

2020春季学期“数理逻辑”课程作业六

1. 设 Φ 与 Ψ 为一阶语言的公式集合, 且 $Con(\Phi)$ 与 $Con(\Psi)$, 证明:
 - (1) $Con(\Phi \cap \Psi)$;
 - (2) 举反例说明 $Con(\Phi \cup \Psi)$ 未必成立.
2. 若 Γ 为一阶语言的有穷公式集, A, B 为公式, c 为 A, B 的新常元, 证明若 $\Gamma, A[c/x] \models B$, 则 $\Gamma, \exists x A \models B$.
3. 求公式 $\forall x \exists y \forall z \exists u P(x, y, z, u)$ 的Skolem范式.
4. A 为前束范式, 证明若 $FV(A) = \emptyset$, 则 $FV(A^S) = \emptyset$.
5. 证明对于任何 n , $|H_n| < \aleph_0$, 且 $|H_A| < \aleph_0$.
- 6★. 一阶语言 \mathcal{L} 的定理 T : 对于给定的一阶语言 \mathcal{L} , 若 $\mathcal{L} \models \phi$ 表示在该语言中公式 ϕ 永真, 则一阶语言 \mathcal{L} 的定理 $T(\mathcal{L})$ 指公式集合 $\{\varphi | \mathcal{L} \models \varphi\}$, 其中 \mathcal{L} 称为 T 的一个模型.

试证明Upwards Löwenheim - Skolem theorem: 如果定理 T 存在一个无限模型, 则 T 存在任意大小的模型.