第八章　谓词逻辑

8.1 谓词、个体和量词

- 为更进一步对命题间的内在联系进行研究，对它进一步作分解，分为谓词和个体。
- 可以独立存在的事物称为个体。
- 用于刻画个体的性质或个体之间的关系的词叫做谓词。
- 一般表示为F(a).

例：张三是人。若用F(a)表示，F表示“是人”，a 表示“张三”。

- 一元谓词刻划个体的性质，多元谓词刻划个体间的关系。
- 个体可能是变量。（例：x<0,命题中的个体为x)
- 一个谓词中个体变元是有一定变化范围的(个体域)。

- 表示抽象的、泛指的或在一定范围内变化的个体，称为个体变元。
- 表示具体的、特定的个体，称为个体常元。
- 个体变元的取值范围称为个体域。
- 如果规定个体域是万事万物无所不包的，则称其为全总个体域。
- 谓词中包含个体的数目称为元数。

例如：F(a)是一元谓词，F(a,b)是二元谓词。P.131例8-1、8-2.

- 命题函数中带有个体变元的谓词的值是不确定的。
- 量词反映个体域与谓词间的真假关系及数量关系。
- 当个体域中所有元素带入谓词后所得的值合取为真时有:$\forall x(F(x))=1$

  否则：$\forall x(F(x))=0$
- 如果存在一个或以上的个体使谓词为真，有： $\exists x(P(x))=1$

  否则：$\exists x(P(x))=0$

- 例：①所有的人都要死的。
  ②有的人活百岁以上。

- 解：①设F(x)表示x是要死的。则有 $\forall x F(x)$
  ②设P(x)表示x活到百岁以上，则有
  $\exists x P(x)$

- 但此时解指的是用人类集合作为个体域。通常研究的是全总个体域，即无所不包地将所有个体均纳入。此时则要用特定的谓词对个体所变化的范围进行特性刻划，又称为特性谓词。

- 对上例要进一步刻划。
- 解：①假设M(x)表示x是人，则有

$$\forall x(M(x) \to F(x))$$

（含义为对所有个体而言，如果他是人，则他是要死的。）

②假设M(x)表示x是人,则有

$$\exists x(M(x) \land P(x))$$

（含义为存在着个体，它是人并且活百岁以上）

使用特性谓词，量词要注意：

- ①对于受全称量词所束缚的个体变元，其特性谓词可加在全称量词辖域内，与原式构成一个蕴含式，特性谓词作前件，原式为后件。
- ②对受存在量词所束缚的个体变元， 其特性谓词可加在存在量词辖域内，与原式构成一个合取式。
- ③对于不受量词约束的个体变元，可在整个公式中作为合取项加入。
- ④若事先未给出个体域，则必须用全总个体域。

- ⑤个体域和谓词确定后，n元谓词至少需要n个量词。
- ⑥多个量词同时出现时，不能随意颠倒它们的顺序。

- 例：　（1）凡有理数均可表示成分数。

　　　（2）有的有理数是整数。

要求：①个体域为有理数集合

②个体域为实数集合

③个体域为全总个体域

- 解：对①不用引入特性谓词

(1)设F(x)可表示成分数，$\forall x F(x)$

(2)设P(x)为整数 $\exists x P(x)$

对②引入特性谓词R(x):x是有理数

(1)　$\forall x(R(x) \to F(x))$

(2)　$\exists x(R(x) \wedge P(x))$

③同②

- 例 (1)对所有x，均有 $x^2-1=(x+1)(x-1)$
  (2)存在x,使x+5=2

- 要求①个体域为自然数集
  ②个体域为实数集

- 解：对①不用引入特性谓词
  (1)设F(x)：$x^2-1=(x+1)(x-1)$
  $\forall x F(x)$ 为真命题
  (2)设P(x)：x+5=2
  $\exists x P(x)$ 为假命题

- 对②也不用引入特性谓词，但此时，(1)(2)均为真命题。

- 例:世界上有好人也有坏人。

解：设M(x)为：x是人。G(x)为x是好人，B(x)为x是坏人。

$$\exists x(M(x) \wedge G(x)) \wedge \exists x(M(x) \wedge B(x))$$

- 例：没有不犯错误的人。

解：设M(x):x是人，F(x):x犯错误。

$\neg \exists x(M(x) \wedge \neg F(x))$,可等值表示为$\forall x(M(x) \to F(x))$

- 在北京工作的人未必都是北京人。

解：设F(x)表示x在北京工作，G(x)：x是北京人，$\neg \forall x(F(x) \to G(x))$

可等值表示为 $\exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$

- 多元谓词的例子。
- 例：对于所有自然数x,y均有x+y≥x

解：令N(x)表示x是自然数。

则有: $\forall x \forall y(N(x) \wedge N(y) \rightarrow (x + y \geq x))$

- 例：每个自然数都有唯一的一个后继数。

解：令N(x)表示x是自然数，

B(x,y)表示y是x的后继数。

则有:

$$\forall x(N(x) \rightarrow (\exists y(N(y) \wedge B(x, y))))$$
$$\wedge \forall x \forall y \forall z(N(x) \wedge N(y) \wedge N(z) \rightarrow$$
$$(B(x, y) \wedge B(x, z) \rightarrow (y = z)))$$

