第七、八章数理逻辑基础作业答案

第七章

6.解：**(1)** 设命题P为“朱运身体好”, 命题Q为“朱运学习好”,题述命题可表示为$P \wedge Q$.

(2) 设命题P为“a是偶数”, 命题Q为“b是偶数”, 命题S为“a+b是偶数”, 题述命题可表示为$(P \wedge Q) \rightarrow S$.

(3) 设命题P为“四边形ABCD是平行四边形”, 命题Q为“四边形ABCD对边平行”,题述命题可表示为$P \leftrightarrow Q$.

(4) 设命题P为“鸟是会飞的”, 命题Q为“火车是交通工具”,题述命题可表示为$P \rightarrow Q$.

(5) 设命题P为“明天小张将去演出”, 命题Q为“明天小李将去演出”,题述命题可表示为$P \vee Q$.

(6) 设命题P为“选周玲当工会主席”, 命题Q为“选郑平当工会主席”,题述命题可表示为$P \vee Q$.

8. 答：除了(5)以外都是命题公式.

11. 解：**(1)** 等价. $\neg(A \leftrightarrow B) = \neg(A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A)$

$= \neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

$= (\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg(\neg B \vee A)$

$= (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$.

(2) 等价. $A \rightarrow (B \vee C) = \neg A \vee B \vee C$, $(A \wedge \neg B) \rightarrow C = \neg(A \wedge \neg B) \vee C$ $= \neg A \vee B \vee C$. 左边= 右边。

(3) 不等价. 取A为F, B为F, C为F, 则左边为T, 右边为F.

(4) 等价. $\neg(A \rightarrow B) = \neg(\neg A \vee B) = A \wedge \neg B$.

15. 证明：**(1)** $P \rightarrow (Q \rightarrow P) = \neg P \vee (Q \rightarrow P)$

$= \neg P \vee (\neg Q \vee P)$

$= \neg P \vee \neg Q \vee P$,

$\neg P \rightarrow (P \rightarrow \neg Q) = P \vee (P \rightarrow \neg Q)$

$= P \lor (\neg P \lor \neg Q)$

$= P \lor \neg P \lor \neg Q.$

故左边= 右边，原命题得证. Q.E.D.

(2) $\neg(P \leftrightarrow Q) = \neg((P \to Q) \land (Q \to P))$

$= \neg((\neg P \lor Q) \land (\neg Q \lor P))$

$= \neg(\neg P \lor Q) \lor \neg(\neg Q \lor P)$

$= (P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg P).$

$(P \lor Q) \land \neg(P \land Q) = (P \land \neg(P \land Q)) \lor (Q \land \neg(P \land Q))$

$= (P \land (\neg P \lor \neg Q)) \lor (Q \land (\neg P \lor \neg Q))$

$= ((P \land \neg P) \lor (P \land \neg Q)) \lor ((Q \land \neg P) \lor (Q \land \neg Q))$

$= (FALSE \lor (P \land \neg Q)) \lor (FALSE \lor (Q \land \neg P))$

$= (P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg P).$

故左边= 右边，原命题得证. Q.E.D.

26. 证明：设命题P为“我学习”, 命题Q为“我数学不及格”, 命题S为“我热衷于打麻将”.

第一句话用命题逻辑表示为：$P \to \neg Q.$

第二句话用命题逻辑表示为：$\neg S \to P.$

第三句话用命题逻辑表示为：$Q \to S.$

即需要证明：$(P \to \neg Q) \land (\neg S \to P) \to \neg Q \to S.$

将前提化简为：

$(\neg P \lor \neg Q) \land (S \lor P)$

$= ((\neg P \lor \neg Q) \land S) \lor ((\neg P \lor \neg Q) \land P)$

$= (\neg P \land S) \lor (\neg Q \land \neg S) \lor (\neg P \land P) \lor (\neg Q \land P)$

$= \neg(P \lor \neg S) \lor \neg(Q \lor S) \lor (FALSE) \lor (\neg Q \land P)$

$= \neg(P \lor \neg S) \lor \neg(Q \lor S) \lor (\neg Q \land P)$

结合结论有：

$\neg(P \lor \neg S) \lor \neg(Q \lor S) \lor (\neg Q \land P) \to Q \to S$

$= \neg(\neg(P \vee \neg S) \vee \neg(Q \vee S) \vee (\neg Q \wedge P)) \vee (Q \rightarrow S)$

$= ((P \vee \neg S) \wedge (Q \vee S) \wedge \neg(\neg Q \wedge P)) \vee (\neg Q \vee S)$

$= ((P \vee \neg S) \wedge (Q \vee S) \wedge \neg(\neg Q \wedge P)) \vee Q \vee S$

$= ((P \vee \neg S \vee \neg Q) \wedge (Q \vee S \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg P \vee \neg Q)) \vee S$

$= ((P \vee \neg S \vee \neg Q) \wedge TRUE \wedge TRUE) \vee S$

$= (P \vee \neg S \vee \neg Q) \vee S$

$= P \vee \neg S \vee \neg Q \vee S$

$= TRUE.$

故得证. Q.E.D.

