Corso di

ROBOTICA

Prof.ssa Giuseppina Gini

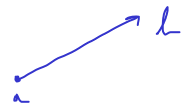
Esercitazioni

Anno 2008/2009

Coordinate Omogenee

Nozioni di base Vettori: Consideriamo uno spazio Euclideo a 3 dimensioni, cioè lo spazio delle terne di numeri $\Re^3$, consideriamo poi 2 punti appartenenti a questo spazio:

$$a = (a_1, a_2, a_3)$$
$$b = (b_1, b_2, b_3)$$



Possiamo quindi definire la **distanza** tra questi due punti come:

$$\|a - b\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Definiamo ora **vettore applicato** la terna che si ottiene come:

$$\vec{v} = a - b = ((a_1 - b_1), (a_2 - b_2), (a_3 - b_3))$$

Notazione: rappresentiamo il vettore come vettore colonna

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{bmatrix}$$

Vettore Libero: terna di numeri reali $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

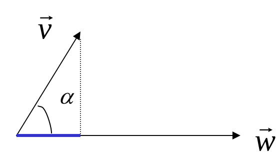
Dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ appartenenti a $\Re^3$ possiamo definire:

Il **Prodotto Scalare** come:

$$(\vec{v})^T \times \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{(\vec{v})^T \times \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$$

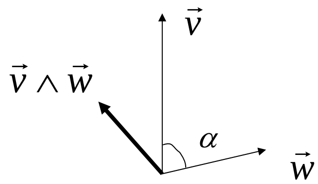
se $\|\vec{w}\| = 1$



Definiamo **prodotto vettoriale** tra i due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$

il vettore: $\Re^3 \times \Re^3 \rightarrow \Re^3$

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix} \Longleftarrow \begin{bmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$



$$\|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot sen(\alpha)$$

Matrici: Una matrice è una tabella m x n di numeri disposti su

m righe ed **n** colonne.

Data la matrice (m x n)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definiamo **complemento algebrico** lo scalare:

$$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} (\det A_{ij}).$$

Dove $\det A_{ij}$ è il determinante della sottomatrice ottenuta da A cancellando la riga i-esima e la colonna j-esima.

Determinante di una matrice (quadrata nxn)

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(i+j)} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \bar{A}_{ij} a_{ij} \quad (\text{valida } \forall i = 1,..,n)$$

$$\det(a) = a \quad (\text{dove } a \text{ è uno scalare})$$

Es:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}$$

Matrice **Trasposta**

Si ottiene scambiando ordinatamente le righe con le colonne della matrice A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Matrice **Identità:** tutti i sui elementi sono nulli tranne quelli sulla diagonale, che invece sono unitari

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inversa: Considerata una matrice **A** nxn (quadrata), ammette l'inversa se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

$$|A| \neq 0$$

Complemento algebrico

$$A \cdot A^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pseudoinversa: Se la matrice A non è quadrata (mxn) con m>n è possibile calcolare la sua pseudo-inversa se esiste l'inversa della matrice quadrata A^TA:

n x m X m x n

$$\mathbf{A^+ = \underbrace{(A^TA)^{-1}}_{n \times n\ \times\ n \times m} A^T}$$

Attraverso la pseudoinversa possiamo risolvere il problema del sistema di equazioni lineari sovradeterminato:

$$Az=c \Longrightarrow z=A^+c$$

La soluzione è approssimata e minimizza:

$$\|Az - c\|$$

Coordinate omogenee:

Consideriamo un punto *P* rispetto ad una terna di assi cartesiani (ortogonali).

$$P = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Chiamiamo **coordinate omogenee** di *P*, una quaterna di numeri x,y,z,w tali che:

$$X = \frac{x}{w}; \qquad Y = \frac{y}{w}; \qquad Z = \frac{z}{w} \qquad\qquad p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Proprietà:

1) Le coordinate omogenee di un punto sono definite a meno di una costante di proporzionalità.

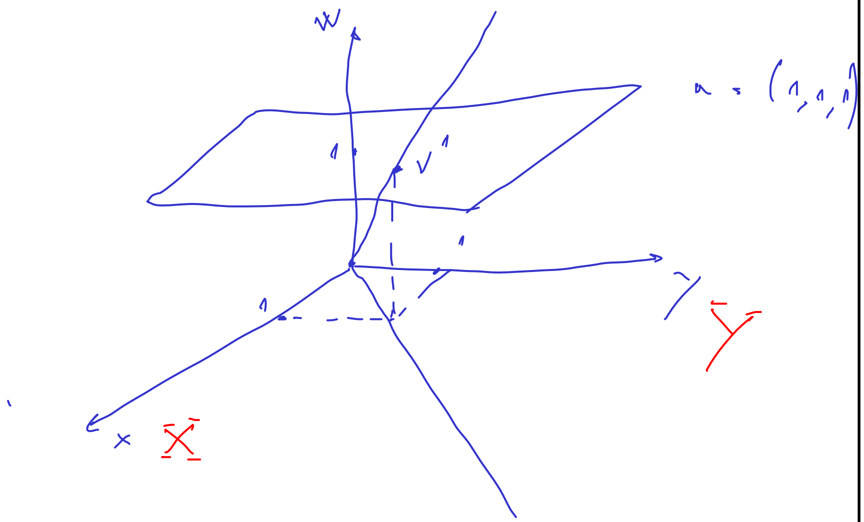
I punti P^1=(x,y,z,w) e Q^1=(kx,ky,kz,kw) coincidono in coordinate cartesiane.

$$P^1 \Rightarrow \qquad P = (\frac{x}{w} = X; \frac{y}{w} = Y; \frac{z}{w} = Z)$$

$$Q^1 \Rightarrow \qquad Q = (\frac{kx}{kw} = X; \frac{ky}{kw} = Y; \frac{kz}{kw} = Z)$$

2) I punti con *w*=0 sono detti **punti impropri** , questi punti rappresentano una direzione

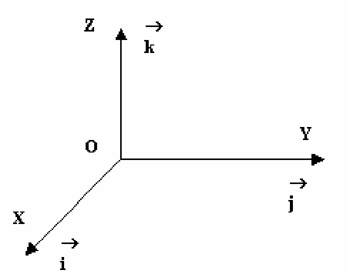
Per esempio: il punto in coordinate omogenee **(R^2)** $v^1=(1,1,0)$



Il parametro *w* rappresenta un fattore di scala in robotica si utilizza $w=1$ o $w=0$.

