2020春季学期“数理逻辑”课程作业二参考答案

1. 在G'系统中证明下列命题：

(a) $\vdash \neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$

证:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A,B\vdash A \qquad A,B\vdash B}{A,B\vdash A\wedge B}\,\wedge R}{A\vdash A\wedge B,\neg B}\,\neg R}{\vdash A\wedge B,\neg A,\neg B}\,\neg R}{\vdash A\wedge B,\neg A\vee\neg B}\,\vee R}{\neg A\wedge B\vdash \neg A\vee \neg B}\,\neg L}{\vdash \neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B)}\to R
$$

(b) $\vdash (\neg A \wedge \neg B) \to \neg(A \vee B)$

证:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\vdash A,B \qquad B\vdash A,B}{A\vee B\vdash A,B}\,\vee L}{\neg B,A\vee B\vdash A}\,\neg L}{\neg A,\neg B,A\vee B\vdash}\,\neg L}{\neg A\wedge\neg B,A\vee B\vdash}\,\wedge L}{\neg A\wedge\neg B\vdash \neg(A\vee B)}\,\neg R}{\vdash (\neg A\wedge\neg B)\to\neg(A\vee B)}\to R
$$

2. 证明在G'系统中,$\vdash (P \to Q) \vee R$不可证.

证:

设原命题在G'系统中可证, 由G'系统的完全性可知，在G'系统中存在$\vdash (P \to Q) \vee R$的无CUT证明树.不妨设该无CUT 证明树为T.由证明树定义可知, T中的顶部节点均为公理$\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$, 最底部节点为命题$\vdash (P \to Q) \vee R$. 易见在$T$中,必定存在一条以公理为起点, 以原命题为终点的路径, 且该路径的每一个节点均为一个序贯S_i.令该路径为$Path$.用$N_{i,j}$表示第j个命题符在$Path$中第i个节点中出现的次数.

现在证明,对于G'系统中所有无CUT证明树, 有$N_{i,j} \leq N_{i+1,j}$ $(\star)$.

对证明树中所有出现的规则进行分类讨论.

1) 规则呈形$\frac{S_1}{S}$:

使用的规则为$\neg L$, $\neg R$, $\vee R$, $\wedge L$, $\to R$之一.

易见对于任一命题符A, 其在S_1中出现的次数等于其在S中出现的次数.

2) 规则呈形状$\frac{S_1,S_2}{S}$

使用的规则为$\vee L$, $\wedge R$, $\to L$之一.

易见对于任一命题符A, 其在S_1中出现的次数小于等于其在S中出现的次数, 且其在S_2中出现的次数小于等于其在S中出现的次数.

故式$(\star)$成立.则可知在路径$Path$中, 命题符P在第i个节点中出现的次数小于等于其在第$i+1$个节点中出现的次数,

$\therefore$ 命题符P在路径起点出现的次数小于等于其在路径终点中出现的次数.

又$\because$ P在$Path$终点(即原命题)中出现次数为1,

$\therefore$其在路径起点中出现的次数最多为1.

同理可知命题符Q和R中在路径起点中出现的次数亦最多为1.

又$\because T$是无CUT证明树, 故$Path$的起点中不会出现未在终点中出现的命题符.

$\therefore$路径$Path$的起点中, 所有命题符出现的次数最多为1.

然而$Path$的起点为公理,其中必有一个命题符至少出现两次,

$\therefore$ 矛盾

$\therefore$ 原设的证明树T不存在

$\therefore$ 原命题在G'系统中不可证. $Q.E.D.$

3. 证明$A \to (\neg(S \wedge D) \to \neg B), A, \neg D \vdash \neg B$ 可证.

证:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A,B\vdash B,D}{\neg B,A,B\vdash D}\neg L \qquad \dfrac{\dfrac{A,B,S,D\vdash D}{A,B,S\wedge D\vdash D}\wedge L}{A,B\vdash D,\neg(S\wedge D)}\neg R}{\neg(S\wedge D)\to\neg B,A,B\vdash D}\to L \qquad A,B\vdash A,D}{A\to(\neg(S\wedge D)\to\neg B),A,B\vdash D}\to L}{A\to(\neg(S\wedge D)\to\neg B),A\vdash D,\neg B}\neg R}{A\to(\neg(S\wedge D)\to\neg B),A,\neg D\vdash\neg B}\neg L
$$

4$\star$ 试证明克雷格插值定理(Craig's interpolation theorem):

对于非矛盾式A和非永正式B, 若$\vdash A \to B$ 在G' 系统中可证, 则存在命题H, 使得: 1) H中出现的命题符P_i同时出现在命题A和命题B中; 2) $\vdash A \to H$和$\vdash H \to B$均可证.

证： 令A的命题符集合为$Prop_A$, B的命题符集合为$Prop_B$.设$Prop' = Prop_A \cap Prop_B$. 令命题集合$\mathcal{C}$为由$Prop'$ 中的命题符组成的、且为命题A的语义结论的命题的集合, 即$\mathcal{C} = \{\theta | \models A \to \theta\}$. 下面证明命题$B$为命题集合$\mathcal{C}$的语义结论.

反设B不为$\mathcal{C}$的语义结论($\star$), 则存在赋值v, 使得$\mathcal{C}$和$\neg B$的解释均为T. 令命题集合$\mathcal{T}$所有在赋值v下解释为T的命题的集合.

称$\mathcal{S}$为协调的, 指不存在命题φ, 使得$\mathcal{S} \vdash \varphi$和$\mathcal{S} \vdash \neg\varphi$均成立.

下面证明$\mathcal{T} \cup \{A\}$是协调的.

反设$\mathcal{T} \cup \{A\}$是不协调的

$\because \mathcal{T} \vdash A$易见

$\therefore \mathcal{T} \vdash \neg A$.

由Compactness可知, 存在命题$\theta \in \mathcal{T}$, 使得$\{\theta\} \vdash \neg A$.

$\therefore \{A\} \vdash \neg\theta$.

$\therefore \neg\theta$是A的语义结论.

$\therefore \neg\theta \in \mathcal{C}$.

又$\because \mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$

$\therefore \neg\theta \in \mathcal{T}$

又$\because \theta \in \mathcal{T}$

$\therefore$ 矛盾

$\therefore \mathcal{T} \cup \{A\}$是协调的.

设$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T} \cup \{A\}$, $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T} \cup \{\neg B\}$

易见若$\mathcal{T}_1$、$\mathcal{T}_2$均是协调的, 则$\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$是协调的.

又$\because \models A \vdash B$

$\therefore \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$不是协调的.

$\therefore \mathcal{T}_2 = \mathcal{T} \cup \{\neg B\}$是不协调的.

又由$(\star)$可知, 存在v使得$\mathcal{T}$和$\neg B$解释均为T, 且T是协调的,

$\therefore \mathcal{T} \cup \{\neg B\}$是协调的

$\therefore$ 矛盾!

$\therefore (\star)$不成立.

$\therefore \mathcal{C} \models B$

$\therefore$ 存在$\psi \in \mathcal{C}$, 使得$\varphi \vdash B$.

又$\because \mathcal{C} = \{\theta | \models A \to \theta\}$

$\therefore$ 存在$H \in \mathcal{C}$, 使得$\vdash A \to H$和$\vdash H \to B$均可证

故原命题得证 $\qquad Q.E.D.$