ALGEBRA E LOGICA MATEMATICA

Alessandra Cherubini
Aleche@mate.polimi.it

Introduzione.

Perché questo corso?

- Logica ed informatica sono simili: si occupano entrambe di problemi di formalizzazione, elaborazione e comunicazione della conoscenza, entrambe hanno bisogno di usare un linguaggio formale.
- La logica ha attualmente innumerevoli applicazioni in varie aree dell'informatica: progettazione dei circuiti digitali, modellizzazione di macchine astratte, progettazione di linguaggi logici, verifica della correttezza dei programmi, implementazione di protocolli di comunicazione, etc…
- "L'informatica è nata dalla logica come Minerva dalla testa di Giove" (G.Longo):
  - La distinzione fra hardware e software presente per la prima volta nelle architetture di calcolo, disegnate da von Neumann e Turing nel dopoguerra, era stata proposta molto prima da Turing allo scopo dell'analisi logica della deduzione.
  - La teoria della computabilità nasce negli anni 30 (Gödel, Church, Kleene, Turing…), cioè ben prima dei moderni calcolatori
  - …….
- La logica trova nell'informatica molte delle sue motivazioni e nuovi campi di ricerca.
- ➢ Si potrebbe concludere:

logica : informatica = analisi mat : fisica

Ma perché anche l'algebra?

- Riprendendo idee di Leibinitz, nel 1801 Woodhouse propone un netto distacco fra geometria ed algebra. L'algebra è una manipolazione di simboli che deve trovare il suo fondamento non nel riferimento allo spazio, ma nella correttezza formale. Poco più tardi, intorno al 1830, si comincia ad abbandonare l'idea cha la validità di una dimostrazione dipenda solo dalla natura dell'argomento trattato e Peacock nel "A treatise on algebra" sottolinea che il significato delle operazioni e dei risultati dipende solo dai postulati assunti e non dalle interpretazione dei simboli, cominciando a suggerire l'idea di diverse interpretazioni e di astrazione che sta attualmente alla base dell'algebra.
- L'algebra può quindi essere considerata come un primo passo verso la logica, come uno strumento per riconoscere ciò che accomuna calcoli che abbiamo imparato a fare in momenti e su oggetti diversi, come un linguaggio agile ed elegante con svariate applicazioni.
- Infine le teorie algebriche costituiscono ottimi esempi di teorie logiche, come vedremo verso la fine del corso.

ALGEBRA

Nel seguito lavoreremo su insiemi, ovvero su collezioni di oggetti.
Diamo per note le notazioni, le definizioni di inclusione, uguaglianza e operazioni su insiemi e le relative proprietà.
(attenzione! Paradosso di Russell)

RELAZIONI

Ricordiamo che si chiama prodotto cartesiano degli n insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, l'insieme

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, \ i = 1,2,\ldots n\};$$

notiamo che gli elementi del prodotto cartesiano sono n-uple ordinate ed è quindi rilevante l'ordine in cui si considerano gli insiemi.
Per estensione se n=1 il prodotto cartesiano si riduce ad A_1.

Si chiama relazione R (n-aria o di arità n) fra gli n insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un qualsiasi sottoinsieme di $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Siano ora $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ e $T \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ due relazioni fra gli n insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, dalle definizioni insiemistiche si ha:

$R \subseteq T$ sse per ogni $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$ si ha $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in T$.
$R = T$ sse $R \subseteq T$ e $T \subseteq R$.
$R \subset T$ sse $R \subseteq T$ ed esiste almeno una n-upla $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) \in T$ tale che $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) \notin R$
$R \cap T = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R \text{ e } (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in T\}$
$R \cup T = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R \text{ o } (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in T\}$.

Come è ben noto dalle nozioni sulla teoria degli insiemi, le definizioni di intersezione ed unione si possono estendere ad una famiglia arbitraria di relazioni fra gli n insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Pertanto se consideriamo un insieme qualunque I ed una famiglia di relazioni $\{R_i \mid i \in I\}$ fra $A_1, A_2, \ldots, A_n$, usiamo le seguenti notazioni

$$\bigcap_{i \in I} R_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid \forall i \in I \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R_i\}$$
$$\bigcup_{i \in I} R_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid \exists i \in I : \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R_i\}$$

Le operazioni fra relazioni godono ovviamente delle proprietà ben note per le operazioni insiemistiche.

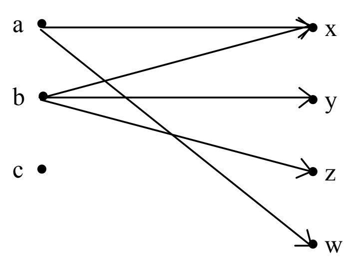
Relazioni binarie

Consideremo nel seguito il caso n=2, cioè le relazioni binarie o di arità 2.
Se R è una relazione binaria la notazione $a_1 R a_2$ ha lo stesso significato della scrittura $(a_1, a_2) \in R$

Nel caso in cui gli insiemi A_1 ed A_2 con cui lavoriamo contengano un numero finito di elementi (indicheremo rispettivamente con $|A_1|$ e $|A_2|$ tali numeri), una relazione $R \subseteq A_1 \times A_2$ potrà essere utilmente rappresentata attraverso

- <u>il grafo di incidenza</u>
  Un *grafo (orientato)* è una coppia di insiemi (V,E), V è l'insieme dei vertici, E è l'insieme degli archi, ogni arco può essere pensato come una coppia di vertici, il primo elemento della coppia si dice vertice iniziale dell'arco, il secondo vertice finale.
  Un grafo si può disegnare rappresentando i suoi vertici come punti ed i suoi archi come frecce dal vertice iniziale al vertice finale.
  In particolare se partiamo da una relazione $R \subseteq A_1 \times A_2$ si dice grafo di incidenza di R il grafo il cui insieme di vertici è $A_1 \cup A_2$ e il cui insieme di archi è R.

  <u>Esempio</u>: Siano $A_1=\{a,b,c\}$, $A_2=\{x,y,z,w\}$, $R=\{(a,x),(a,w),(b,x),(b,y),(b,z)\}$, il grafo di incidenza di R è



- <u>la matrice di incidenza</u>
  Dopo aver fissato un ordine fra gli $|A_1|$ elementi di A_1 e fra gli $|A_2|$ elementi di A_2 (ad esempio quello in cui vengono elencati gli elementi in ciascun insieme) la matrice di incidenza di R è una matrice con $|A_1|$ righe ed $|A_2|$ colonne, con elementi in $\{0,1\}$, tale che il suo elemento di posto (i,k) è 1 se e solo se la coppia costituita dall'i-esimo elemento di A_1 e dal j-esimo elemento di A_2 appartiene ad R.