Possiamo definire i versori dei tre assi in questo modo:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\vec{i} \qquad \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\vec{j} \qquad \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\vec{k}$$



L'origine O sarà invece espressa da:

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\vec{O}$$

I **vantaggi** delle rappresentazione di un punto in coordinate omogenee sono:

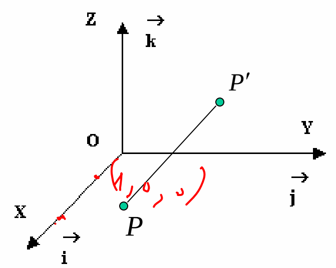
•Consentono di rappresentare **punti all'infinito** (con w=0).

(direzioni)

•Consentono di esprimere tutte le trasformazioni di coordinate **in forma matriciale (**Es: rototraslazioni)

Matrice di **Traslazione:** permette di traslare un punto nello spazio.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{Trasl(a,b,c)} \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \\ 1 \end{bmatrix}$$



Possiamo ora esprimere l'operatore traslazione attraverso una matrice *H*

$$H \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si può dimostrare che la matrice H :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Trasl(a,b,c)$$

Infatti:

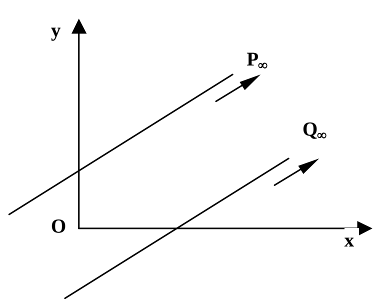
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \\ 1 \end{bmatrix}$$

Versori assi

Origine Traslata

Oss: le direzioni, rappresentate da punti impropri, rimangono inalterate dall'operatore traslazione.

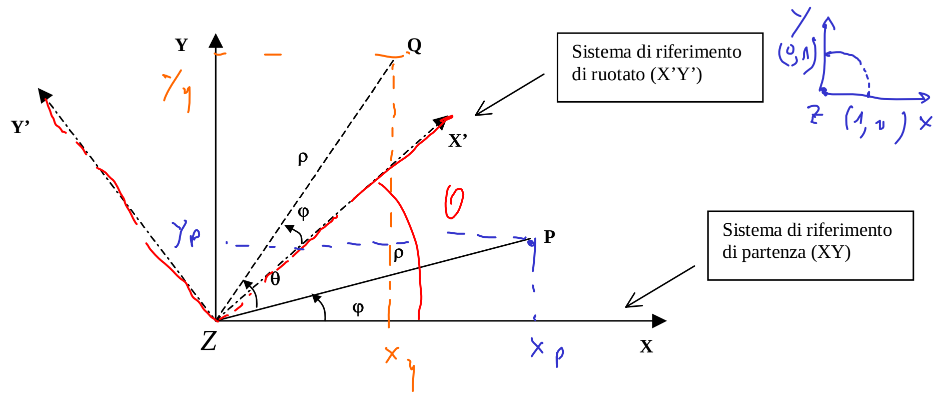
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$$



$P_\infty \equiv Q_\infty$ Una direzione è invariante alla traslazione

Matrice di Rotazione: Permette di ruotare un punto rispetto un asse.

Consideriamo il piano e un punto P in coordinate polari $P(\rho,\varphi)$:



$P=(x_p,y_p)$ $Q=(x_q,y_q)$

$x_p=\rho\cos(\varphi)$ $y_p=\rho\sin(\varphi)$ $\Rightarrow$ $x_q=\rho\cos(\theta+\varphi)$ $y_q=\rho\sin(\theta+\varphi)$

Applicando le formule trigonometriche di somma e sostituendo:

$x_q=\rho\cos(\theta+\varphi)$ $y_q=\rho\sin(\theta+\varphi)$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$x_q = \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) - \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi) = x_p\cos(\theta) - y_p\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$y_q = \rho\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi) + \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi) = y_p\cos(\theta) + x_p\,\mathrm{sen}(\theta)$$

Possiamo quindi esprimere

$$\begin{bmatrix} x_p\cos(\theta) - y_p\,sen(\theta) \\ x_p\,sen(\theta) + y_p\cos(\theta) \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi in generale:

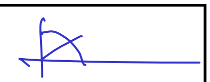
$$\vec{v} = H \cdot \vec{u}$$

$$Rot(z,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Rot(x,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

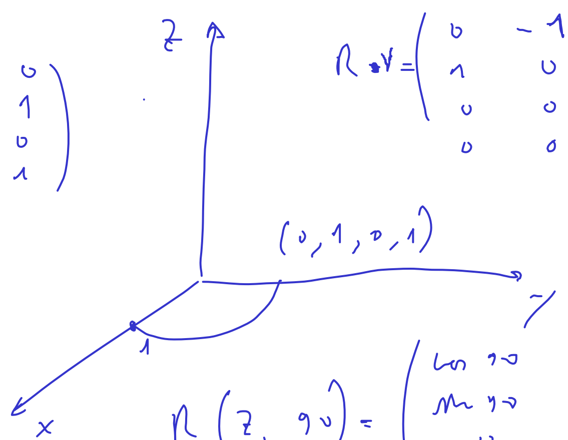
$$Rot(y,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ruotare di 90° rispetto l'asse Z il punto $(1\ 0\ 0\ 1)^T$:



$$R \cdot V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$R(z, 90) = \begin{pmatrix} \cos 90 & -\mathrm{sen}\ 90 & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}\ 90 & \cos 90 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservazioni:

