Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria Informatica

Anno Accademico 2008/2009

Corso di Statistica (2L) per INF e TEL

Docente: Antonio Pievatolo; esercitazioni: Raffaele Argiento

# Esercitazione del 15/05/2009

## Esercizio1 (dal Tema d'esame 23/02/06 del corso di Statistica Matematica)

Una moneta viene lanciata 1000 volte, ottenendo testa 432 volte.

1. Si imposti e studi un test di livello 1% per stabilire se c' è evidenza sperimentale che la moneta sia truccata.
2. Calcolare il valore approssimato della probabilità di errore di seconda specie se $p = 0.43$ per il test al punto 1.
3. Costruire un intervallo di confidenza bilaterale di livello 95% per la probabilità $p$ di ottenere testa in un lancio.

Soluzione

1. I dati sono la realizzazione di un campione $X_1, \ldots, X_n$ di un campione i.i.d. da una popolazione Bernoulli($p$). Si vuole studiare il test

$$\mathrm{H}_0\colon\ p = p_0 \text{ contro } \mathrm{H}_1\colon\ p \neq p_0$$

dove $p_0 = \frac{1}{2}$. Osservo che $n \geq 50$ e $n * p_0 > 5$ posso dunque applicare il teorema del limite centrale e dire che sotto $\mathrm{H}_0$

$$u := \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

ha distribuzione approssimativamente uguale a quella di una normale di media zero e varianza uno. La regione critica di livello $\alpha$ per basata sulla statistica $u$ è dunque

$$C = \left\{ x_1, \ldots, x_n : \bar{x} \leq p_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}},\ \text{oppure } \bar{x} \geq p_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\},$$

in particolare con $z_{0.975} = 1.96$ si ottiene $C = \{x_1, \ldots, x_n : \bar{x} < 0.496 \text{ oppure} \bar{x} > 0.53\}$.

Dato che dalla realizzazione campionaria $\bar{x} = 0.432 \in C$ Rifiuto $\mathrm{H}_0$ al livello $\alpha = 1\%$.

2. Si commette errore di seconda specie quando si accetta H0, quando in realtà essa è falsa; dunque la probabilitÃ  di errore di seconda specie è

$$\begin{aligned}
\beta(p) &= P_p\left( \left| \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \right| \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \\
&= P_p\left( p_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \leq \bar{X} \leq p_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right) \\
&= P_p\left( \frac{p_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq Z \leq \frac{p_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \right),
\end{aligned}$$

dove $Z \sim N(0, 1)$. Per $p = 0.43$, si ottiene $\beta(0.43) = 0.0308$.

∎

## Esercizio2 (dal Tema d'esame del 09/02/06 del coerso di laurea in Statistica Matematica)

Una casa farmaceutica produce un farmaco che commercializza in pastiglie il cui peso ha deviazione standard $0.5mg$. Il settore ricerca dell'azienda ha sviluppato un nuovo metodo che, con un costo maggiore, dovrebbe diminuire tale valore. Considerati i pro e i contro, si decide di adottare il nuovo metodo solo se risulta una forte evidenza che la deviazione standard di una pastiglia sia divenuta minore di $0.4mg$. Un campione di 6 dosi mostra i seguenti pesi in $mg$:

$$572.5,\ 572.2,\ 572.7\ ,571.8,\ 572.3,\ 572.4.$$

È il caso di adottare il nuovo metodo?

1. Assumendo che le osservazioni siano normalmente distribuite, si imposti e studi un test.
2. Si fornisca un limite superiore di confidenza al 95% per la deviazione standard.

SOLUZIONE

1. Si considerano le ipotesi

$$\mathrm{H}_0\text{: } \sigma^2 \geq 0.16 \text{ contro } \mathrm{H}_1 : \sigma^2 < 0.16$$

La statistica test è

$$U := (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

dove $\sigma_0^2 = 0.16$. Il valore osservato della statistica test è $u = 5\frac{0.094}{0.16} = 2.9375$. Quindi p-value$=$ $\mathbb{P}(U < u)$, da cui $0.25 <$p-value$< 0.5$. Ne deduciamo che c'é assenza di evidenza sperimentale contro $\mathrm{H}_0$.

