Esercizio 1

Siano X={a,b,c}, Y={1,2}.

1. Quante sono le funzioni da X in Y? Quante di queste sono iniettive?
2. Sia f: X→ Y così definita f(a)=f(b)=1, f(c)=2. Dire se f ammette inverse destre e/o sinistre e determinare tali eventuali inverse
3. Può esistere una funzione h: Y→X dotata di inversa sinistra?

Traccia di soluzione

Le funzioni da X in Y sono tante quante le matrici 3×2 con elementi in {0,1} e tali che su ogni riga ci sia esattamente un 1. Ho due possibili scelte per ogni riga e quindi ho 8 funzioni. Se esistesse una funzione iniettiva h, si dovrebbe avere |h(X)|=|X| ma questo contraddice il fatto che h(X)⊆Y, quindi non ci sono funzioni iniettive da X in Y.

La funzione f data è suriettiva, ma non iniettiva e pertanto ammette inversa sinistra e non inversa destra. Le possibili inverse sinistre sono due e sono così fatte: k:Y→ X con k(1)=a, k(2)=c, g:Y→ X con g(1)=b, g(2)=c.

Una funzione h: Y→ X con inversa sinistra deve essere suriettiva, ma |h(Y)|≤|Y|<|X| e dunque tale h non esiste.

Esercizio 2

Siano N l'insieme dei numeri naturali e Z l'insieme dei numeri interi (relativi). Data la funzione f: N → Z definita nel seguente modo:

$$f(n)=\begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se n è pari} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se n è dispari} \end{cases}$$

stabilire se f è invertibile e in caso affermativo determinarne l'inversa.

Traccia di soluzione

(N.B: Seguo la convenzione 0∈N)

Osserviamo che f(n) è sempre intero e se n è pari si ha f(n)≥0, se n è dispari si ha f(n)<0.

Consideriamo n≠m, se n è pari ed m è dispari si ha f(n)≠f(m), se n,m sono entrambi pari si ha f(n)=n/2≠m/2=f(m), se n,m sono entrambi dispari si ha f(n)=-(n+1)/2≠-(m+1)/2=f(m), dunque f è iniettiva e pertanto ha inversa destra.

La funzione f è suriettiva in quanto ogni m∈N è immagine di 2m, ogni m<0 è immagine di -2m-1 che è un intero positivo, dunque f è biunivoca ed ammette (un'unica) inversa g così definita

$$g(m)=\begin{cases} 2m & \text{se } m \geq 0 \\ -(2m+1) & \text{se } m<0 \end{cases}$$

Esercizio 3

Siano N l'insieme dei numeri naturali e f: N → N la funzione definita nel seguente modo:

$$f(n)=\begin{cases} n^2+3 & \text{se n è pari} \\ 2n+4 & \text{se n è dispari} \end{cases}$$

Discutere l'esistenza di possibili inverse e in caso negativo esibirne un esempio.

Traccia di soluzione

Se n è pari f(n) è dispari e se n è dispari f(n) è pari. Pertanto un numero pari ed uno dispari hanno immagini diverse. Supponiamo $n \neq m$ con n ed m pari $f(n)=n^2+3 \neq m^2+3=f(m)$, con n ed m dispari $f(n)=2n+4 \neq 2m+4=f(m)$ e dunque f è iniettiva. Poiché n^2+3 con n pari è maggiore o eguale a 3 almeno il numero 1 non ha controimmagini, dunque f non è suriettiva.

La funzione f ha dunque solo inversa destra. Costruiamone un esempio

Se m è un intero pari maggiore od uguale a 4 possiamo definire $g(m)=(m-4)/2$, se m è un intero dispari maggiore o uguale a 3 possiamo definire $g(m) = \lfloor \sqrt[2]{m-3} \rfloor$ (dove $\lfloor x \rfloor$ indica la parte intera di x) poniamo poi $g(0)=g(1)=g(2)=0$.

Verifichiamo che g è inversa destra di f calcolando $f \circ g(n)=g(f(n))$.

Se n è pari $f(n)= n^2+3 \geq 3$ e dunque $g(n^2+3)= = \lfloor \sqrt[2]{(n^2+3)-3} \rfloor =n$, se n è dispari $f(n)=2n+4 \geq 6$ e dunque $g(2n+4)=(2n+4-4)/2=n$.