2020春季学期“数理逻辑”课程作业一参考答案

1. 证明$|PROP| = \aleph_0$ (即证明所有命题的集合和自然数集合等势).

证：设集合$P_i(i \in N)$表示包含i个逻辑连接词的所有命题的集合.

对集合P_i的i做数学归纳：

Base(归纳前提):

$i = 0$时, $\because P_0 = PS$, $\therefore |P_0| = \aleph_0$.

I.H(归纳假设):

设当$i < n$时, 均有$|P_i| = \aleph_0$

I.Step(归纳步骤):

当$i = n$时,

设$P_*(* \in \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\})$表示包含有$n$个逻辑连接词，且最外层的逻辑连接词为$*$的所有命题的集合.

Case 1: $* = \neg$

$P_\neg = \{\neg A | A \in P_{n-1}\}$

故$|P_\neg| = |P_{n-1}| = \aleph_0$.

Case 2: $* = \wedge$

$P_\wedge = \{A \wedge B | A \in P_1 and B \in P_{n-2}\} \cup \{A \wedge B | A \in P_2 and B \in P_{n-3}\} \cup ... \cup \{A \wedge B | A \in P_{n-2} and B \in P_{n-1}\}$ $(\star)$

对于式$\star$中等号右侧任一集合$\{A \wedge B | A \in P_k and B \in P_{n-1-k}\}$ $(1 \leq k \leq n-2)$, 集合的势为$C^1_{|P_k|} \times C^1_{|P_{n-1-k}|}$.

由I.H.可知, $|P_k| = |P_{n-1-k}| = \aleph_0$.

$\therefore$ 式$\star$中等号右侧任一集合的势为$C^1_{\aleph_0} \times C^1_{\aleph_0} = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$

$\therefore |P_\wedge| \leq \sum_{k=1}^{n-2} \aleph_0 = \aleph_0$.

又$\because |P_\wedge| \geq \aleph_0$易见,

$\therefore |P_\wedge| = \aleph_0$.

Case 3与4同Case 2理可证, 即$|P_\vee| = |P_\rightarrow| = \aleph_0$.

$\because P_n = \bigcup P_*$, 且$P_{*1} \cap P_{*2} = \emptyset$

$\therefore |P_n| = \sum P_* = \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$

故对于任意$i \in N$, 均有$|P_i| = \aleph_0$.

又$\because PROP = \bigcup\limits_{i \in N} P_i$, 且任意两个$P_i$集合交集为$\emptyset$,

$\therefore |PROP| = \sum\limits_{i \in N} |P_i| = \sum\limits_{i \in N} \aleph_0 = \aleph_0.$

故原命题得证 $Q.E.D.$

2. 证明以下命题永真:

(a) $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$

证： 构造真值表如下所示：

Table 1: 2-(a)对应真值表)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	原命题
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	T	T

故原命题永真易见 $Q.E.D.$

(b) $(\neg A \wedge \neg B) \to \neg(A \vee B)$

证： 构造真值表如下所示：

Table 2: 2-(b)对应真值表)

A	B	$\neg A \wedge \neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)B$	原命题
T	T	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	F	T	T

故原命题永真易见 $Q.E.D.$

3. 判断以下各对命题是否等价:

(a) $(((A \to B) \to B) \to B)$ 和$(A \to B)$

证： 构造真值表如下所示：

Table 3: 3-(a)对应真值表)

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \to B$	$((A \to B) \to B) \to B)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	F	T	F	T

故原两命题等价易见 $Q.E.D.$

(b) $(A \land B) \lor C$和$(A \to \neg B) \to C$

证： 构造真值表如下所示：

Table 4: 2-(B)对应真值表)

A	B	C	$A \land B$	$(A \land B) \lor C$	$A \to \neg B$	$(A \to \neg B) \to C$
T	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	F	T	F	T
F	F	F	F	F	F	F

故原两命题等价易见 $Q.E.D.$

4. 证明命题逻辑可以只用命题符P_i, 逻辑连接符¬和∨以及辅助符(和)进行定义(即证明逻辑连接符∧和→可以基于¬和∨进行定义)。

证： 要证原命题，只需证明对于任何命题A和B, 可以基于逻辑连接符¬和∨定义$A \land B$和$A \to B$.

Case 1: $A \land B$

设命题$C = \neg\neg A \lor \neg B$

构造真值表如下：

易见$A \land B$和C等价，故可以将$A \land B$定义为$\neg\neg A \lor \neg B$.

Case 2: $A \to B$

设命题$C = \neg A \lor B$

Table 5: 4-(a)对应真值表)

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	C
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	F	T	T	F
F	T	F	T	F	T	F
F	F	F	T	T	T	F

构造真值表如下：

Table 6: 4-(b)对应真值表)

A	B	$A \to B$	$\neg A$	C
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

易见$A \to B$和C等价，故可以将$A \to B$定义为$\neg A \vee B$.

故原命题得证　　　　　　$Q.E.D.$

5. 求下述各命题公式的析合范式及合析范式:

(a) $(\neg((P \to \neg Q) \to R))$

解：

构造真值表如下：

Table 7: 5-(a)对应真值表)

P	Q	R	$P \to \neg Q$	$(P \to \neg Q) \to R$	$\neg((P \to \neg Q) \to R)$
T	T	T	F	T	F
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	F
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	F	T

故原命题的析合范式为$(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$.

原命题的合析范式为$(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)(\wedge\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)$.

(b) $\neg(\neg(\neg\neg R\wedge Q)\wedge P)$

解：

构造真值表如下：

Table 8: 5-(b)对应真值表)

P	Q	R	$\neg\neg R$	$\neg\neg R\wedge Q$	$\neg(\neg\neg R\wedge Q)$	$\neg(\neg\neg R\wedge Q)\wedge P$	$\neg(\neg(\neg\neg R\wedge Q)\wedge P)$
T	T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	F	F	T	T	F
T	F	T	T	F	T	T	F
T	F	F	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	F	F	T
F	T	F	F	F	T	F	T
F	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	F	F	T	F	T

故原命题的析合范式为$(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$.

原命题的合析范式为$(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)$.