1. Le colonne della matrice di rotazione ed in generale di *H* corrispondono ai trasformati dei versori degli assi di partenza, esprimono quindi delle direzioni. L'ultima colonna è il trasformato dell'origine (che rimane quindi invariata).

$$Rot(z,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Possiamo esprimere:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} + 1\vec{o}$$

Consideriamo: $\vec{v} = H \cdot \vec{u}$

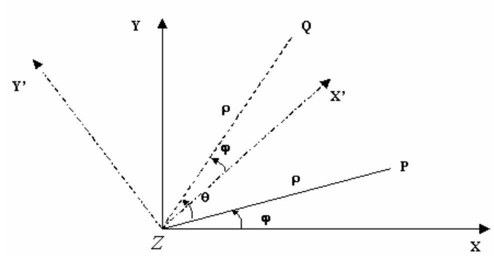
$$\vec{v} = Hx\vec{i} + Hy\vec{j} + Hz\vec{k} + H1\vec{o} = x(H\vec{i}) + y(H\vec{j}) + z(H\vec{k}) + 1(H\vec{o})$$

Poniamo:

$$\vec{i}^{\,1} = H\vec{i}\,; \quad \vec{j}^{\,1} = H\vec{j}; \quad \vec{k}^{\,1} = H\vec{k}; \quad \vec{o}^{\,1} = H\vec{o}$$

Questi sono i versori del nuovo sistema di riferimento ruotato rispetto il primo.

$$\vec{v} = x\vec{i}^{\,1} + y\vec{j}^{\,1} + z\vec{k}^{\,1} + 1\vec{o}^{\,1}$$



Matrici di **Rototraslazione**: permettono di effettuare contemporaneamente una rotazione ed un traslazione del punto. Rappresenta il più generale spostamento rigido.

$$H = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le prime tre colonne rappresentano i versori degli assi X',Y' e Z' mentre l'ultima rappresenta l'origine del sistema di riferimento rototraslato.

Oss: questo operatore mantiene invariate le lunghezze e le forme degli oggetti.

Il sistema di riferimento trasformato dovrà quindi avere i versori ancora ortogonali fra loro e di lunghezza unitaria.

Imponiamo la condizione di ortogonalità:

$$\vec{i}^{\,1} \perp \vec{j}^{\,1} \quad \Rightarrow \quad (\vec{i}^{\,1})^T \times \vec{j}^{\,1} = 0$$
$$\vec{j}^{\,1} \perp \vec{k}^{\,1} \quad \Rightarrow \quad (\vec{j}^{\,1})^T \times \vec{k}^{\,1} = 0$$
$$\vec{k}^{\,1} \perp \vec{i}^{\,1} \quad \Rightarrow \quad (\vec{k}^{\,1})^T \times \vec{i}^{\,1} = 0$$

Imponiamo che i versori siano unitari:

$$(\vec{i}^{\,1})^T \times \vec{i}^{\,1} = 1$$
$$(\vec{j}^{\,1})^T \times \vec{j}^{\,1} = 1$$
$$(\vec{k}^{\,1})^T \times \vec{k}^{\,1} = 1$$

I nove parametri **n**,**o** e **a** devono rispettare i 6 vincoli visti sopra. Essi esprimono quindi i 3 gradi di libertà rotazionali.

$$H = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I tre parametri **p**, fra loro indipendenti, caratterizzano tre dei **6** gradi di libertà della rototraslazione.

Matrice di **Rototraslazione Inversa**

Deve essere verificata l'equazione $H^{-1}H=I$:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\vec{n}\times\vec{p} \\ o_x & o_y & o_z & -\vec{o}\times\vec{p} \\ a_x & a_y & a_z & -\vec{a}\times\vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infatti facendo il prodotto tra le due matrici:

$$H^{-1}H = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\vec{n}\times\vec{p} \\ o_x & o_y & o_z & -\vec{o}\times\vec{p} \\ a_x & a_y & a_z & -\vec{a}\times\vec{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

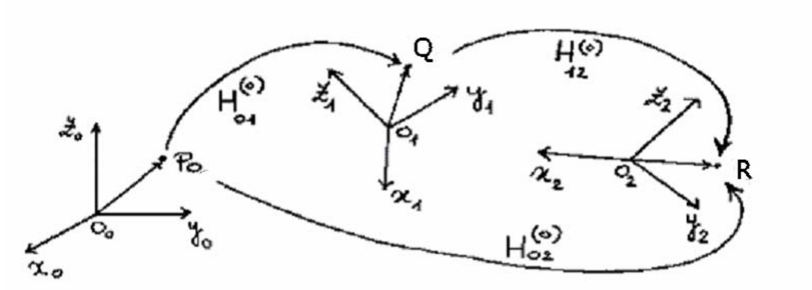
Come si può notare per la sottomatrice di rotazione R vale che:

$$R^{-1} = R^T$$

$$R = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$

Questo **non** è vero invece per la matrice di rototraslazione

$$H^{-1} \neq H^T$$



Applichiamo a P_0 una rototraslazione $H^0{}_{01}$ ed al punto che otterremo (Q) una rototraslazione $H^0{}_{12.}$

