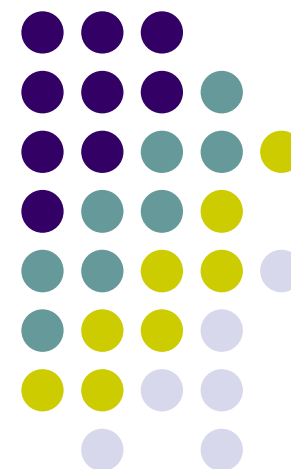




南京大學

数理逻辑

主讲人：宋方敏 秦逸





南京大學

自我介绍

- 姓名：宋方敏
 - 电子邮件：
 - 办公室：计算机系楼
- 姓名： 秦逸
 - 个人主页： <https://yiqinnju.github.io/>
 - 电子邮件： yiqinics@nju.edu.cn
 - Office Hour: 计算机系楼501, 每周



南京大学

关于本课程

- 目的：
 - 数理逻辑的**基本概念**、**基本定理**和**基本方法**
- 计划：
 - 上课时间：2020年 2月17日 ~ 6月16日
(共20周, **18次课**) ;
 - 考试时间：2020年 6月17日 ~ 6月30日 ;
- 计分方式：

总成绩 = 平时成绩 (**10%**) + 期中考试 (**20%**) +
期末考试 (**70%**) ;
- 助教：

教材



南京大學

- 宋方敏, 吴骏. 《数理逻辑十二讲》, 机械工业出版社, 2017.

注意选择第二次印刷版本



主要内容



南京大学

第一讲 命题逻辑

第二讲 Boole代数

第三讲 一阶逻辑语言

第四讲 一阶逻辑的自然推理系统

第五讲 集合论的公理系统

第六讲 完全性定理

第七讲 Herbrand定理

第八讲 命题逻辑的永真推理系统

第九讲 一阶逻辑的永真推理系统

第十讲 Gentzen的Hauptsatz

第十一讲 紧性定理

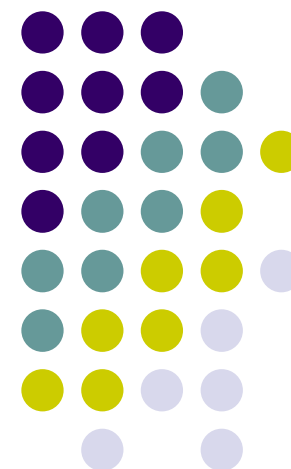
第十二讲 模态逻辑概述

- **基本概念：** 命题逻辑，一阶逻辑
- **基本定理：** 完全性定理，Herbrand定理，紧性定理
- **基本方法：** 一阶逻辑的自然推理系统
命题逻辑的永真推理系统
一阶逻辑的永真推理系统



南京大學

引子 - 什么是数理逻辑？



内容提要



南京大學

- 什么是逻辑
- 逻辑学的发展
- 现代逻辑学的产生
- 计算机科学中的数理逻辑



南京大学

什么是逻辑

- 逻辑：推理和证明的思想过程
- 逻辑学：研究“有效推理”和“证明的原则与标准”的一门学科
- Logic 一词来自古希腊语 λογική
 - 字根源于希腊语 λόγος
 - 词语、思想、概念、推理
 - 严复翻译为“名学”
 - 孙中山翻译为“理则”



“有效推理”和证明的原则与标准”



南京大学

- 《公孙龙子·白马论》：“白马非马”
 - “求马，黄、黑马皆可致。求白马，黄、黑马不可致。使白马乃马也，是所求一也，所求一者，白者不异马也。所求不异，如黄、黑马有可有不可，何也？可与不可其相非明。故黄、黑马一也，而可以应有马，而不可以应有白马，是**白马之非马**审矣。”





南京大学

本体论证明

- 如何证明上帝的存在 🤖

- 安瑟莫

- “我思故我在”
“我”和“思”
来自于上帝

单子论
(monism)
上帝是最初

基于模态逻辑的
本体论证明





南京大学

亚里士多德的三段论

- 亚里士多德
 - 所有前提都是直言命题的演绎推理
- 大前提：所有M是P
小前提：所有S是M
结论：所有S是P
- 前提中加入不同的语气？
 - 全称，特称，肯定，否定
 - 扬·卢卡西维茨
 - 《亚里士多德的三段论》
 - 19个有效论式子，结论弱化的5个论式
 - “波兰表示法”和“逆波兰表示法”





南京大学

基于自然语言的逻辑学

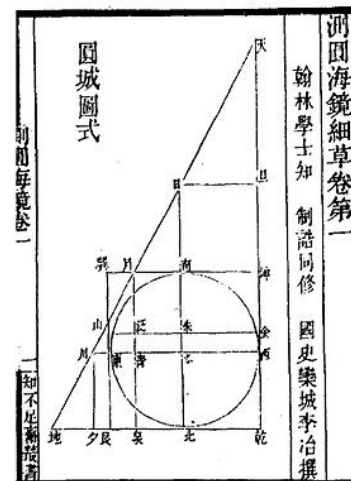
- 再论 “白马非马”

“白马” 非 “马”，非 “白-马” 非 “马”

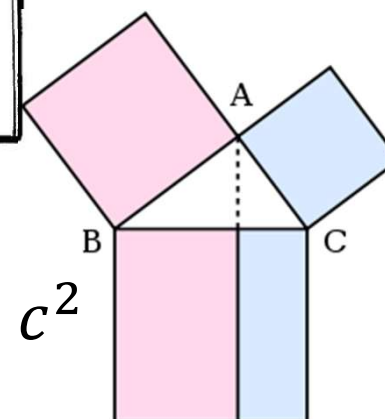
- 公孙龙的推理犹以混淆了作为一个整体的 “白马” 和作为一个复合词的 “白-马”
- 自然语言可能存在的歧义影响了对于逻辑学的研究

现代逻辑学的诞生

- 通过抽象符号描述对象和命题
 - 符号逻辑 (Symbolic Logic)
 - 语义+语法
- 抽象代数、集合论理论的发展
- 萌芽时代→代数时代→逻辑主义时代→元数学时代→
...



