ALGEBRA
25/1/00

Esercizio 1
Dopo aver verificato che
$A, \sim B \vdash_L (A \wedge C) \Rightarrow \sim (C \Rightarrow B)$
provare che la formula del primo ordine
$A_1^1(x) \Rightarrow ((\forall x)\ A_1^2(x,y) \Rightarrow ((A_1^1(x) \wedge A_1^1(y)) \Rightarrow \sim (A_1^1(y) \Rightarrow (\exists x) \sim A_1^2(x,y))))$
è logicamente valida.
Determinare occorrenze libere e vincolate delle variabili in tale formula, dire se il termine $f_1^2(x,y)$ è libero per x nella formula data e portarla in forma normale prenessa.

Esercizio 2
Si consideri la relazione binaria sull'insieme X={a,b,c,d,e} avente come matrice di incidenza la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificare che la chiusura riflessiva e transitiva di tale relazione è una relazione d'ordine ≤ su X. Indicare elementi minimali e massimali di X rispetto a ≤. Dire se X è un reticolo rispetto a tale relazione. In caso negativo trovare una relazione R contenente ≤ tale che X rispetto ad R sia un reticolo. Il reticolo così trovato è distributivo?

ALGEBRA
6/2/02

Esercizio 1
Dopo aver verificato che
$\sim A, B \vdash_L (C \Rightarrow A) \Rightarrow \sim (C \wedge B)$
provare che la formula del primo ordine
$A_1^1(x) \Rightarrow ((\forall x)\ A_1^2(x,y) \Rightarrow ((A_1^1(x) \Rightarrow (\exists x) \sim A_1^2(x,y)) \Rightarrow \sim (A_1^1(y) \Rightarrow A_1^1(x))))$
è logicamente valida.
Determinare occorrenze libere e vincolate delle variabili in tale formula, dire se il termine $f_1^2(x,y)$ è libero per y nella formula data e portarla in forma normale prenessa.

Esercizio 2
Si consideri la relazione binaria sull'insieme X={a,b,c,d,e} avente come matrice di incidenza la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Verificare che la chiusura riflessiva e transitiva di tale relazione è una relazione d'ordine ≤ su X. Indicare elementi minimali e massimali di X rispetto a ≤. Dire se X è un reticolo rispetto a tale relazione. In caso negativo trovare una relazione R contenente ≤ tale che X rispetto ad R sia un reticolo. Il reticolo così trovato è distributivo?

Algebra 1
27/6/2000

1) Si considerino l'insieme R[x] dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x e la relazione binaria ρ su R[x] definita ponendo $(f(x),g(x))\in \rho$ se e solo se o il grado di f(x) è minore di quello di g(x) oppure f(x) e g(x) hanno lo stesso grado ed i coefficienti di f(x) sono minori dei corrispondenti coefficienti di g(x). Elencare le proprietà di ρ e determinare la minima relazione d'ordine $\leq$ su R[x] contenente ρ. Dimostrare che R[x] rispetto a $\leq$ è un reticolo con minimo. Dimostrare che la relazione di equivalenza generata da ρ è la relazione universale su R[x].

2) Si consideri la tavola di verità:

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Scrivere una formula equivalente ad f(A,B,C) che contenga solo i connettivi ~ e $\Rightarrow$. Esibire una formula $\mathtt{A}$ non equivalente ad f(A,B,C) tale che f(A,B,C) sia una conseguenza semantica di $\mathtt{A}$ e dire perché $\vdash_L \mathtt{A}\Rightarrow f(A,B,C)$.
Nella formula $\mathtt{A}\Rightarrow f(A,B,C)$ si sostituisca ogni occorrenza di A con $(\forall x)\mathtt{A}_1^1(x)$, ogni occorrenza di B con $\mathtt{A}_2^1(x)$, ed ogni occorrenza di C con $(\exists y)\mathtt{A}_1^2(x,y)$, la formula così ottenuta è logicamente valida?
La si trasformi in forma normale prenessa.