  Facendo riferimento all'<u>esempio</u> precedente la matrice di incidenza di R è

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che date le matrici di incidenza M_R, M_T di due relazioni binarie $R,T \subseteq A_1 \times A_2$, si possono immediatamente ottenere la matrice di incidenza di $R \cap T$ (facendo il prodotto elemento per elemento di M_R con M_T) e quella di $R \cup T$ (facendo la somma di M_R con M_T e ponendo uguale ad 1 tutti gli elementi della somma maggiori di 0).

Siano ora date le relazioni $R \subseteq A_1 \times A_2$ e $T \subseteq A_2 \times A_3$, si chiama <u>prodotto delle due relazioni</u> la relazione $R \cdot T \subseteq A_1 \times A_3$ così definita:

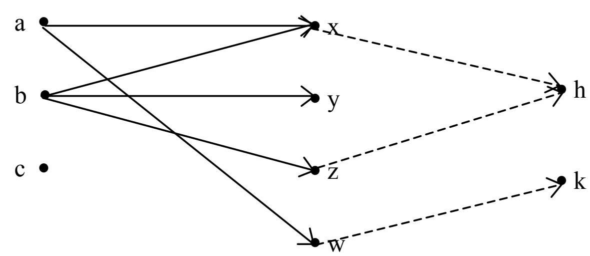
$$R \cdot T = \{(a_1,a_3) | \exists a_2 : (a_1,a_2) \in R \text{ e } (a_2,a_3) \in T\}$$

(Ovviamente per come sono definite R e T, $(a_1,a_2) \in R$ e $(a_2,a_3) \in T$ implicano $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $a_3 \in A_3$).

Notare la somiglianza col prodotto di matrici.

La definizione può essere resa più chiara con un esempio che utilizza anche la rappresentazione delle relazioni tramite grafi o matrici di incidenza.

<u>Esempio</u>: Siano $A_1=\{a,b,c\}$, $A_2=\{x,y,z,w\}$, $A_3=\{h,k\}$, $R=\{(a,x),(a,w),(b,x),(b,y),(b,z)\}$, $T=\{(x,h),(z,h),(w,k)\}$.
Calcoliamo $R \cdot T$, si ha $(a,h) \in R \cdot T$ in quanto esiste x tale che $(a,x) \in R$ e $(x,h) \in T$, $(a,k) \in R \cdot T$ in quanto esiste w tale che $(a,w) \in R$ e $(w,h) \in T$, $(b,h) \in R \cdot T$ in quanto esiste x tale che $(a,w) \in R$ e $(w,h) \in T$, nessuna altra coppia appartiene ad $R \cdot T$.
Usando i grafi delle due relazioni (sovrapponendo i vertici di ugual nome) abbiamo



dove le frecce a tratto continuo rappresentano la relazione R e quelle tratteggiate rappresentano la T.
Dalla definizione risulta che una coppia di vertici appartiene alla relazione $R \cdot T$ se e solo se si può andare dal primo elemento della coppia al secondo percorrendo prima un arco a tratto continuo (relazione R) e poi un arco tratteggiato (relazione T).

Se consideriamo invece le matrici di incidenza abbiamo

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si può effettuare il prodotto di matrici e si ottiene la matrice

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ che, con la solita convenzione di porre ad 1 tutti gli elementi maggiori di 0, è proprio la matrice di incidenza di $R \cdot T$, infatti l'elemento di posto (i,k) di questa matrice è diverso da 0 se e solo se esiste un j tale che l'elemento di posto (i,j) di M_R e l'elemento di posto (j,k) di M_T siano entrambi non nulli.
Notiamo anche che la presenza di un $t>1$ nel posto (i,k) della matrice prodotto significa che ci sono t diversi elementi dell'insieme A_2 che possono servire da "collegamento" nel prodotto (nel nostro

caso abbiamo 2 nel posto (2,1) perché esistono sia x sia z che possono servire infatti bRx e xTh, bRz e zTh).

Il prodotto di relazioni gode delle seguenti proprietà:

- *è associativo*, cioè per ogni R,T,S tali che $R \subseteq A_1 \times A_2$, $T \subseteq A_2 \times A_3$, $S \subseteq A_3 \times A_4$, si ha $(R \cdot T) \cdot S = R \cdot (T \cdot S)$.
  E' facile osservare che entrambe le relazioni $(R \cdot T) \cdot S$, $R \cdot (T \cdot S)$ sono contenute in $A_1 \times A_4$.
  Dobbiamo allora provare che
  $(R \cdot T) \cdot S \subseteq R \cdot (T \cdot S)$ cioè che $(a_1,a_4) \in (R \cdot T) \cdot S$ implica $(a_1,a_4) \in R \cdot (T \cdot S)$.
  Per definizione $(a_1,a_4) \in (R \cdot T) \cdot S$ implica che esiste un a_3 tale che $(a_1,a_3) \in R \cdot T$ e $(a_3,a_4) \in S$;
  ancora per definizione $(a_1,a_3) \in R \cdot T$ implica che esiste un a_2 tale che
  $(a_1,a_2) \in R$ e $(a_2,a_3) \in T$;
  ora $(a_2,a_3) \in T$ e $(a_3,a_4) \in S$ implicano $(a_2,a_4) \in T \cdot S$ e questa assieme a $(a_1,a_2) \in R$ implica $(a_1,a_4) \in R \cdot (T \cdot S)$.
  Analogamente si prova che $R \cdot (T \cdot S) \subseteq (R \cdot T) \cdot S$ cioè che $(a_1,a_4) \in R \cdot (T \cdot S)$ implica $(a_1,a_4) \in (R \cdot T) \cdot S$.

- *è compatibile con l'inclusione*, cioè se $R \subseteq T \subseteq A_1 \times A_2$, $S \subseteq V \subseteq A_2 \times A_3$, si ha
  $R \cdot S \subseteq T \cdot V$.
  (fare per esercizio)

Il prodotto di relazioni *non è commutativo*, infatti date $R \subseteq A_1 \times A_2$ e $T \subseteq A_2 \times A_3$, $R \cdot T$ è sempre definito, mentre $T \cdot R$ è definito solo se gli insiemi A_1 e A_3 coincidono ed in tal caso $R \cdot T$ e $T \cdot R$ sono relazioni fra la stessa coppia di insiemi solo se anche gli insiemi A_1 e A_2 coincidono, ma anche in questo caso in genere $R \cdot T \neq T \cdot R$.
Se $R \cdot T = T \cdot R$, le relazioni T ed R si dicono *permutabili*.

Si dice <u>relazione inversa</u> di $R \subseteq A_1 \times A_2$ la relazione $R^{-1} = \{(a_2,a_1) \mid (a_1,a_2) \in R\}$.
Il grafo di incidenza di R^{-1} si ottiene da quello di R invertendo la direzione delle frecce e la matrice di incidenza di R^{-1} è la trasposta di quella di R.

Osserviamo che se consideriamo la relazione $I_{A_1} = \{(a_1,a_1) | a_1 \in A_1\}$, detta <u>relazione identica</u> su A_1, si ha

$I_{A_1} \cdot R = R$ per ogni $R \subseteq A_1 \times A_2$

ed analogamente si ha $R \cdot I_{A_2} = R$ per ogni $R \subseteq A_1 \times A_2$.

