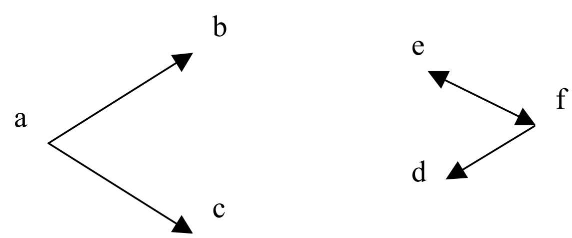
Si consideri la relazione binaria sull'insieme X={a,b,c,d,e} avente come matrice di incidenza la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificare che la chiusura riflessiva e transitiva di tale relazione è una relazione d'ordine $\leq$ su X. Indicare elementi minimali e massimali di X rispetto a $\leq$. Dire se X è un reticolo rispetto a tale relazione. In caso negativo trovare una relazione R contenente $\leq$ tale che X rispetto ad R sia un reticolo. Il reticolo così trovato è distributivo?

Siano X={a,b,c,d,e,f} ed R la relazione binaria su X rappresentata dal seguente grafo:



Si costruiscano la relazione d'equivalenza ρ su X generata da R e l'insieme quoziente X/ρ. Indicata con ρ_x la classe di equivalenza di x ($x \in X$) rispetto a ρ, si dica, giustificando brevemente la risposta, se le relazioni $\{(x,\rho_x) | x \in X\}$ e $\{(\rho_x,x) | x \in X\}$ sono funzioni di X in X/ρ e di X/ρ in X rispettivamente. Nel caso siano funzioni si dica se sono funzioni suriettive, iniettieve o biunivoche e si discuta l'esistenza della funzione inversa fornendo anche, ove possibile, una funzione inversa (anche sinistra e/o destra) ed indicando il loro numero.
Si dica, giustificando brevemente la risposta, se la chiusura simmetrica e riflessiva della chiusura transitiva di R coincide con ρ.

Sia $X = \{a,b,c,d,e\}$ e si consideri la relazione binaria R su X avente la seguente matrice di incidenza

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Costruire la chiusura riflessiva e transitiva di R e provare che è una relazione d'ordine $\leq$ su X
Dire se X rispetto a $\leq$ è un reticolo. Determinare elementi massimali e minimali di X rispetto a $\leq$ e dire se sono massimi o minimi. Provare che R non è una funzione da X a X e che non contiene né è contenuta in nessuna funzione da X ad X.

Mostrare che ≤ contiene una ed una sola funzione biunivoca di X in sé e che questa è la funzione identica su X.
Costruire la relazione d'equivalenza ρ generata da R e descrivere l'insieme quoziente X/ρ.

Sia X={a,b,c,d,e} e si consideri su X la relazione binaria R avente come matrice di incidenza

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Provare che esiste la minima relazione d'ordine ≤ contenente R. Dire se X è un reticolo rispetto alla relazione ≤. Determinare elementi minimali e massimali di X rispetto alla relazione ≤ e dire se sono minimi o massimi. Provare che R è una funzione da X ad X e dire se ammette inversa destra e/o sinistra.. Verificare che ≤ non è una funzione da X ad X.
Dire, giustificando la risposta, se la chiusura simmetrica di ≤ è la minima relazione d'equivalenza contenente R

Sia X={a,b,c,d,e} e si consideri su X la relazione binaria R avente come matrice di incidenza

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Provare che esiste la minima relazione d'ordine ≤ contenente R. Dire se X è un reticolo rispetto alla relazione ≤. Determinare elementi minimali e massimali di X rispetto alla relazione ≤ e dire se sono minimi o massimi. Provare che R è una funzione da X ad X e dire se ammette inversa destra e/o sinistra. Verificare che ≤ non è una funzione da X ad X.
Costruire la relazione d'equivalenza ρ generata da R e descrivere l'insieme quoziente X/ρ.
Provare che se la chiusura transitiva di una relazione binaria T su un insieme Y è una funzione T deve essere una funzione e transitiva .
(Si suggerisce di considerare T^2 e di confrontarla con T).

Si consideri la relazione binaria sull'insieme X={a,b,c,d,e} avente come matrice di incidenza la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dire se la chiusura riflessiva e transitiva R di tale relazione è una relazione d'ordine su X. In caso contrario trovare una relazione d'ordine ≤ su X contenuta in R e non contenuta in nessuna altra relazione d'ordine contenuta in R. Dire se ≤ è la massima relazione d'ordine contenuta in R.
Trovare gli elementi minimali e massimali e gli eventuali massimi e minimi di X rispetto a ≤. Dire se X è un reticolo rispetto a tale relazione. In caso negativo trovare una relazione T contenente ≤ tale che X rispetto a T sia un reticolo.

