图论（一）

基本概念

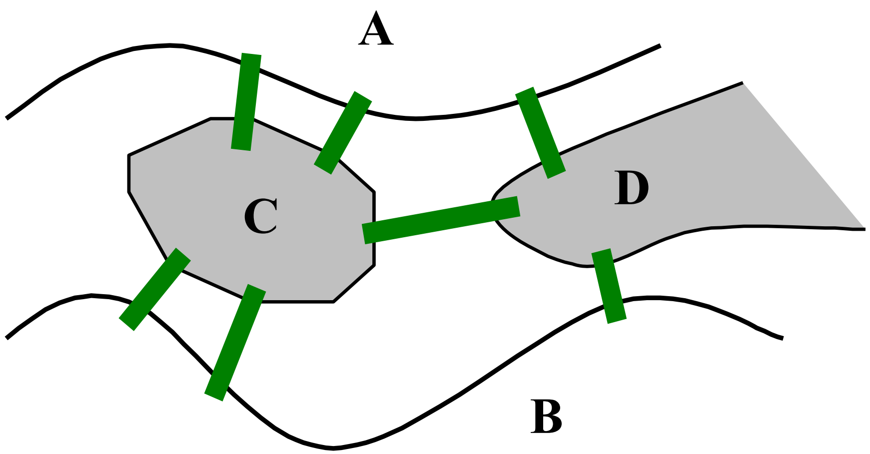
南京大学计算机科学与技术系

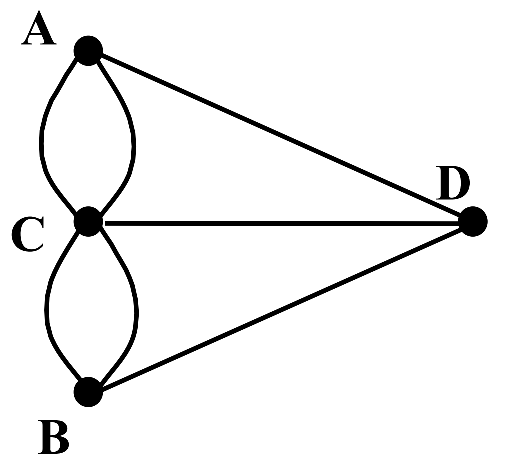
内容提要

- 基本概念
- 图的矩阵表示
- 通路与回路

Königsberg七桥问题

- 问题的抽象：
  - 用顶点表示对象-“地块”
  - 用边表示对象之间的关系-“有桥相连”

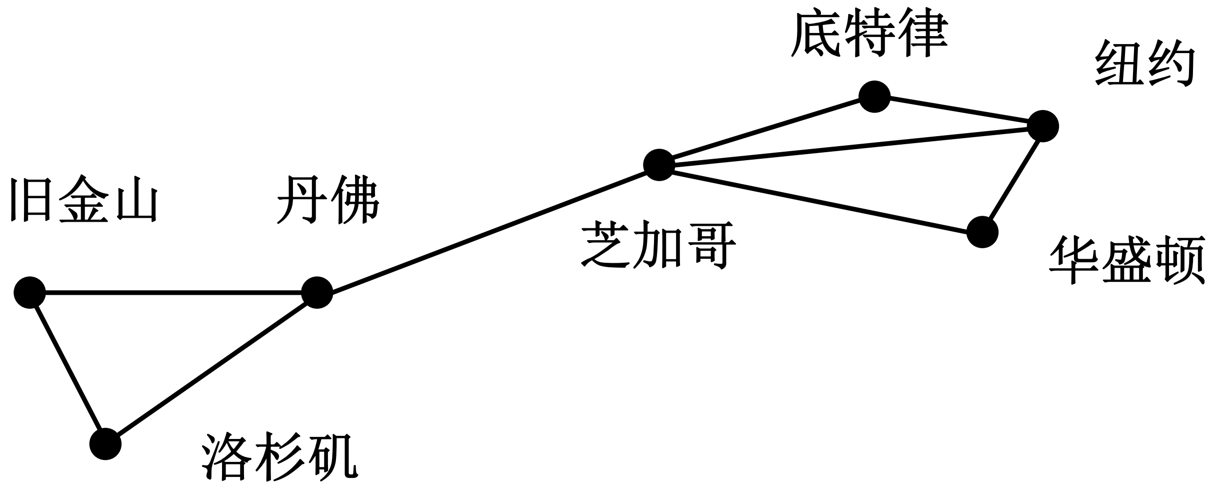




图的定义 Graph

> φ 常常省略，写作：
> $G = (V, E)$

- 图G是一个三元组：$G = (V, E, \varphi)$
  - V是非空顶点集，E是边集，且 $V \cap E = \phi$;
  - φ: $E \rightarrow P(V)$, 且$\forall e \in E$. $1 \le |\varphi(e)| \le 2$. $\varphi(e)$称为边 e 的端点集.
- 举例（数据中心、通信链接）

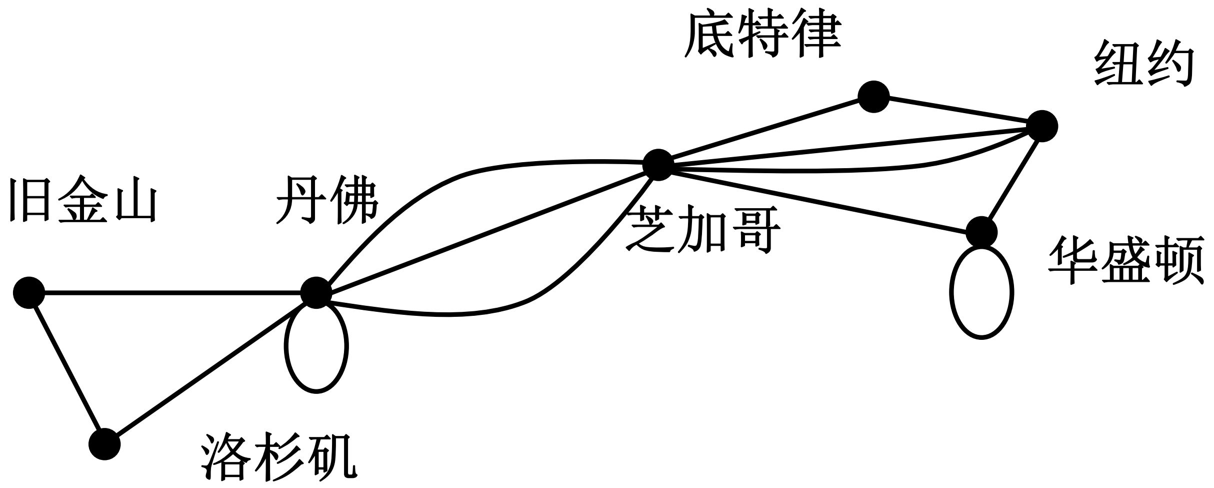


图的定义（续）

- 图$G = (V, E, \varphi)$是简单图，如果
  - 每条边有2个端点，即： $\forall e \in E. |\varphi(e)| = 2$，并且
  - 不同边有不同端点集，即：如果$e_1 \neq e_2$，则$\varphi(e_1) \neq \varphi(e_2)$
- 图$G = (V, E, \varphi)$是伪图，如果
  - 存在一条只有1个端点的边，即: $\exists e_0 \in E. |\varphi(e_0)| = 1$，或者
  - 有两条边具有相同的端点集，即:$\exists e_1 \neq e_2. \varphi(e_1)=\varphi(e_2)$