In generale si ha però $R \cdot R^{-1} \neq I_{A_1}$ ed $R^{-1} \cdot R \neq I_{A_2}$.

<u>Relazioni binarie su un insieme A.</u>

Consideriamo di seguito il caso particolare in cui gli insiemi A_1 e A_2 coincidono, ci occupiamo quindi delle relazioni $R \subseteq A_1 \times A_1$, che chiamiamo relazioni binarie su A_1 (nel seguito elimineremo l'indice 1):

Tra le relazioni binarie su A ci sono la relazione vuota, indicata con $\emptyset$, la relazione identica su A, indicata con I_A e la relazione $A\times A$, detta relazione universale su A ed indicata con ω_A.

Data una relazione binaria R su A, in virtù delle definizione di prodotto e della proprietà associative del prodotto, possiamo definire le potenze ad esponente positivo di R ponendo

$$R^m = R\cdot R\cdot\ldots\cdot R \qquad \text{(m volte)},$$

Per convenzione poniamo anche $R^0 = I_A$.

Per la proprietà associativa del prodotto e per il fatto che $I_A\cdot R= R\cdot I_A=R$ per ogni $R \subseteq A\times A$, continuano a sussistere, per esponenti interi non negativi, le proprietà formali delle potenze:
- $R^m \cdot R^n = R^{m+n} = R^n\cdot R^m$,
- $(R^m)^n=R^{mn}$.

Poiché abbiamo parlato di relazione inversa potrebbe venir spontaneo di definire R^m (m<0) come $R^m = R^{-1}\cdot R^{-1}\cdot\ldots\cdot R^{-1}$ (-m volte), va notato che essendo in generale $R\cdot R^{-1} \neq I_A$ ed $R^{-1}\cdot R \neq I_A$, la proprietà $R^m \cdot R^n = R^n\cdot R^m = R^{m+n}$ non vale in generale per esponenti interi (anche negativi)

<u>Esercizio</u>: Cosa succede di tale proprietà se m ed n sono entrambi negativi? Cosa succede della seconda proprietà per m,n interi generici?

Le relazioni binarie su un insieme A finito, possono essere facilmente rappresentate col grafo e con la matrice di incidenza (che sarà una matrice quadrata). Nel grafo di incidenza l'insieme dei vertici è $A(=A\cup A)$ e quindi tra gli archi ci possono essere degli autoanelli basati su un vertice a, per indicare che $(a,a)\in R$, e delle frecce bidirezionali fra due vertici a_1 e a_2 per indicare che entrambe le coppie (a_1,a_2) e (a_2,a_1) stanno in R.

Le relazioni binarie su un insieme A possono godere di interessanti proprietà; per le applicazioni successive, siamo in particolare interessati alle seguenti:

- <u>proprietà seriale</u>
  Si dice che una relazione R gode della proprietà seriale (o semplicemente è seriale) se per ogni $a\in A$ esiste (almeno) un $a_1\in A$ tale che $(a,a_1)\in R$.
  In termini di grafo di incidenza una relazione è seriale sse da ogni vertice parte almeno un arco, in termini di matrice di incidenza una relazione è seriale sse in ogni riga della matrice c'è almeno un 1.
  I_A e ω_A sono relazioni seriali.

- <u>proprietà riflessiva</u>
  Si dice che una relazione R gode della proprietà riflessiva (o semplicemente è riflessiva) se per ogni $a\in A$ si ha $(a,a)\in R$.
  Si può facilmente provare che una relazione è riflessiva se e solo se $I_A\subseteq R$.
  In termini di grafo di incidenza una relazione è riflessiva sse da ogni vertice parte un autoanello, in termini di matrice di incidenza una relazione è riflessiva sse la diagonale principale è tutta fatta di 1.
  I_A e ω_A sono relazioni riflessive.

- <u>proprietà simmetrica</u>

Si dice che una relazione R gode della proprietà simmetrica (o semplicemente è simmetrica) se $(a_1,a_2)\in R$ implica $(a_2,a_1)\in R$.
Si può facilmente provare che una relazione è simmetrica se e solo se $R^{-1}\subseteq R$.
In termini di grafo di incidenza una relazione è simmetrica sse ogni arco ha la doppia freccia (notare che gli autoanelli possono sempre essere pensati come archi con doppia freccia), in termini di matrice di incidenza una relazione è simmetrica sse la matrice d'incidenza coincide con la propria trasposta (ovvero è una matrice simmetrica).
$\varnothing$, I_A e ω_A sono relazioni simmetriche.

- <u>proprietà antisimmetrica</u>
  Si dice che una relazione R gode della proprietà antisimmetrica (o semplicemente è antisimmetrica) se $(a_1,a_2)\in R$ ed $(a_2,a_1)\in R$ implica $a_1=a_2$
  Si può facilmente provare che una relazione è antisimmetrica se e solo se $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$.
  In termini di grafo di incidenza una relazione è antisimmetrica sse i soli archi con doppia freccia sono gli eventuali autoanelli, in termini di matrice di incidenza una relazione è antisimmetrica sse la somma della matrice d'incidenza con la sua trasposta non ha alcun 2 fuori dalla diagonale principale, in altri termini sse ogni volta che nel posto (i,k) con $i\neq k$ c'è 1 l'elemento di posto (k,i) è 0.
  $\varnothing$ ed I_A sono relazioni antisimmetriche.

- <u>proprietà transitiva</u>
  Si dice che una relazione R gode della proprietà transitiva (o semplicemente è transitiva) se $(a_1,a_2)\in R$ ed $(a_2,a_3)\in R$ implica $(a_1,a_3)\in R$
  Si può facilmente provare che una relazione è transitiva se e solo se $R^2\subseteq R$.
  In termini di grafo di incidenza una relazione è transitiva sse, ogni volta che si può andare da un vertice a_1 ad un vertice a_2 seguendo due frecce consecutive, c'è un arco che collega a_1 ad a_2; in termini di matrice di incidenza una relazione è transitiva se tutte le volte che sia l'elemento di posto (i,k) sia l'elemento di posto (k,j) sono 1 anche l'elemento di posto (i,j) è 1.
  $\varnothing$, I_A e ω_A sono relazioni transitive.