Si consideri la relazione binaria R su Z così definita:
$(a,b)\in R$ se e solo se a,b sono entrambi maggiori o uguali a 10
oppure a,b sono minori di 10 e $b=a+3$.
Come sono fatte la relazione di equivalenza generata da R e la chiusura transitiva di R?

Si consideri la relazione binaria R su Z così definita:
$(a,b)\in R$ se e solo se a,b sono entrambi maggiori o uguali a 10
oppure a,b non sono entrambi maggiori di 10 e $b=a+3$.
Dimostrare che la relazione di equivalenza generata da R è la relazione universale e descrivere la chiusura transitiva di R?

Sia X={a,b,c,d} e sia R la relazione su X rappresentata dal seguente grafo.

$$a \longrightarrow b \qquad c \longleftarrow d$$

Dimostrare che ogni relazione che sia una funzione da X ad X con inversa destra e contenga R è una funzione biunivoca di X in X.
L'insieme S formato dalla funzione identica su X e dalle funzioni biunivoche da X ad X che contengono R è un sottogruppo del gruppo delle sostituzioni su X? Esiste un sottoinsieme di S che è un sottogruppo del gruppo delle sostituzioni su X?

Sia M una matrice 5×5 in cui $a_{12}=a_{14}=a_{31}=1$. Completare M col minimo numero di 1 necessari a renderla la matrice di incidenza di una relazione d'equivalenza R su X={a,b,c,d,e}. Scrivere le classi di equivalenza della relazione R. E' possibile completare M in modo che sia la matrice d'incidenza di una funzione da X ad X? Giustificare la risposta.

Si consideri l'insieme M delle matrici 5×5 con elementi in {0,1} con $a_{21}=a_{42}=a_{31}=1$. Si scelga in M una matrice in modo che risulti la matrice di incidenza di una relazione d'equivalenza R su X={a,b,c,d,e} e che nessuna altra matrice di M possa essere la matrice di incidenza di una relazione d'equivalenza contenuta in R. R è unica? Scrivere le classi di equivalenza della relazione R. E' possibile trovare in M la matrice d'incidenza di una funzione da X ad X? Giustificare la risposta.
Tra le matrici di M sceglierne una in modo che sia matrice di incidenza di una relazione d'ordine ≤ su X. Precisare elementi massimali e minimali di X rispetto a tale relazione ≤ e dire se X è un reticolo rispetto alla relazione ≤.

Si consideri la relazione binaria R sull'insieme X={a,b,c,d,e} definita dalla seguente matrice di incidenza

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Di quali proprietà gode R?
2) Costruire la chiusura riflessiva e transitiva $\overline{R}$ di R e verificare che è una relazione d'ordine.
3) Dire se X rispetto ad $\overline{R}$ è un reticolo distributivo, complementato.
4) Dimostrare che se in un reticolo esiste un elemento massimale, tale elemento è un massimo
5) R è una funzione di X in X? Mostrare che R non può essere contenuta in nessuna funzione da X in X.

6) Esiste una funzione suriettiva da X in X contenuta in R? Ed una iniettiva?
Giustificare ogni risposta.

Si considerino l'insieme X={a,b,c,d,e,f} e la relazione binaria R su X così definita

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[dr] & b \arrow[r] & c & d \arrow[r] & e \\
 & f & & &
\end{tikzcd}$$

Si costruiscano la relazione di equivalenza ρ generata da R (cioè la chiusura di equivalenza di R) e le relative classi di equivalenza.
Si mostri che se T è una relazione d'equivalenza su X contenente R o coincide con ρ o è la relazione universale su X.

Sia X={a,b,c,d,e} e sia R la relazione su X rappresentata dal seguente grafo.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] & b & c & d \arrow[l] \\
e \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Indicare le proprietà di R.
Determinare la relazione d'equivalenza ρ generata da R e l'insieme quoziente X/ρ.
Dire se esistono e quante sono le funzioni f da X ad X che contengono R, e se esistono funzioni da X ad X che contengono R ed ammettono inversa sinistra.
La proiezione canonica da X ad X/ρ ammette inversa sinistra e/o destra? In caso affermativo dire quante inverse destre e/o sinistre ammette e fornirne almeno un esempio.

