度约为

$$B = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4} \epsilon_0 R \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$= 0.5 \times (3.0 \times 10^8)^{-2} \times 5.0 \times 10^{-2} \times 10^{12} \text{ T}$$

$$= 2.8 \times 10^{-7} \text{ T}$$

远远小于地表的磁场  $10^{-4} \text{ T}$ 。由此可见所激发的磁场是相当小的。

1929 年，那是麦克斯韦预言存在位移电流的 60 年之后，范可文 (M.R.van Cauwenerghe) 终于证实了它的存在。

现在电流是连续的，这一图象当然是人们乐于接受的。而变化的电场和磁场的关系是电磁辐射的基础，对此我们将在后面讨论。

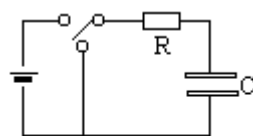


图20-8 例20.3

例 20.3 求 RC 电路中的位移电流

解：如图对于充电过程，我们有

$$= R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}, \quad q = C \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right), \quad I = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

对于放电过程，我们有

$$0 = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}, \quad q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad I = \frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

在电容器极板之间，电场和位移电流分别为

$$\begin{aligned} E_{\text{gap}} &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 A} \\ I_d &= \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 A E_{\text{gap}}) = I \\ &= \frac{4}{4} \frac{\varepsilon_0}{R^2} \frac{\partial E}{\partial t} = 0.070 A \end{aligned}$$

为了定量起见，其中用了上例中的数据. 注意，此处位移电流在数值上等于导线中的传导电流.

在圆柱“表面”附近的磁场是

$$B_R = \frac{\mu_0}{4} \frac{2I_d}{R} < < \frac{\mu_0}{4} \frac{2I}{r_{\text{wir}}} = B_r$$

在导线中，欧姆定律适用.

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} (EA) = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_c} \frac{d}{dt} I = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_c} \left( -\frac{1}{RC} \right) I$$

下面对位移电流和传导电流的相对数量级作一估算. 因为

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\sigma_c} &\sim \frac{\varepsilon_r}{4 \times 9 \times 10^9 \times 58 \times 10^7} \sim 10^{-18} \text{ s} \\ RC &\sim \quad \cdot \mu\text{F} (\quad \cdot \text{pF}) \sim 10^{-6} \text{ s} (10^{-12} \text{ s}) \end{aligned}$$

所以

$$\frac{I_d}{I} \sim 10^{-6}$$

\* 进一步深入的考虑应该计及频率依赖性：

$$= (\quad), \quad = (\quad) \quad (20.2.3)$$

由上面的计算可以清楚看出，在导线中位移电流比传导电流小得多. 尽管如此，位移电流的引入是极其重要的.

麦克斯韦加入位移电流项使电磁学的基本方程组更对称和更令人愉快. 看来大自然也同意麦克斯韦的美学观点. 本世纪初庞加莱和洛伦兹研究了麦克斯韦方程组的数学结构，特别关注符号间隐藏着的、当时尚未为人们所知的对称性. 似乎只有爱因斯坦以其超人的洞察力从物理上猜想过这种对称性. 所谓洛伦兹-庞加莱对称性是一种时空中的旋转不变

性——洛伦兹不变性，这种对称性所蕴含的美学价值当然比我们以上提及的形式对称性要深刻得多. 在 § 9.1 中我们提到过伽利略变换不适用于电磁学. 如果伽利略变换适用的话，由麦克斯韦方程组导出的波动方程在不同的惯性系将呈现不同的形状，这是和相对性原理相悖的. 在下一章我们将具体讨论如何从麦克斯韦方程组得到波动方程，可以看到引入位移电流项对电磁波的存在是至关重要的.

### \* § 20.3 麦克斯韦方程组的微分形式

麦克斯韦方程组可以写成微分形式，所需要的是矢量分析中的两个定理（见附录）：

（1）散度定理.