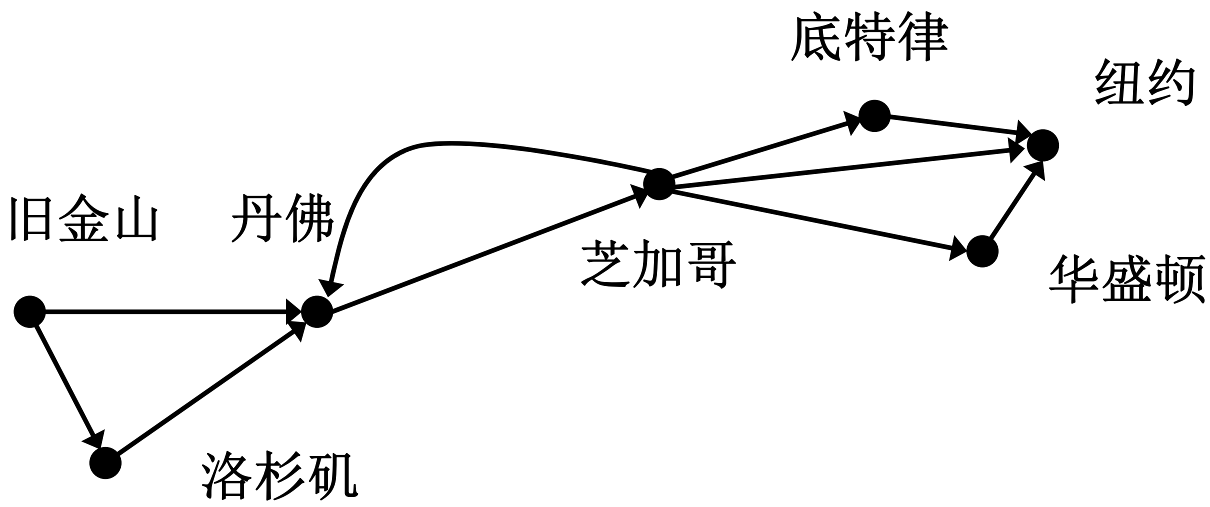
图的定义（续）

- 伪图（包含环或者多重边）示例



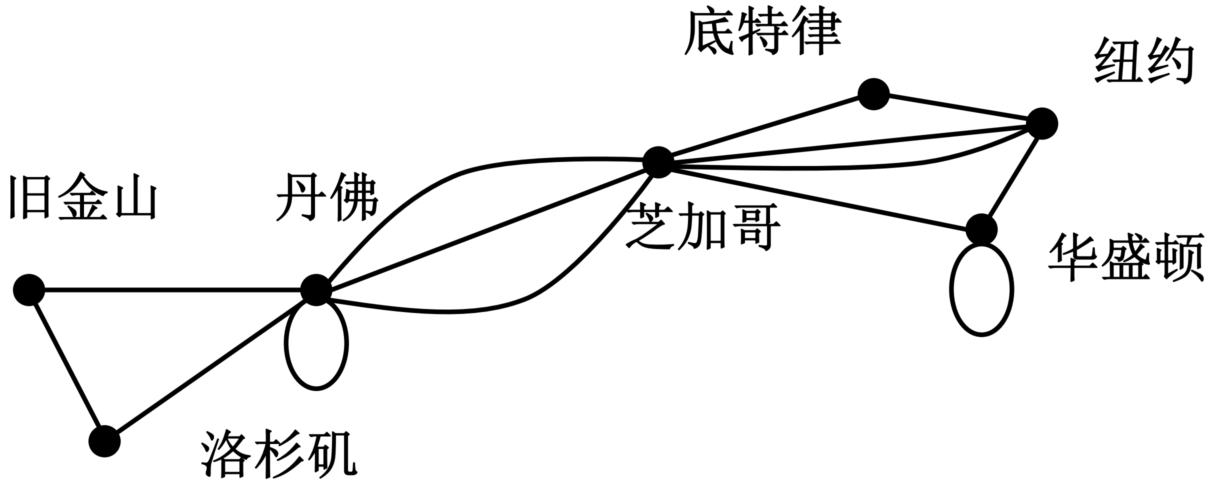
图的定义（有向图）

- 有向图G是一个三元组：G= (V, E, φ)
  - V是非空顶点集，E是有向边（弧）集，且V∩E=ϕ；
  - φ:E→V×V, 若φ(e)=(u, v), 则u和v分别称为e的起点和终点.
- 举例（简单有向图）



图的术语

- 无向图**G = (V, E, φ), φ(e)={u, v}**
  - **u**和**v**在**G**里邻接（相邻）
  - **e**关联（连接）顶点**u**和**v**
- 图**G**中顶点**v**的度, **deg(v)**， $d_G(v)$
  - 与该顶点关联的边数，环为顶点的度做出双倍贡献。



握手定理

- 无向图G有m条边，n个顶点$v_1, \ldots v_n$.

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

- 推论：无向图中<u>奇数度顶点</u>必是偶数个。

图的术语（续）

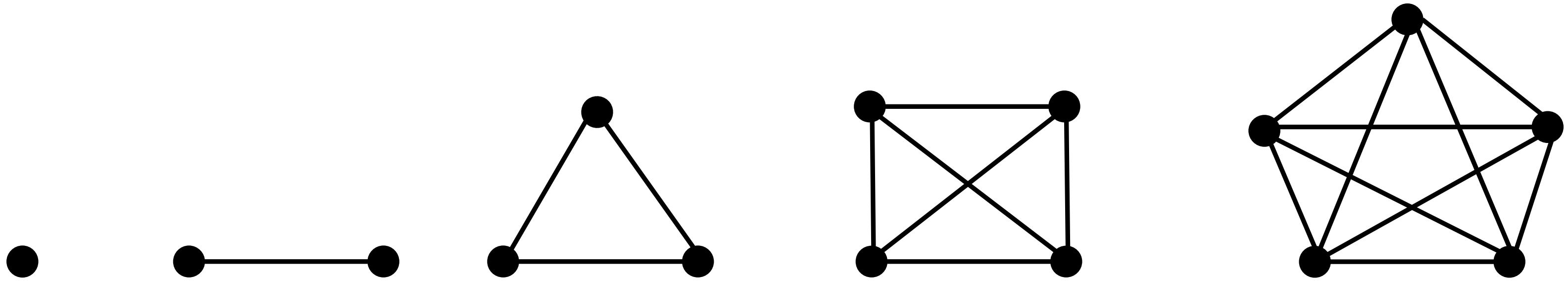
- 有向图$G = (V, E, \varphi)$, $\varphi(e) = (u, v)$
  - u是e的起点，v是e的终点
  - 假设 $u \neq v$，u邻接到v，v从u邻接
- 有向图中顶点的出度和入度
  - $d_G^+(v)$ = 以v为始点的边的条数， $deg^+(v)$
  - $d_G^-(v)$ = 以v为终点的边的条数， $deg^-(v)$
- 有向图中各顶点的出度之和等于入度之和。

$$\Sigma_{v \in V} deg^+(v) = \Sigma_{v \in V} deg^-(v) = |E|$$

- 有向图的底图

特殊的简单图（完全图）

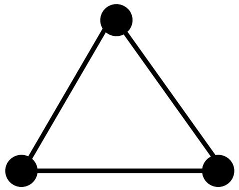
- 若简单图G中任意两点均相邻，则称为完全图。记为K_n, 其中n是图中顶点数。
  - K_n中每个顶点皆为n-1度，总边数为n(n-1)/2。
  - 边数达到上限的简单图。



