南京大学
Nanjing University

第8讲- 命题逻辑的永真推理系统

内容概要

公理 | 规则 | 一些定理

与 G' 的等价定理

简介

- 本章介绍命题逻辑的永真推理系统；
- 由于在推理过程中出现的所有命题皆为永真，故称这样风格的系统为永真推理系统，亦称其为Hilbert型系统；
- 历史上，许多人研究过此类系统，如 Frege 等。
- 我们先给出一个永真推理系统 H，然后证明 H 与 G' 在某种意义下是等价的。

公理

$$
\begin{array}{ll}
A01 & A \to A \\
A02 & (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C)) \\
A03 & (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)) \\
A04 & (A \to (A \to B)) \to (A \to B) \\
A05 & (A \to \neg B) \to (B \to \neg A) \\
A06 & (\neg\neg A) \to A \\
A07 & (A \wedge B) \to A \\
A08 & (A \wedge B) \to B \\
A09 & A \to (B \to (A \wedge B)) \\
A10 & A \to (A \vee B) \\
A11 & B \to (A \vee B) \\
A12 & (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))
\end{array}
$$

以上$A, B, C \in PROP$，$A01 - A12$被称为**公理模式(schema)**，呈形以上公理模式的命题被称为**公理**。

规则

$$MP \qquad \frac{A \to B \qquad A}{B}$$

- 规则 MP 被称为分离规则，或肯定条件的推理规则（Modus Ponens）。
- 当实施 MP 时，我们称 B 由 $A \to B$ 和 A 实施 MP 而得，
  有时亦记为 $A \to B, A \vdash B$。
- 命题演算的永真推理系统有许多个，
  这里采用的系统由莫绍揆教授提出。

定义8.1 设$A \in PROP, \Gamma \subseteq PROP$，

1. 在H中由Γ推导A（记为$\Gamma \vdash_H A$）指存在序列$P_1, ..., P_n$使A为P_n且对任何$i \leq n$有

   或(a)P_i为H的公理

   或(b)$P_i \in \Gamma$

   或(c)存在$j, k < i$使得P_j为$P_k \to P_i$，

   这时P_i由其前P_j和P_k实施MP而得。

   当H唯一确定时，我们将$\Gamma \vdash_H A$简记为$\Gamma \vdash A$。

2. 称以上的$P_1, ..., P_n$为$\Gamma \vdash A$的证明过程，n为其证明长度。

3. 当$\Gamma \vdash A$时，我们称A为$\Gamma-$ 定理；

   当Γ为空时，简记为$\vdash A$,称A为定理；

   令$\mathrm{T}h(\Gamma) = \{A | \Gamma \vdash A\}$。

一些定理

$T13 \qquad (A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$

证明：

(1) $\quad (C \to A) \to ((A \to B) \to (C \to B)) \qquad A03$

(2) $\quad (1) \to (3) \qquad A02$

(3) $\quad (A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B)) \qquad MP(2)(1)$

(1),(2),(3)为证明过程。 $\square$

$$T14 \quad (A \to B) \to ([D \to (C \to A)] \to [D \to (C \to B)])$$

证明：

(1) $(A \to B) \to [(C \to A) \to (C \to B)]$ $\quad T13$

(2)

$$[(C \to A) \to (C \to B)] \to \underline{([D \to (C \to A)] \to [D \to (C \to B)])}$$

$T13$

(3) $(1) \to [(2) \to (4)]$ $\quad A03$

(4) $(A \to B) \to \underline{\{[D \to (C \to A)] \to [D \to (C \to B)]\}}$

$MP(MP(3)(1))(2)$

$\square$

$T15 \qquad \vdash A \to (B \to A)$

证明:

(1) $(A \land B) \to A$ $\qquad A07$

(2)

$$((A \land B) \to A) \to ([A \to (B \to (A \land B))] \to [A \to (B \to A)])$$

$T14$

(3) $[A \to (B \to (A \land B))] \to [A \to (B \to A)]$ $\qquad MP(2)(1)$

(4) $A \to (B \to (A \land B))$ $\qquad A09$

(5) $A \to (B \to A)$ $\qquad MP(3)(4)$

$\square$

$T17 \qquad \vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

证明:

(1) $\neg\neg A \to A$ $\qquad A06$

(2) $(\neg\neg A \to A) \to$ $\qquad T14$

$\{[(\neg A \to \neg B) \to (B \to \neg\neg A)] \to$

$[(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)]\}$

(3) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to \neg\neg A)$ $\qquad A05$

(4) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ $\qquad MP(MP(2)(1))(3)$

$\square$

$T18 \qquad \vdash A \to \neg\neg A$

证明:

(1) $\neg A \to \neg A$ $\qquad A01$

(2) $(\neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\neg A)$ $\qquad A05$

(3) $A \to \neg\neg A$ $\qquad MP(2)(1)$

$\square$

$T19 \qquad \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

证明:

(1)	$B \rightarrow \neg\neg B$	$T18$
(2)	$(B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg B)]$	$T13$
(3)	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg B)$	$MP(2)(1)$
(4)	$(A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	$A05$
(5)	$(3) \rightarrow [(4) \rightarrow (6)]$	$A03$
(6)	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	$MP(MP(5)(3))(4)$

$\square$

引理8.2

1. 若A为公理，则$\Gamma \vdash A$
2. 若$A \in \Gamma$，则$\Gamma \vdash A$
3. 若$\Gamma \vdash A$且$\Gamma \vdash A \to B$，则$\Gamma \vdash B$
4. 若$\Gamma \vdash A \to (A \to B)$，则$\Gamma \vdash (A \to B)$
5. 若$\Gamma \vdash C \to (B \to A)$且$\Gamma \vdash C \to B$，则$\Gamma \vdash C \to A$

证明(5): 由T16知$\Gamma \vdash [C \to (B \to A)] \to [(C \to B) \to (C \to A)]$

可证，设它的证明过程为$P_1, \ldots, P_l$。

$\Gamma \vdash C \to (B \to A)$与$\Gamma \vdash C \to B$的证明 过程

分别为$Q_1, \ldots, Q_m$和$R_1, \ldots, R_n$。

从而$\Gamma \vdash C \to A$的证明过程为

$P_1, \ldots, P_l, Q_1, \ldots, Q_m, R_1, \ldots, R_n, (C \to B) \to (C \to A), C \to A.$

故$\Gamma \vdash C \to A$可证. $\square$

推理定理

定理8.3 (推理定理). 若$\Gamma, C \vdash A$, 则$\Gamma \vdash C \to A$.

这里Γ, C为$\Gamma \cup \{C\}$的简写.

证明: 设$\Gamma, C \vdash A$,对$\Gamma, C \vdash A$的证明过程$A_1, \ldots, A_n$的长度做归纳来证明$\Gamma \vdash C \to A$.

情况1. A为公理或$A \in \Gamma$,

易见$\Gamma \vdash A$, 又$\Gamma \vdash A \to (C \to A)$ (T15)

从而由引理 8.2 3)知$\Gamma \vdash C \to A$.

情况2. C为A, 从而$\Gamma \vdash A \to A$, 即$\Gamma \vdash C \to A$.

情况3. A_n由A_i, A_j实施MP而得,

这里$i, j < n$且A_i为$A_j \to A_n$.

归纳假设: $\Gamma \vdash C \to A_i$, $\Gamma \vdash C \to A_j$.

以下分情况证明$\Gamma \vdash C \to A_n$

子情况3.1 A_j为C.

因为$\Gamma \vdash C \to A_i$, 且A_i为$C \to A$,

从而$\Gamma \vdash C \to (C \to A)$, 由引理8.2 4)知$\Gamma \vdash C \to A$.