Notiamo che P_0 ha le stesse coordinate omogenee del punto Q_1 (riferito a sdr1) e del punto R_2 (riferito a sdr2), inoltre per ogni sdr vale che :

$$\vec{i}_0^{\,(0)} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \vec{i}_1^{\,(1)} = \vec{i}_2^{\,(2)}; \qquad \vec{j}_0^{\,(0)} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \vec{j}_1^{\,(1)} = \vec{j}_2^{\,(2)}; \qquad \vec{k}_0^{\,(0)} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = \vec{k}_1^{\,(1)} = \vec{k}_2^{\,(2)}$$

Vogliamo trovare la trasformazione composta $H^0{}_{02}$ tale che :

$$R_0 = H_{02}^0 \cdot P_0$$

Partendo dall'ultima trasformazione consideriamo il versore dell'asse x_1:

$$\vec{i}_2^{\,(0)} = H_{12}{}^{(0)} \cdot \vec{i}_1^{\,(0)}$$

$$\vec{i}_1^{\,(0)} = H_{01}{}^{(0)} \cdot \vec{i}_0^{\,(0)}$$

Quindi:

$$\vec{i}_2^{\,(0)} = H_{12}{}^{(0)} \cdot H_{01}{}^{(0)} \cdot \vec{i}_0^{\,(0)} \longrightarrow \boxed{H_{02}{}^{(0)} = H_{12}{}^{(0)} \cdot H_{01}{}^{(0)}}$$

Oss: Lo stesso risultato si ottiene applicando la metodologia vista ai versori degli altri assi.

Esempio:

Si consideri una rotazione rispetto un'asse generico:

$$H_{01}^{(0)} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Consideriamo poi una traslazione:

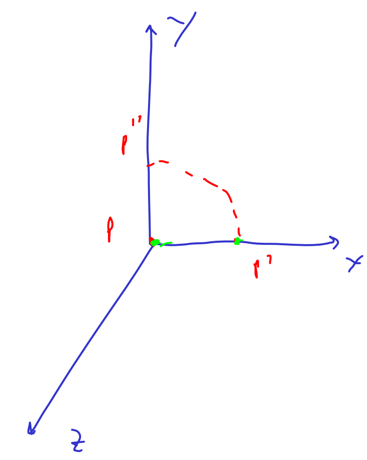
$$H_{12}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Componendo queste due trasformazioni:

$$H_{02}^{(0)} = H_{12}^{(0)} \cdot H_{01}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

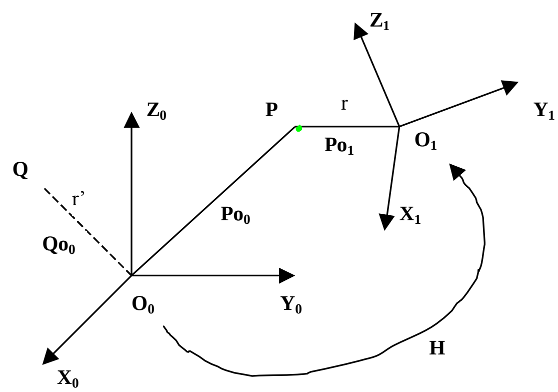
Qui vale la regola della **premoltiplicazione**, il sistema di riferimento (l'eventuale punto) è stato prima ruotato e poi traslato. Non è possibile cambiare l'ordine degli operatori infatti:

$$H_{02}^{'(0)} = H_{01}^{(0)} \cdot H_{12}^{(0)} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & n_x p_x + o_x p_y + a_x p_z \\ n_y & o_y & a_y & n_y p_x + o_y p_y + a_y p_z \\ n_z & o_z & a_z & n_z p_x + o_z p_y + a_z p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Cambiamento di sistema di riferimento

Consideriamo il caso in cui il punto P (**Fisso**) sia noto in un sistema mobile, cioè conosciamo le sue coordinate rispetto $(X_1,Y_1,Z_{1,} O_1)$; vogliamo ricavare la descrizione di P nel sistema fisso (X_0,Y_0,Z_0,O_0).



Il punto P nel sdr mobile in coordinate omogenee sarà:

$$P = x\vec{i}_1 + y\vec{j}_1 + z\vec{k}_1 + 1\vec{o}_1 \quad \Rightarrow \quad Po_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad O_1 = (\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1, \vec{o}_1)$$

Riferiti a sdr0

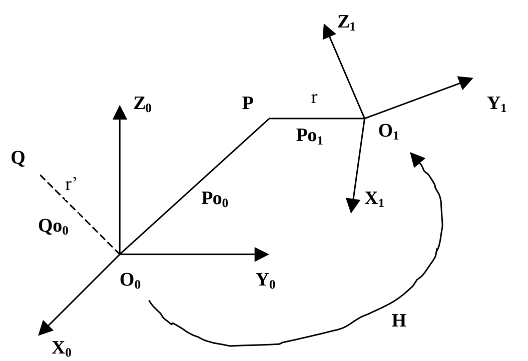
Vettore

Punto

Consideriamo un punto Q (riferito a sdr0) con le stesse coordinate di P in sdr1.

$$Q = x\vec{i}_0 + y\vec{j}_0 + z\vec{k}_0 + 1\vec{o}_0 \quad \Rightarrow \quad Qo_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad O_0 = (\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0, \vec{o}_0)$$

Versori sdr0



Notare che: r=r'

Applichiamo ora a Qo_0 una matrice (nota) di rototraslazione H:

$$\begin{aligned} H \cdot Q &= Hx\vec{i}_0 + Hy\vec{j}_0 + Hz\vec{k}_0 + H1\vec{o}_0 = \\ &= x(H\vec{i}_0) + y(H\vec{j}_0) + z(H\vec{k}_0) + 1(H\vec{o}_0) = \\ &= x\vec{i}_1^{\,0} + y\vec{j}_1^{\,0} + z\vec{k}_1^{\,0} + 1\vec{o}_1^{\,0} = P \end{aligned}$$