Algebra
Prima Semiunità

Appello del 30 Giugno 1999

Esercizio 1

Si consideri il gruppo additivo <Z,+> degli interi relativi. Siano n,m due interi fissati e siano H_n ed H_m i sottogruppi di <Z,+> costituti dai multipli di n ed m rispettivamente Si provi che l'intersezione insiemistica di H_n ed H_m è a sua volta un sottogruppo di <Z,+>, mentre l'unione insiemistica di H_n ed H_m è un sottogruppo di <Z,+> se e solo se n divide m od m divide n.
Provare che il minimo sottogruppo contenente H_n ed H_m coincide con <Z,+> se e solo se n ed m sono primi fra loro.

Esercizio 2

Si provi che nella teoria L è possibile dedurre la formula $(C\Rightarrow B)\Rightarrow(C\Rightarrow\sim A)$ dalla formula $A\Rightarrow\sim B$.

Tenendo conto di quanto sopra, giustificare brevemente il fatto che la formula del primo ordine

$((\forall x)A_1^2(x,y) \Rightarrow B_1^2(x,y))\Rightarrow((A_1^1(x)\Rightarrow\sim B_1^2(x,y))\Rightarrow(A_1^1(x)\Rightarrow(\exists x)\sim A_1^2(x,y)))$

è una formula logicamente valida.

Algebra
18/1/2001

1) Si scriva una formula f(A,B,C), contenente solo i connettivi ~ e $\Rightarrow$, con la seguente tavola di verità

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Si provi che f(A,B,C) non si può dedurre in L da $\sim B \Rightarrow C$ e si esibisca una formula non equivalente a f(A,B,C) da cui f(A,B,C) si possa dedurre.

2) Si consideri la formula del primo ordine
$(\forall x)(\forall y)(A_1^2(f_1^1(x),f_1^1(y))\Rightarrow A_1^2(x,y)) \Rightarrow(\forall x)(\exists y)A_1^2(f_1^1(x),y)$.
La si porti in forma normale prenessa; si dica se la formula è logicamente valida ed in caso contrario si dia una interpretazione in cui è vera ed una in cui è falsa.

3) Si scriva in un opportuno linguaggio del I ordine la frase "Se un intero x è divisibile per un numero pari, allora x è pari".

ALGEBRA
12/7/00

1) Sia X={a,b,c,d,e} e si consideri su X la relazione binaria R avente come matrice di incidenza

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Provare che esiste la minima relazione d'ordine ≤ contenente R. Dire se X è un reticolo rispetto alla relazione ≤. Determinare elementi minimali e massimali di X rispetto alla relazione ≤ e dire se sono minimi o massimi. Provare che R è una funzione da X ad X e dire se ammette inversa destra e/o sinistra.. Verificare che ≤ non è una funzione da X ad X.
Provare che se la chiusura transitiva di una relazione binaria T su un insieme Y è una funzione T deve essere una funzione e transitiva .
(Si suggerisce di considerare T^2 e di confrontarla con T).

2) Si consideri la formula del primo ordine:
$\sim(\forall x)A_1^1(x)\wedge(\exists x)A_2^1(x)\Rightarrow(\exists x)(\sim A_1^1(x)\wedge A_2^1(x))$
si dica se è una formula logicamente valida, se è vera in qualche interpretazione, se è soddisfacibile ma non vera in qualche interpretazione , se è insoddisfacibile in ogni interpretazione.
La si porti in forma normale prenessa .

Algebra
19/9/02

Esercizio 1

Dopo aver verificato che
$A,B\vdash_L (\sim A\vee C)\Rightarrow \sim (C\Rightarrow\sim B)$
provare che la formula del primo ordine
$\sim A(x)\Rightarrow((\forall x)\ B(x,y) \Rightarrow((\ A(x)\vee A(y))\Rightarrow \sim\ (A(y)\Rightarrow(\exists z)\sim\ B(z,y))))$
è logicamente valida.
Determinare occorrenze libere e vincolate delle variabili in tale formula, portarla in forma normale prenessa.