子情况3.2 A_j不为C. 因为$\Gamma \vdash C \to A_i$, $\Gamma \vdash C \to A_j$

即$\Gamma \vdash C \to (A_j \to A)$, 且$\Gamma \vdash (C \to A_j)$, 从而

由引理8.2 5)知$\Gamma \vdash C \to A$.

$\square$

$T21 \qquad A, \neg A \vdash \neg B$

1. A
2. $\neg A$
3. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
4. $\neg A \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$
5. $B \rightarrow A$
6. $B \rightarrow \neg A$
7. $(B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$
8. $A \rightarrow \neg B$
9. $(5) \rightarrow ((8) \rightarrow (B \rightarrow \neg B))$
10. $B \rightarrow \neg B$
11. $(B \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B$ (见T23)
12. $\neg B$

$T22 \qquad A, \neg A \vdash B$

$T23 \qquad (B \to \neg B) \to \neg B$

证明: $\because B, B \to \neg B \vdash \neg B$

由推理定理知$B \vdash (B \to \neg B) \to \neg B$

又$\because \vdash [(B \to \neg B) \to \neg B] \to [B \to \neg(B \to \neg B)]$ $\qquad A05$

$\therefore \vdash B \to (B \to \neg(B \to \neg B))$

又$\vdash [B \to (B \to \neg(B \to \neg B))] \to (B \to \neg(B \to \neg B))$ $\qquad A04$

$\therefore \vdash B \to \neg(B \to \neg B)$

从而$\vdash (B \to \neg B) \to \neg B$

$\square$

$T24 \qquad \vdash (A \to (C \wedge \neg C)) \to \neg A$

证明: $\because \vdash (C \wedge \neg C) \to \neg A$ T21

$\therefore \vdash (A \to (C \wedge \neg C)) \to (A \to \neg A)$

又$\vdash (A \to \neg A) \to \neg A$ T23

故$\vdash (A \to (C \wedge \neg C)) \to \neg A$

$\square$

以下定理T25至T31留作习题。

$$T25 \qquad (B \vee A) \to (\neg A \to B)$$

$$T26 \qquad (A \to B) \to (B \vee \neg A)$$

$$T27 \qquad (A \vee B) \to (B \vee A)$$

$$T28 \qquad (A \to (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C)$$

$$T29 \qquad (C \vee A) \to ((C \vee B) \to (C \vee (A \wedge B)))$$

$$T30 \qquad (C \vee A) \to [(B \to C) \to ((A \to B) \to C)]$$

$$T31 \qquad (A \to (C \vee B)) \to (C \vee (A \to B))$$

定理8.4 设 A 为命题，若 A 在 H 中可证，则 sequent $\vdash A$ 在 G' 中可证。

证明： 设A在H中可证，对$\vdash_H A$的证明过程的长度归纳证明$\vdash A$在G′中可证.

情况I. A为公理, 即A为A01或A02⋯或A12

(01) $$\frac{A \vdash A}{\vdash A \to A} \to R$$

(02)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \to C, B, A \vdash A, C \qquad \dfrac{C, B, A \vdash C \qquad C, B, A \vdash B, C}{(B \to C), B, A \vdash C} \to L}{A \to (B \to C), B, A \vdash C} \to L}{A \to (B \to C), B \vdash A \to C} \to R}{\dfrac{A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)}{\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))} \to R}$$

(03)(04)同理可证

(05)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B \vdash A \qquad \dfrac{A, B \vdash B}{A, \neg B, B \vdash}}{A, A \to \neg B, B \vdash} \to L}{A \to \neg B, B \vdash \neg A} \to R}{A \to \neg B \vdash B \to \neg A} \to R}{\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)} \to R$$

(06)易见

(07)

$$\dfrac{\dfrac{A, B \vdash A}{A \wedge B \vdash A} \wedge L}{\vdash (A \wedge B) \to A} \to R$$

