南京大学
Nanjing University

第4讲

一阶逻辑的自然推理系统

内容提要

- G系统的公理和规则
  - 公理|规则
- 证明树与可证
  - 证明树|可证
- 一些导出规则
  - 反证法规则 | 分情况规则 | 逆否推演 | 矛盾规则 |
  - MP规则 | 三段论
- G系统的上层理论
  - 可靠性|完全性

Gentzen的自然推理系统

- 人们经过二百年的努力，建立多个一阶逻辑的推理系统，为实现Leibniz的梦想（建立一种通用语言，使其表达全部的数学问题）作出巨大的贡献；
- 这些系统可分为自然推理和永真推理类型；
- 本讲介绍Gentzen的自然推理系统。

G系统的公理和规则

定义4.1　Γ, Δ 为公式的有穷集合。$\Gamma \vdash \Delta$ 称为 *sequent*。Γ 为其前件，Δ 为其后件。$\boldsymbol{G}$ 由以下公理和规则组成：

公理：　$\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$

规则：　$\neg L: \dfrac{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A}{\Gamma, \neg A, \Delta \vdash \Lambda}$　　$\neg R: \dfrac{\Gamma, A \vdash \Lambda, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \neg A, \Theta}$

$\vee L: \dfrac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda}$　　$\vee R: \dfrac{\Gamma \vdash \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \vee B, \Theta}$

$\wedge L: \dfrac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash \Lambda}$　　$\wedge R: \dfrac{\Gamma \vdash \Lambda, A, \Theta \qquad \Gamma \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \wedge B, \Theta}$

$$\to L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash A, \Lambda \qquad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \to B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \to R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \to B, \Theta}$$

$$\forall L: \frac{\Gamma, A[t/x], \forall x A(x), \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, \forall x A(x), \Delta \vdash \Lambda} \qquad \forall R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A[y/x], \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \forall x A(x), \Theta}$$

$$\exists L: \frac{\Gamma, A[y/x], \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, \exists x A(x), \Delta \vdash \Lambda} \qquad \exists R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A[t/x], \exists x A(x), \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \exists x A(x), \Theta}$$

$$Cut: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A \qquad \Delta, A \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$$

在 $\forall R$ 规则和 $\exists L$ 规则中，变元 y 是一个新变元

定理4.2 Cut规则可用其他规则导出.

该定理将由Gentzen的Hauptsatz（见第十讲）而得.

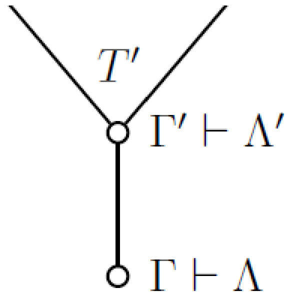
证明树

定义4.3 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为sequent，树 T 为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树指

(1) 当 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为 $\boldsymbol{G}$ 公理，以 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为结点的单点树 T 为其证明树。

(2) 当 $\dfrac{\Gamma' \vdash \Lambda'}{\Gamma \vdash \Lambda}$ 为 $\boldsymbol{G}$ 规则。若 T' 为 $\Gamma' \vdash \Lambda'$ 的证明树，

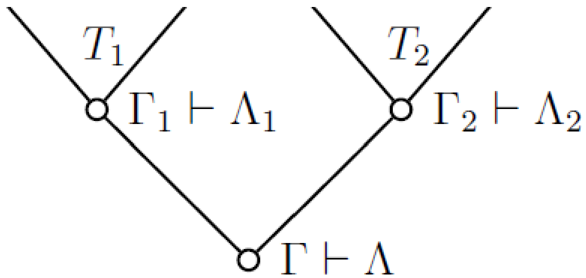
则树 T:



为的 $\Gamma \vdash \Lambda$ 证明树。

(3) 当 $\dfrac{\Gamma_1 \vdash \Lambda_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \Lambda_2}{\Gamma \vdash \Lambda}$ 为 $\boldsymbol{G}$ 规则。

若树 T_i 为 $\Gamma_i \vdash \Lambda_i$ 的证明树$(i = 1, 2)$，则树 T:



为的 $\Gamma \vdash \Lambda$ 证明树。

可证

定义4.4 设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为 *sequent*，$\Gamma \vdash \Lambda$ 可证（*provable*）指存在 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树。

例4.1 证明下列sequent可证：

(1) $\vdash \alpha \to \alpha$

(2) $\vdash \alpha \vee \alpha$

(3) $\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

例4.2　证明下列sequent可证。

(1) $\vdash \forall x A(x) \to A(t)$

(2) $\vdash A(t) \to \exists x A(x)$

(3) $\vdash (\forall x(P(x) \to Q(x)) \land P(t)) \to Q(t)$

这里$A(t)$为$A[\frac{t}{x}]$的简写.