Esercizio 2

Si consideri un punto P del piano e sia ϕ il fascio di rette di sostegno P.
Si consideri la corrispondenza binaria π tra le rette di ϕ che ad ogni retta del fascio associa la sua perpendicolare passante per P. Si elenchino le proprietà di π. Si determini la relazione d'equivalenza generata da π. Si dica se π è una funzione da ϕ in ϕ e in caso positivo se tale funzione è invertibile.

Cosa succede se si considera la relazione π' fra tutte le rette del piano che ad ogni retta del piano associa la sua perpendicolare per P?

ALGEBRA 1
18/7/02

3) Sia X={a,b,c,d,e} e si consideri su X la relazione binaria R avente come matrice di incidenza

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Provare che esiste la minima relazione d'ordine ≤ contenente R. Dire se X è un reticolo rispetto alla relazione ≤. Determinare elementi minimali e massimali di X rispetto alla relazione ≤ e dire se sono minimi o massimi. Provare che R è una funzione da X ad X e dire se ammette inversa destra e/o sinistra.. Verificare che ≤ non è una funzione da X ad X.
Dire, giustificando la risposta, se la chiusura simmetrica di ≤ è la minima relazione d'equivalenza contenente R.

2) Si porti la formula:

$$(\forall x)(\forall y)A_1^2(f_1^2(x,y),z) \Rightarrow (\exists x)(A_1^2(x,y) \Rightarrow (\forall y)A_1^2(x,y))$$

in forma normale prenessa.
Si consideri l'interpretazione avente come dominio N, in cui il predicato $A_1^2(x,y)$ significa x≥y e il termine $f_1^2(x,y)$ significa xy. Dire se in tale interpretazione la formula è vera, falsa o soddisfacibile e discutere la verità delle chiusure esistenziale e universale della formula data.

Algebra 1
4/7/2002

1. Si considerino l'insieme R[x] dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x e la relazione binaria ρ su R[x] definita ponendo $(f(x),g(x))\in \rho$ se e solo se f(x) e g(x) hanno una radice in comune. Si studino le proprietà di ρ e si dimostri che detta ρ^* la chiusura d'equivalenza di ρ, due polinomi che ammettano radice sono sempre associati in ρ^*.

2. Dopo aver verificato che
$$A, B \vdash_L (A\wedge C)\Rightarrow \sim(C\Rightarrow\sim B)$$
provare che la formula del primo ordine
$A_1^1(x)\Rightarrow((\exists x) \sim A_1^2(x,y) \Rightarrow((A_1^1(x)\wedge A_1^1(y))\Rightarrow \sim (A_1^1(y)\Rightarrow (\forall x) A_1^2(x,y))))$
è logicamente valida.
Determinare occorrenze libere e vincolate delle variabili in tale formula, dire se il termine $f_1^2(x,y)$ è libero per x nella formula data e portarla in forma normale prenessa.

ALGEBRA
12/7/00

4) Sia X={a,b,c,d,e} e si consideri su X la relazione binaria R avente come matrice di incidenza

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Provare che esiste la minima relazione d'ordine ≤ contenente R. Dire se X è un reticolo rispetto alla relazione ≤. Determinare elementi minimali e massimali di X rispetto alla relazione ≤ e dire se sono minimi o massimi. Provare che R è una funzione da X ad X e dire se ammette inversa destra e/o sinistra.. Verificare che ≤ non è una funzione da X ad X.
Provare che se la chiusura transitiva di una relazione binaria T su un insieme Y è una funzione T deve essere una funzione e transitiva .
(Si suggerisce di considerare T^2 e di confrontarla con T).

5) Si consideri la formula del primo ordine:
$\sim(\forall x)A_1^1(x)\wedge(\exists x)A_2^1(x)\Rightarrow(\exists x)(\sim A_1^1(x)\wedge A_2^1(x))$
si dica se è una formula logicamente valida, se è vera in qualche interpretazione, se è soddisfacibile ma non vera in qualche interpretazione , se è insoddisfacibile in ogni interpretazione.
La si porti in forma normale prenessa .