Equazioni Differenziali Ordinarie	Prima prova in itinere	7 maggio 2007
Cognome	**Nome**	**Firma**
Prof.ssa Furioli	**Matricola**	**Sezione INF**

Esercizio 1. Riferendosi all'equazione differenziale

$$y' = -\frac{y - y^{1/5}}{1+t^2}$$

a. citando i teoremi noti, prevedere per quali tra i seguenti problemi di Cauchy

$$y(0) = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y(0) = -1$$

la soluzione locale esiste unica;

b. integrare l'equazione;

c. risolvere i problemi di Cauchy del punto *a.*

Soluzione:

a. Si ha $f(t,y) = \frac{y-y^{1/5}}{1+t^2} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, dunque per il teorema di Peano ognuno dei problemi di Cauchy proposti ammette almeno una soluzione. Inoltre, per ogni (t,y) per cui $y \neq 0$ la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = -\frac{1-\frac{1}{5}y^{-4/5}}{1+t^2}$ è continua in (t,y), dunque il teorema di Cauchy–Lipschitz di esistenza ed unicità in piccolo si applica ai problemi $y(0) = 1$ e $y(0) = -1$, mentre per il problema $y(0) = 0$ non si può garantire l'unicità della soluzione.

b. Si tratta di un'equazione a variabili separabili e di Bernoulli. Ricerchiamo le soluzioni costanti.

$$y - y^{1/5} = 0 \iff y^{1/5}(y^{1/5}-1)(y^{1/5}+1)(y^{2/5}+1) = 0 \iff \{y=0\} \cup \{y=1\} \cup \{y=-1\}.$$

Dunque, per l'unicità l'unica soluzione del problema di Cauchy $y(0) = 1$ è la soluzione costante $y_1(t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e l'unica soluzione del problema di Cauchy $y(0) = -1$ è la soluzione costante $y_2(t) = -1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$; invece per il problema di Cauchy $y(0) = 0$ esiste sicuramente la soluzione costante $y_3(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ ma potrebbero esistere anche altre soluzioni non costanti. Se $y(t) \neq 0$ possiamo dividere per $y^{1/5}$ ottenendo

$$\frac{y'}{y^{1/5}} = -\frac{1}{1+t^2}\, y^{4/5} + \frac{1}{1+t^2}$$

da cui ponendo

$$z(t) = y^{4/5}(t)$$

otteniamo l'equazione in z

$$z' = -\frac{4}{5}\,\frac{1}{1+t^2} z + \frac{4}{5}\,\frac{1}{1+t^2} = \frac{4}{5}\,\frac{1}{1+t^2}(1-z).$$

La soluzione costante è $z(t) = 1$ (che dà luogo alle due soluzioni costanti $y(t) = \pm 1$) e per $z(t) \neq 1$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}z}{1-z} &= \frac{4}{5} \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
\ln \frac{1}{|1-z|} &= \frac{4}{5} \arctan t + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
\frac{1}{|1-z|} &= e^C e^{\frac{4}{5}\arctan t} \\
\frac{1}{1-z} &= K e^{\frac{4}{5}\arctan t}, \quad K \neq 0 \\
z(t) &= 1 - H e^{-\frac{4}{5}\arctan t}, \quad H \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

(ove per $H = 0$ si ritrova anche la soluzione costante $z(t) = 1$).

