ALGEBRA E LOGICA MATEMATICA
I prova in itinere
22 novembre 2006

Esercizio 1

Si consideri l'insieme N={0,1,2,3,....} dei numeri naturali e la relazione R su N così definita:

$$n \; R \; m \quad \Leftrightarrow \quad n \text{ è dispari ed esiste t naturale pari tale che } n = m + t \text{ .}$$

Si consideri inoltre la relazione T su N così definita:

$$n \; T \; m \Leftrightarrow n \; R \; m \quad \text{o} \quad n = m \text{ pari}$$

a) Si dica di quali proprietà gode R.
b) Si dimostri che T è una relazione d'ordine su N.
c) T è la chiusura d'ordine di R?
d) Si determinino, se esistono, gli elementi minimali, massimali, minimo e massimo di N rispetto a T.
e) Posto A = { 5, 9, 11, 23 }, si determinino gli eventuali minoranti, maggioranti, estremo superiore ed estremo inferiore di A rispetto a T.
f) Si stabilisca se A rispetto a T è un reticolo e se è un'algebra di Boole.

Esercizio 2

Si consideri l'anello Z_6 delle classi di resto modulo 6 e la relazione R così definita

$$[a] \; R \; [b] \Leftrightarrow a + b \text{ è pari}$$

Si mostri che R è una relazione d'equivalenza su Z_6 e se ne determinino le classi d'equivalenza.
Si verifichi se R è una congruenza del gruppo (Z_6, +).
In caso affermativo si stabilisca se R è anche una congruenza dell'anello (Z_6, + , ·).

Esercizio 3

Sia R un'algebra di Boole.
Mostrare che è

$$(x \cap y') \cup (x' \cap y) = 0 \text{ se e solo se } x = y$$

(ove x' e y' indicano i complementi rispettivamente di x e y).

Avvertenza: Tutte le risposte date vanno giustificate

TRACCIA DI SOLUZIONE

Esercizio 1.

a) R gode delle proprietà antisimmetrica e transitiva. Proviamo l'antisimmetria di R.
Se $(a,b)\in R$ a è dispari ed esiste un intero naturale pari t tale che $a=b+t$
Supponiamo sia anche $(b,a)\in R$, allora a è dispari ed esiste un intero naturale s tale che $b=a+s$.
Abbiamo allora $a=(a+s)+t=a+(s+t)$ da cui $s+t=0$, il che essendo s e t interi naturali implica $s=t=0$, cioè $a=b$.
Proviamo ora la transitività: siano $(a,b)\in R$, $(b,c)\in R$, allora b e c sono dispari ed esistono due interi naturali pari t ed r tali che $a=b+t$, $b=c+r$ da cui $a=(c+r)+t= c+(r+t)$ con $r+t$ intero naturale pari, dunque $(a,c)\in R$.
E' immediato che R non è seriale perché non c'è nessuna coppia di interi appartenente ad R con la prima componente pari. Non essendo seriale R non può essere riflessiva. R non è neppure simmetrica, perché se lo fosse essendo antisimmetrica sarebbe contenuta nella relazione identica.

b) Dalla definizione si ricava subito che $T\subseteq R\cup I_N$. Inoltre $R\subseteq T$, $I_N\subseteq T$ (perché ogni coppia (a,a) con a dispari appartiene ad R), dunque $R\cup I_N\subseteq T$, quindi $R\cup I_N=T$. T è pertanto la chiusura riflessiva di R . E' ovviamente antisimmetrica in quanto se $(a,b)\in T$ e a è pari si ha per definizione $a=b$, se invece a è dispari $(a,b)\in T$ implica $(a,b)\in R$, ed ancora se $(b,a)\in T$ si ha $a=b$.
T è anche transitiva, in quanto se $(a,b)\in T$ e $(b,c)\in T$, allora o a è dispari e dunque $(a,b)\in R$ e $(b,c)\in R$ ed essendo R transitiva $(a,c)\in R\subseteq T$ oppure a è pari ed in tal caso $a=b$ e b è pari per cui $b=c$ e quindi $a=c$ pari, da cui $(a,c)\in T$.

c) T è la minima relazione d'ordine contenente R, infatti ogni relazione d'ordine contenente R deve essere riflessiva e quindi contenere la chiusura riflessiva di R che è T.

