2020春季学期“数理逻辑”课程作业三

1. 请用一阶谓词逻辑写出Boole代数语言B, 并用该语言描述Boole代数的交换律、分配律和有补律.

解： 常元符集为$\{0,1\}$; 函数集为$\{\vartriangle, \triangledown\}$, 谓词符集为$\{\leq\}$.

交换律为$\forall x,y((x \vartriangle y) \doteq (y \vartriangle x))$以及$\forall x,y((x \triangledown y) \doteq (y \triangledown x))$;

分配律为$\forall x,y,z((x \vartriangle (y \triangledown z)) \doteq ((x \vartriangle y) \triangledown (x \vartriangle z))$以及$\forall x,y,z((x \triangledown (y \vartriangle z)) \doteq ((x \triangledown y) \vartriangle (x \triangledown z))$;

有补率为$\forall x \exists y((x \triangledown y \doteq 1) \wedge (x \vartriangle y \doteq 0))$.

2. 请用一阶谓词逻辑描述欧式几何中的平行公理: 在一平面内，过直线外一点，可作且只可作一直线跟此直线平行。

解： 令谓词$Ax_5(p,d,l_1,l_2) = True$ iff $In(p,l_1) \wedge In(p,l_2) \wedge In(p,d) \wedge On(d,l_2) \wedge Para(l_1,l_2)$,

平行公理可表示为: $\forall p,d,l_1 \exists l_2((Ax_5(p,d,l_1,l_2) \wedge (\forall l_3 Ax_5(p,d,l_1,l_3) \to (l_2 \doteq l_3))$.

3. 证明以下公式为永真式：

(1)$\forall x.\forall y.(x \doteq y \to y \doteq x)$

证： $\forall x.\forall y.(x \doteq y \to y \doteq x)$为永真式

$\Leftrightarrow$ 对于任意模型(M,σ), $M \vDash_\sigma \forall x \forall y(x \doteq y \to y \doteq x)$

$\Leftrightarrow$ 对于任意模型(M,σ), $\forall x \forall y(x \doteq y \to y \doteq x)_{M[\sigma]} = T$

$\Leftrightarrow$ 对于任意模型(M,σ), $\forall y(x \doteq y \to y \doteq x)_{M[\sigma[x:=a]]} = T$, 对于任意$a \in M$

$\Leftrightarrow$ 对于任意模型(M,σ), $(x \doteq y \to y \doteq x)_{M[\sigma[x:=a][y:=b]]} = T$, 对于任意$a,b \in M$

$\Leftrightarrow$ 对于任意模型(M,σ), $B_\to((x \doteq y)_{M[\sigma[x:=a][y:=b]]}, (y \doteq x)_{M[\sigma[x:=a][y:=b]]}) = T$, 对于任意$a,b \in M$

$\Leftrightarrow$ 对于任意模型(M,σ), $B_\to((x \doteq y)_{M[\sigma[x:=a][y:=b]]}, (y \doteq x)_{M[\sigma[x:=a][y:=b]]}) = T$, 对于任意$a,b \in M$ (1)

令A为$(x \doteq y)_{M[\sigma[x:=a][y:=b]]}$, B为$(y \doteq x)_{M[\sigma[x:=a][y:=b]]}) = T$,

式1 $\Leftrightarrow$ 对于任意模型(M,σ), $B_{\rightarrow}(A,B) = T$, 对于对于任意$a,b \in M$ (2)

$\because$

$$A = \begin{cases} T, a = b \\ F, a \neq b \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} T, b = a \\ F, b \neq a \end{cases}$$

$\therefore$ 对于任意$a,b \in M$, case 1) $a = b$, $A = T$且$B = T$, 故对于任意模型(M,σ), $B_{\rightarrow}(A,B) = T$; case 2) $a \neq b$, $A = F$且$B = F$, 故对于任意模型(M,σ), $B_{\rightarrow}(A,B) = T$;

综上, 式(2)成立, 故原命题得证 $\qquad Q.E.D.$

(2)$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$

证：$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$为永真式

$\Leftrightarrow$ 对于任意模型(M,σ), $M \vDash_{\sigma} (A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$

$\Leftrightarrow$ 对于任意模型(M,σ), $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)_{M[\sigma]} = T$

$\Leftrightarrow$ 对于任意模型(M,σ), $B_{\leftrightarrow}((A \wedge B),(B \wedge A))_{M[\sigma]} = T$

$\Leftrightarrow$ 对于任意模型(M,σ), $B_{\leftrightarrow}(B_{\wedge}(A,B)_{M[\sigma]}, B_{\wedge}(B,A)_{M[\sigma]}) = T$

由$B_{\wedge}()$定义可易见, $B_{\wedge}(A,B)_{M[\sigma]} = B_{\wedge}(B,A)_{M[\sigma]}$

$\therefore$上式成立

$\therefore$原命题得证 $\qquad Q.E.D.$

4. 证明：对任何公式A, $\vDash \forall x.A \leftrightarrow \forall y.A[y/x]$.

证： $\vDash \forall x.A \leftrightarrow \forall y.A[y/x]$

$\Leftrightarrow$ 对于任意模型(M,σ), $M \vDash_{\sigma} \forall xA \leftrightarrow \forall yA[y/x]$

$\Leftrightarrow$ 对于任意模型(M,σ), $B_{\leftrightarrow}((\forall xA)_{M[\sigma]}, (\forall yA[y/x])_{M[\sigma]}) = T$

$\Leftrightarrow$ 对于任意模型(M,σ), $B_{\leftrightarrow}((\forall xA)_{M[\sigma]}, (\forall yA[y/x])_{M[\sigma]}) = T$ (1)

令$P = (\forall xA)_{M[\sigma]}$, $Q = (\forall yA[y/x])_{M[\sigma]}$

由定义可知,

$$P = \begin{cases} T, \ for\ all\ a \in M,\ A_M[\sigma[x := a]] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad F,\ else \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} T, \ for\ all\ a \in M,\ A[y/x]_M[\sigma[y := a]] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad F,\ else \end{cases}$$

由替换引理可知, $A[y/x]_M[\sigma[y := a]] = A_M[\sigma[x := a][y := a]] = A_M[\sigma[x := a]]$(因为$y$是新变元).

$\therefore P \doteq Q$

$\therefore$ 式(1)成立

$\therefore$原命题得证 $\qquad\qquad Q.E.D.$

5. 证明：$M \vDash_\sigma (A \wedge B)$ 等价于$M \vDash_\sigma A$ and $M \vDash_\sigma B$.

证： $M \vDash_\sigma (A \wedge B)$

$\Leftrightarrow (A \wedge B)_{M[\sigma]}$

$\Leftrightarrow B_\wedge(A_{M[\sigma]}, B_{M[\sigma]}) \ = \ T$ (1)

又$M \vDash_\sigma A$ and $M \vDash_\sigma B$

$\Leftrightarrow A_{M[\sigma]} = T$ and $B_{M[\sigma]} = T$ (2)

由$B_\wedge$的真值表易见,

$$(1) = \begin{cases} T,\ A_{M[\sigma]} = T\ and\ B_{M[\sigma]} = T \\ \qquad\qquad\qquad\qquad F,\ else \end{cases}$$

$\therefore (1) = T$ iff $(2) = T$

$\therefore$ (1)等价于(2)

$\therefore$原命题得证 $\qquad\qquad Q.E.D.$