Siano R,T relazioni binarie su A, osserviamo che
- se R è seriale anche ogni relazione che contiene R (e quindi anche $R\cup T$) è seriale;
- se R e T sono seriali anche $R\cdot T$ è seriale;
- anche se R e T sono seriali, $R\cap T$ in generale non è seriale:
  basta prendere $A=\{a,b\}$, $R=\{(a,b),(b,b)\}$, $T=\{(a,a),(b,a)\}$;
- se R è riflessiva anche ogni relazione che contiene R (e quindi anche $R\cup T$) è riflessiva;
- se R e T sono riflessive anche $R\cdot T$ è riflessiva;
- se R e T sono riflessive anche $R\cap T$ è riflessiva;
- se R e T sono simmetriche anche $R\cap T$ è simmetrica;
- se R e T sono simmetriche anche $R\cup T$ è simmetrica;
- anche se R e T sono simmetriche $R\cdot T$ in generale non è simmetrica:
  basta prendere $A=\{a,b,c\}$, $R=\{(a,b),(b,a)\}$, $T=\{(b,c),(c,b)\}$, R e T sono simmetriche ma $R\cdot T=\{(a,c)\}$ non è simmetrica;
- se R e T sono simmetriche, $R\cdot T$ è simmetrica se e solo s e R e T sono permutabili;
- se R è antisimmetrica anche ogni relazione contenuta in R (e quindi anche $R\cap T$) è antisimmetrica;
- anche se R e T sono antisimmetriche $R\cup T$ in generale non è antisimmetrica:
  basta prendere $A=\{a,b\}$, $R=\{(a,b)\}$, $T=\{(b,a)\}$;

- anche se R e T sono antisimmetriche $R \cdot T$ in generale non è antisimmetrica:
  basta prendere A={a,b,c}, R={(a,b),(c,b)}, T={(b,a),(b,c)}, R e T sono antisimmetriche ma $R \cdot T$={(a,a),(a,c),(c,a),(c,c)} non è antisimmetrica;
- se R e T sono transitive anche $R \cap T$ è transitiva;
- anche se R e T sono transitive $R \cup T$ in generale non è transitiva:
  basta prendere A={a,b,c}, R={(a,b)}, T={(b,c)};
- anche se R e T sono transitive $R \cdot T$ in generale non è transitiva:
  basta prendere A={a,b,c,d}, R={(a,b),(c,d)}, T={(b,c),(d,d)}, R e T sono transitive ma $R \cdot T$={(a,c),(c,d)} non è transitiva;
- se R e T sono transitive e permutabili anche $R \cdot T$ è transitiva.

Riassumendo,
per quanto riguarda l'inclusione le proprietà si conservano in accordo alla seguente tabella
sia $T \subseteq R \subseteq S$

R	T	S
seriale	no	sì
riflessiva	no	sì
simmetrica	no	no
antisimmetrica	sì	no
transitiva	no	no

e per quanto riguarda le operazioni di intersezione unione e prodotto date due qualsiasi relazioni R, T , le loro proprietà si conservano in accordo alla seguente tabella:

R,T	$R \cap T$	$R \cup T$	$R \cdot T$
seriale	no	sì	sì
riflessiva	sì	sì	sì
simmetrica	sì	sì	no
antisimmetrica	sì	no	no
transitiva	sì	no	no

Consideriamo ora un insieme P di proprietà di cui le relazioni binarie possono godere.
Sia $R \subseteq A \times A$ una relazione binaria su A, chiamiamo <u>chiusura di R rispetto a P</u> o P-chiusura di R una relazione $T \subseteq A \times A$ tale che:

1. $R \subseteq T$
2. T goda di tutte le proprietà in P
3. se $S \subseteq A \times A$ è una relazione che gode di tutte le proprietà in P e contiene R, allora contiene anche T.

In altre parole la P-chiusura di R, se esiste, è la minima relazione che contiene R e ha tutte le proprietà in P.

La P-chiusura di R se esiste è unica.
Supponiamo infatti che T ed S siano due P-chiusure di R; dovendo soddisfare la 1. e la 2. entrambe contengono R e godono di tutte le proprietà in P, ma allora per la 3 si ha $T\subseteq S$ ed $S\subseteq T$, cioe T=S.

La P-chiusura di R può coincidere con R? E se sì, quando? (esercizio)

Osserviamo che se
- esiste almeno una relazione che gode di tutte le proprietà in P e che contiene R e
- l'intersezione di relazioni che godono di tutte le proprietà in P gode ancora di tutte quelle proprietà ,

possiamo garantire che esiste la P-chiusura di R.
Infatti l'insieme X delle relazioni che contengono R e godono delle proprietà in P non è vuoto , l'intersezione T di tutte le relazioni appartenenti ad X è una relazione che contiene ancora R, ha tutte le proprietà in P ed inoltre, per come è costruita, è contenuta in tutte le relazioni che contengono R e godono delle proprietà in P (che sono elementi di X).

Possiamo allora concludere che *esistono la chiusura riflessiva, la chiusura simmetrica e la chiusura transitiva di una qualsiasi relazione R.*

In generale invece *non esiste la chiusura seriale* di una relazione R, basta considerare A={a,b}, R={(a,b)}, per trovare una relazione seriale che contenga R dobbiamo aggiungere ad R una coppia il cui primo elemento sia b, quindi (b,a) o (b,b). Nel primo caso otteniamo T={(a,b),(b,a)}, nel secondo S={(a,b),(b,b)}. T ed S sono entrambe seriali e contengono entrambe R ma né $T\subseteq S$ nè $S\subseteq T$.

In generale *non esiste* neppure *la chiusura antisimmetrica* di una relazione R, infatti se R non è antisimmetrica, nessuna relazione che contenga R può essere antisimmetrica.

Vogliamo ora dare un modo per costruire la chiusura riflessiva, la chiusura simmetrica e la chiusura transitiva di R:
- la chiusura riflessiva di R è la relazione $R\cup I_A$;
- la chiusura simmetrica di R è la relazione $R\cup R^{-1}$;
- la chiusura transitiva di R è la relazione $\bigcup_{n>0} R^n$.

Verifichiamo come esempio l'ultima di queste affermazioni (le altre sono quasi ovvie).
Dobbiamo provare che la relazione $T=\bigcup_{n>0} R^n$
1) contiene R e questo è immediato
2) è transitiva , infatti se $(a_1,a_2)\in T$ ed $(a_2,a_3)\in T$ esistono m,n>0 tali che $(a_1,a_2)\in R^n$ ed $(a_2,a_3)\in R^m$ e dunque $(a_1,a_3)\in R^{n+m}\subseteq T$
3) è contenuta in ogni relazione transitiva che contenga R; infatti sia S una relazione transitiva che contenga R , si ha $R^2\subseteq S^2$ perché il prodotto di relazioni è compatibile con l'inclusione, inoltre $S^2\subseteq S$ per la transitività di S , dunque $R^2\subseteq S$. Di nuovo per la compatibilità del prodotto con l'inclusione e per la transitività di S si ha $R^3\subseteq S^2\subseteq S$ e ri petendo lo stesso ragionamento (formalizzare bene con l'induzione per esercizio) si ottiene $R^n\subseteq S$ per ogni n>0 e dunque $T\subseteq S$.