(08)与(07)同理

(09), (10)和(11)易见

(12)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B\to C,A\vdash A,C \qquad C,B\vdash C,A\vdash C}{A\to C,B\to C,A\vdash C}\to L \qquad \dfrac{A\to C,B\vdash C,B \qquad A\to C,C,B\vdash C}{A\to C,B\to C,B\vdash C}\to L}{A\to C, B\to C, A\vee B\vdash C}\to L}{\vdash (A\to C)\to((B\to C)\to((A\vee B)\to C))}\to R\ (3\text{times})$$

情况II. A由$B\to A$和B实施MP而得

由I.H.知sequent $\vdash B\to A$和$\vdash B$在G'中可证，

在G中证明$\vdash A$如下：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B\vdash A,B \qquad B,A\vdash A}{B\to A,B\vdash A}\to L \qquad \vdash B}{B\to A\vdash A}\text{Cut} \qquad \vdash B\to A}{\vdash A}\text{Cut}$$

因此$\vdash A$得证。 $\square$

定理8.5 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 G' 中可证，则在 H 中$\Gamma \vdash \overline{\Delta}$, 这里

$$\overline{\Delta} \overset{=}{\Delta} \begin{cases} (...(B_1 \vee B_2)... \vee B_n) & \Delta \neq \emptyset \text{and} \Delta = \{B_1, ..., B_n\} \\ \perp & \Delta = \emptyset \end{cases}$$

记$\perp$为$(C \wedge \neg C)$

证明： 设$\Gamma \vdash \Delta$在G'中可证，对$\Gamma \vdash \Delta$的证明结构做归纳来证明$\Gamma \vdash \overline{\Delta}$在H中成立。

情况1. $\Gamma \vdash \Delta$为公理，设为$\Phi, A \vdash \Lambda, A$

(1.1) 当Λ空时, 易见$\Phi, A \vdash_H A$

(1.2) 当Λ非空, $\Phi, A \vdash_H \overline{\Lambda} \vee A$的证明过程如下:

(1)	A	假设
(2)	$A \rightarrow \overline{\Lambda} \vee A$	公理
(3)	$\overline{\Lambda} \vee A$	MP(2)(1)

情况2. $\Gamma \vdash \Delta$由实施规则而得

(2.1) 对于规则 $\neg L : \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$

当Δ为空时, 由I.H.知, $\Gamma \vdash_H A$,

我们证明$\Gamma, \neg A \vdash C \wedge \neg C$如下:

(1) A $(\Gamma \vdash_H A)$

(2) $\neg A$ (假设)

(3) $A \wedge \neg A$

(4) $C \wedge \neg C$ (T32)

当Δ非空时, 由I.H.知$\Gamma \vdash_H \overline{\Delta} \vee A$,

$\Gamma, \neg A \vdash_H \overline{\Delta}$的证明如下:

(1) $\neg A$ (假设)

(2) $\overline{\Delta} \vee A$ $\Gamma \vdash \overline{\Delta} \vee A$

(3) $(\overline{\Delta} \vee A) \to (\neg A \to \overline{\Delta})$ T25

(4) $\overline{\Delta}$ MP(MP(3)(2))(1)

(2.2) 对于规则 $\neg R: \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$

当Δ为空时, 由I.H. 知$\Gamma, A \vdash_H \perp$,

由推理定理得$\Gamma \vdash_H A \to \perp$

又 $\quad \vdash_H (A \to \perp) \to \neg A \qquad T24$

从而$\Gamma \vdash_H \neg A$.

当Δ非空时, 由I.H. 知$\Gamma, A \vdash_H \overline{\Delta}$

由推理定理得$\Gamma \vdash_H A \to \overline{\Delta}$

又 $\quad \vdash_H (A \to \overline{\Delta}) \to \overline{\Delta} \vee (\neg A) \qquad T26$

故$\Gamma \vdash_H \overline{\Delta} \vee (\neg A)$.