证. (1)

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Axiom}}{A(t), \forall x A(x) \vdash A(t)}}{\forall x A(x) \vdash A(t)}\ \forall L}{\vdash \forall x A(x) \to A(t)}\ \to R$$

(2)

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Axiom}}{A(t) \vdash A(t), \exists x A(x)}}{A(t) \vdash \exists x A(x)}\ \exists R}{\vdash A(t) \to \exists x A(x)}\ \to R$$

(3)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\text{Axiom}}{P(t), \forall x(P(x)\to Q(x)) \vdash P(t), Q(t)} \quad \overset{\text{Axiom}}{Q(t), P(t), \forall x(P(x)\to Q(x)) \vdash Q(t)}}{P(t) \to Q(t), P(t), \forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash Q(t)}\ \to L}{\forall x(P(x) \to Q(x)), P(t) \vdash Q(t)}\ \forall L}{\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge P(t) \vdash Q(t)}\ \wedge L}{\vdash (\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge P(t)) \to Q(t)}\ \to R$$

$\square$

例4.3 证明 $\forall R(x) \land \exists y Q(y) \vdash P(f(v)) \land \exists z Q(z)$ 可证。

证. y_1 为新变元。

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\text{Axiom}}{P(f(v)), \forall x P(x), \exists y Q(y) \vdash P(f(v))}}{\forall x P(x), \exists y Q(y) \vdash P(f(v))}\,\forall L
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Axiom}}{\forall x P(x), Q(y_1) \vdash Q(y_1), \exists z Q(z)}}{\forall x P(x), Q(y_1) \vdash \exists z Q(z)}\,\exists R}{\forall x P(x), \exists y Q(y) \vdash \exists z Q(z)}\,\exists L
}{
\dfrac{\forall x P(x), \exists y Q(y) \vdash P(f(v)) \land \exists z Q(z)}{\forall x P(x) \land \exists y Q(y) \vdash P(f(v)) \land \exists z Q(z)}\,\land L
}\,\land R
$$

$\square$

例4.4 证明 $\Gamma_1 \vdash A, A \vdash \Gamma_3$ 可证，则 $\Gamma_1 \vdash \Gamma_3$ 可证。

证. 用 Cut 规则即可。

$\square$

命题4.5 $A_1,\ldots,A_m \vdash B_1,\ldots,B_n$ 可证 $\Longleftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{m} A_i \vdash \bigvee_{i=1}^{n} B_i$ 可证。

证. "$\Longrightarrow$" 设 $A_1,\ldots,A_m \vdash B_1,\ldots,B_n$ 可证

$\because$

$$\dfrac{\dfrac{A_1,\ldots,A_m \vdash B_1,\ldots,B_n}{\bigwedge_{i=1}^{m} A_i \vdash B_1,\ldots,B_n}\ \wedge L}{\bigwedge_{i=1}^{m} A_i \vdash \bigvee_{i=1}^{n} B_i}\ \vee R$$

$\therefore$ O.K.

"$\Longleftarrow$" 设 $\bigwedge_{i=1}^{m} A_i \vdash \bigvee_{i=1}^{m} B_i$ 可证

$\because$ ① $A_1, \ldots, A_n \vdash \bigwedge_{i=1}^{m} A_i$ 可证

② $\because$ $$\frac{\{B_i \vdash B_1, \ldots, B_m \mid i = 1, 2, \ldots, m\}}{\bigvee_{i=1}^{m} B_i \vdash B_1, \ldots, B_n} \vee L$$

$\therefore \bigvee_{i=1}^{m} B_i \vdash B_1, \ldots, B_n$ 可证

③ $\bigwedge_{i=1}^{m} A_i \vdash \bigvee_{i=1}^{m} B_i$ 可证

$\therefore$ O.K. $\square$

一些导出规则

①反证法规则: $\dfrac{\neg A, \Gamma \vdash B \qquad \neg A, \Gamma \vdash \neg B}{\Gamma \vdash A}$

证. 证明树如下：

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\neg A, \Gamma \vdash B}{\neg A, \Gamma \vdash \neg\neg B}\,\neg L, \neg R
\qquad
\dfrac{\neg A, \Gamma \vdash \neg B}{\neg A, \Gamma, \neg\neg B \vdash}\,\neg L
}{
\dfrac{\neg A, \Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \neg\neg A}\,\neg R
}\,\mathrm{Cut}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Axiom}}{A \vdash A}}{\vdash A, \neg A}\,\neg R}{\neg\neg A \vdash A}\,\neg L
}{\Gamma \vdash A}
$$