Notare bene che in genere non basta fare $R\cup R^2$ per trovare la chiusura transitiva di R, a tal proposito basta considerare A={a,b,c,d}, R={(a,b),(b,c),(c,d)}. Risulta R^2={(a,c),(b,d)}, quindi $R\cup R^2$={(a,b),(b,c),(c,d),(a,c),(b,d)} non è transitiva. Per avere una relazione transitiva bisogna

aggiungere ad R la coppia (a,d) che appartiene ad R^3. In questo caso quindi la chiusura transitiva di R è $R \cup R^2 \cup R^3$ (le potenze successive di R sono infatti vuote)
Ci si potrebbe allora chiedere

Cosa succede poi se consideriamo P come costituito da almeno due proprietà?

E' ovvio che le considerazioni già fatte sulla non esistenza in genere della chiusura seriale e della chiusura antisimmetrica di una relazione, si possono usare anche quando P non è costituito da una sola proprietà ma contiene tra i suoi elementi almeno una delle proprietà seriale e antisimmetrica.

Escludendo queste due proprietà, consideriamo:
- P={riflessività, simmetria }
- P={riflessività, transitività}
- P={simmetria, transitività}
- P={simmetria, riflessività, transitività}

Per tutti questi P esistono le P-chiusure di una relazione $R \subseteq A \times A$ perché
ω_A gode delle proprietà P e contiene R , l'intersezione di relazioni che hanno le proprietà di P è una relazione che gode delle proprietà P e come già visto questo basta a garantire l'esistenza della P-chiusura di R.
Vediamo allora di costruire queste P chiusure:
- la chiusura riflessiva e simmetrica di R è la relazione $R \cup I_A \cup R^{-1}$;
- la chiusura riflessiva e transitiva di R è la relazione $\bigcup_{n \geq 0} R^n$;
- la chiusura simmetrica e transitiva di R è la relazione $\bigcup_{n>0} \left(R \cup R^{-1}\right)^n$;
- la chiusura riflessiva, simmetrica e transitiva di R è la relazione $\bigcup_{n>0} \left(R \cup I_A \cup R^{-1}\right)^n$;

Verifichiamo come esempio l'ultima di queste affermazioni (le altre si provano con tecniche del tutto analoghe).
Dobbiamo provare che la relazione $T=\bigcup_{n>0} \left(R \cup I_A \cup R^{-1}\right)^n$

4) contiene R e questo è immediato perché $R \subseteq R \cup I_A \cup R^{-1} \subseteq T$,
5) è riflessiva e questo segue immediatamente da $I_A \subseteq R \cup I_A \cup R^{-1} \subseteq T$,
   è simmetrica e questo segue dal fatto che $R \cup I_A \cup R^{-1}$ è simmetrica ed anche tutte le sue potenze ad esponenti positivi sono simmetriche (prodotto di relazioni simmetriche fra loro permutabili) e quindi T è simmetrica perché unione di relazioni simmetriche
   è transitiva , infatti se $(a_1,a_2) \in T$ ed $(a_2,a_3) \in T$ esistono m,n>0 tali che $(a_1,a_2) \in (R \cup I_A \cup R^{-1})^n$ ed $(a_2,a_3) \in (R \cup I_A \cup R^{-1})^m$ e dunque $(a_1,a_3) \in (R \cup I_A \cup R^{-1})^{n+m} \subseteq T$
6) è contenuta in ogni relazione riflessiva, simmetrica, transitiva che contenga R; infatti sia S una relazione riflessiva, simmetrica, transitiva che contenga R, per la riflessività S contiene anche I_A ed essendo simmetrica se contiene R deve anche contenere R^{-1}, pertanto $R \cup I_A \cup R^{-1} \subseteq S$. Inoltre S in quanto contiene $R \cup I_A \cup R^{-1}$ ed è transitiva deve anche contenere la chiusura transitiva di $R \cup I_A \cup R^{-1}$ che è proprio T.

<u>Esempio</u>: Dati A={a,b,c,d} ed R={(a,a),(a,b),(b,d),(c,d)} costruire la chiusura transitiva di R.
Risulta R^2={(a,a),(a,b),(a,d)} ed $R^3= R^2$={(a,a),(a,b),(a,d)}, quindi la chiusura transitiva di R è la relazione {(a,a),(a,b),(b,d),(c,d),(a,d)} (le potenze di esponente maggiore di 2 non possono infatti aggiungere nuove coppie in questo caso)
Il tutto poteva facilmente essere ottenuto con considerazioni sulla matrice di incidenza di R.

Si ha $M_R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ e quindi $M_{R^2}=(M_R)^2=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ da cui $M_{R\cup R^2}=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, ora poiché

$M_{R^3}=(M_R)^3=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ si ottiene $M_{R\cup R^2\cup R^3}=M_{R\cup R^2}=M_{R\cup R^2\cup R^3\cup R^4\cup \ldots}$.

Calcolare la chiusura simmetrica e transitiva di R.

Si ha $R\cup R^{-1}=\{(a,a),(a,b),(b,d),(c,d),(b,a),(d,b),(d,c)\}$, da cui $(R\cup R^{-1})^2=\{(a,a),(a,b),(a,d),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$ ed $R^3=\{(a,a),(a,b),(a,d),(a,c)\}$

Osservando il modo in cui queste chiusure si presentano, la prima è la chiusura riflessiva della chiusura simmetrica di R, la seconda è la chiusura riflessiva della chiusura transitiva di R, tuttavia avremmo ottenuto lo stesso risultato se avessimo fatto rispettivamente la chiusura simmetrica della chiusura riflessiva e la chiusura transitivadella chiusura riflessiva.

La chiusura simmetrica e transitiva di R è la chiusura transitiva della chiusura simmetrica di R, in questo caso va notato che la facendo la chiusura simmetrica della chiusura transitiva di R, calcolando cioè $\bigcup_{n>0} R^n \cup \left(\bigcup_{n>0} R^n\right)^{-1}$ non avremmo in generale ottenuto la relazione cercata, infatti la relazione $\bigcup_{n>0} R^n \cup \left(\bigcup_{n>0} R^n\right)^{-1}$ può non essere transitiva (ricordarsi che l'unione di relazioni transitive non è necessariamente transitiva).

A tal scopo basta considerare $A=\{a,b,c\}$, $R=\{(a,b),(b,c)\}$; risulta $\bigcup_{n>0} R^n=\{(a,b),(b,c),(a,c)\}$ e dunque $\bigcup_{n>0} R^n \cup \left(\bigcup_{n>0} R^n\right)^{-1}=\{(a,b),(b,c),(a,c),(b,a),(c,b),(c,a)\}$ che non è transitiva.

Analogamente la chiusura riflessiva, simmetrica e transitiva di R è la chiusura transitiva della chiusura riflessiva e simmetrica di R, se avessimo fatto la chiusura simmetrica della chiusura riflessiva e transitiva di R in generale non avremmo trovato il risultato voluto (avremmo potuto perdere la transitività).

<u>Esercizio</u>: Facendo la chiusura riflessiva della chiusura simmetrica e transitiva di R, otteniamo la chiusura riflessiva, simmetrica e transitiva di R?

Relazioni di equivalenza

Una relazione binaria R su A che goda delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva si chiama <u>relazione di equivalenza</u> su A.