Le soluzioni sono quindi

$$y(t) = \pm \left(1 - H e^{-\frac{4}{5}\arctan t}\right)^{\frac{5}{4}}, \quad H \in \mathbb{R}$$

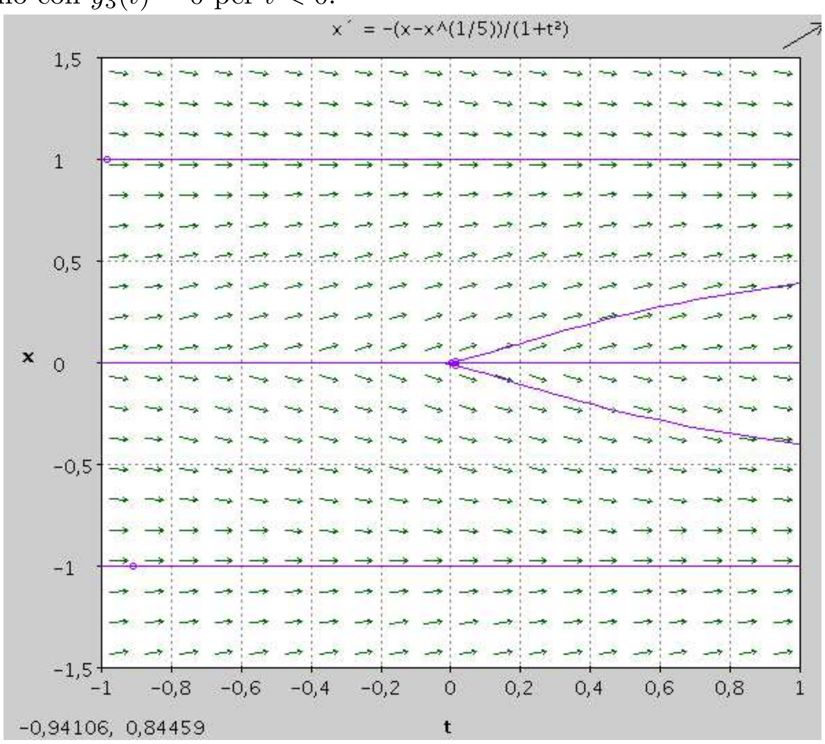
definite per $1 - H e^{-\frac{4}{5}\arctan t} \geq 0$ cioè $e^{\frac{4}{5}\arctan t} \geq H$. Dunque, per $H \leq 0$ le soluzioni sono definite su $\mathbb{R}$, mentre per $H > 0$ le soluzioni sono definite per

$$t \geq \tan\left(\frac{5}{4}\ln H\right).$$

c. Abbiamo già detto che l'unica soluzione del problema di Cauchy $y(0) = 1$ è la soluzione costante $y_1(t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e l'unica soluzione del problema di Cauchy $y(0) = -1$ è la soluzione costante $y_2(t) = -1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per il problema di Cauchy $y(0) = 0$, abbiamo la soluzione costante $y_3(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$; inoltre, per $t = 0$ si ha $y(t) = \pm(1-H)^{5/4}$ dunque per $H = 1$ otteniamo altre due soluzioni del problema di Cauchy $y(0) = 0$:

$$\begin{aligned}
y_4(t) &= \left(1 - e^{-\frac{4}{5}\arctan t}\right)^{\frac{5}{4}}, \quad t \geq 0 \\
y_5(t) &= -\left(1 - e^{-\frac{4}{5}\arctan t}\right)^{\frac{5}{4}}, \quad t \geq 0
\end{aligned}$$

che si raccordano con $y_3(t) = 0$ per $t < 0$.



Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

a1. enunciare un teorema di prolungamento della soluzione in $[a,b]$.
Riferendosi all'equazione differenziale

$$y' = t^3(y-t^2)(4-y^2)$$

b1. specificare se il teorema di prolungamento enunciato al punto *a1* può essere applicato ed eventualmente precisare l'intervallo $[a,b]$;

b2. trovare le soluzioni costanti e il luogo di punti a tangente orizzontale;

b3. determinare le regioni del piano dove le soluzioni sono crescenti e dove sono decrescenti;

b4. disegnare qualitativamente i grafici delle soluzioni che risolvono i problemi di Cauchy:

$$y(0) = -3 \qquad y(0) = -2 \qquad y(0) = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y(0) = 3$$

in tutto il loro insieme di definizione.