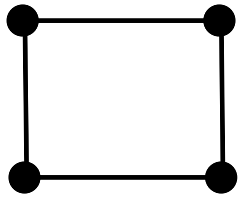
K_1　K_2　K_3　K_4　K_5

特殊的简单图（圈图与轮图）

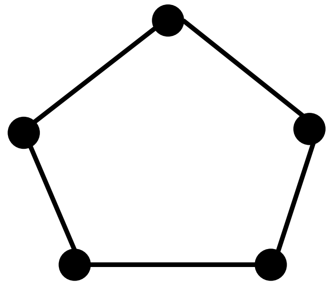
Cycle



C_3

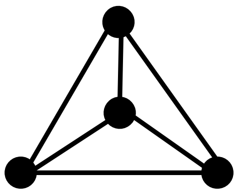


C_4

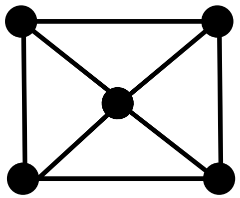


C_5

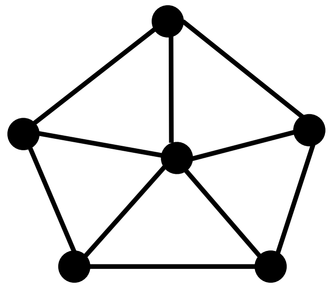
Wheel



W_3



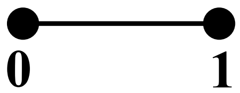
W_4



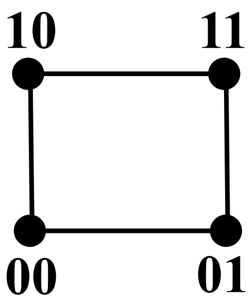
W_5

特殊的简单图（立方体图）

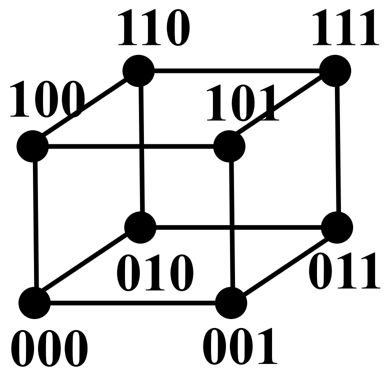
n-cube



Q_1



Q_2



Q_3

正则图：顶点度相同的简单图

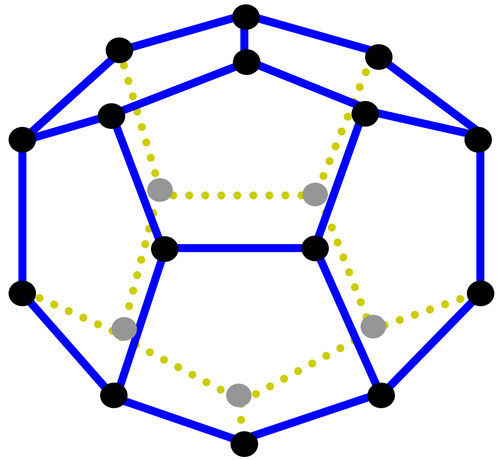
子图

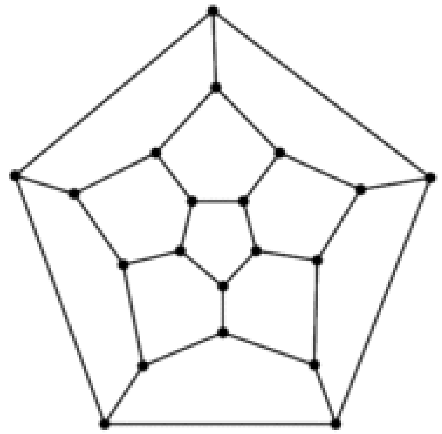
- 设$G=<V,E>$, $G'=<V',E'>$, 如果$V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$, 则称G'是G的子图。
- 如果$V'\subset V$, 或者$E'\subset E$, 则称为真子图。
- 诱导(导出)子图：可以由顶点集的子集，或者由边集的子集导出一个子图。

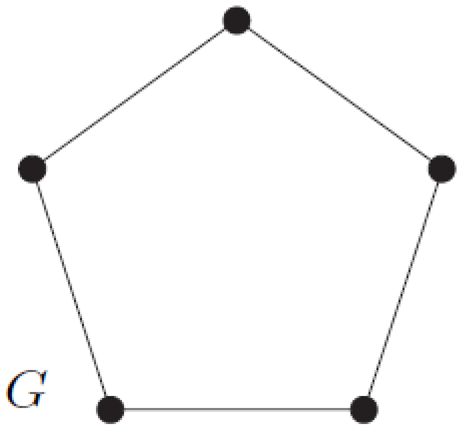
图的同构

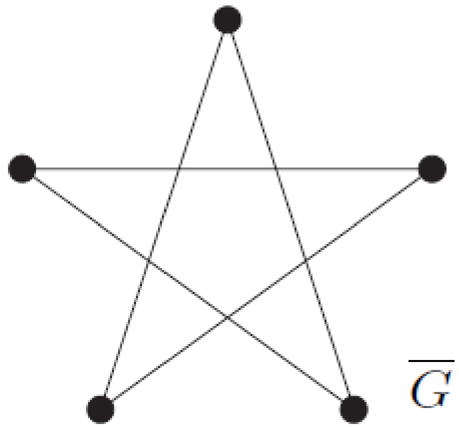
- 图同构的定义
  - 设$G_1=(V_1, E_1, \varphi_1)$和$G_2=(V_2, E_2, \varphi_2)$是两个简单无向图。若存在双射$f$: $V_1 \rightarrow V_2$, u和v在G_1中相邻当且仅当 $f(u)$和$f(v)$在G_2中相邻。此时称f是一个同构函数。
  - 设$G_1=(V_1, E_1, \varphi_1)$和$G_2=(V_2, E_2, \varphi_2)$是两个无向图。若存在双射$f$: $V_1 \rightarrow V_2$, g: $E_1 \rightarrow E_2$, $\forall e \in E_1$, $\varphi_1(e)=\{u,v\}$，当且仅当 $g(e) \in E_2$, 且$\varphi_2(g(e))=\{f(u),f(v)\}$。