- 例：一切人都不一样高。
- 解：用全总个体域

令M(x):x是人，H(x,y):x和y不是同一人，L(x,y):x与y一样高。

$$\forall x \forall y (M(x) \wedge M(y) \wedge H(x,y) \rightarrow \neg L(x,y))$$

8.2 谓词逻辑公式及其基本永真公式

- 命题，谓词，量词，联结词等按命题逻辑及谓词逻辑的要求构成谓词逻辑公式（抽象化）。
- 谓词演算中有称为原子公式的一些最基本的公式可用。
- 公式中各符号的优先级：

  ① $\forall, \exists$　　②$\neg$　　③$\wedge$，$\vee$

  ④$\rightarrow$　　⑤$\leftrightarrow$
- 对谓词逻辑公式中出现的命题变元与自由变元赋予确定的值后，公式的值也相应地确定。（非0即1）

- 命题逻辑公式是谓词逻辑公式的特例。
- 命题逻辑中的永真公式也是谓词逻辑中的永真公式。
- P.134-136引入量词后的公式，(1)-(22)
- 例：证(4)

（4） 中的Q或为0，或为1，当它为1时，等式两边均为$\forall x(P(x))$

当它为0时，等式两边均为0

- 例：证（10）

$$Q \to \exists x(P(x)) = \neg Q \vee \exists x(P(x)) = \exists x(P(x)) \vee \neg Q$$

$$= \exists x(P(x) \vee \neg Q) = \exists x(\neg Q \vee P(x)) = \exists x(Q \to P(x))$$

- 例：“所有运动员都参加比赛并且都取得了名次。”

“所有运动员都参加了比赛并且所有运动员都取得了名次。”

令P(x):x参加比赛，Q(x):x取得了名次

$$\forall x(P(x)\wedge Q(x)) = \forall x(P(x)) \wedge \forall x(Q(x))$$

前句　　　　　　　　　　　后句

前后句意义相同。

- $\forall x(P(x)) \vee \forall x(Q(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$ (13) 逆向未必成立。
- 例：“今天所有人都吃肉或者今天所有人都吃鱼”可以推出“今天所有人都吃肉或吃鱼”

  逆向不一定，可能有部分人吃肉，另一部分人吃鱼。
- （14）逆向也不一定成立。
- 例：“有人既喜欢打球又喜欢跑步。”→“有人喜欢打球并且有人喜欢跑步。”逆向则可能有人只喜欢打球，而不喜欢跑步，而另一些人则只喜欢跑步，而不喜欢打球。

- 对（22） $\forall x(P(x)) \Rightarrow \exists x(P(x))$
- 例：所有猫都会捉老鼠→有些猫会捉老鼠

反之不一定成立。

§3 前束范式

- 前束范式：将一个公式的所有量词均非否定的放到最前面，其辖域延伸到公式末，公式中无联结词→及↔
- 例：$\exists x \forall y \exists z (P(x) \wedge Q(y) \vee R(x,z))$
- 斯科林范式：将前束范式中的所有存在量词化归到全称量词之前。
- 例： $\exists x \exists z \forall y (P(x,y) \vee Q(z,y) \wedge R(z))$

8.4谓词演算的推理理论

- 谓词演算的推理方法，可以看成是命题演算推理方法的扩展（要注意的是某些前提和结论此时可能会受到量词的限制）。
- 1.全称指定规则US。

如果对个体域中所有个体x，P(x) 成立，则对个体域中某个任意个体P(c)一定成立，可表示为：

$$\forall x P(x) \Rightarrow P(c)$$

- 2.全称推广规则UG。

如果能证明对个体域中所有个体x，断言P(x) 都成立，则可得到结论 $\forall x P(x)$ 成立，可表示为：

$$P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$$

- 3.存在指定规则ES

  如果对于个体域中某些个体P(x)成立，则必有某个特定个体c,使P(c)成立，可表示为：

  $$\exists x P(x) \Rightarrow P(c)$$

- 4.存在推广规则EG

  如果对个体域中某个特定个体c,有P(c)成立，则在个体域中，必存在x,使P(x)成立，可表示为：

  $$P(c) \Rightarrow \exists x P(x)$$

- P.138例8-14

- 习题五
- 第七章：
  - 6、8、11、15、26、38
- 第八章：
  - 1、3、10、15、18、23、28.