Applicando la trasformazione al punto Q si avrà quindi :

$$H \cdot Qo_0 = Po_0 \quad \Rightarrow \quad Po_0 = H \cdot Qo_0 = H \cdot Po_1$$

Hanno le stesse coordinate omogenee

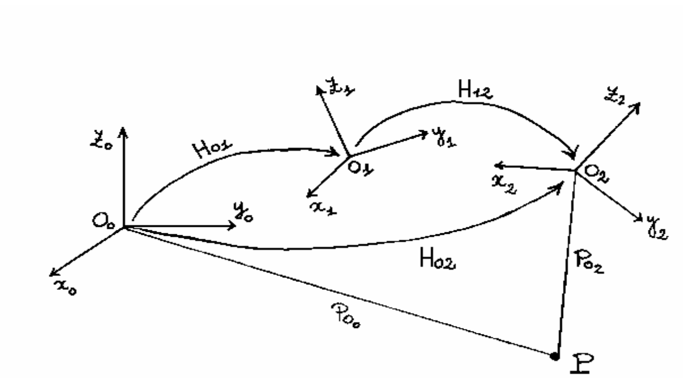
Quindi otteniamo l'equazione che ci permette di esprimere il punto rispetto un altro sdr:

$$Po_0 = H \cdot Po_1$$

Il passaggio inverso sarà:

$$Po_1 = H^{-1} \cdot Po_0$$

Composizione di trasformazioni di sistemi di riferimento



Consideriamo un punto P (**Fisso**) di cui conosciamole coordinate rispetto sdr0 e sdr2. Consideriamo poi 2 trasformazioni $H_{0,1}$ e $H_{1,2}$.

In generale queste trasformazioni possono essere espresse rispetto a qualsiasi sdr.

Consideriamo due casi:

1) Le matrici H_{01} e H_{12} sono espresse entrambe rispetto ad O_0. Cioè si ha:

$$H_{01}^{(0)} \qquad e \qquad H_{12}^{(0)}$$

In questo caso:

$$Po_0 = H_{12}^{(0)} \cdot H_{01}^{(0)} \cdot Po_2$$

Quindi la matrice cercata sarà:

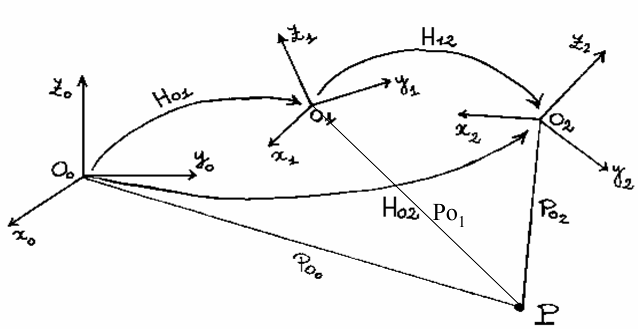
$$H_{02}^{(0)} = H_{12}^{(0)} \cdot H_{01}^{(0)}$$

Si ottiene quindi la **premoltiplicazione** delle matrici di trasformazione successive.

2) Le matrici H_{01} e H_{12} sono espresse rispetto al sistema di riferimento relativo da cui "parte" la trasformazione descritta della matrici stesse. Cioè si ha:

$$H_{01}^{(0)} \qquad e \qquad H_{12}^{(1)}$$

In questo caso:
$$\begin{cases} Po_1 = H_{12}^{(1)} \cdot Po_2 \\ Po_0 = H_{01}^{(0)} \cdot Po_1 \end{cases} \Rightarrow Po_0 = H_{01}^{(0)} \cdot H_{12}^{(1)} \cdot Po_2$$



In questo caso abbiamo fatto una **postmoltiplicazione** delle matrici di trasformazione successive.

$$H_{02}^{(0)} = H_{01}^{(0)} \cdot H_{12}^{(1)}$$

Oss: Questo è il caso più tipico in Robotica

Eguagliando i due risultati:

$$H_{12}^{(0)} \cdot \cancel{H_{01}^{(0)}} \left[H_{0,1}^{0}\right]^{-1} = H_{01}^{(0)} \cdot H_{12}^{(1)} \left[H_{0,1}^{0}\right]^{-1}$$

Si ottiene:

$$H_{12}^{(0)} = H_{01}^{(0)} \cdot H_{12}^{(1)} \cdot \left[H_{01}^{(0)}\right]^{-1}$$

Usando h,k,i,j:
0 1 2 3

$$H^{h}_{k,i} = H^{h}_{h,k} \cdot H^{k}_{k,i} \cdot \left[H^{h}_{h,k}\right]^{-1}$$

Oppure:

$$H_{12}^{(1)} = \left[H_{01}^{(0)}\right]^{-1} \cdot H_{12}^{(0)} \cdot H_{01}^{(0)}$$

Queste formule possono essere parametrizzate:

$$\mathbf{H}^{h}_{h,i} = \mathbf{H}^{h}_{k,i} \cdot \mathbf{H}^{h}_{h,k}$$

$$\mathbf{H}^{h}_{h,i} = \mathbf{H}^{h}_{h,k} \cdot \mathbf{H}^{k}_{k,i}$$

$$\mathbf{H}^{k}_{k,i} = \left[\mathbf{H}^{h}_{h.k}\right]^{-1} \cdot \mathbf{H}^{h}_{k,i} \cdot \mathbf{H}^{h}_{h,k} \qquad (2.10)$$