Sia X={a,b,c,d,e} e sia R la relazione su X rappresentata dal seguente grafo.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] & b & c & d \arrow[l] & e \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Dimostrare che ogni relazione che sia una funzione da X ad X con inversa destra e contenga R è una funzione biunivoca di X in X.
Provare che la chiusura riflessiva e transitiva di R è una relazione d'ordine ≤ su X, indicare gli elementi massimali e minimali di X, rispetto a ≤. Provare che i sottoinsiemi di X che sono reticoli rispetto alla relazione ≤ sono tutti totalmente ordinati rispetto a ≤.

Si consideri la relazione binaria sull'insieme X={a,b,c,d,e} avente come matrice di incidenza la matrice

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & \\
 & & & &
\end{pmatrix}$$

0	0	0	0	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1

Dire se la chiusura riflessiva e transitiva R di tale relazione è una relazione d'ordine su X. In caso contrario trovare una relazione d'ordine $\leq$ su X contenuta in R e non contenuta in nessuna altra relazione d'ordine contenuta in R. Dire se $\leq$ è la massima relazione d'ordine contenuta in R. Trovare gli elementi minimali e massimali e gli eventuali massimi e minimi di X rispetto a $\leq$. Dire se X è un reticolo rispetto a tale relazione. In caso negativo trovare una relazione T contenente $\leq$ tale che X rispetto a T sia un reticolo.

Si considerino l'insieme R[x] dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x e la relazione binaria ρ su R[x] definita ponendo $(f(x),g(x))\in \rho$ se e solo se o il grado di f(x) è minore di quello di g(x) oppure f(x) e g(x) hanno lo stesso grado ed i coefficienti di f(x) sono minori dei corrispondenti coefficienti di g(x). Elencare le proprietà di ρ e determinare la minima relazione d'ordine $\leq$ su R[x] contenente ρ. Dimostrare che R[x] rispetto a $\leq$ è un reticolo con minimo. Dimostrare che la relazione di equivalenza generata da ρ è la relazione universale su R[x].

Si considerino l'insieme R[x] dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x e la relazione binaria ρ su R[x] definita ponendo $(f(x),g(x))\in \rho$ se e solo se o il grado di f(x) è minore di quello di g(x) oppure f(x) e g(x) hanno lo stesso grado ed il coefficiente direttivo di f(x) è minore o uguale a quello di g(x). Dire se ρ è una relazione d'ordine su R[x] e dimostrare che la relazione d'equivalenza generata da ρ è la relazione universale su R[x].

Si consideri un punto P del piano e sia ϕ il fascio di rette di sostegno P.
Si consideri la corrispondenza binaria π tra le rette di ϕ che ad ogni retta del fascio associa la sua perpendicolare passante per P. Si elenchino le proprietà di π. Si determini la relazione d'equivalenza generata da π. Si dica se π è una funzione da ϕ in ϕ e in caso positivo se tale funzione è invertibile.

Cosa succede se si considera la relazione π' fra tutte le rette del piano che ad ogni retta del piano associa la sua perpendicolare per P?

Si considerino l'insieme R[x] dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x e la relazione binaria ρ su R[x] definita ponendo $(f(x),g(x))\in \rho$ se e solo se f(x) e g(x) hanno una radice in comune. Si studino le proprietà di ρ e si dimostri che detta ρ^* la chiusura d'equivalenza di ρ, due polinomi che ammettano radice sono sempre associati in ρ^*.

Si considerino le relazione $f,g \subseteq Z \times N$ definite da $f=\{(2h,|2h|),(2h+1, |2h|+3)|h\in Z\}$, $g=\{(2h,|2h|),(2h+1, |2h+3|)|h\in Z\}$. Si provi che f e g sono funzioni di Z in N e si discuta la esistenza di funzione inversa, inversa destra, inversa sinistra sia di f sia di g, producendone in caso esistano un esempio.

Sia f una applicazione da N ad N definita ponendo

$$f(x)=\begin{cases} 2x+k & \text{se } x \text{ è pari} \\ 3x^2 & \text{se } x \text{ è dispari} \end{cases}$$

dire se è possibile determinare k in modo che f ammetta inversa destra o sinistra o bilatera e se possibile dare un esempio di tale inversa.

Sia G un gruppo formato dai quattro elementi $\{a, b, c, d\}$. Sapendo che $ab=c$, $ac=d$, e che a non è l'elemento neutro calcolare a^2.