<u>Esempi</u>

- La relazione di uguaglianza sull'insieme N dei numeri naturali è una delle prime relazioni di equivalenza che avete incontrato
- La relazione di similitudine tra i triangoli di un piano è una relazione di equivalenza che vi è ben nota

- Siano Z l'insieme degli interi relativi ed n un intero >1 fissato. La relazione $R\subseteq Z\times Z$ definita ponendo $(r,s)\in R$ sse n divide r-s (scriveremo nel seguito $r\equiv s \pmod n$ per indicare che $(r,s)\in R$ e $n|m$ per dire che n divide m) è una relazione di equivalenza, detta relazione di congruenza modulo n.
  Infatti per ogni $r\in Z$ si ha $r\equiv r \pmod n$ perché $n|0=r-r$, quindi la relazione è riflessiva;
  se $r\equiv s \pmod n$, cioè se $n \mid r-s$, questo significa che esiste un $h\in Z$ tale che $r-s = h\cdot n$ e quindi $s-r = (-h)\cdot n$, cioè $n \mid s-r$ da cui $s\equiv r \pmod n$, quindi la relazione è simmetrica;
  se $r\equiv s \pmod n$ e $s\equiv t \pmod n$, cioè se n divide r-s e s-t, esistono $h,k\in Z$ tali che $r-s = h\cdot n$ e $s-t = k\cdot n$, dunque sommando membro a membro queste due uguaglianze si ottiene $r-t=(h+k)n$, ovvero $n |r-t$ da cui $r\equiv t \pmod n$, quindi la relazione è transitiva.
- Ricordiamo che due matrici A,B quadrate di ordine n (a coefficienti reali) si dicono simili se esiste una matrice P (quadrata di ordine n e non singolare) tale che $A=P^{-1}BP$ (riguardare gli appunti di EAMG).
  La relazione di similitudine è una relazione di equivalenza nell'insieme delle matrici quadrate di ordine n (a coefficienti reali).
  Verifichiamo che la relazione di similitudine gode della proprietà riflessiva:
  dobbiamo cioè trovare per ogni matrice A quadrata di ordine n una matrice P tale che $A=P^{-1}AP$ (facile! $P=I_n$, matrice identica di ordine n).
  Verifichiamo che la relazione di similitudine gode della proprietà simmetrica:
  dobbiamo cioè provare che se A è simile a B, cioè se esiste una matrice P tale che $A=P^{-1}BP$, allora B è simile ad A, cioè esiste una matrice Q tale che $B=Q^{-1}AQ$. Per far ciò, moltiplichiamo a sinistra e a destra $A=P^{-1}BP$ rispettivamente per P e P^{-1}, otteniamo $PAP^{-1}= P(P^{-1}BP)P^{-1}= (PP^{-1})B(PP^{-1})=B$, da cui ricordando che $P=(P^{-1})^{-1}$ otteniamo ancora $B=(P^{-1})^{-1}AP^{-1}$ e quindi abbiamo che B è simile ad A (prendere $Q= P^{-1}$!)
  Verifichiamo che la relazione di similitudine gode della proprietà transitiva:
  dobbiamo cioè provare che se A è simile a B e B è simile a C, cioè se esistono due matrici P e Q tali che $A = P^{-1}BP$ e $B = Q^{-1}CQ$, allora A è simile a C, cioè esiste una matrice D tale che $A = D^{-1}CD$. Per far ciò, sostituiamo in $A=P^{-1}BP$ la matrice B con $Q^{-1}CQ$, otteniamo $A=P^{-1}(Q^{-1}CQ)P = (P^{-1}Q^{-1})C(QP)=B$, da cui ricordando che $(P^{-1}Q^{-1}) = (QP)^{-1}$ abbiamo che $A=(QP)^{-1}C (QP)$ è simile ad C (prendere D= QP !).
- Nell'insieme di tutti gli uomini la relazione che associa due uomini sse essi sono nati nello stesso anno è una relazione di equivalenza.

Osserviamo che la chiusura riflessiva, simmetrica e transitiva di una relazione R è una relazione d'equivalenza ed è la minima relazione di congruenza che contiene R, tale relazione viene anche chiamata chiusura di equivalenza di R o più comunemente *relazione d'equivalenza generata da R*.

Nel seguito denoteremo le relazioni di equivalenza con le lettere minuscole dell'alfabeto greco.

<u>Esercizi</u>
L'intersezione di relazioni di equivalenza è una relazione d'equivalenza?
L'unione di relazioni di equivalenza è una relazione d'equivalenza?
Il prodotto di relazioni di equivalenza è una relazione d'equivalenza?
La relazione inversa di una relazione di equivalenza è una relazione d'equivalenza?
Giustificare brevemente le risposte positive e fornire un controesempio nel caso di risposta negativa.

Data una relazione di equivalenza ρ su un insieme A, per ogni $a \in A$, chiamiamo classe di equivalenza (rispetto a ρ) avente come rappresentante a, o più semplicemente ρ-classe di a, l'insieme

$$\rho_a = \{x \in A | (a,x) \in \rho\}.$$

Esempi.

- Sia consideri l'insieme N e sia ρ la relazione d'uguaglianza su N; la ρ-classe di un intero naturale n è costituita dal solo elemento n.
- Si consideri l'insieme di tutti i triangoli del piano e sia ρ la relazione di similitudine fra triangoli.
  Riferito il piano ad un sistema di coordinate cartesiane, sia T il triangolo di vertici O, A=(1,0), B=(0,1); la ρ-classe di T è l'insieme di tutti i triangoli isosceli e rettangoli.
- Sull'insieme Z sia ρ la relazione di congruenza modulo 2¸ la ρ-classe di 0 è l'insieme di tutti gli interi pari, la ρ-classe di 1 è l'insieme di tutti gli interi dispari. Cosa è la ρ-classe di 4? (esercizio)
- Sull'insieme delle matrici reali quadrate di ordine 2, sia ρ la relazione di similitudine fra matrici. Sia $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. La ρ-classe di A è l'insieme delle matrici cui A è simile, cioè è l'insieme delle matrici B tali che $A= P^{-1}BP$ per qualche matrice non singolare P, cioè anche l'insieme delle matrici simili ad A, (secondo il programma di EAMG, dovreste sapere che una matrice si dice diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale e che una matrice con tutti gli autovalori distinti è sempre diagonalizzabile e che matrici simili hanno gli stessi autovalori) quindi la ρ-classe di A è l'insieme di tutte e sole le matrici che hanno come autovalori 1 e 2 (infatti ogni matrice simile ad A ha gli stessi autovalori di A, cioè 1 e 2, viceversa ogni matrice che abbia come autovalori 1 e 2 è diagonalizzabile e quindi simile ad una matrice diagonale che abbia sulla diagonale 1 e 2). Come sono fatte le ρ-classi della matrice identica e della matrice nulla?
- Sull'insieme di tutti gli uomini si consideri la relazione ρ che associa due uomini se e solo se sono nati nello stesso anno. La ρ-classe del prof.Giacconi (Nobel per la fisica) è l'insieme formato da tutti gli uomini nati nel 1931.

