2020春季学期“数理逻辑”期中考试试卷(开卷)

1. 证明下列命题为永真式:

(1) $((\neg Q \to \neg P) \land P) \to Q$;

证: 构造真值表如下所示：

Table 1: 1-(1)对应真值表)

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \to \neg P$	$(\neg Q \to \neg P) \land P$	原命题
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T

故原命题永真易见 $Q.E.D.$

(2) $\neg(A \land B) \to (\neg A \lor \neg B)$.

证: 构造真值表如下所示：

Table 2: 1-(2)对应真值表)

A	B	$\neg(A \land B)$	$\neg A \lor \neg B$	原命题
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

故原命题永真易见 $Q.E.D.$

2. 证明$\{\neg, \lor\}$为命题逻辑的连接词完全组, 且$\{\lor, \to\}$不为命题逻辑的连接词完全组.

证: $\{\neg, \lor\}$命题逻辑的连接词完全组$\Leftrightarrow$ $A \land B$和$A \to B$可用$\{\neg, \lor\}$表示

$A \land B \Leftrightarrow \neg(\neg A \lor \neg B)$

$A \to B \Leftrightarrow \neg A \lor B$

故$\{\neg, \lor\}$命题逻辑的连接词完全组.

又$\{\lor, \to\}$不为命题逻辑的连接词完全组$\Leftrightarrow$ $\neg A$不可用$\{\lor, \to\}$表示

反设$\neg A$可用$\{\vee, \rightarrow\}$表示

$\Rightarrow$ 存在命题P由命题符A和$\{\vee, \rightarrow\}$组成, 且$\models_{A=T} P$为F

对命题P做结构归纳, 证明$\models_{A=T} P$为T $(\star)$

Base: P仅包含命题符A, 易见$\star$成立

I.H.: 对于包含$n-1$个命题符的P_{n-1}, $\star$成立

I.S.:

Case 1: $P \equiv P_{n-i} \vee P_i$

$\models_{A=T} P$

$\Leftrightarrow \models_{A=T} P_{n-i} \vee P_i$

$\Leftrightarrow B_\vee(\models_{A=T} P_{n-i}, \models_{A=T} P_i)$

$\Leftrightarrow B_\vee(T,T) = T$

故$\star$成立;

Case 2: $P \equiv P_{n-i} \rightarrow P_i$ 或$P \equiv P_i \rightarrow P_{n-i}$

同Case 1易证.

故$\models_{A=T} P$不为F, 矛盾!

故$\{\vee, \rightarrow\}$不为命题逻辑的连接词完全组 $Q.E.D.$

3. 在命题逻辑中定义逻辑连接词$\nrightarrow$如下:

P	Q	$P \nrightarrow Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	F

(1)求证$P \nrightarrow P$为永假式, $(P \nrightarrow P) \rightarrow P$为永真式;

证: 构造真值表如下所示：

Table 3: 3-(1)对应真值表)

P	$P \nrightarrow P$	$(P \nrightarrow P) \rightarrow P$
T	F	T
F	F	T

故易见$P \nrightarrow P$永假, $(P \nrightarrow P) \to P$永真 $\qquad Q.E.D.$

(2)求$P \to (P \nrightarrow P)$的真值表.

证: 构造真值表如下所示：

Table 4: 3-(2)对应真值表)

P	$P \nrightarrow P$	$P \to (P \nrightarrow P)$
T	F	F
F	F	T

4. 在G系统中证明:

(1) $\vdash \neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$

证:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \vdash A, B}{\vdash A, B, \neg B}\neg R \qquad \dfrac{A \vdash A, B}{\vdash A, B, \neg A}\neg R}{\vdash A, B, \neg A \wedge \neg B}\wedge R}{\vdash A \vee B, \neg A \wedge \neg B}\vee R}{\neg(A \vee B) \ \vdash \ \neg A \wedge \neg B}\neg L}{\vdash \neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)}\to R$$

$Q.E.D.$

(2) $\forall x A \to \exists x B \vdash A \to \exists x B, C$, 其中$x \notin FV(A)$

证:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash \exists x B, C, A}{A \vdash \exists x B, C, \forall A}\forall R,\ A[y/x] = A}{\vdash A \to \exists x B, C, \forall A}\to R \qquad \dfrac{A, \exists x B \vdash \exists x B, C}{\exists x B \vdash A \to \exists x B, C}\to R}{\forall x A \to \exists x B \vdash A \to \exists x B, C}\to L$$

$Q.E.D.$

5. 设φ为一阶谓词逻辑公式

$(\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \to S(x))) \ \to \ ((Q(x) \wedge S(x)) \to (P(x) \wedge R(x)))$

判断并证明结论:

(1) φ是否可满足;

证: φ 可满足.