Si considerino il gruppo moltiplicativo G delle matrici quadrate non singolari di ordine n e l'applicazione f di G in G definita ponendo $f(A)= (\det^2 A)A$ per ogni $A\in G$. Si provi che f è un omomorfismo di G in G e si dica, giustificando la risposta, se è anche un isomorfismo.

Si consideri il gruppo additivo $<Z,+>$ degli interi relativi. Siano n,m due interi fissati e siano H_n ed H_m i sottogruppi di $<Z,+>$ costituti dai multipli di n ed m rispettivamente Si provi che l'intersezione insiemistica di H_n ed H_m è a sua volta un sottogruppo di $<Z,+>$, mentre l'unione insiemistica di H_n ed H_m è un sottogruppo di $<Z,+>$ se e solo se n divide m od m divide n. Provare che il minimo sottogruppo contenente H_n ed H_m coincide con $<Z,+>$ se e solo se n ed m sono primi fra loro.
Sia $<A^*,.>$ il monoide libero su un alfabeto A e sia $a\in A$. Provare che la relazione binaria R su A^* definita ponendo $(u,v)\in R$ se e solo esiste un intero $h\geq 0$ tale che $v=a^h u$ è una relazione d'ordine su A^*. Per qualche alfabeto A la relazione può essere una relazione d'ordine totale? E in tal caso A^* rispetto ad R ammette minimo e/o massimo? Giustificare la risposta.

Si considerino l'insieme $A=\{a,b,c\}$ ed il monoide libero $<A^*,.>$ sull'alfabeto A. In A^* si consideri la relazione ρ definita da $(u,v)\in\rho$ se e solo se $|u|=|v|$ e $\#_c u=\#_c v$, dove, detta x una parola sull'alfabeto A, $|x|$ indica la lunghezza di x e $\#_c x$ indica il numero di c in x.
Si provi che ρ è una relazione di congruenza su $<A^*,.>$, si indichino gli elementi della ρ-classe della parola abc. Ci sono classi formate da un unico elemento di A^*?

Si considerino l'insieme A^* delle parole sull'alfabeto $A=\{a,b\}$ e la relazione binaria ρ su A^* definita ponendo $(u,v)\in\rho$ se e solo se $|u|\leq|v|$ e $\#_a u=\#_a v$, dove per ogni $x\in A^*$, $|x|$ indica la lunghezza della parola x e $\#_a x$ indica il numero di occorrenze di a in x.
Si indichino le proprietà di cui gode ρ e si descriva la chiusura transitiva ρ^* di ρ. ρ^* è una relazione di equivalenza su A^*?

Si consideri l'insieme $A=\{a,b\}$ e il semigruppo libero $<A^+,\cdot>$ sull'insieme A.
Provare che la relazione binaria $\rho\subseteq A^+\times A^+$ definita ponendo $(u,v)\in\rho$ se e solo se:
$\#_a u = \#_a v$ e $\#_b u = \#_b v$
($\#_x w$ con $x\in A, w\in A^+$ indica il numero di x in w)
è una relazione di equivalenza su A^+. Si provi poi che ρ è anche una relazione di congruenza su $<A^+,\cdot>$.
Facoltativo. Indicato con N l'insieme degli interi non negativi si provi che $<A^+,\cdot>/\rho$ è isomorfo al monoide $<(N\times N)-\{(0,0)\},\oplus>$ ove $\oplus$ è definita ponendo $(n,m)\oplus(r,s)=(n+r,m+s)$.

Sia $<G,\cdot>$ un gruppo con elemento neutro e, tale che per nessun $x\in G$, $x\neq e$, esista un intero positivo n per cui $x^n=e$.
Provare che:
- se $x^h=e$ per qualche intero negativo h allora $x=e$,
- se esistono $n,m\in Z$ con $n\neq m$ tali che $x^n=x^m$ allora $x=e$,
- la relazione binaria R su G definita ponendo $(x,y)\in R$ se e solo se esiste un intero positivo n tale che $x=y^n$ è una relazione d'ordine su G.

Dire se $<Z,+>$ è un insieme totalmente ordinato e se è un reticolo rispetto alla suddetta relazione R e verificare che R non è una relazione di equivalenza in S_3 (gruppo dei movimenti rigidi che portano in sé un triangolo equilatero).
Verificare inoltre che se G è abeliano ed esistono $n\in Z$, $x,y\in G$ tali che $x^n=y^n$ allora $x=y$.

La proprietà vale anche per gruppi non abeliani?

