$$T_k = \underbrace{\sum_{1\le i\le n} |A_i|}_{p=1} \overset{(-1)^{1+1}}{} - \underbrace{\sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j|}_{p=2} \overset{(-1)^{2+1}}{} + \dots + \underbrace{(-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1< \dots <i_k\le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|}_{p=k} = \sum_{p=1}^{k} \left((-1)^{p+1} \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_p}| \right)$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{p=1}^{n} \left((-1)^{p-1} \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le i_n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_p}| \right)$$

Fall 1. $k=n$

d g $T_k = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$

Fall 2 $k<n$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| - T_k = \sum_{p=1}^{n} \left((-1)^{p-1} \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le i_n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_p}| \right) - \sum_{p=1}^{k} \left((-1)^{p+1} \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_p}| \right)$$

$$= \sum_{p=k+1}^{n} \left(\boxed{(-1)^{p-1} \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_p}|} \right) *(p) \to \text{e g.} \ |*(p)| \ge |*(p+1)|$$

d h Vorzeichen des ersten Summanden ist dominierend für Restter
da zu Beginn erst addiert und dann subtrahiert wird
$\to p=1$

da Menge durch zusätzlichen Schnitt nur gleich viele oder weniger Elemente haben kann ($\to$ bekommt keinen neuen Elemente)

falls $k=2r$, $r\in\mathbb{N}$
d g. $(-1)^{k+1-1} = (-1)^k = (-1)^{2r} = 1$
Differenz also positiv. $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \ge T_k$

falls $k=2r-1$, $r\in\mathbb{N}$
d.g.: $(-1)^{k+1-1} = (-1)^k = (-1)^{2r-1} = -1$
Differenz ist also negativ, d h: $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \le T_k$