复积分的性质

1. $\int_C [\alpha f(z)+\beta g(z)]dz = \alpha\int_C f(z)dz + \beta\int_C g(z)dz$

2. $\int_C f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz$

3. $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz \quad (C = C_1 + C_2)$

4. $\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|ds \le ML$

其中，$M = \max|f(z)|$，L 为曲线 C 的弧长

复积分的计算

1) 化为第二类曲线积分

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)\,d(x+iy)$$
$$= \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

格林公式：

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

2) 化为定积分

设曲线 C: $z = z(t) = x(t) + i\cdot y(t) \quad t: a \to b$

则 $\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt$

其他方法：

1. 利用原函数计算，即 $\int_C f(z)dz = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1}$
2. 利用柯西积分公式，高阶导公式计算
3. 利用留数计算

例：计算：$I = \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}$，其中，$C: |z-z_0| = r$，$n$ 为整数

解：$z = z_0 + re^{i\theta} \quad \theta: 0 \to 2\pi$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta}i}{(re^{i\theta})^n}d\theta = \frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta}d\theta = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n\neq 1 \end{cases}$$

即有 $\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n=1 \end{cases}$ → 重要！