Soluzione:

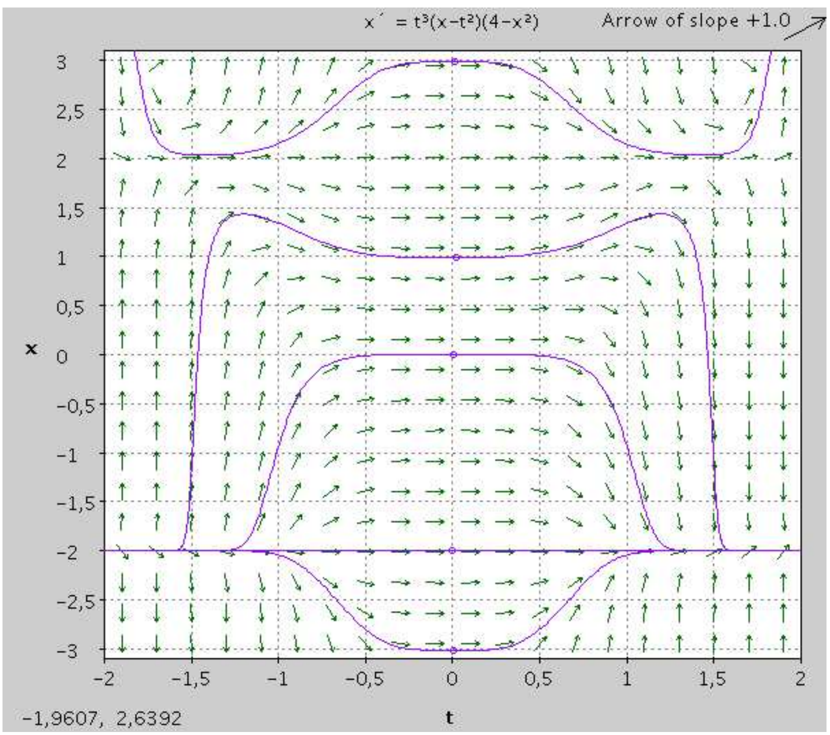
a.1 Teorema di esistenza ed unicità in grande.

b.1 Poiché $f(t,y) = t^3(y-t^2)(4-y^2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ma non ha una crescita al più lineare in y (infatti $f(t,y) \sim y^3$ per $|y| \to \infty$ e $t \in \mathbb{R}$), non si può applicare il teorema di esistenza ed unicità in grande ad alcun intervallo $[a,b]$. Tuttavia, le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità in piccolo sono verificate, quindi per ogni punto $(t_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ passa un'unica soluzione.

b.2 Le soluzioni costanti sono $y(t) = 2$ e $y(t) = -2$, definite su $\mathbb{R}$. Il luogo dei punti del piano a tangente orizzontale è

$$\{(t,y) : y^2 = 4\} \cup \{(t,y) : t = 0\} \cup \{(t,y) : y = t^2\}$$

b.3-b.4



Tutte le soluzioni sono definite su $\mathbb{R}$: quelle comprese tra $y = -2$ e $y = 2$ perché sono inscatolate, quelle che si trovano nel semipiano $y < -2$ a causa del segno della derivata e quelle per $y > 2$ poiché definitivamente sono esterne alla parabola $y = t^2$.

Esercizio 3. È dato il sistema lineare a coefficienti costanti:

$$z' = Az, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ a & -1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

a. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ la stabilità dell'origine nel piano delle fasi, classificando tale punto;

b. nel caso $a = 0$

(1) determinare gli autovettori di A;
(2) descrivere le traiettorie nell'intorno dell'origine.

Soluzione:

a. Si ha $\det A = 0 \iff a = -1$. Dunque, il caso $a = -1$ è il caso degenere, per il quale esiste una retta di punti critici passanti per l'origine e corrispondente alla direzione dell'autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 0$. Poiché l'altro autovalore è $\lambda = -3$ tutti i punti critici sono stabili.

