Politecnico di Milano
Temi d'esame di STATISTICA dell'AA 2005/2006
per allievi ING INF [2L], docente I. Epifani

1 STATISTICA per ING INF TEL [2L] I. Epifani 28.06.06

Nello svolgere gli esercizi fornire passaggi e spiegazioni: non bastano i risultati finali.

Esercizio 1.1 Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale estratto dalla funzione di densità discreta

$$f(x, \theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|} (1-\theta)^{1-|x|} \mathbf{1}_{\{-1,0,1\}}(x), \quad 0 < \theta < 1$$

dove $0 < \theta < 1$ è un parametro incognito.

1. Determinate lo stimatore di θ usando il metodo di massima verosimiglianza.
2. Calcolate l'informazione di Fisher $I(\theta)$ del modello statistico $\{f(x, \theta), 0 < \theta < 1\}$ e determinate lo stimatore di massima verosimiglianza di $I(\theta)$.
3. Discutete qualche proprietà (esatta e asintotica) dello stimatore di massima verosimiglianza della caratteristica θ.
4. Costruite un intervallo di confidenza bilatero asintotico per θ di livello γ. Quindi determinate numericamente l'intervallo quando $\gamma = 0.95$ e avete 15 osservazioni uguali a -1, 55 uguali a 0 e 30 uguali a 1.

Soluzione

1. La verosimiglianza del campione è

$$L_\theta(x_1, \dots x_n) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{\sum_{j=1}^n |x_j|} (1-\theta)^{n-\sum_{j=1}^n |x_j|}$$

da cui deriviamo che

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L_\theta(x_1, \dots x_n) = \frac{n}{\theta(1-\theta)} \left(\frac{\sum_{j=1}^n |x_j|}{n} - \theta \right) \tag{1}$$

e quindi $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L_\theta(x_1, \dots x_n) \geq 0$ se e solo se $\frac{\sum_{j=1}^n |x_j|}{n} \geq \theta$. Segue che $\widehat{\theta} = \frac{\sum_{j=1}^n |X_j|}{n}$.

2-3. $|X_j|$ ha densità di Bernoulli di parametro θ e quindi $\mathrm{E}(\widehat{\theta}) = \theta$ e $\mathrm{Var}(\widehat{\theta}) = \theta(1-\theta)/n$, $\forall \theta \in (0, 1)$. Inoltre, data la rappresentazione di $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L_\theta(x_1, \dots x_n)$ in (1), segue che $\widehat{\theta}$ è stimatore efficiente di θ, cioè è non distorto e $I(\theta) = \frac{1}{n \,\mathrm{Var}(\widehat{\theta})} = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$. Siccome è efficiente, allora $\widehat{\theta}$ è anche consistente in media quadratica. Inoltre, per il teorema centrale del limite, $\sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta)/\sqrt{\theta(1-\theta)} \equiv \sqrt{nI(\theta)}(\widehat{\theta} - \theta)$ ha fdr asintotica gaussiana standard. Infine, lo stimatore ML di $I(\theta)$ è $I(\widehat{\theta}) = \frac{1}{\widehat{\theta}(1-\widehat{\theta})}$.

4. Un intervallo di confidenza bilatero asintotico per θ è dato da $IC(\theta) = \widehat{\theta} \pm z_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{1}{nI(\widehat{\theta})}}$, dove z_a è il quantile di ordine a della fdr gaussiana standard. Se abbiamo 15 osservazioni uguali a -1, 55 uguali a 0 e 30 uguali a 1, allora la stima di θ vale $\widehat{\theta} = (15 + 30)/(15 + 55 + 30) = 0.45$ e la realizzazione numerica dell'$IC(\theta)$ asintotico di livello 0.95 proposto qualche riga prima è $IC(\theta) = 0.45 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.45 \times 0.55}{100}} \simeq (0.3525, 0.5475)$.
∎

Esercizio 1.2 Una macchina imbottigliatrice è impiegata per riempire flaconi di bagnoschiuma. A causa di fluttuazioni casuali, la quantità di bagnoschiuma per flacone è una variabile aleatoria X gaussiana di media e varianza entrambe incognite. Se la varianza del volume riempito supera $25\,\mathrm{ml}^2$, una frazione non accettabile dei flaconi sarà sotto-riempita o sovra-riempita. Se la varianza non supera $25\,\mathrm{ml}^2$, la macchina imbottigliatrice è considerata precisa. Per controllare la precisione della macchina imbottigliatrice, abbiamo misurato la quantità di bagnoschiuma presente in 46 flaconi (espressa in ml), e abbiamo ottenuto che la funzione di ripartizione empirica $\hat{F}_{46}$ è

x	242.1	246.5	248.5	251.0	253.5	255.6
$\hat{F}_{46}(x)$	8/46	21/46	27/46	33/46	43/46	1