图同构的例子

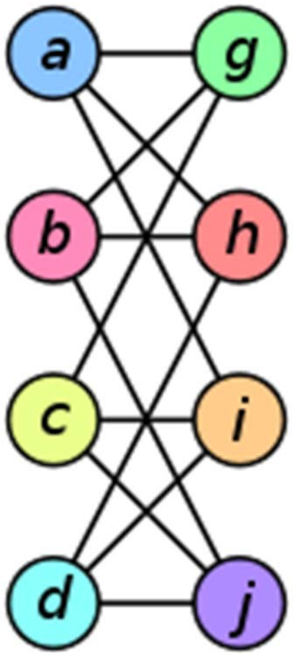


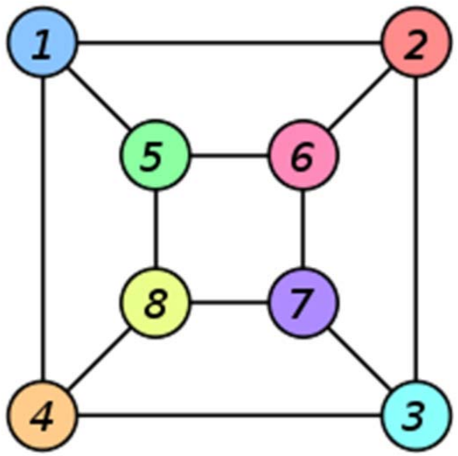






图同构的例子



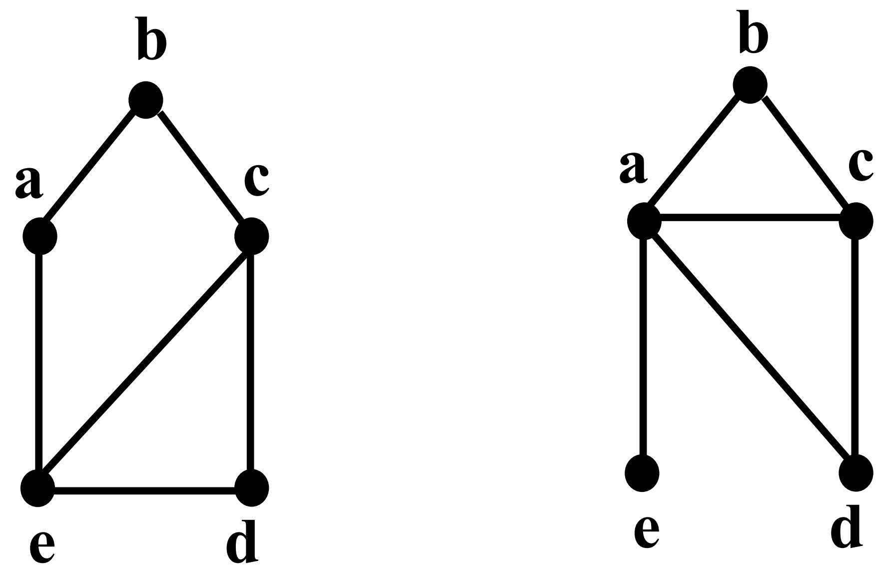


检测两个简单图是否同构

- 邻接矩阵表示：n！ 个
- 现有最好算法在最坏情况下的时间复杂性是指数级。
- （在最坏情况下）时间复杂性为多项式的算法？

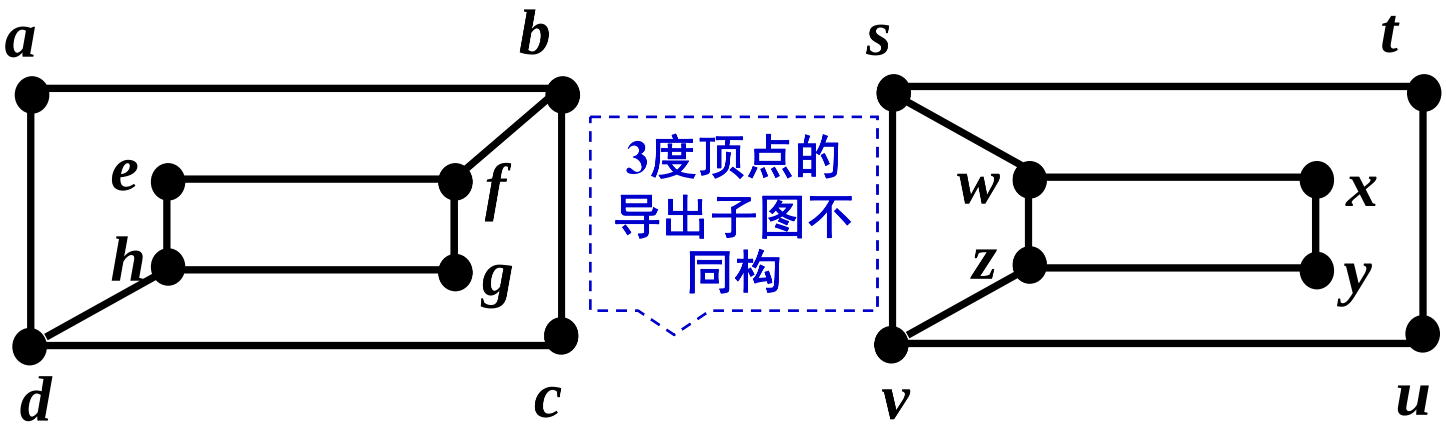
检测两个简单图是否同构

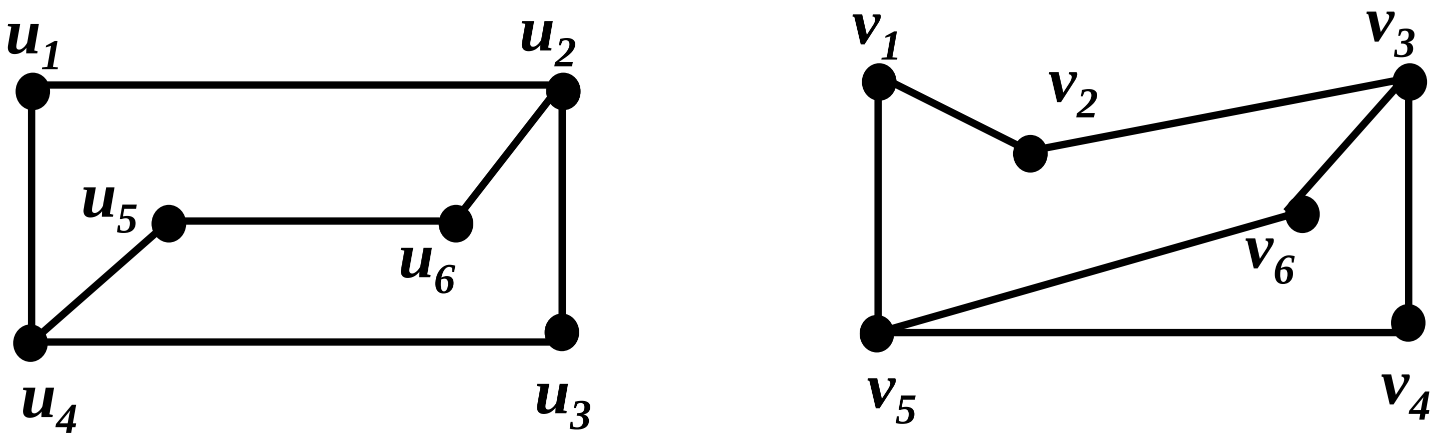
- 图同构下保持的性质称为图不变的
  - 顶点数、度序列、…
- 利用图不变的性质（没有保持）来推断出不同构



图G　　图H

检测两个简单图是否同构





关联矩阵(*incidence matrix*)

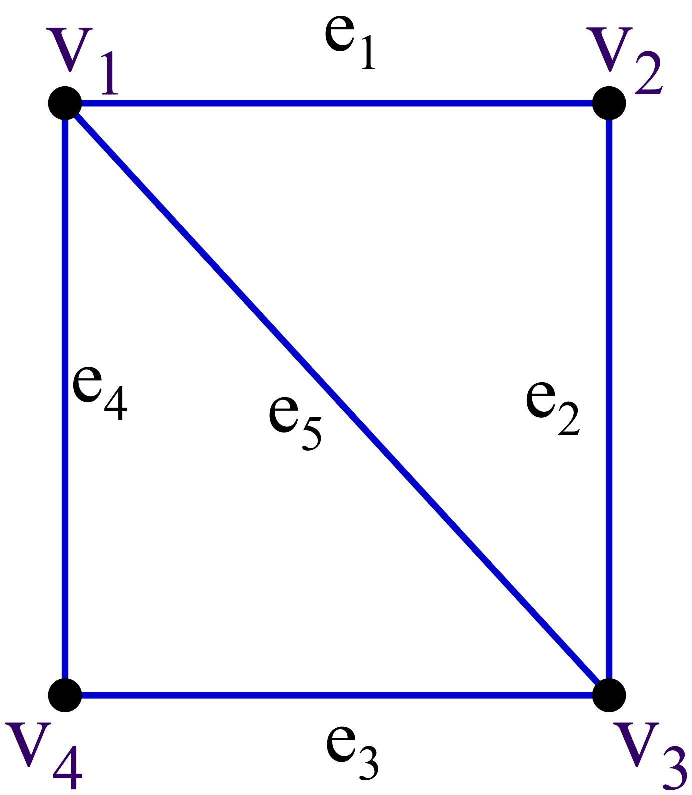
- 无向图G = (V, E, φ)，不妨设V＝{v_1， …， v_n}， E＝{e_1， …， e_m}。
- M(G) ＝[m_{ij}]称为G的关联矩阵(n×m阶矩阵), 其中

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果}e_j\text{关联}v_i \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

$v_i \in \varphi(e_j)$

- 无向图G可以是伪图(含环或多重边)。

举例（关联矩阵）



$$M(G) = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \right\}$$

关联矩阵表示法不适合于有向图

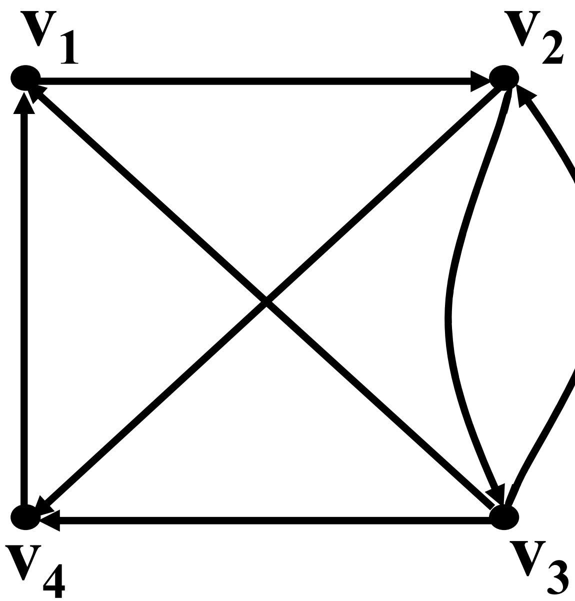
邻接矩阵(*adjacency matrix*)

- 简单有向图$G=(V, E, \varphi)$， 设$V=\{v_1, \ldots, v_n\}$，$E=\{e_1, \ldots, e_m\}$。
- $A(G)=[a_{ij}]$称为G的邻接矩阵(n×n阶矩阵)， 其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果}v_i\text{邻接到}v_j \\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