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \quad (20.3.1)$$

（2）斯托克斯定理（Stokes theorem）：

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad (20.3.2)$$

利用这两个定理，我们可以把麦克斯韦方程组写为

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{D}) dV = qf \quad (20.3.3)$$

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV = 0 \quad (20.3.4)$$

$$\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (20.3.5)$$

$$\int (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (20.3.6)$$

它们等价于下列方程组：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (20.3.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (20.3.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (20.3.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (20.3.10)$$

这就是麦克斯韦方程的微分形式. 对于简单介质，

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mu = \mu_0 \mu_r, \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (20.3.11)$$

上面的方程组变成：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho_f \quad (20.3.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (20.3.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (20.3.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}_f + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (20.3.15)$$

它们是下一章要讨论的波动方程的基础.

## § 20.4 能流和场动量密度

当电场和磁场存在时，能量密度是

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (20.4.1)$$

能量的变化率是

$$-\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV = -\int \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV$$

其中的偏导数项通过

$$-\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{H} \text{ 和 } -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$$

等关系变换后，有

$$\begin{aligned} -\frac{dU}{dt} &= \int [\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})] dV \\ &= \int [\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})] dV \\ &= \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \quad (20.4.2) \end{aligned}$$

最后的结果中，第一项显然是焦耳耗散，而第二项应该是由通过表面的流造成的能量损失。我们称下面的矢量为玻印亭矢量(Poynting vector)：

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (20.4.3)$$

也就是能量流密度矢量。由于旋度是无散的，在玻印亭矢量  $\mathbf{S}$  上加一任意矢量的旋度将不影响 (20.4.2) 式。如果在 (20.4.3) 式右边加上任意的常矢量，结果如何？试加以评论。

玻印亭矢量  $\mathbf{S}$  的量纲是

$$\dim \mathbf{S} = \left( \dim \frac{dU}{dt} \right) \cdot L^2 = \frac{\dim U}{L^3} \dim v$$

$$\text{在真空中，玻印亭矢量为 } \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (20.4.4)$$

对于电磁波，我们感兴趣的是其大小的平均值。

$$\bar{S} = \frac{1}{2\mu_0} E_m B_m \quad (20.4.5)$$

例 20.4 求平行圆板电容器中的能流。

解：如图在充电过程中，由例 20.2 知：

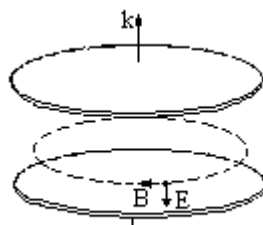


图20-9 例20.4

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_0 \epsilon_0 R \frac{dE}{dt} (-\mathbf{e}_\phi)$$

$$\mathbf{E} = E (-\mathbf{k})$$

则玻印亭矢量为

$$S = \frac{1}{2} \mu_0 R E \frac{dE}{dt} \quad (-e)$$

流入电容器圆柱形侧面的能量也许更能使我们感兴趣：

$$2 \pi R d \cdot S = \pi R^2 d \mu_0 E \frac{dE}{dt} = \left( \pi R^2 d \frac{1}{2} \mu_0 E^2 \right)$$

例 20.5 求导线表面的能流。

解：如图 20-10 所示，设导线半径为  $r$ ，导线的电阻是

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{\pi r^2}$$

表面处的磁感应强度和电场强度分别是

$$B = \frac{\mu_0}{4} \frac{2I}{r} e_\phi$$

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{IK}{\sigma \pi r^2} \frac{IR}{l} k$$