(2.3) 对于规则 $\vee L: \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$

当Δ为空时，由I.H. 知$\Gamma, A \vdash_H \perp$，$\Gamma, B \vdash_H \perp$，

由推理定理得$\Gamma \vdash_H A \to \perp$且$\Gamma \vdash_H B \to \perp$

又$\vdash_H (A \to \perp) \to [(B \to \perp) \to ((A \vee B) \to \perp)]$ (A12)

从而$\Gamma \vdash_H (A \wedge B) \to \perp$，因此$\Gamma, A \vee B \vdash \perp$.

当Δ非空时，由I.H.知$\Gamma, A \to_H \overline{\Delta}$，$\Gamma, B \vdash_H \overline{\Delta}$

与上同理得$\Gamma, A \vee B \vdash \overline{\Delta}$.

(2.4) 对于规则 $\vee R: \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$

由I.H. 得$\Gamma \vdash_H (\overline{\Delta} \vee A) \vee B$,

由T27知$\Gamma \vdash_H \overline{\Delta} \vee (A \vee B)$

(2.5) 对于规则 $\wedge L: \dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$

由I.H.得$\Gamma, A, B \vdash_H \overline{\Delta}$, 由推理定理得$\Gamma \vdash_H A \to (B \to \overline{\Delta})$

$\Gamma \vdash_H A \to (B \to \overline{\Delta}) \to [(A \wedge B) \to \overline{\Delta}] \quad (T28)$

故$\Gamma \vdash (A \wedge B) \to \overline{\Delta}$.

(2.6) 对于规则 $\wedge R: \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, (A \wedge B)}$

当Δ为空时, 易见.

当Δ非空时, 由I.H.知, $\Delta \vdash_H \overline{\Delta} \vee A$,

$\Gamma \vdash \overline{\Delta} \vee B$

$\because \vdash_H (\overline{\Delta} \vee A) \to ((\overline{\Delta} \vee B) \to (\overline{\Delta} \vee (A \wedge B))) \quad T29$

$\therefore \Gamma \vdash \overline{\Delta} \vee (A \wedge B)$

(2.7) 对于规则 $\to L: \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}$

当Δ为空时，由I.H. 知$\Gamma \vdash_H A$, $\Gamma, B \vdash_H \bot$

从而$\Gamma \vdash_H B \to \bot$, 易见$\Gamma, A \to B \vdash_H \bot$

当Δ非空时，由I.H.知$\Gamma \vdash_H \overline{\Delta} \vee A$, $\Gamma, B \vdash_H \overline{\Delta}$,

从而$\Gamma \vdash_H B \to \overline{\Delta}$, 又

$\because \vdash_H (C \vee A) \to [(B \to C) \to ((A \to B) \to C)]$ $T30$

这里取C为$\overline{\Delta}$,

$\therefore \Gamma, A \to B \vdash_H \overline{\Delta}$

(2.8) 对于规则 $\to R: \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \to B}$

当Δ为空时，由I.H. 知$\Gamma, A \vdash_H B$

从而由推理定理知$\Gamma \vdash_H A \to B$.

当Δ非空时，由I.H. 知$\Gamma, A \vdash_H \overline{\Delta} \vee B$

从而$\Gamma \vdash A \rightarrow (\overline{\Delta} \vee B)$

又

$$\vdash_H (A \rightarrow (C \vee B)) \rightarrow (C \vee (A \rightarrow B)) \qquad T31$$

取C为$\overline{\Delta}$,

故$\Gamma \vdash_H \overline{\Delta} \vee (A \rightarrow B)$

归纳完成. $\square$

推论8.6 $\vdash A$ 在 G' 中可证 $\Leftrightarrow$ A 在 H 中可证。

这就说明 G' 与 H 等价。

本讲小结

- 公理和规则；
- 一些重要定理；
- H 与 G' 的等价性。

The End of Lecture 8