$\exists e\in E.\ \varphi(e)=(v_i, v_j)$

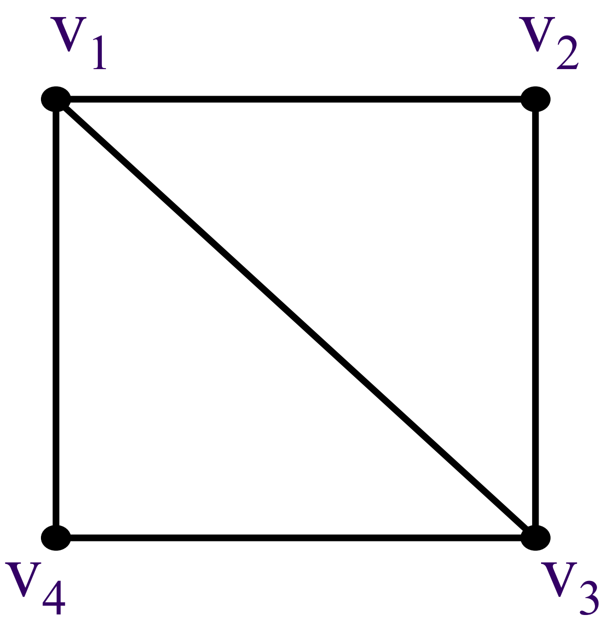
举例（邻接矩阵）



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可推广到简单无向图

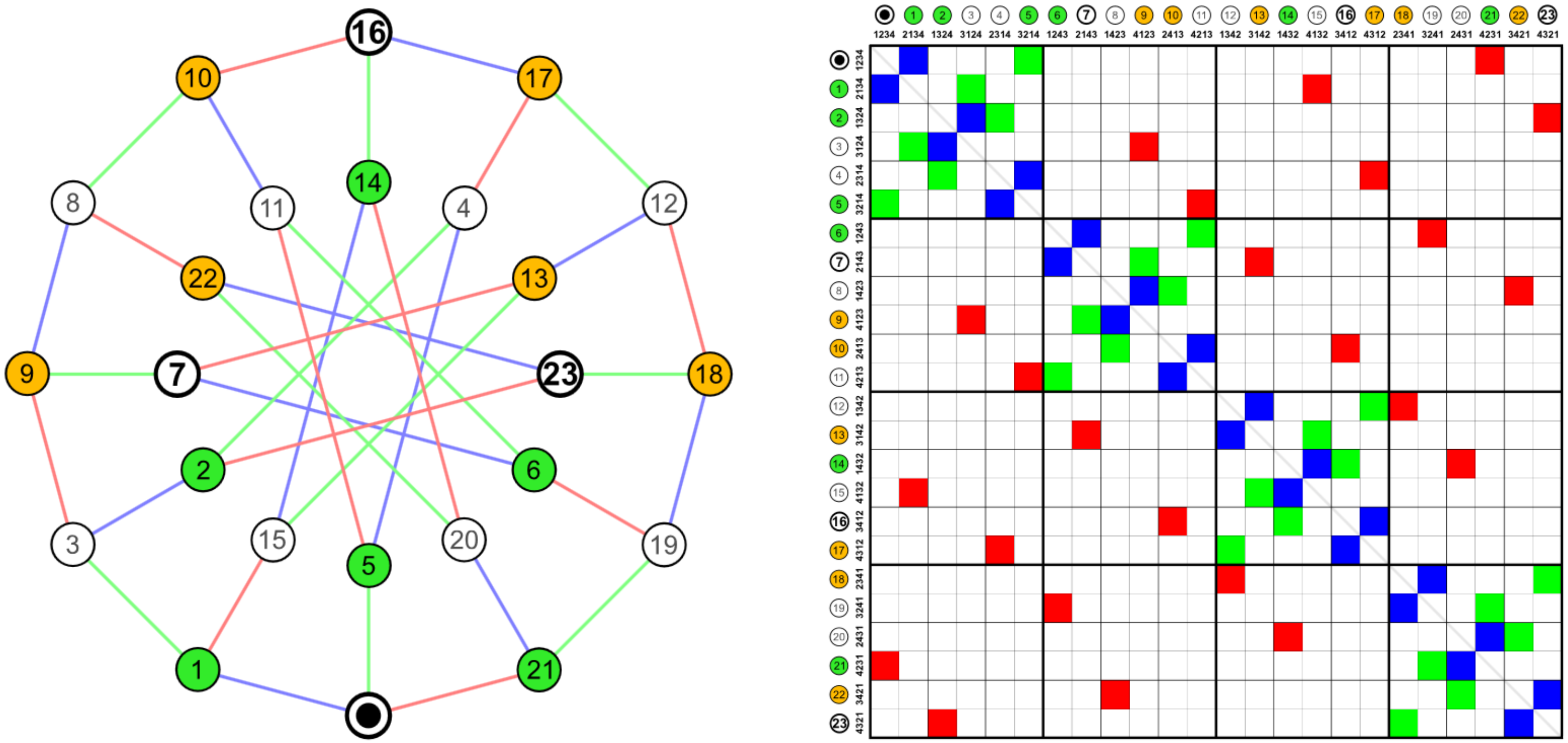
举例（邻接矩阵）



$$A(G) = \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\}$$

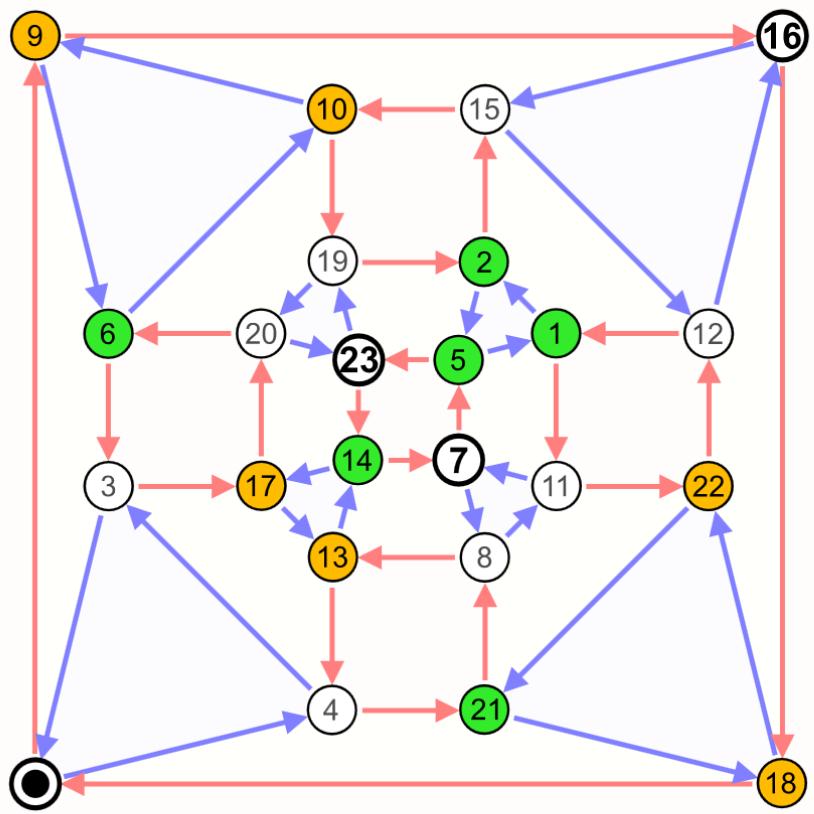
简单无向图的邻接矩阵是对称矩阵

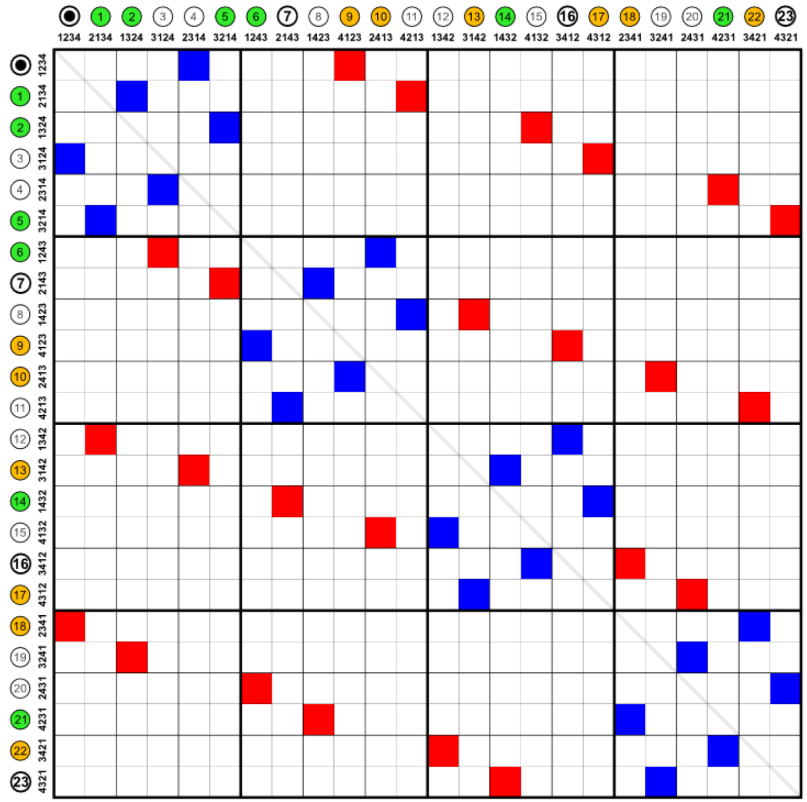
举例（邻接矩阵）



The Nauru graph, from Wikipedia

举例（邻接矩阵）



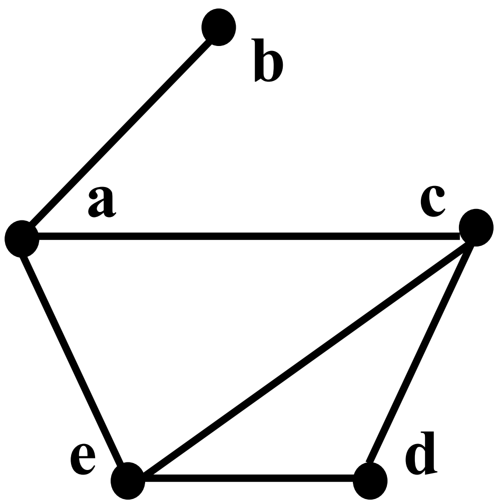


Directed Cayley graph of S_4, from Wikipedia

邻接表

φ是单射

- 若图G = (V, E, φ) 没有多重边，列出这个图的所有边。对每个顶点，列出与其邻接的顶点。

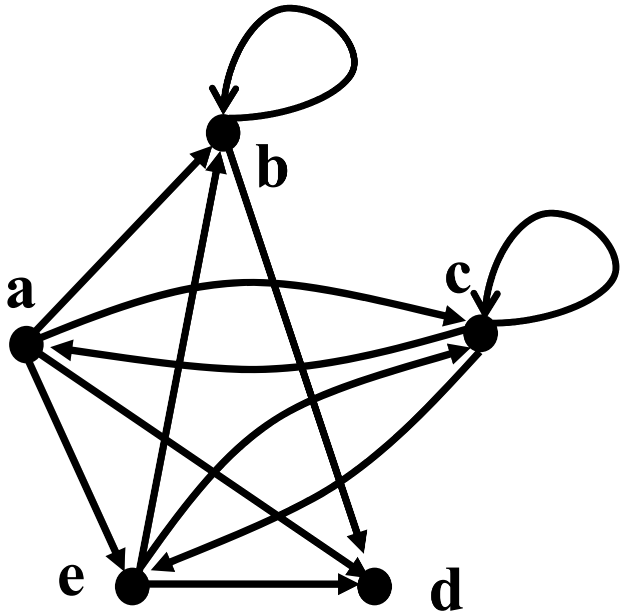


顶 点	相邻顶点
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d

邻接表（有向图）

φ是单射

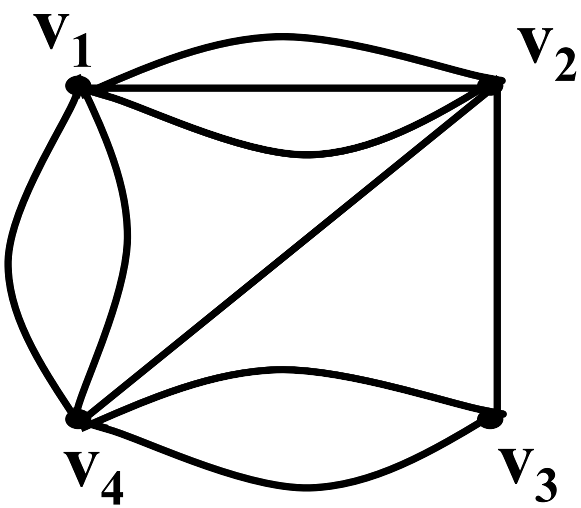
- 若图G = (V, E, φ) 没有多重边，列出这个图的所有边。对每个顶点，列出与其邻接的顶点。



顶 点	相邻顶点
a	b, c, d, e
b	b, d
c	a, c, e
d	
e	b, c, d

关于邻接矩阵

- 通常，邻接矩阵中的元素为0和1，称为布尔矩阵。
- 邻接矩阵也可表示包含多重边的图，此时的矩阵不是布尔矩阵。



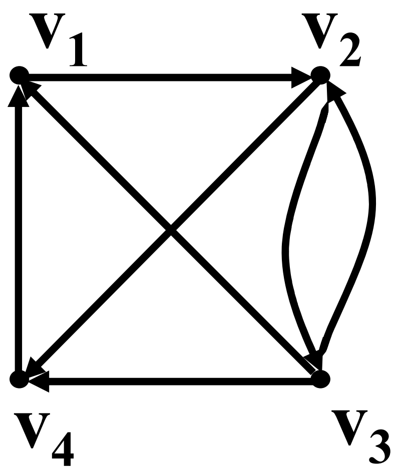
$$A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

关于邻接矩阵

- 当有向图中的有向边表示关系时，邻接矩阵就是关系矩阵。无向图的邻接矩阵是对称的。
- 图G的邻接矩阵中的元素的次序是无关紧要的，只要进行和行、列和列的交换，则可得到相同的矩阵。
  - 若有二个简单有向图，则可得到二个对应的邻接矩阵，若对某一矩阵进行行和行、列和列之间的交换后得到和另一矩阵相同的矩阵，则此二图同构。

邻接矩阵的运算

- 顶点的度
  - 行中1的个数就是行中相应结点的出度
  - 列中1的个数就是列中相应结点的入度



$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Deg^{+}(1)=1, Deg^{-}(1)=2$

$Deg^{+}(2)=2, Deg^{-}(2)=2$

$Deg^{+}(3)=3, Deg^{-}(3)=1$

$Deg^{+}(4)=1, Deg^{-}(4)=2$