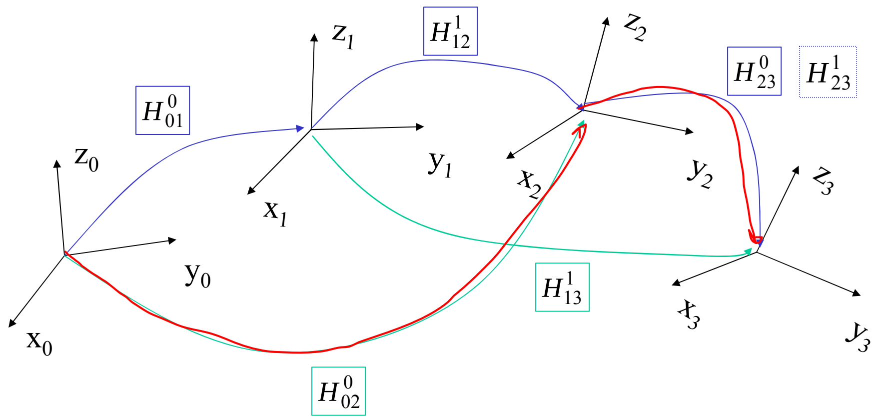
$$\mathbf{H}^{h}_{k,i} = \mathbf{H}^{h}_{h,k} \cdot \mathbf{H}^{k}_{k,i} \cdot \left[\mathbf{H}^{h}_{h,k}\right]^{-1} \qquad (2.11)$$

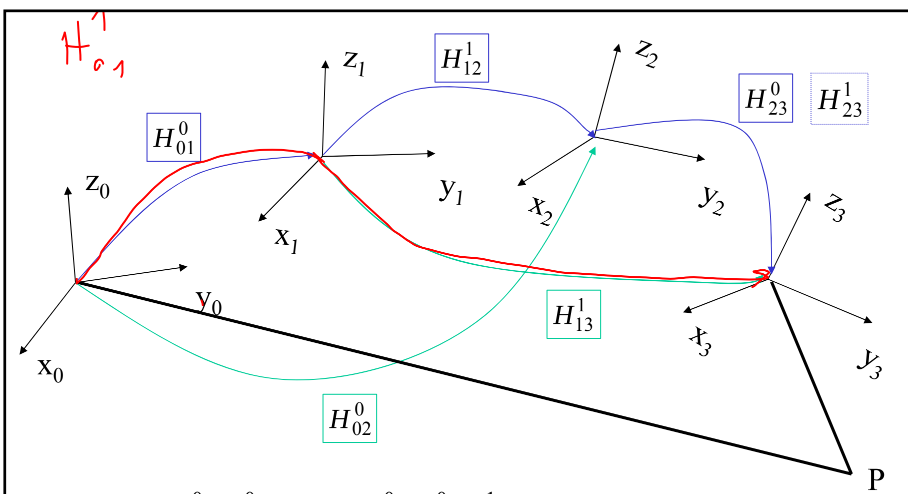
Si può anche verificare che vale (con 4 sdr):

$$\mathbf{H}^{h}_{i,j} = \mathbf{H}^{h}_{h,k} \cdot \mathbf{H}^{k}_{i,j} \cdot [\mathbf{H}^{h}_{h,k}]^{-1}$$

Imponiamo: h=0, k=1, i=2, j=3 quindi la relazione diventa:

$$\mathbf{H}^{h}_{i,j} = \mathbf{H}^{h}_{h,k} \cdot \mathbf{H}^{k}_{i,j} \cdot [\mathbf{H}^{h}_{h,k}]^{-1} \longrightarrow \mathbf{H}^{0}_{2,3} = \mathbf{H}^{0}_{0,1} \cdot \mathbf{H}^{1}_{2,3} \cdot [\mathbf{H}^{0}_{0,1}]^{-1}$$





$$Po_0 = H^0_{23} H^0_{02} Po_3 = H^0_{23} H^0_{01} H^1_{12} Po_3$$

$$Po_0 = H^0_{01} H^1_{13} Po_3 = H^0_{01} H^1_{23} H^1_{12} Po_3$$

$$H^0_{23} H^0_{01} \cancel{H^1_{12}} = H^0_{01} H^1_{23} \cancel{H^1_{12}} \Longrightarrow H^0_{23} = H^0_{01} H^1_{23} \left[H^0_{01}\right]^{-1}$$

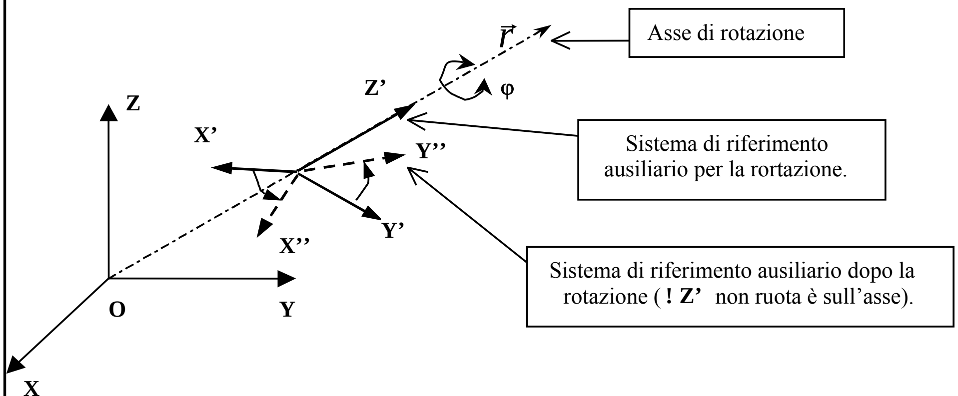
$$H_{23}^{0} = H_{01}^{0} H_{23}^{1} \left[H_{01}^{0}\right]^{-1}$$

Sostituisco: 0=h, 1=k, 2=i, 3=j

$$H_{ij}^{h} = H_{hk}^{h} H_{ij}^{k} \left[H_{hk}^{h}\right]^{-1}$$

Rotazione rispetto un asse generico

Vogliamo scrivere la matrice di rotazione di un angolo φ attorno ad un asse generico avente versore (vettore di modulo unitario).