1. Calcolate la media e la varianza campionarie.
2. Costruite un intervallo di confidenza al 95% per la varianza, unilatero del tipo (c, ∞).
3. Costruite un test sulla varianza tale che sia al più pari a 5% la probabilità di commettere l'errore di prima specie di *ritenere imprecisa* una macchina *effettivamente precisa*.
4. Calcolate la probabilità di errore di secondo tipo del test costruito al punto 3. se la varianza vale effettivamente $42\,\mathrm{ml}^2$, o indicate un intervallo dove tale probabilità cade.

Soluzione

1. Osserviamo che

x	242.1	246.5	248.5	251.0	253.5	255.6
$\hat{F}_{46}(x) - \hat{F}_{46}(x-1)$	8/46	13/46	6/46	6/46	10/46	3/46

Quindi:

$$\bar{X} = \sum_{x \in \{242.1, 246.5, 248.5, 251.0, 253.5, 255.6\}} x \left(\hat{F}_{46}(x) - \hat{F}_{46}(x-1) \right) = 248.6978,$$

$$\sum_{x \in \{242.1, \cdots, 255.6\}} x^2 \left(\hat{F}_{46}(x) - \hat{F}_{46}(x-1) \right) = 61868.36$$

$$S^2 = \frac{46}{45} \times (61868.36 - (248.6978)^2) \simeq 18.159$$

2. Sia σ^2 la varianza del volume di bagnoschiuma in un flacone. Un $IC(\sigma^2)$ di confidenza al 95% della forma (c, ∞) è dato da $\sigma^2 > \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{n-1}(0.95)}$. Con i dati a nostra disposizione abbiamo $\left(\frac{18.159 \times 45}{\chi^2_{45}(0.95)}, \infty \right) = \left(\frac{18.159 \times 45}{61.656}, \infty \right) = (13.2535, \infty)$

3. Deduciamo dalla domanda di dover impostare un test di verifica dell'ipotesi nulla H_0 : *"La macchina è precisa"* contro l'alternativa H_1 : *"La macchina è imprecisa"* , che in termini di σ^2 traduciamo come $H_0 : \sigma^2 \leq 25$ contro l'alternativa $H_1 : \sigma^2 > 25$. In base al punto precedente, con probabilità 0.95, $\sigma^2 \geq \frac{45 S^2}{61.656} = 13.2535$; poiché $25 \geq 13.2535$, per la dualità fra IC e test di ipotesi, riteniamo plausibile l'ipotesi nulla $H_0 : \sigma^2 \leq 25$ con significatività $\alpha \leq 1 - 0.95 = 0.05$.

4. Dobbiamo calcolare $P_{42}\left(25 \in IC(\sigma^2)\right) = P_{42}\left(25 \geq \frac{45 S^2}{61.656}\right) = P_{42}\left(\frac{45 S^2}{42} \leq \frac{25 \times 61.656}{42}\right) = F_{\chi^2_{45}}(36.7) \in (F_{\chi^2_{45}}(34.379), F_{\chi^2_{45}}(36.884)) = (0.125, 0.2)$ (Valore esatto del p-value $= 0.194$) ∎

Esercizio 1.3 Abbiamo raccolto 12 misurazioni di una certa grandezza Q di seguito riportate nell'ordine in cui sono state ottenute:

1.836 -0.400 1.168 -1.807 -1.475 1.661 -0.773 1.437 0.414 1.713 -0.860 -1.926

1. È plausibile ritenere che questi dati costituiscano un campione casuale da una qualche popolazione? Per rispondere usate un opportuno test e determinate un valore approssimato del p-value, o almeno stabilite un confine inferiore per tale p-value.

Riteniamo sia sensato modellare una misurazione di Q come una variabile aleatoria X uniforme sull'intervallo $(a-b, a+b), b>0$, cioè $f(x,a,b) = \frac{1}{2b}\mathbf{1}_{(a-b,a+b)}(x)$.