邻接矩阵的运算

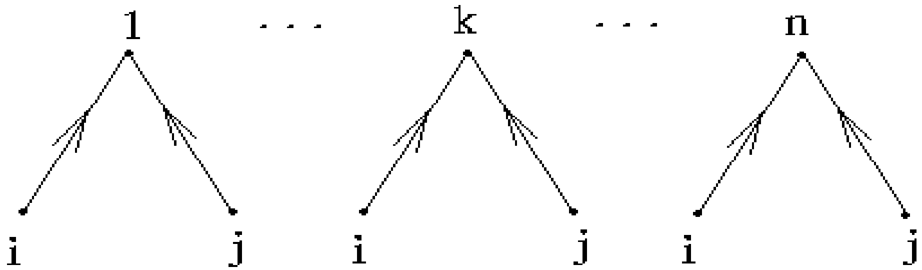
- 逆图（转置矩阵）
  - 设G的邻接矩阵为A，则G的逆图的邻接矩阵是A的转置矩阵，用A^T表示。

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\qquad A^T=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}$$

邻接矩阵的运算

$$A \times A^T = B = [b_{ij}]$$

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times a_{jk} = a_{i1} \times a_{j1} + a_{i2} \times a_{j2} + 6 \ + a_{in} \times a_{jn}$$

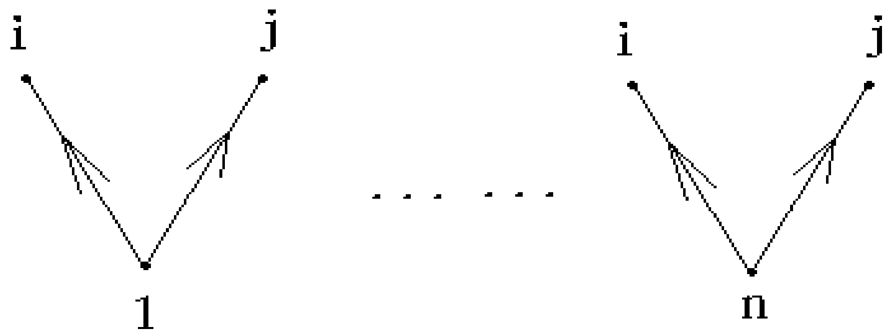


- b_{ij}表示结点i和结点j均有边指向的那些结点的个数；
- 若i＝j，则b_{ii}表示结点i的出度。

邻接矩阵的运算

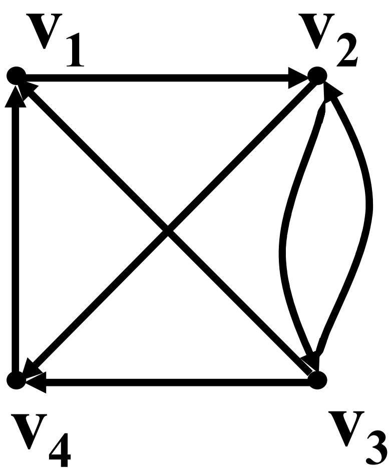
$$A^T \times A = C = [C_{ij}]$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \times a_{kj} = a_{1i} \times a_{1j} + a_{2i} \times a_{2j} + 6 \ + a_{ni} \times a_{nj}$$



- C_{ij}表示同时有边指向结点i和结点j的那些结点的个数；
- 若i＝j，则C_{ii}表示结点i的入度。

邻接矩阵的运算



$$A=\begin{Bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 0\end{Bmatrix}$$

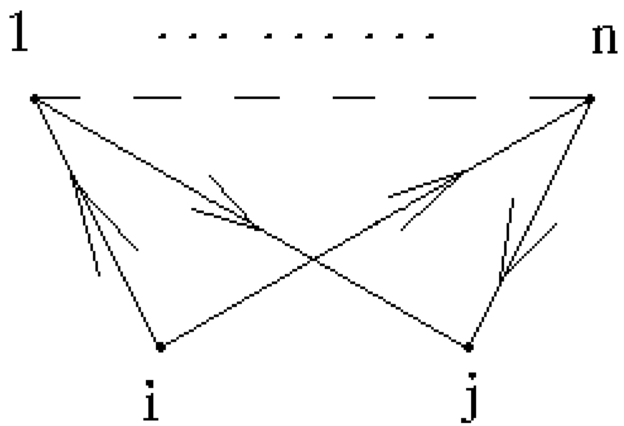
$$A\times A^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 2 & 1 & 0\\1 & 1 & 3 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^T\times A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 1\\1 & 2 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

邻接矩阵的运算

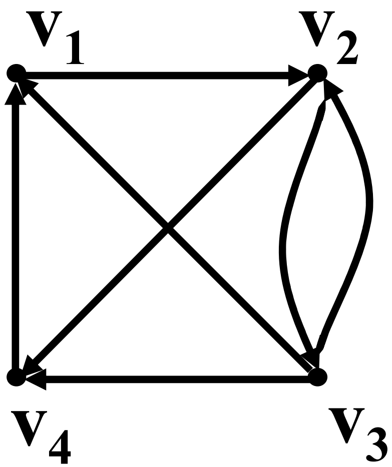
$$A \times A = A^2 = D = [d_{ij}]$$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times a_{kj} = a_{i1} \times a_{1j} + 6 \ + a_{in} \times a_{nj}$$



