2020春季学期"数理逻辑"课程作业五

1. 在H系统中证明:

(1) $T25$: $(B \lor A) \to (\neg A \to B)$

证：

$\because A, \neg A \vdash B \qquad T22$

$\therefore A \vdash \neg A \to B \qquad$ 推理定理

$\therefore \vdash A \to (\neg A \to B) \qquad$ 推理定理

$\because \vdash B \to (\neg A \to B) \qquad T15$

$\because \vdash (B \to (\neg A \to B)) \to ((A \to (\neg A \to B)) \to ((B \lor A) \to (\neg A \to B)))$

$A12$

$\therefore (B \lor A) \to (\neg A \to B) \qquad MP \qquad Q.E.D.$

(2) $T27$: $(A \lor B) \to (B \lor A)$

证：

(1) $B \to (A \lor B) \qquad A11$

(2) $A \to (A \lor B) \qquad A10$

(3) $(B \to (A \lor B)) \to (A \to (A \lor B) \to ((A \lor B) \to (B \lor A))) \qquad A12$

$(A \lor B) \to (B \lor A) \qquad MP(MP(1)(3))(2) \qquad Q.E.D.$

(3) $T28$: $(A \to (B \to C)) \to ((A \land B) \to C)$

证：

(1) $A \land B \to A \qquad A07$

(2) $A \land B \qquad$ 前提

(3) $A \qquad MP(1)(2)$

(4) $A \to (B \to C) \qquad$ 前提

(5) $B \to C \qquad MP(3)(4)$

(6) $A \land B \to B \qquad A08$

(7) B $MP(2)(6)$

(8) C $MP(5)(7)$

(9) $A \to (B \to C), A \land B \vdash C$

(10) $A \to (B \to C) \vdash (A \land B) \to C$ 推理定理

(11) $\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \land B) \to C)$ 推理定理

$\therefore$原命题得证 $Q.E.D.$

2$\star$ 在H系统中证明:

$T20: \vdash A \lor \neg A$

证:

lemma 1: $A \to (B \to C), A \land B \vdash C$ (证明见$T28$第9步)

lemma 2: $\vdash (A \land \neg B) \to \neg(A \to B)$

(1) $(A \to B) \to (A \to B)$ $A01$

(2) $(1) \to (3)$ $A02$

(3) $A \to ((A \to B) \to B)$ $MP(1)(2)$

(4) $((A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(A \to B))$ $T14$

(5) $(3) \to ((4) \to (6))$ $A03$

(6) $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$ $MP(MP(3)(4))(4)$

(7) $(6) \to (8)$ $T28$

(8) $(A \land \neg B) \to \neg(A \to B)$ $MP(6)(7)$

lemma 3: $\neg(A \lor \neg B) \vdash (\neg A \land B)$

(1) $A \to A \lor B$ $A10$

(2) $\neg B \to A \lor \neg B$ $A11$

(3) $(1) \to (4)$ $T19$

(4) $\neg(A \lor \neg B)\neg A$ $MP(1)(3)$

(5) $(2) \to (6)$ $T19$

(6) $\neg(A \lor \neg B) \to \neg\neg B$ $MP(5)(2)$

(7) $\neg\neg B \to B$ $A06$

(8) $(6) \rightarrow ((7) \rightarrow (9))$ 　　　$A03$

(9) $\neg(A \vee \neg B) \rightarrow B$ 　　　$MP(MP((6)(8)))(7)$

(10) $\neg(A \vee \neg B)$ 　　　前提

(11) $\neg A$ 　　　$MP(10)(4)$

(12) B 　　　$MP(10)(9)$

(13) $\neg A \rightarrow (B \rightarrow (\neg A \wedge B))$ 　　　$A09$

(14) $\neg A \wedge B$ 　　　$MP(MP(13)(11))(12)$

lemma 4: $\vdash \neg(A \vee \neg B) \rightarrow (\neg A \wedge B)$ (由lemma3经推理定理得)

lemma 5: $\vdash (A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$

(1) $A \wedge B$ 　　　前提

(2) $A \wedge B \rightarrow A$ 　　　$A07$

(3) $A \wedge B \rightarrow B$ 　　　$A08$

(4) $B \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge Aa))$ 　　　$A09$

(5) A 　　　$MP(1)(2)$

(6) B 　　　$MP(1)(3)$

(7) $B \wedge A$ 　　　$MP(MP(4)(6))(5)$

$T26$ $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \vee \neg A)$

(1) $\neg(B \vee \neg A) \rightarrow (\neg B \wedge A)$ 　　　lemma4

(2) $(A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$ 　　　lemma2

(3) $(\neg B \wedge A) \rightarrow (A \wedge \neg B)$ 　　　lemma5

(4) $(1) \rightarrow ((3) \rightarrow (5))$ 　　　$A03$

(5) $\neg(B \vee \neg A) \rightarrow (A \wedge \neg B)$ 　　　$MP(MP(4)(1))(3)$

(6) $(5) \rightarrow ((2) \rightarrow (1))$ 　　　$A03$

(7) $\neg(B \vee \neg A) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$ 　　　$MP(MP(6)(5))(2)$

(8) $(7) \rightarrow (9)$ 　　　$T17$

(9) $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \vee \neg A)$ 　　　$MP(7)(8)$

$\therefore$

(1) $A \to A$ $A01$

(2) $(A \to A) \to (A \lor \neg A)$ $T26$

(3) $A \lor \neg A$ $MP(1)(2)$

$\therefore$原命题得证 $Q.E.D.$