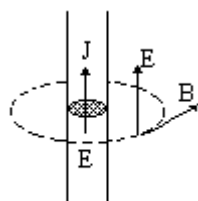


图 20-10 例20.5

坡印亭矢量是

$$S = \frac{1}{\mu_0} \frac{IR}{l} \frac{\mu_0}{4} \frac{2I}{r} (k \times e_\phi)$$

$$= \frac{I^2 R}{2 \pi l} \quad (-e)$$

从以上表达式可见焦耳热能是从外部送入，而不是沿着导线传送的！\*

例 20.6 讨论一个点电荷和一个磁偶极子的\*组合的能流情况。

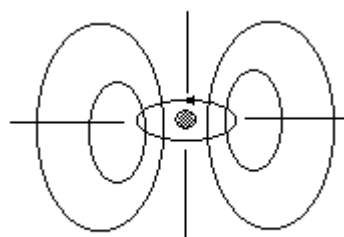


图 20-11 例20.6

解：由图 20-11 可见，空间各点均有有限的坡\*印亭矢量。然而我们当然不信这样的组合会有无尽的能量流出。问题何在？仔细分析可知，坡印亭矢量都在水平圆圈的切向，因此，将没有净的能量流过任何包含磁偶极子的闭合面。此结论对于点电荷和电流环的组合同样适用。在那种情形，能流甚至有不同的方向。

由以上例子可见，坡印亭矢量的引入均能自圆其说；而实际上，应用较多的地方是交变电磁场及电磁波。

\* 电磁场动量密度

$$\mathbf{p} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (20.4.6)$$

电磁场角量密度

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \epsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (20.4.7)$$

## 习题

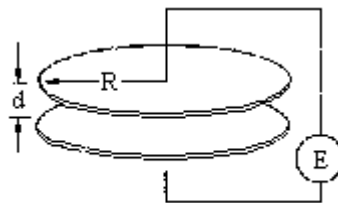
20.1. 证明：平行板电容器中的位移电流可以表示为

$$I_d = C \frac{dV}{dt}$$

20.2. 图中所示的电容器的圆形极板的面积为  $A$ ，并与交流电源  $V_m \sin \omega t$  相连，其中  $V_m = 200\text{V}$ ， $\omega = 100\text{rad/s}$ . 位移电流的最大值为  $I_d = 8.9 \times 10^{-6}\text{A}$ ，忽略极板边缘的电磁效应，(a) 电流的极大值

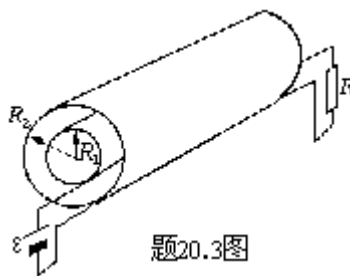
是多少？(b) 电通量变化率  $\frac{d\Phi_E}{dt}$  的最大值是多少？其中  $\Phi_E$  是通过

两极板间区域的电通量；(c) 两极板间距离是多少？(d) 两极板间距离轴线  $R = 0.10\text{cm}$  处的磁感应强度是多少？



题20.2图

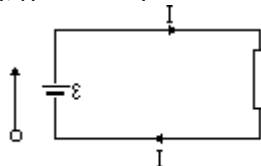
20.3. 一个内外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  的同轴电缆在电池  $\mathcal{E}$  和电阻  $R$  间用作传输线 (如图所示). (a) 对于  $R_1 < r < R_2$ ，计算  $E$  和  $B$ ；(b) 对于  $R_1 < r < R_2$ ，计算坡印亭矢量；(c) 通过适当的积分，证明在整个同轴电缆的截面 ( $R_1 < r < R_2$ ) 上的总的能流为  $\mathcal{E}^2/R$ ，该结果是否合理？



题20.3图

20.4. 电源通过长的无电阻的传输线向远处的负载供电，线路中的稳恒电流已在图中标出，(a) 定性画出围绕导线的磁场和电场；(b) 利用坡印亭矢量，证明能量由电池到负载的传输是通过空间而不是通过导线传播的。

20.5. 两个相邻的闭合回路  $abcda$  和  $efcbe$  具有相同边  $bc$  (如图)。



题24.4图



题24.5图

(a) 可以对每个回路利用方程

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -d\Phi_B / dt$$

试证明该方程在复合回路 abefcda 上自动满足；

(b) 对方程

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt},$$

重复同样的证明.

