Esercitazione trasformazioni gas ideale sistema chiuso - 19/03/2009

Si dispone di una massa **m = 2 kg** di N_2 (azoto) nelle condizioni iniziali **P_1 = 6 ata** e **T_1 = 20 °C** che vengono espansi sino alla pressione finale **P_2 = 2 ata** e alla temperatura finale **T_2 = 70 °C** con l'impiego di due serie di trasformazioni semplici:

- Riscaldamento isobaro sino a **T = T_2** (stato **a**) ed espansione isoterma a **P = P_2**
- Espansione adiabatica sino al volume **V = V_2** (stato **b**) e quindi isocora sino a **T = T_2** e **P = P_2**

Determinare **per le due serie di trasformazioni ΔU, ΔV, L, Q, ΔH, ΔS**

DEFINIZIONI

$N_2 = \text{azoto} \simeq \text{Gas perfetto}$

$R^* = n \cdot R$

$v = \frac{R^* \cdot T}{P}$ Volume specifico

Conversioni

$1\,ata = 98066{,}5\,Pa$

$0\,°C = 273{,}15\,K$

DATI

$P_1 = 6\,ata = 588399\,Pa \qquad P_2 = 2\,ata = 196133\,Pa$

$T_1 = 20\,°C = 293\,K \qquad T_2 = 70\,°C = 343\,K$

$m_m = \frac{1}{n} \simeq 28 \frac{g}{mol}$ Massa molecolare di N_2

$R^* = n \cdot R = \frac{R}{m_m} = 8{,}314 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot \frac{1}{28} \frac{mol}{g} = 0{,}2969 \frac{J}{g \cdot K} = 296{,}9 \frac{J}{kg \cdot K}$

$c_P = \frac{7}{2} R^* = 1039{,}15 \frac{J}{kg \cdot K} \qquad c_V = \frac{5}{2} R^* = 742{,}25 \frac{J}{kg \cdot K}$

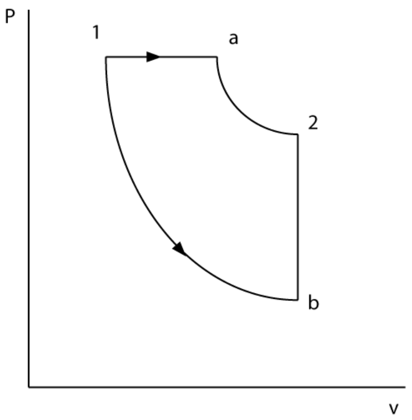
$k = \frac{c_P}{c_V} = 1{,}4$

Unità di misura

$P[Pa] = \frac{F}{l^2} [\frac{N}{m^2}] = [\frac{kg}{m \cdot s^2}]$

$\Delta U = ?[J] \quad L = ?[J] \quad Q = ?[J] \quad \Delta H = ?[J] \quad \Delta S = ?[J] \quad \Delta V = ?[m^3]$

SOLUZIONE



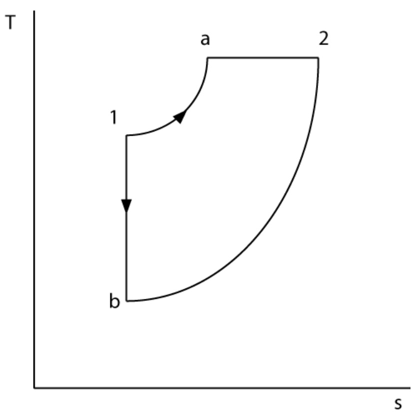


Grafico PV
1→a isobara
a→2 isoterma
1→b adiab. isoentropica
b→2 isocora

Grafico Ts
1→a isobara
a→2 isoterma
1→b adiab. isoentropica
b→2 isocora

Tabella degli stati

	P [Pa]	T [K]	v [m^3/kg]
1	588399	293	0,148
2	196133	343	0,520

Conoscendo lo stato di partenza e quello di arrivo, possiamo già calcolare le seguenti grandezze:

$$\Delta U = m\,\Delta u = m\,c_V\,\Delta T = 74200\,J$$

$$\Delta V = m\,\Delta v = 0{,}744\,m^3$$

$$\Delta H = m\,\Delta h = m\,c_P\,\Delta T = 103900\,J$$

$$\Delta S = m\,\Delta s = m(c_P \ln(\frac{T_2}{T_1}) - R^* \ln(\frac{P_2}{P_1})) = 979{,}8\,J$$