Si dice partizione di A un insieme $\{B_i | i \in I\}$ di sottoinsiemi di A tale che sia $\bigcup_{i \in I} B_i = A$ e $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ implichi $B_i = B_j$.

Esempi

- La suddivisione di Z nei due sottoinsiemi degli interi pari e degli interi dispari è una partizione di Z.
- La suddivisione di tutti gli uomini nei sottoinsiemi di coloro che sono coetanei (nati nello stesso anno) è una partizione dell'insieme degli uomini.

Osserviamo che:
data una relazione d'equivalenza ρ su un insieme A, le ρ-classi di A sono una partizione di A. Tale partizione si dice *partizione indotta* da ρ.

Infatti ogni elemento a di A appartiene a ρ_a (per la proprietà riflessiva di ρ), quindi $\bigcup_{a \in A} \rho_a = A$. Inoltre se esiste $c \in \rho_a \cap \rho_b$ abbiamo $\rho_a = \rho_b$, infatti $c \in \rho_a \cap \rho_b$ implica $(a,c) \in \rho$ e $(b,c) \in \rho$, quindi, per la simmetria di ρ, $(c,b) \in \rho$ e, per la transitività di ρ, $(a,b)\in\rho$ e di nuovo per simmetria, $(b,a)\in\rho$. Sia ora $x\in\rho_a$ cioè $(a,x)\in\rho$, per transitività (essendo $(b,a)\in\rho$), si ottiene $(b,x)\in\rho$ cioè $x\in\rho_a$ quindi $\rho_a\subseteq\rho_b$. Analogamente si ottiene $\rho_b\subseteq\rho_a$ e quindi $\rho_a=\rho_b$.

Viceversa:
data una partizione di A è sempre possibile definire una relazione d'equivalenza ρ che induca su A la partizione data.
Si definisce ρ ponendo $(a,b)\in\rho$ se e solo se a,b stanno nello stesso elemento della partizione, il resto è quasi ovvio.

L'insieme delle ρ-classi di A si dice <u>insieme quoziente di A rispetto a ρ</u> e si indica con A/ρ .
Dunque $A/\rho = \{\rho_a \mid a\in A\}$

<u>Esempi</u>

- Determinare l'insieme quoziente di Z rispetto alla relazione di congruenza modulo 3.

Osserviamo che la classe che contiene 0 è formata da tutti e soli gli interi m tali che 3 | m-0, cioè da tutti e soli i multipli di 3. Tale classe coincide con la classe che ha per rappresentante 3 (in quanto 3 appartiene sia alla classe che ha per rappresentante 0 sia alla classe che ha come rappresentante 3 e due classi che hanno un elemento comune coincidono); lo stesso argomento si può usare per provare che la classe che ha come rappresentante 0 coincide con ogni classe che abbia per rappresentante un intero della forma 3h con h intero relativo.
La classe che contiene 1 è formata da tutti e soli gli interi m tali che 3 | m-1, cioè da tutti e soli i numeri della forma 3h+1 con h intero relativo; la classe che contiene 2 è formata da tutti e soli gli interi m tali che 3 | m-2, cioè da tutti e soli i numeri della forma 3h+2 con h intero relativo.
Queste 3 classi sono una partizione di Z e pertanto sono le sole classi distinte di Z rispetto alla relazione di congruenza modulo 3 e sono pertanto i 3 elementi dell'insieme quoziente di Z rispetto alla relazione di congruenza modulo 3; tale insieme viene di solito indicato con Z_3 e i suoi elementi vengono chiamati classi di resto modulo 3 e denotati con {0},{1},{2} (osservate che i possibili resti della divisione di un intero per 3 sono 0,1,2 e che un interio m sta nella classe {i} se e solo se dividendo m per 3 si ottiene resto i)
Notiamo che l'insieme quoziente di Z rispetto alla relazione di congruenza modulo n viene di solito indicato con Z_n e i suoi elementi vengono chiamati classi di resto modulo n; con considerazioni analoghe alle precedenti si prova che ci sono n classi distinte {0},{1},{2},...,{n-1}, dove la generica classe {r} è formata dagli interi della forma nh+r.

- Siano A= {a,b,c,d,e} ed R= {(a,b),(a,d),(c,e)}, determinare la relazione d'equivalenza ρ generata da R e l'insieme A/ρ.

Dobbiamo costruire la chiusura transitiva della chiusura riflessiva e simmetrica di R, cioè la chiusura transitiva di T={(a,b),(a,d),(c,e),(a,a),(b,b),(c,c),(b,a),(d,a),(e,c)}.
Risulta T^2 ={(a,b),(a,d),(c,e),(a,a),(b,b),(c,c),(b,a),(d,a),(e,c),(b,d),(d,b)} (aiutarsi col grafo o con la matrice di incidenza) e $T^2 = T^3$, quindi $\rho=T\cup T^2 = T^2$.
Osserviamo ora che ρ_a ={a,b,d} in quanto $(a,a),(a,b),(a,d)\in\rho$ mentre $(a,c),(a,e)\notin\rho$. Inoltre è ovviamente $\rho_a=\rho_b=\rho_d$. Si ha poi ρ_c ={c,e} in quanto $(c,e)\in\rho$. Dunque $A/\rho=\{\rho_a, \rho_b\}$.

- Determinare la relazione d'equivalenza ρ su Z che induce su Z la partizione nei due sottoinsiemi degli interi pari e degli interi dispari.

Due interi sono associati in ρ se e solo se sono entrambi pari o entrambi dispari, cioe se e solo se la loro differenza è divisibile per 2. La relazione ρ è dunque la congruenza modulo 2.

- Determinare la relazione d'equivalenza ρ su A= {a,b,c,d,e} che induce su A la partizione {{a},{b,d,e},{c}}.

Ovviamente ρ ={(a,a),(b,b),(b,d),(b,e),(d,b),(d,d),(d,e),(e,b),(e,d),(e,e),(c,c)}.
Si suggerisce di costruire sia il grafo sia la matrice di incidenza di ρ.

Relazioni d'ordine

Una relazione binaria R su A che goda delle proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva si chiama relazione d'ordine su A. Inoltre se per ogni coppia di elementi a,b di A si ha o $(a,b)\in R$ o $(b,a)\in R$, R si dice relazione d'ordine totale. Se invece esistono due elementi in A tali che né $(a,b)\in R$ né $(b,a)\in R$, tali elementi si dicono non confrontabili rispetto ad R.
Un insieme su cui sia data una relazione d'ordine si chiama insieme parzialmente ordinato o poset (da partially ordered set). Nel caso in cui la relazione sia totale e si voglia evidenziare questo fatto si parla di insieme totalmente ordinato.