2. La regione critica di livello $\alpha$ per il test studiato al punto 1. è

$$C = \left\{x_1, \ldots, x_n : (n-1)\frac{s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{n-1}(\alpha)\right\},$$

Di conseguenza la regione di accettazione è

$$A = \left\{x_1, \ldots, x_n : (n-1)\frac{s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1}(\alpha)\right\},$$

Per la proprietà di simmetria fra intervalli di confidenza e test delle ipotesi si ricava che un intervallo di confidenza è

$$IC_\alpha = \left\{\sigma_0^2 : \sigma_0^2 < (n-1)\frac{s^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha)}\right\}.$$

Possiamo riscrivere dicendo che $(0, (n-1)\frac{S^2}{\chi^2_{n-1}}(\alpha))$ è un intervallo di confidenza sulla coda inferiore per $\sigma^2$, la realizzazione campionaria del quale è $(0, 0.4130)$

∎

## Esercizio 3

Sospettiamo che due dadi perfettamente identici siano stati entrambi truccati in modo tale che, lanciandoli in coppia, la probabilità di ottenere come somma delle facce superiori il valore 7 sia pari a 1/11. Denotiamo con $p$ la probabilità che la somma delle facce superiori di due dadi uguali e lanciati simultaneamente sia 7.

1. Se i due dadi sono regolari quanto vale $p$?

Sia $p_0$ il valore determinato al punto 1. Vogliamo verificare l'ipotesi nulla $\mathrm{H}_0: \ p = p_0$ contro l'alternativa $\mathrm{H}_1: \ p = 1/11$. Decidiamo di eseguire questa verifica nel seguente modo: lanciamo 144 volte la coppia di dadi e rifiutiamo $\mathrm{H}_0$ se la somma dei due dadi è 7 al più per 14 volte.

3. Calcolate "approssimativamente" il livello di significatività $\alpha$ del test.
4. Calcolate "approssimativamente" la potenza " $\pi$ del test.
5. Calcolate "approssimativamente" la probabilità di errore di seconda specie $\beta$ del test.

Soluzione

1.
$$p_0 = \frac{\#\{(i,j) : i + j = 7 \mathrm{con} i, j = 1, \cdots, 6\}}{\#\{(i,j) : i, j = 1, \cdots, 6\}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

2. Il livello di significatività del test $\alpha$ è la probabilità di rifiutare $\mathrm{H}_0: \ p = 1/6$ quando $p = 1/6$. Sia $\hat{p}$ la frequenza relativa dell'evento "somma della coppia di dadi = 7"; la regola è rifiutare $\mathrm{H}_0: \ p = 1/6$ contro $\mathrm{H}_1: \ p = 1/11$ se $\hat{p} \leq \frac{14}{144}$, e quindi, per il Teorema Centrale del Limite, un valore approssimato di $\alpha$ è dato da

$$\alpha = \mathbb{P}_{1/6}\left(\hat{p} \leq \frac{14}{144}\right) \simeq \Phi\left(\sqrt(144)\frac{\frac{14}{144} - \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}}\right) \simeq \Phi(-2.236) = 1 - \Phi(2.236) \simeq 1 - 0.9874 = 0.0126$$

3. La potenza del test è la probabilità di accettare $\mathrm{H}_1$ quando è vera: sempre per il Teorema Centrale del Limite:

$$\pi\left(\frac{1}{11}\right) = \mathbb{P}_{1/11}\left(\hat{p} \leq \frac{14}{144}\right) \simeq \Phi\left(\sqrt(144)\frac{\frac{14}{144} - \frac{1}{11}}{\sqrt{\frac{1}{11} \times \frac{10}{11}}}\right) \simeq \Phi(0.264) \simeq 0.604$$

4. La probabilità di errore di seconda specie $\beta$ è la probabilità di rifiutare l'ipotesi alternativa quando è vera, quindi, un valore approssimato è di $\beta = 1 - \pi(1/11) \simeq 1 - 0.604 = 0.396$

∎

## Esercizio 4

Sia $X_1, \cdots, X_n$ un campione casuale estratto dalla popolazione gaussiana di densità

$$f(x;\theta) = \frac{\theta^{3/2}}{\sqrt{3\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\theta^3 x^2}{3}} \quad \theta > 0$$

dove $\theta$ è un parametro incognito.