Si può procedere in questo modo:

1. Passare ad un sdr ausiliario con $Z' \equiv \vec{r}$
2. Effettuare una rotazione attorno Z' di φ gradi
3. Passare al sdr di partenza

Detti O il sistema di riferimento fondamentale, O' il sistema di riferimento ausiliario e O'' il sistema di riferimento ausiliario ruotato. Noi vogliamo trovare:

$$H^{(0)}_{O',O''} = Rot(\vec{r},\varphi)$$

Applicando la (2.11) $\mathbf{H}^{h}_{k,i} = \mathbf{H}^{h}_{h,k} \cdot \mathbf{H}^{k}_{k,i} \cdot \left[\mathbf{H}^{h}_{h,k}\right]^{-1}$

$$H^{(O)}_{O',O''} = H^{(O)}_{O,O'} \cdot H^{(O')}_{O',O''} \cdot \left[H^{(O)}_{O,O'}\right]^{-1}$$

Ma la rotazione attorno l'asse Z sappiamo essere:

$$H^{(O')}_{O',O''} = Rot(z,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\mathrm{sen}(\varphi) & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo passare da O a O' trovando $H^{o}_{oo'}$.

Per il sdr O' l'unica cosa fissata è l'asse Z' quindi ci sarebbero infinite soluzioni.

Cominciamo ad imporre che l'asse Z' quindi $\vec{r}$ passi per l'origine di O. Inoltre imponiamo che le origini di O e O' coincidano.

Quindi:

$$H = \begin{bmatrix} & & r_x & 0 \\ & & r_y & 0 \\ & & r_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$z$$

I valori di r_x r_y r_z sono *normalizzati* cioè la loro somma quadratica è pari a 1. Se questo non succedesse basta porre:

$$r_x^{'} = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \qquad r_y^{'} = \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \qquad r_z^{'} = \frac{r_z}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}$$

Cerchiamo poi due versori ortogonali per completare la matrice

Cerchiamo quindi un versore $\vec{v}$ ortogonale ad $\vec{r}$: cioè tale che =0 e che sia normalizzato: $\vec{v} \times \vec{r} = 0$

Versore asse Y'

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} & \frac{-r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \cancel{\frac{r_y r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}} - \cancel{\frac{r_x r_y}{\sqrt{\quad}}}$$

L'ultimo vettore (**versore asse X'**) deve essere ortogonale agli altri due un modo semplice per trovarlo è dal loro prodotto vettoriale:

$$\vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{r} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} & \frac{-r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} & 0 \\ r_x & r_y & r_z \end{bmatrix} = \vec{i}\left(\frac{-r_x r_z}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}\right) - \vec{j}\left(\frac{r_y r_z}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}\right) + \vec{k}\left(\sqrt{r_x^2 + r_y^2}\right)$$

Quindi:

$$H_{O,O'}^{(O)} = \begin{bmatrix} \frac{-r_x r_z}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} & \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} & r_x & 0 \\ \frac{-r_y r_z}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} & \frac{-r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} & r_y & 0 \\ \sqrt{r_x^2 + r_y^2} & 0 & r_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi siamo in grado di calcolare la matrice voluta:

$$Rot(\vec{r},\varphi) = H_{o,o'}{}^{(0)} \cdot Rot(z,\varphi) \cdot \left[H_{o,o'}{}^{(0)}\right]^{-1}$$

$$\mathbf{R}_{r,\phi} = \begin{bmatrix} r_x^2 V\phi + C\phi & r_x r_y V\phi - r_z S\phi & r_x r_z V\phi + r_y S\phi \\ r_x r_y V\phi + r_z S\phi & r_y^2 V\phi + C\phi & r_y r_z V\phi - r_x S\phi \\ r_x r_z V\phi - r_y S\phi & r_y r_z V\phi + r_x S\phi & r_z^2 V\phi + C\phi \end{bmatrix}$$

$$V\phi = 1 - \cos\phi$$

Esercizio: trovare la matrice di rotazione che permette di ruotare di un angolo φ attorno alla retta con direzione definita da $r=(1,1,1)^T$

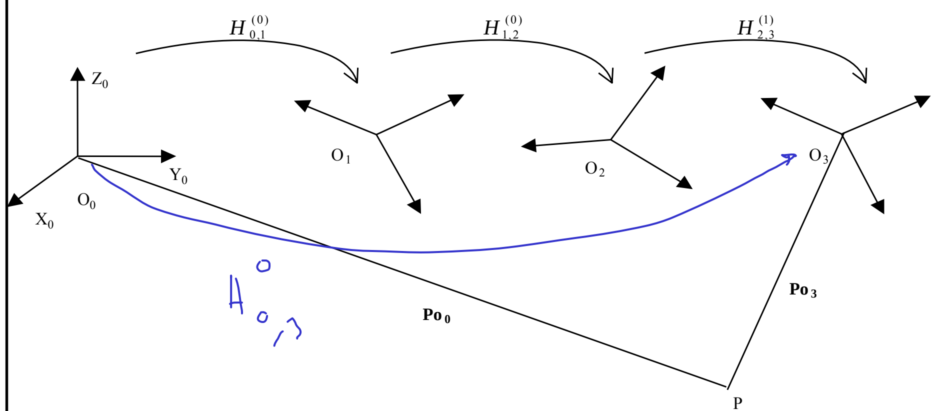
$$\mathbf{R}_{r,\phi} = \begin{bmatrix} r_x^2 V\phi + C\phi & r_x r_y V\phi - r_z S\phi & r_x r_z V\phi + r_y S\phi \\ r_x r_y V\phi + r_z S\phi & r_y^2 V\phi + C\phi & r_y r_z V\phi - r_x S\phi \\ r_x r_z V\phi - r_y S\phi & r_y r_z V\phi + r_x S\phi & r_z^2 V\phi + C\phi \end{bmatrix}$$

$$r = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$R_{r,\phi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(1 - C\phi) + C\phi & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{3}\cdot(1 - C\phi) + \frac{1}{\sqrt{3}} S\phi & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