Per $a \neq -1$ ricerchiamo gli autovalori:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \det \begin{bmatrix} -2-\lambda & -2 \\ a & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff \lambda^2 + 3\lambda + (2+2a) = 0$$
$$\iff \lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2+2a)}}{2}.$$

Si hanno le situazioni seguenti:

I. Se $9 - 4(2+2a) > 0 \iff a < \frac{1}{8}$ si hanno due autovalori reali distinti; se in particolare $-1 < a < \frac{1}{8}$ (e quindi $2+2a > 0$) allora i due autovalori sono entrambi negativi e l'origine è nodo a due tangenti, asintoticamente stabile, mentre se $a < -1$ allora l'origine è colle instabile.

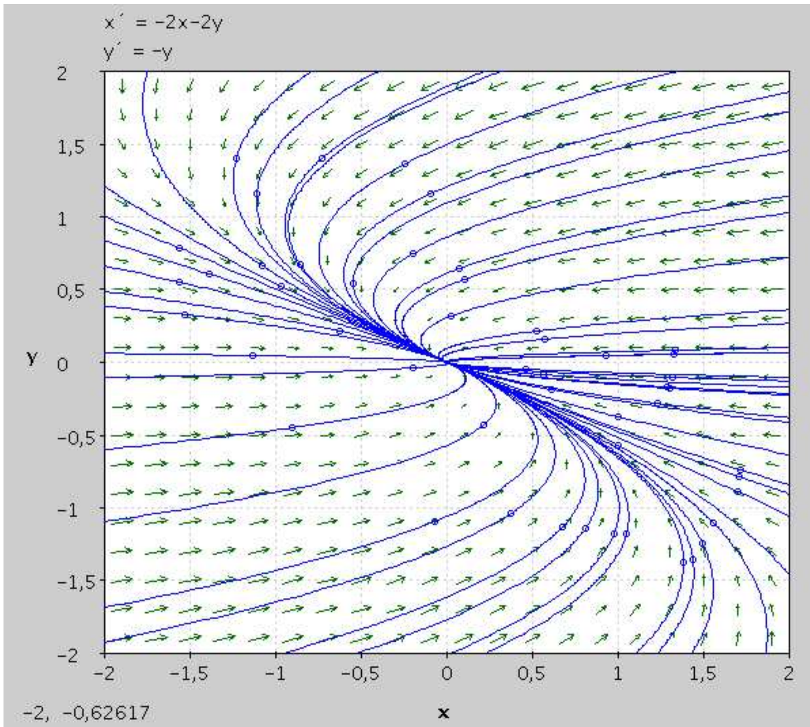
II. Se $9 - 4(2+2a) = 0 \iff a = \frac{1}{8}$, allora gli autovalori sono reali coincidenti, negativi e la matrice diventa $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ \frac{1}{8} & -1 \end{bmatrix}$, dunque non è diagonalizzabile e l'origine è nodo a una tangente, asintoticamente stabile.

III. Se $9 - 4(2+2a) < 0 \iff a > \frac{1}{8}$, si hanno due autovalori complessi coniugati $\lambda_{1,2} = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{4(2+2a) - 9}}{2}$ con parte reale negativa, dunque l'origine è vortice, asintoticamente stabile.

b. Se $a = 0$, l'origine è un nodo a due tangenti, asintoticamente stabile. Gli autovalori sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$ e gli autovettori relativi sono, ad esempio, $h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $h_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. L'integrale generale del sistema è

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

e il ritratto di fase è il seguente:



Quesito 4. A scelta, svolgere **solo uno** dei due quesiti seguenti:

i) Enunciare precisamente e dimostrare il risultato di equivalenza tra una soluzione di un problema di Cauchy sotto opportune ipotesi e una soluzione dell'equazione integrale di Volterra.

ii) Enunciare precisamente il teorema delle contrazioni di Banach–Caccioppoli e dimostrare solo il risultato di esistenza.