Esempi.
- La usuale relazione $\leq$ è una relazione d'ordine totale su N.
- Considerato l'insieme delle parti di un insieme A, P(A), la relazione di inclusione debole è una relazione d'ordine su P(A) e non è totale.
- La relazione di divisibilità è una relazione d'ordine su N e non è totale.
- La relazione di divisibilità non è una relazione d'ordine su Z (perché? esercizio)

Osserviamo che la proprietà riflessiva può sembrare una richiesta un po' forte, richiedendo questa proprietà non sono chiamate relazioni d'ordine la usuale relazione $<$ in N (Z, Q, R, C) e la inclusione forte di insiemi nell'insieme delle parti di A.
Alcuni testi quindi non richiedono la riflessività, ma in tal caso risulta essere una relazione d'ordine la relazione $\emptyset$, ma rispetto a questa relazione tutte le coppie di elementi sarebbero formate da elementi non confrontabili.
In genere nei testi di matematica è richiesta la proprietà riflessiva ed in quelli di informatica no.

Se R è una relazione d'ordine su A si usa per convenzione scrivere $a\leq b$ o $b\geq a$ per dire che $(a,b)\in R$.

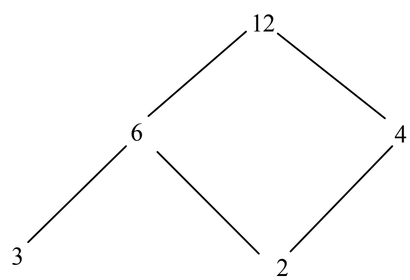
Esercizi
L'intersezione di relazioni d'ordine è una relazione d'ordine?
L'unione di relazioni d'ordine è una relazione d'ordine?
Il prodotto di relazioni d'ordine è una relazione d'ordine?
La relazione inversa di una relazione d'ordine è una relazione d'ordine?
Giustificare brevemente le risposte positive e fornire un controesempio nel caso di risposta negativa.

Osserviamo che data una relazione R non esiste in genere una relazione d'ordine che contenga R perché se R non è antisimmetrica tutte le relazioni che contengono R non sono antisimmetriche.
Ci si potrebbe allora chiedere se una relazione antisimmetrica R possa sempre esserecontenuta in una relazione d'ordine. Poiché una relazione d'ordine è riflessiva e transitiva, se esistesse una relazione d'ordine contenente R, questa conterrebbe la chiusura riflessiva e transitiva di R. Se tale chiusura non risulta antisimmetrica, allora non esiste una relazione d'ordine che contiene R). Se invece è antisimmetrica è anche una relazione d'ordine e quindi abbiamo trovato una relazione d'ordine che contiene R (che è tra l'altro la minima relazione d'ordine che contiene R).

Quando si lavora con relazioni d'ordine $\leq$ su A, si utilizza spesso una versione semplificata del grafo di incidenza di $\leq$, detto diagramma di Hasse.
Questo diagramma si ottiene dal grafo di incidenza usando alcune convenzioni:
- non si rappresentano gli autoanelli (perché su ogni vertice ce ne è uno)
- non si mette la freccia sugli archi (perché ogni arco ha una sola freccia), ma si assume che ogni arco vada dal vertice che sta più in basso a quello che sta più in alto nel disegno

- se c'è un arco che va dal vertice a al vertice b ed uno che va dal vertice b al vertice c, si evita di disegnare l'arco (sicuramente presente nel grafo per la transitività della relazione) che va dal vertice a al vertice c.

<u>Esempio</u>
Sia $A=\{2,3,4,6,12\}$ e si consideri su A la relazione definita ponendo $a\leq b$ sse a divide b.
Abbiamo $2\leq 2$, $2\leq 4$, $2\leq 6$, $2\leq 12$, $2\leq 4$, $3\leq 6$, $3\leq 12$, $4\leq 12$, $6\leq 12$ mentre tutte le altre coppie di elementi di A sono formate da elementi non confrontabili.
Il digramma di Hasse è allora



Disegnare il grafo di incidenza e vedere quanto è più complesso.

Si consideri ora un insieme parzialmente ordinato A (e indichiamo con $\leq$ la sua relazione d'ordine)

Diciamo <u>minimo</u> di A (se esiste) un $m\in A$ tale che per ogni $a\in A$ sia $m\leq a$.
Diciamo <u>massim</u>o di A (se esiste) un $m\in A$ tale che per ogni $a\in A$ sia $a\leq m$.
Diciamo <u>elemento minimale</u> di A (se esiste) un $m\in A$ tale che $a\in A$ ed $a\leq m$ implichino $a=m$ (in altre parole per ogni $a\in A$ si ha o a non confrontabile con m o $m\leq a$)
Diciamo <u>elemento massimale</u> di A (se esiste) un $m\in A$ tale che $a\in A$ ed $m\leq a$ implichino $a=m$ (in altre parole per ogni $a\in A$ si ha o a non confrontabile con m o $a\leq m$).

L'insieme parzialmente ordinato di cui abbiamo sopra il diagramma di Hasse ha 12 come massimo e 2, 3 come elementi minimali.

Osserviamo che:
- il minimo (massimo) se esiste è unico
- se un insieme parzialmente ordinato è finito ed ha un unico elemento minimale (massimale) questo è un minimo (massimo).

Sia ora B un sottoinsieme dell'insieme parzialmente ordinato A ,
diciamo <u>minorante</u> di B (se esiste) un elemento $m\in A$ tale che per ogni $b\in B$ sia $m\leq b$.
diciamo <u>maggiorante</u> di B (se esiste) un elemento $m\in A$ tale che per ogni $b\in B$ sia $b\leq m$.
chiamiamo <u>estremo inferiore di B</u> e lo indichiamo con inf B il massimo, se esiste, dei minoranti di B (N.B. sempre rispetto alla relazione definita in A!)
chiamiamo <u>estremo superiore di B</u> e lo indichiamo con sup B il minimo, se esiste, dei maggioranti di B (N.B. sempre rispetto alla relazione definita in A!)

Se consideriamo il sottoinsieme B={2,3} dell'insieme A dell'esempio precedente non esistono minoranti di B e quindi neppure inf B; 6,12 sono maggioranti di B e si ha sup B=6

Osserviamo che:
- se B ha un minimo questo è un minorante di B ed è inf B
- se B ha un massimo questo è un maggiorante di B ed è sup B
- se un minorante di B appartiene a B, allora è il minimo di B ed è inf B
- se un maggiorante di B appartiene a B, allora è il massimo di B ed è sup B.

Un insieme parzialmente ordinato tale che per ogni sua coppia di elementi a,b esistano inf {a,b} e sup {a,b} si dice <u>reticolo</u>

<u>Esempio</u>
L'insieme dell'esempio precedente non è un reticolo, non esiste infatti inf {2,3}.
L'insieme B={2,4,6,12} rispetto alla relazione d'ordine definita ponendo a≤b sse a divide b è un reticolo (trovare inf e sup di ogni coppia di suoi elementi).