- 若$a_{ik} \times a_{kj} = 1$，则表示有i→k→j长度为2的有向边；
- d_{ij}表示i和j之间具有长度为2的通路个数。

邻接矩阵的运算



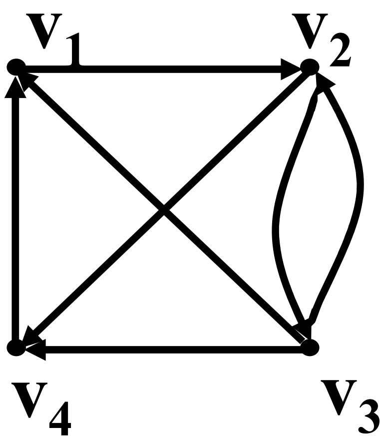
$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\2&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}2&1&0&1\\1&2&1&1\\2&2&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

- 从$v_2\rightarrow v_1$，有二条长度为2的通路；有一条长度为3的通路

邻接矩阵的运算



$$A=\begin{Bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{Bmatrix}$$

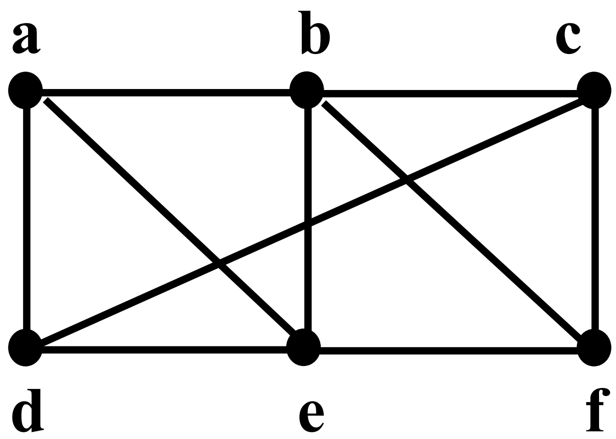
$$B_4=A^1+A^2+A^3+A^4=\begin{bmatrix}3&4&2&3\\5&5&4&6\\7&7&4&7\\3&2&1&2\end{bmatrix}$$

- 长度不大于k的通路个数

通路的定义

- 定义：图G中从v_0到v_n的长度为n的通路是G的n条边$e_1, \ldots, e_n$的序列，满足下列性质
  - 存在$v_i \in V$ $(0<i<n)$, 使得v_{i-1}和v_i是e_i的两个端点 $(1 \le i \le n)$。
- 相关点
  - 回路：起点与终点相同，长度大于0。
  - 不必区分多重边时，可以用相应顶点的序列表示通路。
  - 长度为0的通路由单个顶点组成。
  - 简单通路：边不重复，即，$\forall i, j, i \ne j \Rightarrow e_i \ne e_j$
  - 初级通路：点不重复，亦称为“路径”

通路（举例）

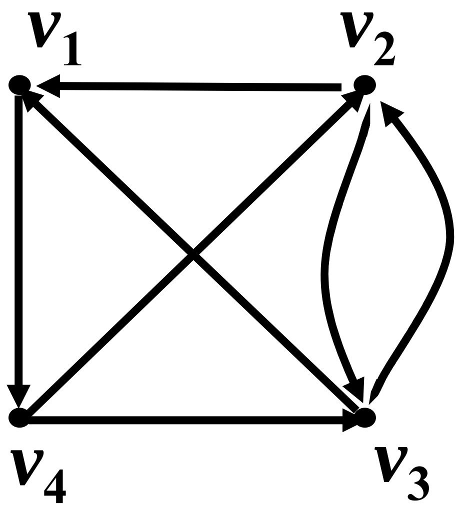


- 简单通路：a, d, c, f, e。 长度为4。
- 回路：b, c, f, e, b。长度为4。
- 通路：a, b, e, d, a, b。 长度为5。
- 不是通路：d, e, c, b。

通路的定义（有向图）

- 定义：有向图G中从v_0到v_n的长度为n的通路是G的n条边$e_1, \ldots, e_n$的序列，满足下列性质
  - 存在$v_i \in V$ ($0<i<n$), 使得v_{i-1}和v_i分别是e_i的起点和终点 ($1 \le i \le n$)。
- 相关点
  - 回路：起点与终点相同，长度大于0。
  - 不必区分多重边时，可以用相应顶点的序列表示通路。
  - 长度为0的通路由单个顶点组成。
  - 简单通路： 边不重复，即，$\forall i, j, i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j$

通路（举例）

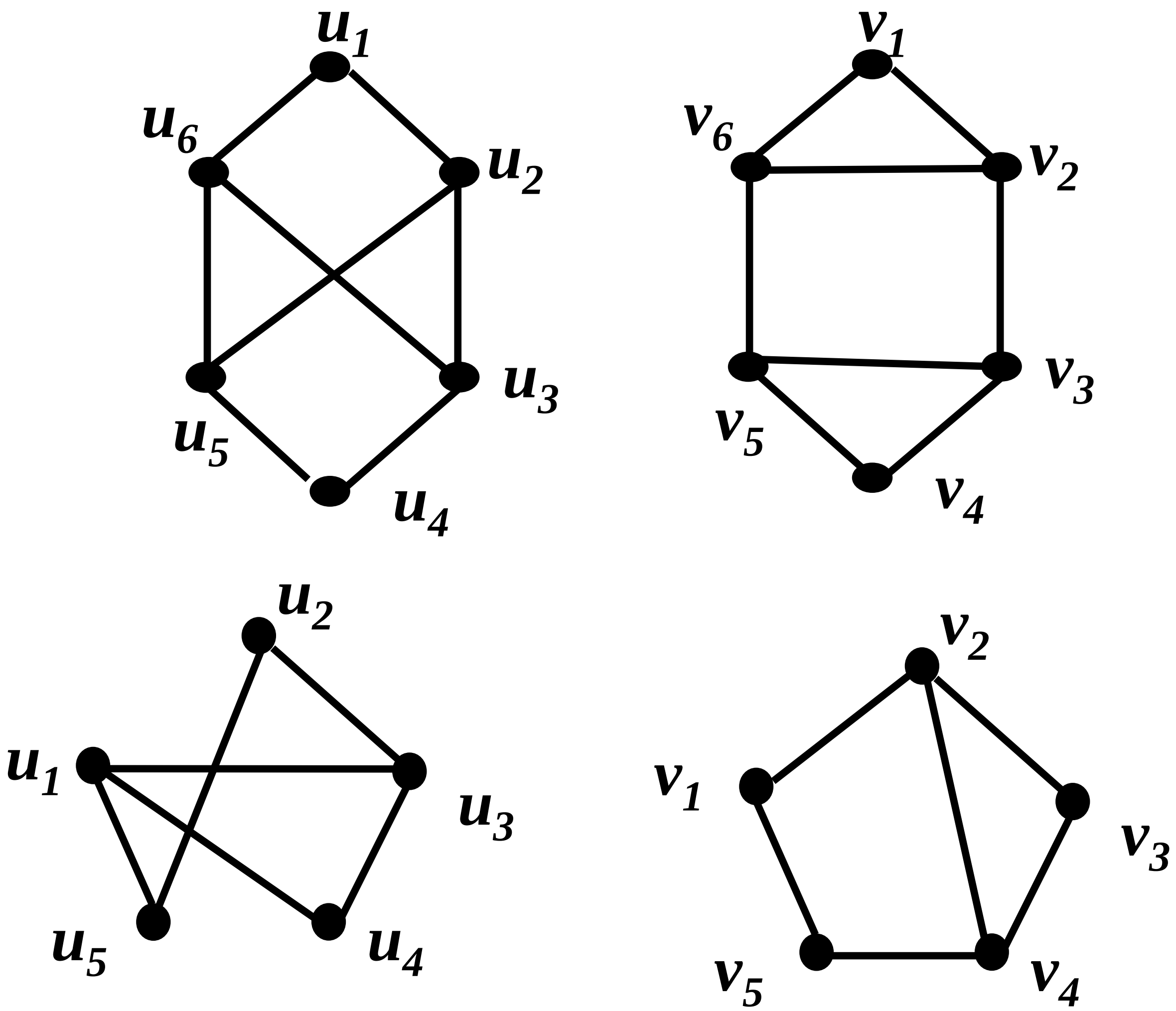


- 简单通路：v_1, v_4, v_2, v_3。 长度为3。
- 回路： v_2, v_1, v_4, v_2。长度为3。
- 通路： $v_2, v_3, v_1, v_4, v_2, v_3$ 。 长度为5。

