TERZA ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 1

Siano $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{1,2\}$.

1. Quante sono le funzioni da *X* in *Y*? Quante di queste sono iniettive?
2. Sia $f : X \to Y$ così definita:

   $f(a) = f(b) = 1$
   $f(c) = 2$

   Dire se *f* ammette inverse destre e sinistre e determinare tali eventuali inverse.
3. Può esistere una funzione $h : Y \to X$ dotata di inversa sinistra?

ESERCIZIO 2

Siano *N* l'insieme dei numeri naturali e *Z* l'insieme dei numeri interi. Data la funzione $f : N \cup \{0\} \to Z$ definita nel seguente modo:

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & se\ n\ è\ pari \\ \\ -\dfrac{n+1}{2} & se\ n\ è\ dispari \end{cases}$$

stabilire se *f* è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

ESERCIZIO 3

Siano *N* l'insieme dei numeri naturali e $f : N \to N$ la funzione definita nel seguente modo:

$$f(n) = \begin{cases} n^2 + 3 & se\ n\ è\ pari \\ 2n + 4 & se\ n\ è\ dispari \end{cases}$$

Discutere l'esistenza di possibili inverse e in caso affermativo esibirne un esempio.

ESERCIZIO 4 (Prova d'esame del 20/2/2006)

Siano dati l'insieme $X = \{a,b,c,d,e\}$ e la relazione $R = \{(b,c),(d,e),(e,a)\}$ definita su *X*.

1. Sia ρ la chiusura transitiva di *R*. Determinare la chiusura riflessiva e simmetrica di ρ e stabilire se la relazione ottenuta è una relazione di equivalenza.
2. Dimostrare che ogni funzione su *X* che contenga *R* e che ammetta inversa sinistra è una funzione biunivoca.
3. Stabilire se l'insieme *B* costituito dalla funzione identica su *X* e dalle funzioni biunivoche su *X* che contengono *R* è un sottogruppo del gruppo delle funzioni biunivoche su *X*.

ESERCIZIO 5 (Prova d'esame del 7/3/2007)

Siano *Z* l'insieme dei numeri interi e *G* l'insieme delle matrici triangolari inferiori di ordine 2 ad elementi interi:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in Z \right\}.$$

1. Si stabilisca per quali valori di *a, b, c* tale insieme è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne e lo si denoti con *G'*.
2. Sia n un intero e si consideri l'insieme H_n così definito:

   $$H_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ kn & 1 \end{pmatrix} \mid k \in Z \right\}.$$

   Si mostri che H_n è un sottogruppo di *G'* e che è normale in *G'*.