$\square$

②分情况规则: $\dfrac{A, \Gamma \vdash B \qquad \neg A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B}$

证. 证明树如下:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B, \neg\neg A}\neg R \qquad \neg\neg A, \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B, A}\text{Cut} \qquad A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B}\text{Cut}$$

$\square$

③逆否推演: $\dfrac{A,\Gamma\vdash B}{\neg B,\Gamma\vdash\neg A}$, $\dfrac{\Gamma\vdash A\to B}{\Gamma\vdash\neg B\to\neg A}$

证. 证明树如下:

$$\dfrac{\Gamma\vdash A\to B \qquad A\to B\vdash\neg B\to\neg A}{\Gamma\vdash\neg B\to\neg A}\,\mathrm{Cut}$$

这里:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, A\to B\vdash B}{\neg B, A, A\to B\vdash}}{\neg B, A\to B\vdash\neg A}}{A\to B\vdash\neg B\to\neg A}$$

$\square$

④矛盾规则: $\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$

证. 证明树如下：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A, B}}{\neg A, \Gamma \vdash B} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \neg A, B}}{\Gamma \vdash B}\,\mathrm{Cut}$$

$\square$

⑤MP: $\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$

证.

Lemma 1. $\because \dfrac{A \vdash A, B \qquad A, B \vdash B}{A, A \to B \vdash B}$

$\therefore A, A \to B \vdash B$ 可证。

Lemma 2.

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \qquad A, A \to B \vdash B}{\Gamma, A \to B \vdash B}\,\text{Cut,Lemma 1}}{\Gamma \vdash B}\,\text{Cut}$$

$\square$

⑥三段论: $\dfrac{\Gamma \vdash A(t) \qquad \Gamma \vdash \forall x(A(x) \to B(x))}{\Gamma \vdash B(t)}$

证. 证明树如下:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \forall x(A(x) \to B(x)) \qquad \dfrac{A(t) \to B(t), \forall x(A(x) \to B(x)) \vdash A(t) \to B(t)}{\forall x(A(x) \to B(x)) \vdash A(t) \to B(t)}}{\Gamma \vdash A(t) \to B(t)}\text{Cut} \qquad \Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash B(t)}$$

$\square$

这些导出规则在以后的证明中皆可被运用。

有效与有反例

定义4.6 设 $\Gamma \vdash \Delta$ 为 *sequent*，Γ 为 $\{A_1, \ldots, A_n\}$，Δ 为 $\{B_1, \ldots, B_m\}$。$\Gamma \vdash \Delta$ 有效（记为 $\Gamma \vDash \Delta$）指

$$\vDash (\bigwedge_{i=1}^{n} A_i) \to (\bigvee_{j=1}^{m} B_j)。$$

这里

(1) 当 $n = 0, m \neq 0$ 时，即 Γ 空且 Δ 非空时，$\vdash \Delta$ 指 $\vDash (\bigvee_{j=1}^{m} B_j)$

(2) 当 $n \neq 0, m = 0$ 时，即 Δ 空时，$\Gamma \vDash$ 指 $\vDash \neg(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i)$

(3) 当 $n = 0, m = 0$ 时，即 Γ, Δ 皆空，约定 $\{\}\vdash\{\}$非有效。

$\Gamma \vdash \Delta$ 有反例指 $\Gamma \vdash \Delta$ 非有效。

命题4.7 *(1)* $\underline{A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m \text{ 有效}}$

iff 对任何 $\mathfrak{M}$ 和 σ，$M \vDash_\sigma \neg A_i$ *for some* $i \in \{1, \ldots, n\}$

或 $M \vDash_\sigma B_i$ *for some* $j \in \{1, \ldots, m\}$

(2) $\underline{A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m \text{ 有反例}}$

iff 存在 $\mathfrak{M}$ 和 σ 使 $\mathfrak{M} \vDash_\sigma A_i$ *for all* $i \in \{1, \ldots, n\}$

且 $\mathfrak{M} \vDash_\sigma \neg B_j$ *for all* $j \in \{1, \ldots, m\}$

G公理的有效性

引理4.8 G 的公理有效

证. 易见。 $\square$

G规则保持有效

引理4.9 *对于除 cut 外* $\boldsymbol{G}$ *的规则，所有 upper sequent 有效 iff 相应的 lower sequent 有效。*