Si considerino il gruppo $<Z_{12},+>$ ed i suoi sottogruppi H={[0],[4],[8]}, H={[0],[6]}. Si provi che l'insieme $X=\{[h]+[k] \mid [h]\in H, [k]\in K\}$ è un sottogruppo di $<Z_{12},+>$.
Si provi che dati un gruppo abeliano $<G, \bullet>$ e due suoi sottogruppi H e K, l'insieme
$X=\{h \bullet k \mid h\in H, k\in K\}$ è un sottogruppo di $<G, \bullet>$.
Si mostri che X è normale in G.
Si verifichi che se ogni elemento $x\in X$ si scrive in un sol modo nella forma $x= h \bullet k$, la
$f: X \to K$ definita ponendo $f(h \bullet k)=k$ è un epimorfismo di X su K.
Si consideri la relazione di congruenza ker f su X e si mostri che la (ker f)-classe dell'elemento neutro di G coincide col sottogruppo H e che il gruppo quoziente X/H (cioè X/ker f) è isomorfo a K.

Si consideri l'insieme P delle matrici quadrate di ordine 2 della forma

$$\begin{bmatrix} a & 2h \\ 0 & a \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad a,h\in Z,$$

dimostrare che P è un anello rispetto alle solite operazioni di somma e prodotto di matrici.

Si considerino l'insieme M delle matrici quadrate non singolari di ordine n sul campo reale e l'applicazione f di M in M definita ponendo $f(A)= (\det^3 A)A$ per ogni $A\in M$. Si provi che f è un omomorfismo del semigruppi moltiplicativo $<M,\cdot>$ in $<M,\cdot>$ ma non è un omomorfismo dell'anello $<M,\cdot,+>$ in $<M,\cdot,+>$ dove $\cdot$ e + indicano rispettivamente gli usuali prodotto e somma di matrici

Si consideri l'insieme $A = Z_6 \times Z_6$ strutturato ad anello con le seguenti operazioni

$$(a,b) + (c,d) =(a+c,b+d)$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac, ad+bc)$$

Si mostri che A è commutativo e dotato di unità. Si trovino i divisori dello zero di A.
Si consideri il sottoinsieme I di A così definito

$$I = \{ (a,0) \mid a\in Z_6 \}$$

e si mostri che non è un ideale di A.

Si consideri l'anello Z_8 delle classi di resti modulo 8 e si provi che l'equazione lineare $\{a\}x=\{3\}$ ($\{a\},\{3\}\in Z_8$) o è impossibile o ammette una ed una sola soluzione.
Dire giustificando brevemente la risposta se le eventuali soluzioni dell'equazione $(\{a\}x+\{b\})(\{c\}x+\{d\})=\{0\}$ ($\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\in Z_8$) in Z_8 sono necessariamente soluzioni di $\{a\}x+\{b\}=\{0\}$ o di $\{c\}x+\{d\}=\{0\}$. Se si pensano $\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}$ in Z_7, la risposta rimane la stessa?

Provare che il polinomio $\{2\}x^2+\{a\}x-\{3\}$ ammette radici in Z_4 solo per $\{a\}=\{1\}$ e per $\{a\}=\{3\}$ e in quei casi dire quali sono le radici.

Si consideri l'equazione $\{5\}x^2+\{a\}x =\{0\}$ con coefficienti in Z_6. Si verifichi che tale equazione ammette sempre le soluzioni $x=\{0\}$ e $x=\{5\}\{6-a\}$ e si determinino, se esistono, dei valori di a per cui l'equazione ammetta più di due soluzioni, trovando in tal caso anche le ulteriori soluzioni.

Trovare in Z_7 la soluzione dell'equazione

$$\{3\}x+\{1\}=\{0\}$$

e dimostrare che è unica.
Discutere esistenza ed unicità della soluzione della stessa equazione in Z_6.
Dire anche per quali valori di a l'equazione

$$\{a\}x+\{b\}=\{0\}$$

ha in Z_6 una ed una sola soluzione.

Determinare un intero x_0 che soddisfi entrambe le congruenze:

$3x\equiv 1 \pmod 5$; $2x\equiv 1 \pmod 7$.

Dimostrare che tutti e soli gli altri interi che soddisfano entrambe le congruenze, soddisfano anche a $x\equiv x_0 \pmod{35}$.

Determinare un intero x_0 che soddisfi entrambe le congruenze:

$2x\equiv 1 \pmod 3$; $5x\equiv 1 \pmod 7$.

Dimostrare che tutti e soli gli altri interi che soddisfano entrambe le congrueze, soddisfano anche a $x\equiv x_0 \pmod{21}$.