20.6. 与 0.50T 的磁场具有相同的能量密度的电场，其强度是多少？

20.7. 氦氖激光器波长 633nm、功率 5.0mW、光束有效直径 2.0 个波长. 求：(a) 光束强度；(b) 光束照在一同样直径的理想吸收小球上的辐射压；(c) 小球所受的力，假定小球的密度为  $5.0 \times 10^3 \text{kg/m}^3$

20.8 太阳系中密度为  $1.0 \times 10^3 \text{kg/m}^3$  的球状粒子同时受到太阳的引力吸引和太阳光的辐射压力. 假定入射光全部被粒子吸收，证明存在一个临界半径 R，所有小于它的粒子都将被吹出太阳系. 计算 R.



## 第二十一章 电磁波

### § 21.1 波动方程

首先将 (20.3.12) 式至 (20.3.15) 式罗列如下：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}_f + \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

对于传导介质,  $\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$ ,  $\rho_f = 0$ . 在这一情形下, 可以得到仅含  $\mathbf{E}$  或  $\mathbf{B}$  的方程. 为了消去第三个方程中的  $\mathbf{B}$ , 可以对方程两边取旋度运算, 即

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} - \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}$$

这样就得到了  $\mathbf{E}$  所满足的方程：

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (21.1.1)$$

方程右边是有限传导所导致的阻尼项. 对于非传导介质, 有

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0 \quad (21.1.2)$$

类似地, 对  $\mathbf{B}$  有

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B} = 0 \quad (21.1.3)$$

在真空中, 我们有

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0 \quad (21.1.4)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B} = 0 \quad (21.1.5)$$

与机械波相比, 这里满足波动方程的变量不是位移矢量而是场矢量. 在上面的方程中

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (21.1.6)$$

这个量具有速度的量纲, 它实际上就是真空中的光速.

历史上, 真空磁导率是人为赋予的, 即规定

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

有了这一值, SI 的基本单位 A 就可以通过平行导线或电流天平来定义. 真空介电常数可以通过库仑定律来定义. 从下列方程：

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{4} \frac{2I_1 I_2}{d}$$

$$F = \frac{1}{4} \frac{q_1 q_2}{\epsilon_0 r^2}$$

以及已经确定的 N、m 等单位，可以得到

$$\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \sim \frac{I_1 I_2}{q_1 q_2}$$

无论“安培”的定义如何变化，等式右边是一常量。而从波动方程，我们知道“正好”有

$$\mu_0 \epsilon_0 = \text{常量}$$

$$v^2 = \frac{1}{\mu \epsilon} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 \mu_r \epsilon_r} = \frac{c^2}{\mu_r \epsilon_r}$$

在介质中，有

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{n} \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (21.1.7)$$

式中 n 是折射率，而  $\mu_r \approx 1$ 。

## § 21.2 行波

根据第八章的内容，我们可以期望在真空中波动方程有行波解：

$$u = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

确实如此，对于场矢量，解的形状如下：

$$E = E(\hat{k} \cdot r - ct)$$

$$B = B(\hat{k} \cdot r - ct) \quad (21.2.1)$$

式中  $k$  是波矢而

$$\hat{k} \cdot r = (\hat{k} \cdot e_x)x + (\hat{k} \cdot e_y)y + (\hat{k} \cdot e_z)z$$

在其它情形下，例如平行板、同轴电缆、波导和共振腔等，应该考虑边界条件的影响。

引入中间变量

$$\hat{k} \cdot r - ct$$

我们可以把方程  $\nabla \cdot E = 0$  写为

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial E_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial E_y}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial E_z}{\partial \xi} = 0$$

即

$$(\hat{k} \cdot e_x) \frac{\partial E_x}{\partial \xi} + (\hat{k} \cdot e_y) \frac{\partial E_y}{\partial \xi} + (\hat{k} \cdot e_z) \frac{\partial E_z}{\partial \xi} = 0$$

也即

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [\hat{k} \cdot E(\quad)] = 0$$