通路与同构

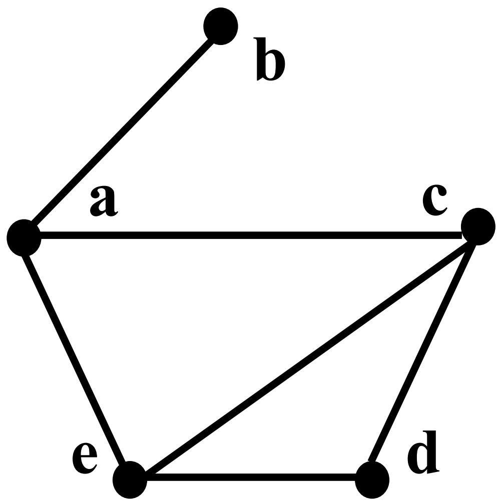
- 设图G的邻接矩阵为A
  - $(A^k)_{i,j}$: v_i到v_j的长度为k的通路个数
  - $(A^k)_{i,i}$: v_i到v_i的长度为k的回路个数
- 同构图的不变量：长度为k的回路的存在性。

通路与同构

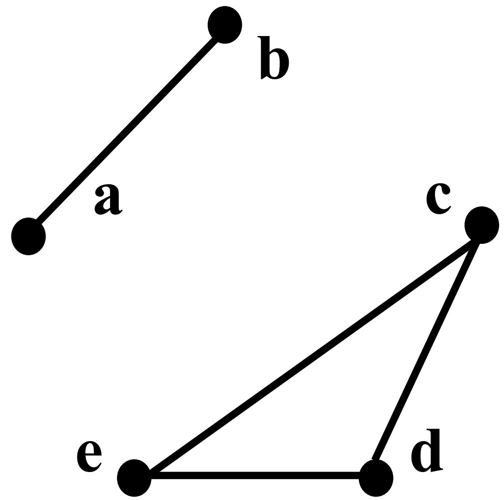


无向图的连通性

- 定义：无向图G称为是连通的，如果G中任意两个不同顶点之间都有通路。



G_1



G_2

连通分支

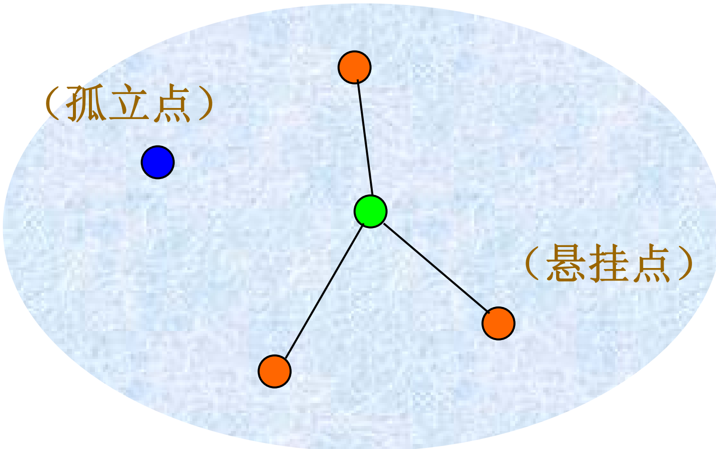
- 连通分支
  - 极大连通子图
- 每个无向图是若干个互不相交的连通分支的并。
  - “顶点之间存在通路”是一个等价关系，任一等价类上的导出子图即为一个连通分支。
- 若图G中存在从u到v的通路，则一定有从u到v的简单通路。
  - 证明：最短通路必是简单的，事实上，它没有重复顶点。

点的删除与连通分支数量的增减

- p(G-v)(其中v是G中任意一个顶点)的情况比较复杂

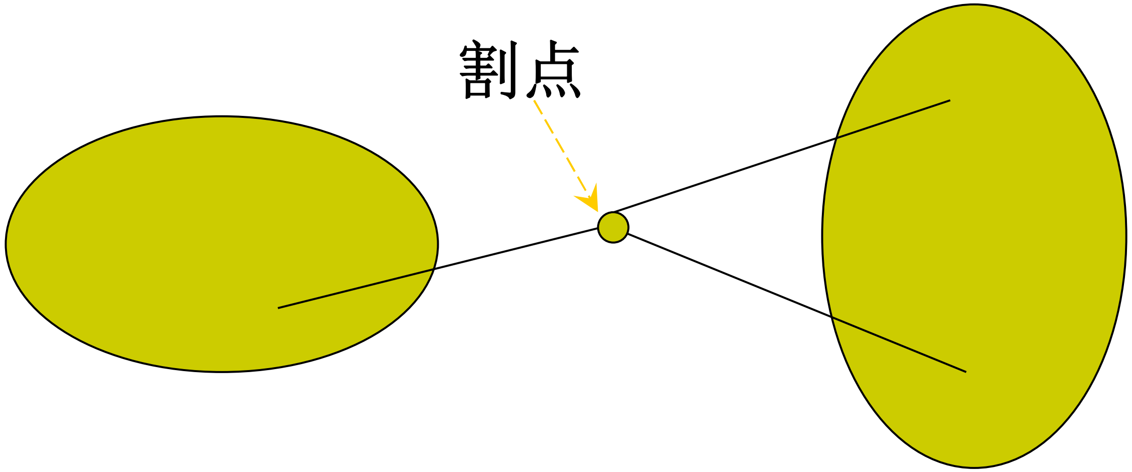
（注意：删除顶点意味着同时删除该点关联的边）

- 可能会……
  - 减少 (删除孤立点)
  - 不变 (例如：删除悬挂点)
  - 增加很多个 (例如：star)



割点（cut vertex, articulation vertex）

- 定义：**G是图, v∈V_G, 若p(G-v)>p(G), 则称v是割点**



(注意：只需考虑割点所在的连通分支，以下讨论不妨只考虑连通图)

关于割点的三个等价命题

- 以下三个命题等价：

(1) v是割点。

(2) 存在V-{v}的分划{V_1, V_2}, 使$\forall$u$\in V_1$, w$\in V_2$, uw-通路均包含v。

(3) 存在顶点u,w(u≠v, w≠v)，使得任意的uw-通路均包含v。

- 证明：

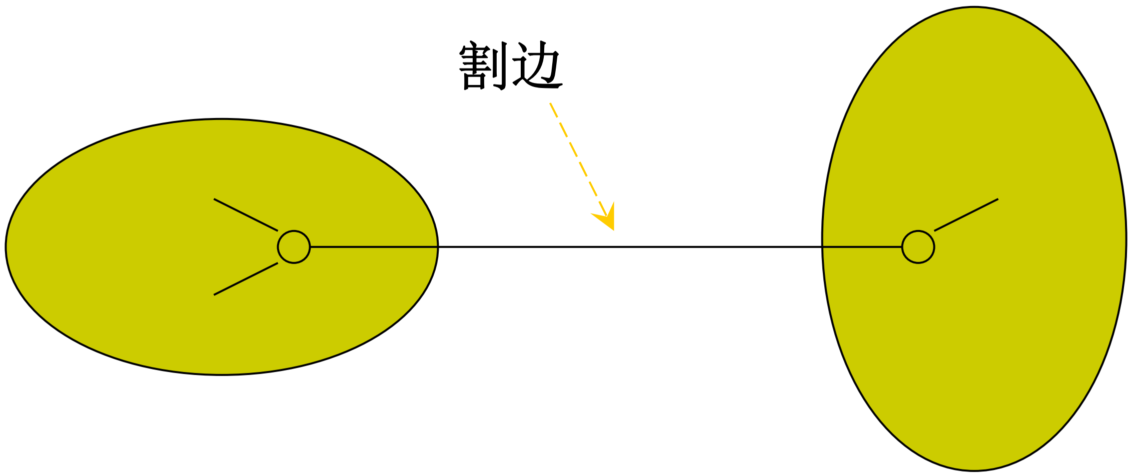
(1)⇒(2): ∵v是割点，G-v至少存在两个连通分支，设其中一个的顶点集是V_1。令V_2=V-($V_1\cup${v}), 则$\forall$u$\in V_1$, w$\in V_2$, u,w一定在G-v的不同的连通分支中。∴在G中，任何uw-通路必含v。

(2)⇒(3): 注意：(3)是(2)的特例。

(3)⇒(1): 显然，在G-v中已不可能还有uw-通路，∴G-v不连通，∴v是割点。

割边（桥；cut edge, bridge）

- 定义：设G是图，$e \in E_G$，若$p(G-e)>p(G)$，则称e是G中的*割边*。



(注意：只需考虑割边所在的连通分支，以下讨论不妨只考虑连通图)

有关割边的四个等价命题

- 以下四个命题等价：

  (1) e是割边。

  (2) e不在G的任一简单回路上。(注意：割点没有相应结论)

  (3) 存在V的分划$\{V_1, V_2\}$，使得$\forall u \in V_1$, $w \in V_2$, uw-通路均包含e。

  (4) 存在顶点u,w，使得任意的uw-通路均包含e。