1. Determinate lo stimatore di massima verosimiglianza di $\theta$
2. Costruite un test per verificare l'ipotesi nulla $\mathrm{H}_0: \ \theta = 1$ contro l'alternativa $\mathrm{H}_1: \ \theta 6 = 1$ a livello $\alpha = 5\%$. Se avete rilevato il campione di quattro osservazioni: $0.17, 0.71, 2.17, 1.00$, accettate o rifiutate $\mathrm{H}_0$?

3. Se $X_1, X_2, X_3, X_4$ sono i.i.d. $\sim$ N(0, 12), qual è la distribuzione di $\frac{\sum_{j=1}^4 X_j^2}{12}$?

4. Calcolate la potenza del test costruito al punto 2. in $\theta = 1/2$.

Soluzione

Osserviamo che

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{3}{2\theta^3}}} e^{-\frac{1}{2} \times \frac{x^2}{\frac{3}{2\theta^3}}}$$

se ne ricava che $X \sim N(0, \frac{3}{2\theta^3})$. Dobbiamo fare inferenza su una caratteristica che dipende dalla varianza di una popolazione gaussiana con media nota e pari a zero. Chiamiamo $\sigma^2$ la varianza di questa densità gaussiana. La caratteristica su cui fare inferenza è $\theta = \left(\frac{3}{2\sigma^2}\right)^{1/3}$

1. Lo stimatore di massima verosimiglianza di $\sigma^2$ nel modello gaussiano con media nota e pari a zero è $\hat{\sigma^2} = \frac{\sum_{j=1}^n X_j^2}{n}$. Segue che quello di $\theta$ è $\hat{\theta} = \left(\frac{3n}{2\sum_{j=1}^n X_j^2}\right)^{1/3}$

2. Se esprimiamo ipotesi nulla e alternativa in funzione della varianza $\sigma^2$ del modello gaussiano, esse diventano rispettivamente: $\mathrm{H}_0: \ \sigma^2 = 1.5$ e $\mathrm{H}_1: \ \sigma^2 \neq 1.5$ e quindi rifiutiamo $\mathrm{H}_0: \ \theta = 1$ a livello $\alpha$ se
$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j^2}{1.5} \notin \left(\chi_n^2\left(\frac{\alpha}{2}\right), \chi_n^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$$
Se $\alpha = 5\%$ e $n = 4$ allora $\chi_4^2(0.025) = 11.1$. Inoltre, $\sum_{j=1}^4 x_j^2 = (-0.17)^2 + (0.71)^2 + (2.17)^2 + 1^2 = 6.2419$ e $\frac{\sum_{j=1}^4 x_j^2}{1.5} \simeq 4.16 \in (0.484, 11.1)$. Quindi accettiamo $\mathrm{H}_0: \ \theta = 1$.

3. Se $X_1, \cdots, X_4$ i.i.d. $\sim N(0, 12)$ allora $\frac{\sum_{j=1}^4 X_j^2}{12} \sim \chi_4^2$.

4. $\theta = 1/2$ se e solo se $\sigma^2 = 12$. Se $\sigma^2 = 12$ allora $\frac{\sum_{j=1}^4 X_j^2}{12} \sim \chi_4^2$. La potenza del test in $\sigma^2 = 12$ è la probabilità di rifiutare $\sigma^2 = 1.5$ quando $\sigma^2 = 12$, cioè:
$$\begin{aligned}
\pi(12) &= 1 - \mathbb{P}_{\sigma^2=12}\left(0.484 < \frac{\sum_{j=1}^4 X_j^2}{1.5} < 11.1\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}_{12}\left(\frac{0.484 \times 1.5}{12} < \frac{\sum_{j=1}^4 X_j^2}{12} < \frac{11.1 \times 1.5}{12}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(0.0605 < \frac{\sum_{j=1}^4 X_j^2}{12} < 1.3875\right) \simeq 0.984
\end{aligned}$$

∎