38. 证明：设命题P为“甲获胜”, 设命题Q为“乙获胜”, 设命题S为“丙获胜”, 设命题T为“丁不失败”.

前提为：$P \rightarrow \neg Q$, $S \rightarrow Q$, $\neg P \rightarrow T$.

化简前提为：

$(P \rightarrow \neg Q) \wedge (S \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow T)$

$= (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg S \vee Q) \wedge (P \vee T)$

结合结论有：

$((\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg S \vee Q) \wedge (P \vee T)) \rightarrow (S \rightarrow T)$

$= \neg((\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg S \vee Q) \wedge (P \vee T)) \vee (\neg S \vee T)$

$= (\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg S \vee Q) \vee \neg(P \vee T)) \vee (\neg S \vee T)$

$= (P \wedge Q) \vee (S \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg T) \vee \neg S \vee T$

$= (P \wedge Q) \vee ((S \wedge \neg Q) \vee \neg S) \vee ((\neg P \wedge \neg T) \vee T)$

$= (P \wedge Q) \vee ((S \vee \neg S) \wedge (\neg Q \vee \neg S)) \vee ((\neg P \vee T) \wedge (\neg T \vee T))$

$= (P \wedge Q) \vee (\neg Q \vee \neg S) \vee (\neg P \vee T)$

$= (P \wedge Q) \vee \neg Q \vee \neg P \vee \neg S \vee T$

$= ((P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee \neg P \vee \neg S \vee T$

$= ((P \vee \neg Q) \wedge TRUE) \vee \neg P \vee \neg S \vee T$

$= (P \vee \neg Q) \vee \neg P \vee \neg S \vee T$

$= P \vee \neg P \vee \neg Q \vee \neg S \vee T$

$= TRUE \vee \neg Q \vee \neg S \vee T$

$= TRUE.$

故得证. Q.E.D.

第八章

1. 解：**(1)** 令小李为a, 谓词$P(x)$ 表示“x为研究生”, 原命题可表示为“$\neg P(a)$”.

(2) 设谓词$P(x)$ 表示“x是篮球运动员”, $Q(x)$ 表示“x是乒乓球运动员”, 原命题可表示为“$P(x) \vee Q(x)$”.

(3) 设谓词$P(x)$ 表示“x是偶数”, $Q(x)$ 表示“x是奇数”, 原命题可表示为“$Q(m) \to P(2m)$”.

(4) 设谓词$P(x)$ 表示“x非常聪明”, $Q(x)$ 表示“x能干”, 令小王为a, 原命题可表示为“$P(a) \wedge Q(a)$”.

(5) 设谓词$P(x)$ 表示“x戴眼镜”, $Q(x)$ 表示“x穿西装”, $S(x)$ 表示“x是高个大学生”, $T(x)$ 表示“x在看这本引文杂志”, 原命题可表示为“$\exists x P(x) \wedge Q(x) \wedge S(x) \to T(x)$”.

3. 答：前一个u为约束变元，后一个为自由变元.

10. 答：**(1)** 自由变元为y, 约束变元为x, 受$\forall$约束.

(2) 约束变元为x, 前两个受$\forall$ 约束, 第三个受$\exists$约束.

(3) 约束变元为x和y, 第一个x受$\exists$约束, 第二个x受$\forall$约束, 第一个y受$\forall$约束.

(4) 自由变元为z, 约束变元为x和y. x和y均受$\exists$约束.

15. 答：$((P(1,1) \vee Q(1)) \vee (P(1,2) \vee Q(2))) \wedge ((P(2,1) \vee Q(1)) \vee (P(2,2) \vee Q(2)))$.

18. 证明：$\exists x(A(x) \to B(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B(x))$

$\Leftrightarrow \exists x \neg A(x) \vee \exists x B(x)$

$\Leftrightarrow \neg A(x) \vee \exists x B(x)$

$\Leftrightarrow \neg\forall A(x) \vee \exists x B(x)$

$\Leftrightarrow \forall A(x) \to \exists x B(x)$. Q.E.D.

23. 答：(3)到(4)的推到错误，变元a之前已经出现过，现在不可使用。

正确推导如下：

$(1)(\forall x)(P(x) \to Q(x))\ P$

$(2)(\exists x)P(x)\ P$

$(3)P(a)\ ES(2)$

$(4)P(a) \to Q(a)\ US(1)$

$(5)Q(a)\ T(3)(4)I$

$(6)(\exists x)Q(x)\ EG(5)$

28. 答：不正确. (2)中的c对有些$P(c)$成立, (4)中的c对有些$Q(c)$成立, 所以在(4)中不能假定所推的c对$P(c)$和$Q(c)$同时成立.