要方程对任意  $\xi$  都满足，除非两个矢量相互垂直，即

$$k \cdot E = 0 \quad (21.2.2)$$

类似地有

$k \cdot B = 0$  我们称这种场矢量垂直于波矢的波为横波。

法拉第电磁感应定律可以写为

$$\nabla \times (E_x \cdot e_x + E_y \cdot e_y + E_z \cdot e_z) = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1)$$

利用矢量分析中的公式：

$$\nabla \times (\varphi A) = \varphi (\nabla \times A) + (\nabla \varphi) \times A$$

(1) 式变成

$$\begin{aligned} & (\nabla E_x) \times e_x + (\nabla E_y) \times e_y + (\nabla E_z) \times e_z \\ & = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2) \end{aligned}$$

再次利用中间变量  $\xi$ ，(2) 式左边可以写为

$$\begin{aligned}
 & (\nabla) \times \left( \frac{\partial E_x}{\partial \xi} \mathbf{e}_x + \frac{\partial E_y}{\partial \xi} \mathbf{e}_y + \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \mathbf{e}_z \right) \\
 &= (\nabla) \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} = \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E})
 \end{aligned}$$

而其右边为

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \xi} = c \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} (c\mathbf{B})$$

于是有

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} - c\mathbf{B}) = 0$$

结果是

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} = c\mathbf{B} \quad (21.2.3)$$

3 个矢量的关系如图 21-1 所示. 可以知道场矢量总是同相位的. 从图中的关系或用与上面完全类似的做法, 可以得到对应的关系:

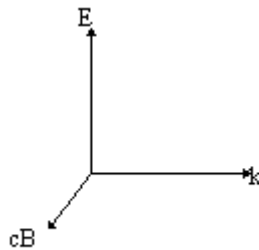


图21-1 波矢和场矢量

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{c} \mathbf{E} \quad (21.2.4)$$

坡印亭矢量是

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{E^2}{c\mu} \hat{\mathbf{k}} \quad (21.2.5)$$

所以能量沿波矢  $\mathbf{k}$  方向传播. 这当然是可以接受的.

对于单色波 (monochrome wave), 可以包括如下的相位因子:

$$t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} +$$

线性偏振波 (linearly polarized wave) 是

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \quad) \quad (21.2.6)$$

即电场矢量的方向是确定的. 一般定义电场矢量和波矢所在的平面为偏振平面 (the plane of polarization).

椭圆或圆偏振波是

$$\mathbf{E} = e_x E_x \cos(t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \quad_x) + e_y E_y \cos(t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \quad_y) \quad (21.2.7)$$

相应的  $\mathbf{B}$  如何?

对物体发射或散射辐射的偏振情况进行考察, 可以得到很多结果. 例如对银河系中宇宙尘埃颗粒反射光偏振的研究, 我们可以知道它们在星系弱磁场中的取向. 偏振研究也告诉我们土星的环由冰晶组成. 根据病毒颗粒散射的紫外光的偏振情况可以得到其大小和形状的信息. 从原子和

原子核发射的辐射的偏振研究，可以了解很多关于它们内部的结构. 这样，可研究的体系从星系 ( $\sim 10^{20}\text{m}$ ) 直到原子核 ( $\sim 10^{-14}\text{m}$ )

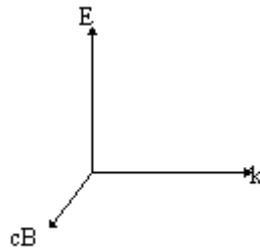


图21-1 波矢和场矢量

反射可以起偏振. 早在 1809 年，马鲁斯 (Etienne Louis Malus) 就发现了这一事实. 当时，他正在巴黎卢森堡宫 (the Luxembourg Palace in Paris) 通过方解石 (calcite) 晶体观看落日的反光. 现在偏振片早已成为很普通的商品了. 摄影机前的偏振片可以去除水面或橱窗玻璃反光. 在时也使用偏振镜来减弱雪原上过强的光强.