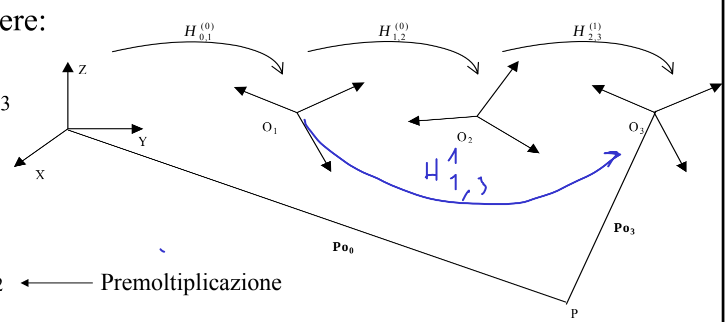
Esercizio:

Si ha il seguente insieme di trasformazioni di sistemi di riferimento, si vuole trovare Po_0 dato Po_3 cioè: $Po_{\mathbf{0},} = \mathbf{H}^0_{0,3} \cdot Po_3$



Possiamo scrivere:

$$\mathbf{H}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{0},3} = \mathbf{H}^0_{0,1} \cdot \mathbf{H}^1_{1,3}$$



Ma:

$$\mathbf{H}^1_{1,3} = \mathbf{H}^1_{2,3} \cdot \mathbf{H}^1_{1,2} \longleftarrow \text{Premoltiplicazione}$$

Bisogna trovare $H^1_{1,2}$, possiamo usare la (2.10)

$$\mathbf{H}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{k,j}} = \left[\mathbf{H}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{h.k}}\right]^{-1} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{k,j}} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{h}}_{\mathrm{h,k}}$$

$$\mathbf{H}^1_{1,2} = \left[\mathbf{H}^0_{0,1}\right]^{-1} \cdot \mathbf{H}^0_{1,2} \cdot \mathbf{H}^0_{0,1}$$

Quindi:

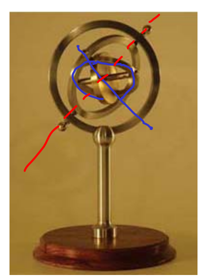
$$\mathbf{H}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{0},3} = \mathbf{H}^0_{0,1} \cdot \mathbf{H}^1_{2,3} \cdot \left[\mathbf{H}^0_{0,1}\right]^{-1} \cdot \mathbf{H}^0_{1,2} \cdot \mathbf{H}^0_{0,1}$$

Rappresentazione dell’orientamento tramite gli angoli di Eulero

Gli angoli di Eulero permettono di esprimere l’orientamento di un corpo rigido nello spazio rispetto ad un sistema di riferimento fisso. Gli angoli di Eulero sono usati in tre rappresentazioni largamente diffuse.

	I sistema (angoli giroscopici)	**II sistema**	**III sistema (rollio beccheggio imbardata)**
Sequenza delle Rotazioni	• ϕ attorno all’asse z · θ attorno all’asse y’ · ψ attorno all’asse z’’	• ϕ attorno all’asse z · θ attorno all’asse x’ · ψ attorno all’asse z’’	• ϕ attorno all’asse x · θ attorno all’asse y · ψ attorno all’asse z

Sistema Angoli Giroscopici:Consideriamo un sistema fisso OXYZ ed un sistema mobile OUVW; la sequenza delle rotazioni è la seguente:



ϕ Attorno l’asse Z

ϑ Attorno all’asse Y’ asse Y ruotato

ψ Attorno all’asse Z’’ (asse Z’ ruotato)

$$\mathbf{R}_{\phi,\theta,\psi} = \mathbf{Rot}(\phi, z)\cdot\mathbf{Rot}(\theta, y')\cdot\mathbf{Rot}(\psi, z'')$$

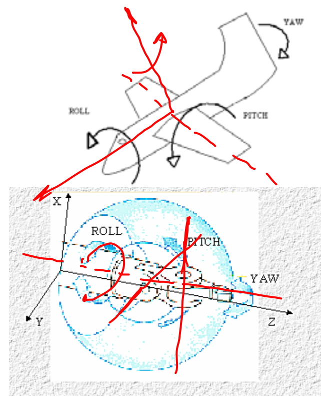
$$\mathbf{R}_{\phi,\theta,\psi} = \begin{pmatrix} C\theta C\psi - S\phi C\theta S\psi & -C\phi S\psi - S\phi C\theta C\psi & S\phi S\theta & 0 \\ S\phi C\psi + C\phi C\theta S\psi & -S\phi S\psi + C\phi C\theta C\psi & -C\phi S\theta & 0 \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sistema Rollio, Beccheggio, Imbardata (usato in aeronautica)

Ψ Attorno all'asse X (imbardata)

ϑ Attorno all'asse Y (beccheggio)

ϕ Attorno l'asse Z (rollio)



$$\mathbf{R}_{\phi,\theta,\psi} = \mathbf{Rot}(\phi, z) \cdot \mathbf{Rot}(\theta, y) \cdot \mathbf{Rot}(\psi, x)$$

$$\mathbf{R}_{\phi,\theta,\psi} = \begin{pmatrix} C\phi C\theta & C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi & 0 \\ S\phi C\theta & S\phi S\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta C\psi - C\phi S\psi & 0 \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$