构造模型(M,σ)如下:

$M = 0$, $P_M = 0$, $Q_M = 0$, $R_M = 0$, $S_M = 0$, $\sigma(x) = 0$

易见$M \models_\sigma (\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \to S(x)))$,

且$M \models_\sigma (Q(x) \wedge S(x)) \to (P(x) \wedge R(x)))$,

故φ 可满足. $\qquad Q.E.D.$

(2) φ是否永真;

证: φ 不用真.

构造模型(M,σ)如下:

$M = 0, 1, 2, 3, 4$, $P_M = 0$, $Q_M = 0, 1, 2$, $R_M = 3$, $S_M = 2, 3, 4$, $\sigma(x) = 2$

易见$M \models_\sigma (\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \to S(x)))$,

且$M \not\models_\sigma (Q(x) \wedge S(x)) \to (P(x) \wedge R(x)))$,

故φ 不用真. $\qquad Q.E.D.$

(3) $\vdash \varphi$是否可有效;

证: $\vdash \varphi$非有效.

由(2)易见. $\qquad Q.E.D.$

(4) $\vdash \varphi$是否可证.

证: $\vdash \varphi$不可证.

由一阶谓词逻辑的可靠性定理易见. $\qquad Q.E.D.$

6. 设Γ, Δ均为有穷的一阶谓词逻辑公式集合,A为一阶谓词逻辑公式, 请在语法层面证明下列结论:

(1) 若$\Gamma \vdash$可证, 则$\Gamma \vdash A$可证;

证: 令$\Gamma = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$

可构造如下证明树

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash}{\bigwedge_{i=1}^{n} B_i \vdash} \wedge L \text{ n times} \qquad \dfrac{\{\Gamma \vdash A, B_1, \Gamma \vdash A, B_2, ..., \Gamma \vdash A, B_n\}}{\Gamma \vdash A, \bigwedge_{i=1}^{n} B_i} \wedge R \text{ n times}}{\Gamma \vdash A} Cut$$

$Q.E.D.$

(2) 若$\Gamma, \neg A\ \vdash$可证且$\Delta, A\ \vdash$可证, 则$\Gamma, \Delta\ \vdash$可证.

证:

可构造如下证明树

$$\dfrac{\dfrac{\Delta, A \vdash}{\Delta \vdash \neg A}\neg R \qquad \Gamma, \neg A \vdash}{\Gamma, \Delta \vdash}\, Cut$$

$Q.E.D.$

7. 请将推理"*所有练习生都会唱跳rap, 有些偶像是练习生, 因此有些偶像会唱跳rap*"用一阶谓词逻辑符号化, 并判断并证明该**推理过程**是否有效.

解:

令$P(X) \triangleq x$是练习生;

$Q(X) \triangleq x$是偶像;

$R(X) \triangleq x$会唱跳rap.

三句话分别为下列三条公式:

$\alpha : \forall x(P(x) \to R(x))$;

$\beta : \exists x(P(x) \wedge Q(x))$;

$\gamma : \exists x(Q(x) \wedge R(x))$;

即推理序贯$\alpha, \beta \vdash \gamma$

构造证明树如下:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{R(y), \alpha, P(y), Q(y) \vdash \gamma, R(y) \qquad \alpha, P(y), Q(y) \vdash \gamma, R(y), P(y)}{P(y) \to R(y), \alpha, P(y), Q(y) \vdash \gamma, R(y)} \to L}{\alpha, P(y), Q(y) \vdash \gamma, R(y)} \forall L \qquad \alpha, P(y), Q(y) \vdash \gamma, Q(y)}{\alpha, P(y), Q(y) \vdash \gamma, Q(y) \wedge R(y)}}{\alpha, P(y), Q(y) \vdash \gamma} \exists R}{\alpha, P(y) \wedge Q(y) \vdash \gamma} \wedge L}{\alpha, \beta \vdash \gamma} \exists L}{}$$

$Q.E.D.$

8. 请在1-7题中任选两题，用**自然语言**对自己的解题过程进行说明和解释.