## § 21.3 辐射

当一个电荷静止时，有电场围绕其周围。当电荷以速度  $u$  运动时，在其自身参考系中有电场  $E$ ；而在实验室参考系中，既有电场又有磁场。恒定线电流的磁场线是以电流为轴线的同心圆，磁感强度与距离成反比。单个运动电荷当然与恒定电流不同。在附录L的例题中计算得到的磁场与距离的关系如图 21-2 所示。电场和磁场大致与  $1/r^2$  成比例，于是能流密度正比于  $1/r^4$ 。所以电荷发出的能量为

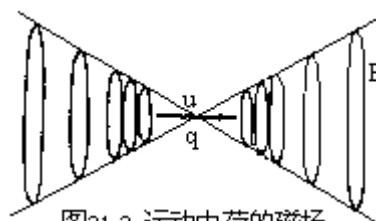


图21-2 运动电荷的磁场

$$\int_r S \cdot dA = 0 \quad (21.3.1)$$

当电荷加速时，另有正比于  $1/r$  的场。在这种情况下，能流正比于  $1/r^2$ ，相应的积分是有限的。由此可以得出结论：存在能量辐射。在电动力学中，算得辐射功率为

$$P = \frac{q^2}{4\epsilon_0} \cdot \frac{2|\dot{v}|^2}{3c^3}$$

电磁波可以由天线发射。通有含时电流的短直导线就是一个简单天线。当天线长度远小于发射的波长时，称其为微分天线。较长天线（例如半波天线）的辐射可以由微分天线发射的场叠加而成。电流可以取以下形式：

$$I = I_0 \cos \omega t \quad (21.3.2)$$

想象天线是一个开放的平行板电容器，交变电流就成为可能。计算表明这样的电流等价于一个振动的电偶极子，它在振动的过程中不断把电磁波“甩”出去，见图 21-3。

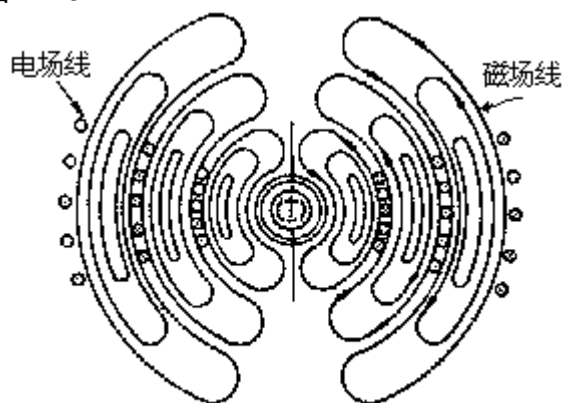


图21-3 振动电偶极子的辐射

### 来自空间的射频辐射

1931 年贝尔实验室 (Bell Lab) 工程师姜斯基 (Karl G. Jansky) 发现了无线电频段的地外信号源。他披露了这一发现，由此建立了射电天文学。从此科学家可以检测来自空间的各种辐射。

1965 年贝尔实验室工程师潘齐亚斯和威尔逊 (A.A.Penzias and R.W.Wilson) 发现了宇宙微波背景辐射. 据认为那是来自原始火球

(primeval fireball) 的电磁辐射的残余 (remnants), 是支持大爆炸理论 (BigBang theory) 的有力例证. 他们因此而获得了 1979 年诺贝尔奖.

1968 年剑桥大学以赫希 (Antony Hewish) 为首的研究组发现了脉冲星 (pulsar). 这些星发射强而短的电磁辐射脉冲 (图 21-4). 它们是引力塌缩的产物. 事实上它们是由中子组成的紧致球, 叫做中子星. 这些星的半径约 10km, 密度高达  $10^{17}\text{kg/m}^3$  ( $\sim 5.5 \times 10^3\text{kg/m}^3$ ), 它们急速旋转的周期约  $10^{-2}\text{s}$ . 赫希由此发现而分享了 1974 年诺贝尔奖.



图21-4 来自脉冲星的射电信强度

类星体 (quasi-stellar radio sources, Quasars) 是 1962 年发现的它们。