Stato a:

$$v_a = \frac{T_a R^*}{P_a} = \frac{T_2 R^*}{P_1}$$

$$v_a = \frac{343\,K \cdot 296{,}9 \frac{J}{kg \cdot K}}{588399\,Pa} = 0{,}173 \frac{m^3}{kg}$$

Stato b:

$$P v^n = cost \qquad n = k = \frac{c_P}{c_V} \qquad \text{per cui} \qquad P v^k = cost$$

$$P_1 v_1^{\,k} = P_b v_b^{\,k}$$

$$P_b = P_1 \left(\frac{v_1}{v_b}\right)^k = 588399 \left(\frac{0{,}148}{0{,}520}\right)^{1{,}4} Pa = 101306\,Pa$$

$$T_b = \frac{P_b v_b}{R^*} = \frac{101306\,Pa \cdot 0{,}520 \frac{m^3}{kg}}{296{,}9 \frac{J}{kg \cdot K}} = 177{,}43\,K$$

Tabelle degli stati con gli stati intermedi a e b

	P [Pa]	T [K]	v [m^3/kg]
1	588399	293	0,148
a	588399	343	0,173
2	196133	343	0,520

	P [Pa]	T [K]	v [m^3/kg]
1	588399	293	0,148
b	101306	177,43	0,520
2	196133	343	0,520

Trasformazione 1 → a → 2

	L	Q
ISOBARA	$L = m P \Delta v_{1\to a} = m P (v_a - v_1)$ $L = 2\,kg \cdot 588399\,Pa \cdot (0{,}173 - 0{,}148) \frac{m^3}{kg} \simeq \mathbf{29420\,J}$	$Q = \Delta H_{1\to a} = m c_P (T_a - T_1)$ $Q = 2\,kg \cdot 1039 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot (343 - 293)\,K$ $Q = \mathbf{103900\,J}$
ISOTERMA	$L = m \int_a^2 P\,dv = m \int_a^2 \frac{R^* T}{v} dv = m R^* T \int_a^2 \frac{dv}{v}$ $L = m R^* T \ln\left(\frac{v_2}{v_a}\right) = 2\text{kg} \cdot 296{,}9 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot 343\,K \cdot \ln\left(\frac{0{,}520}{0{,}173}\right)$ $L \simeq \mathbf{224150\,J}$	$\Delta U = 0$ $Q = L = \mathbf{224150\,J}$

Trasformazione 1 → b → 2

	L	Q
ADIAB. ISENTROPICA	$L = -\Delta U = -m c_V (T_b - T_1)$ $L = -2\,kg \cdot 742 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot (177{,}43 - 293)\,K \simeq \mathbf{171505\,J}$	$\mathbf{Q = 0}$
ISOCORA	$\mathbf{L = 0}$	$Q = \Delta U = m c_V (T_2 - T_b)$ $Q = 2\,kg \cdot 742 \frac{J}{kg \cdot K} (343 - 177{,}43)\,K$ $Q \simeq \mathbf{245706\,J}$

Trasformazione **1** → **a** → **2**
ΔU = Q – L = (103900 + 224150) – (29420 + 224150) = 74480 J

Trasformazione **1** → **b** → **2**
ΔU = Q – L = 245706 – 171505 = 74201 J

Ambedue i risultati, a meno delle inevitabili approssimazioni di calcolo, sono coincidenti col risultato ottenuto nel calcolo di ΔU come funzione di stato che aveva dato come risultato 74200 J