证. 只需证对规则 R，the lower sequent 有反例

iff 至少有一个 upper sequent 有反例。

case $\neg L$: $\dfrac{\Gamma \vdash A, \Lambda}{\Gamma, \neg A \vdash \Lambda}$

设 Γ 为 $\{A_1, \ldots, A_m\}$，Λ 为 $\{B_1, \ldots, B_n\}$。

$\Gamma, \neg A \vdash \Lambda$ 有反例

$\Longleftrightarrow$ 存在 $\mathfrak{M}$ 和 σ 使 $\mathfrak{M} \models_\sigma A_i$ for all $i \leq m$

且 $M \models_\sigma \neg B_j$ for all $j \leq n$ 且 $\mathfrak{M} \models_\sigma \neg A$

$\Longleftrightarrow$ $\Gamma \vdash A, \Lambda$ 有反例。

其他情况同理可证 $\square$

引理4.10 对于 cut: $\dfrac{\Gamma \vdash A, \Lambda \qquad \Delta, A \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$,

若 $\Gamma \vdash A, \Lambda$ 和 $\Delta, A \vdash \Theta$ 有效，则 $\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta$ 有效。反之不然。

证. $\because \Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta$ 有反例

$\Longrightarrow$ 有 $\mathfrak{M}$ 和 σ 使，Γ, Δ 中公式皆真，而 Λ, Θ中公式皆假

$\Longrightarrow$ 当 $\mathfrak{M} \models_\sigma A$ 时, $\Delta, A \vdash \Theta$有反例
当 $\mathfrak{M} \models_\sigma \neg A$ 时, $\Gamma \vdash A, \Lambda$有反例

$\Longrightarrow$ upper sequents 之一有反例

$\therefore$ 2个 upper sequents 皆有效 $\Longrightarrow$ the lower sequent 有效。

反之不然,反例: $\dfrac{\vdash \neg(A \vee \neg A) \qquad \neg(A \vee \neg A) \vdash (A \vee \neg A)}{\vdash A \vee \neg A}\ \mathrm{cut}$

$\vdash A \vee \neg A$ 有效，但 $\vdash \neg(A \vee \neg A)$ 不然。 $\square$

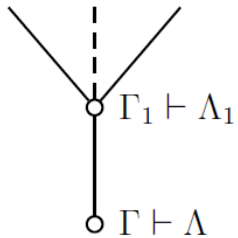
Soundness

定义4.11 (Soundness)**.** *若* $\Gamma \vdash \Delta$ *则* $\Gamma \vDash \Delta$，*从而* $\vdash A \Rightarrow \vDash A$。

证. 对 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明树的结构作归纳。证明 $\Gamma \vdash \Delta \cdots (*)$

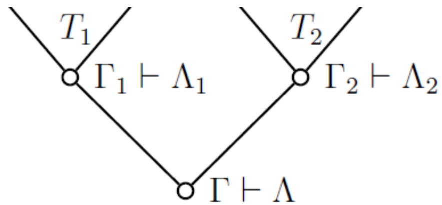
(1) $\Gamma \vdash \Delta$ 为公理，则易见 $\Gamma \vDash \Delta$ (by 引理4.8)

(2) $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明树呈形：



由 I.H. 知，$\Gamma_1 \vDash \Lambda_1$ 从而 $\Gamma \vDash \Delta$ (by 引理4.9)

(3) $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明树呈形：



由 I.H. 知，$\Gamma_1 \vDash \Lambda_1$，$\Gamma_2 \vDash \Lambda_2$ 从而 $\Gamma \vDash \Delta$ (by 引理4.9)

故 $\Gamma \vDash \Delta$。 $\square$

命题4.12 *若* $\Gamma \vdash \Delta$ *则* $\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Psi$。

证. 对 $\Gamma \vdash \Delta$ 的证明结构作归纳。

Basis. $\Gamma \vdash \Delta$ 为公理，从而 $\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Psi$ 亦然。

I.H. 设(1) $\dfrac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta} R_1$ 或(2) $\dfrac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta} R_2$

且 $\Gamma', \Theta \vdash \Delta', \Psi$，$\Gamma'', \Theta \vdash \Delta'', \Psi$ 可证，

这里 R_1 和 R_2 为 **G** 规则。

Ind. Step. $\because$ $\dfrac{\Gamma', \Theta \vdash \Delta', \Psi}{\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Psi} R_1$

或 $\dfrac{\Gamma', \Theta \vdash \Delta', \Psi \qquad \Gamma'', \Theta \vdash \Delta'', \Psi}{\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Psi} R_2$

由 I.H.知 $\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Psi$ 可证。 $\square$

本讲小结

- G系统的公理和规则
- 证明树与可证
- 一些导出规则
- soundness

The End of Lecture 4