d) E' immediato osservare che $(a,b)\in R$ se e solo se a,b sono interi naturali dispari ed $b\leq a$ rispetto all'ordinamento naturale. Quindi la relazione T associa ogni pari a sé stesso e sui dispari è la relazione inversa dell'ordinamento naturale. Pertanto gli elementi minimali di N rispetto a T tutti gli interi pari e gli elementi massimali sono tutti gli interi pari ed 1. Non ci sono né massimi né minimi.

e) Poiché A è composto solo da interi dispari è un insieme totalmente ordinato rispetto a T. I maggioranti di A sono 1,3,5; i minoranti tutti gli interi dispari maggiori o uguali a 23, da cui si ha subito che sup A=5, inf A=23.

f) A essendo un insieme totalmente ordinato rispetto a T è un reticolo distributivo ma non un'algebra di Boole (in quanto 9 ed 11 non ammettono complemento).

Esercizio 2.

R è una relazione di equivalenza su Z_6, infatti gode delle proprietà

- riflessiva in quanto $a+a$ è sempre pari e dunque $([a],[a])\in R$
- simmetrica in quanto se $([a],[b])\in R$, $a+b$ ($=b+a$) è pari e dunque $([b],[a])\in R$
- transitiva in quanto se $([a],[b])\in R$, $([b],[c])\in R$, abbiamo $a+b$, $b+c$ pari, dunque $a+b+b+c$ pari e essendo $b+b$ pari $a+c$ pari da cui $([a],[c])\in R$.

Le R-classi di Z_6 sono $\{[0],[2],[4]\}$, $\{[1],[3],[5]\}$.
Verifichiamo che R è una relazione di congruenza su $< Z_6,+>$. Siano $([a],[b])\in R$, $([c],[d])\in R$, allora $a+b$, $c+d$ sono pari e dunque è pari anche la loro somma e dunque per la commutatività e associatività della somma fra interi $(a+c)+(b+d)$ è pari da cui $([a+c],[b+d])\in R$ e quindi $([a]+[c],[b]+[d])\in R$.
Verifichiamo ora che R è una relazione di congruenza su $< Z_6,+, \cdot>$. Sappiamo già che R è compatibile con la somma, proviamo che è compatibile col prodotto. Siano $([a],[b])\in R$, $([c],[d])\in R$, allora $a+b$, $c+d$ sono pari e dunque, poiché il prodotto di un pari con un qualsiasi intero

è pari, sono pari anche (a+b)c=ac+bc e b(c+d)=bc+bd, ed è pari la loro somma ac+bc+bc+bc, da cui essendo bc+bc pari si ottiene ac+bd pari, da cui ([ac],[bd])$\in$R e quindi ([a] [c],[b] [d])$\in$R ed R è compatibile col prodotto.

Esercizio 3.

Se x=y allora ovviamente x'=y' e quindi si ha $(x \cap y') \cup (x' \cap y) = (x \cap x') \cup (x' \cap x) = 0 \cup 0 = 0$. Viceversa supponiamo $(x \cap y') \cup (x' \cap y)$=0, allora essendo $(x \cap y') \leq (x \cap y') \cup (x' \cap y)$ e $(x' \cap y) \leq (x \cap y') \cup (x' \cap y)$ nell'ordinamento indotto dal reticolo abbiamo anche $(x \cap y') = 0, (x' \cap y) = 0$. Pertanto poiché in un'algebra di Boole $x \leq y$ se e solo se $x \cap y' = 0$, abbiamo $x \leq y$ e $y \leq x$ da cui per antisimmetria x=y.
(Senza usare questa proprietà della relazione d'ordine in un'algebra di Boole si poteva procedere così: da $(x \cap y') = 0, (x' \cap y) = 0$ si ricava rispettivamente
$(x \cap y') \cup y = 0 \cup y, (x' \cap y) \cup x = 0 \cup x$ ed usando la proprietà distributiva
$(x \cup y) \cap (y' \cup y) = y, (x' \cup x) \cap (y \cup x) = x$ ovvero $(x \cup y) \cap 1 = y, (x' \cup x) \cap 1 = x$ cioè
$x \cup y = y,\ y \cup x = x$, da cui per la commutatività dell'unione x=y).