南京大學





南京大学

现代逻辑-萌芽时代

- 通用语言&通用数学

*The only way to rectify our reasonings is to **make them as tangible as those of the Mathematicians**, so that we can find our error at a glance, and when there are disputes among persons, we can simply say: **Let us calculate** , without further ado, to see who is right.*

-- G. W. Leibniz, The Art of Discovery(1685)





南京大学

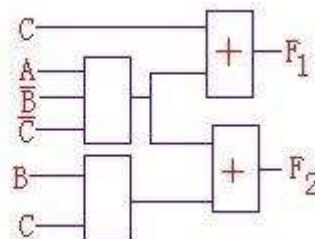
现代逻辑-代数时代

- **伽罗华**：开创研究抽象的公理化代数系统的抽象代数（1832）
 - 彻底解决了用根式求解代数方程的可能性问题
 - 解方程→代数结构的性质
- **布尔**：建立描述人类思维代数规律的布尔代数（1847-1854）



AE	00	01	11	10
C	0	0	0	1
0	0	0	0	1
1	1	1	1	1

AE	00	01	11	10
C	0	0	0	1
0	0	0	0	1
1	0	1	1	0

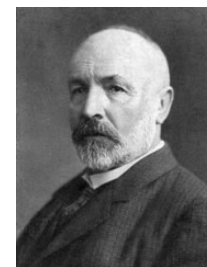




京大學

现代逻辑-逻辑主义时代

- **康托**: 建立**集合论**, 可用于表达整个数学的形式语言 (1872-1874)
- **弗雷格**: 严格建立第一个**人工的形式语言**概念文字 (1879)
- **皮亚诺**: 建立**算术的形式语言**皮亚诺算术 (1889)
- **策梅洛**: 建立第一个**公理化集合论**策梅洛集合论 (1908)
- **罗素**: 《数学原理》 (1910-1913)
 - 表述**所有数学真理**在一组数理逻辑内的公理和推理规则下, 原则上都是可以证明的

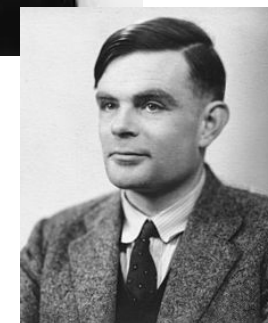




南京大学

现代逻辑-元数学时代

- **希尔伯特**：《几何基础》，《数学基础》，建立几何和数学的形式语言
 - 希尔伯特的23问
- **哥德尔**：哥德尔不完备定理
 - 包含皮亚诺算术的形式系统的**不完备性**
 - 包含皮亚诺算术的形式系统的**兼容性**，在该系统内**不可被证明**
- **邱奇**：什么是**可计算的**
 - 基于**λ演算**定义的可计算函数
- **图灵**：可对输入进行运算的理论机器模型**图灵机**



数理逻辑与计算机科学



南京大学

- **数理逻辑的研究孕育了计算机科学...**
 - 1928年，希尔伯特提出**判定性问题**：
 - 求一个算法，输入一个形式语言及其描述的一个数学陈述，输出对该陈述的正确判定
 - 1931年，哥德尔提出**不完全定理**
 - 1936年，图灵提出**图灵机**
 - 1937年，邱奇-图灵问题，**可计算性**
 - 1940年代，冯诺依曼提出**存储程序计算机结构**
 - 1946年2月14日，第一台图灵完全的电子计算机**ENIAC**正式公布



南京大学

数理逻辑与计算机科学

- 对编程语言的影响：
 - λ 演算 \rightarrow 函数式编程语言 Lisp, Haskell
 - 一阶谓词逻辑 \rightarrow 陈述式编程语言 Prolog, Datalog
 - 集合论 \rightarrow 关系数据库查询语言 SQL
- 对软件系统理论的影响
 - 集合论 \rightarrow 关系代数 \rightarrow 现代数据库, 科德, 1981年图灵奖
 - 谓词逻辑 \rightarrow 时序逻辑 \rightarrow 现代分布式系统, 兰波特, 2013年图灵奖
- 对人工智能理论的影响
 - 基于推理: 专家系统, 费根鲍姆, 1994年图灵奖
 - 基于统计: 贝叶斯网络, 珀尔, 2011年图灵奖

推荐书籍



南京大學

- [1] J. Gallier, *Logic for Computer Science*
- [2] J. Bell et al., *A Course of Mathematical Logic*
- [3] 胡世华, 陆宗万, 数理逻辑基础, 上下
- [4] Bertrand Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*
- [5] Herbert Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*
- [6] 李未, 数理逻辑
- [7] Patrick Blackburn et al., *Modal Logic*