2. Determinate degli stimatori dei parametri a e b usando il metodo dei momenti e un campione casuale di n osservazioni $X_1, \dots, X_n$ estratto da $f(x,a,b)$. Fornitene poi le stime basate sul precedente set di 12 dati.

3. Supponete ora che il parametro a sia noto e pari a 0. Costruite lo stimatore di massima verosimiglianza di b basato solo sulla dodicesima misurazione $x_{12} = -1.926$.

Soluzione

1. Usiamo il test di aleatorietà di Kendall a due code; infatti, a priori non ci aspettiamo né un andamento crescente né uno decrescente. Contiamo il numero di concordanze e discordanze; con i simboli degli appunti abbiamo:

dati	1.836	-0.400	1.168	-1.807	-1.475	1.661	-0.773	1.437	0.414	1.713	-0.860	-1.926
C_i	0	5	3	7	6	1	3	1	1	0	0	
D_i	11	5	6	1	1	5	2	3	2	2	1	

e

$$C = \sum_{i=1}^{11} C_i = 27, \qquad D = \sum_{i=1}^{11} D_i = 39, \qquad T = C - D = -12\,.$$

Per un test di ampiezza α la regione di rifiuto è $\{|T| > q_{\text{Ken};n}(1-\alpha/2)\}$ e il p-value è dato da $2(1-P_0(T \le 12))$. Noi abbiamo $n = 12$ e, dalle tabelle, $q_{\text{Ken};12}(.90) = 18$. Essendo $|T| = 12 < 18$, segue che $2(1-P_0(T \le 12)) \ge 2(1-0.90) = 0.20$. Concludiamo che a qualunque livello di significatività $\alpha \le 0.2$, accettiamo l'ipotesi nulla che i dati provengano da un campione casuale. (Usando R si ottiene p-value $= 0.459$)

2. La densità uniforme sull'intervallo $(a-b, a+b)$ ha media $\mathrm{E}(X) = a$ e varianza $\mathrm{Var}(X) = ((a+b)-(a-b))^2/12 = b^2/3$. Impostiamo il sistema nelle incognite a, b:

$$\begin{cases} a = \bar{X} \\ \mathrm{E}(X^2) = M_2 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} a = \bar{X} \\ b^2/3 = M_2 - \bar{X}^2 \end{cases}$$

dove $M_2 =$ momento secondo campionario. Il sistema ha unica soluzione $\hat{a} = \bar{X}$ e $\hat{b} = \sqrt{3(M_2 - \bar{X}^2)}$; la radice è stata presa con il segno positivo perché $b > 0$. Con i 12 dati a nostra disposizione le stime di a e b sono rispettivamente $\hat{a} \simeq 0.0823$, $\hat{b} = \sqrt{3 \times (1.942688 - 0.006779)} \simeq \sqrt{3 \times 1.93591} \simeq 2.41$.

3. Se $a = 0$ e abbiamo una sola osservazione x_{12}, la funzione di verosimiglianza è

$$L_b(x_{12}) = f(x_{12}, 0, b) = \begin{cases} \frac{1}{2b} & \text{se } b > \max\{-x_{12}, x_{12}\} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2b} & \text{se } b > |x_{12}| \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Segue che lo stimatore di massima verosimiglianza di b, quando a è noto, è $|X_{12}|$ e la stima è 1.926. ∎

Esercizio 1.4 Un campione di 1000 laureati della facoltà di xxx, selezionato casualmente, ha accettato di sottoporsi a un test di verifica della preparazione scientifica maturata nel corso di studi. Il test era gestito da una società esterna all'università e il punteggio ottenuto era espresso in trentesimi da 0 a 30. I dati ottenuti sono stati raggruppati e riportati nella tabella seguente, dove si è proceduto a raggruppare i voti di laurea nelle classi: $[66, 90], [91, 99], [100, 110]$ e i punteggi al test nelle classi $[0, 17], [18, 20], [21, 24], [25, 30]$. (La tabella deve essere completata).

laurea\test	[0,17]	[18,20]	[21,24]	[25,30]	
[66,90]	80	115	157	38	
[91,99]	65	130		65	
[100,110]	20	15	43	22	

1. Cosa concludete sull'affidabilità del voto di laurea come indicatore della preparazione conseguita nel corso di studi? Costruite un opportuno test di ipotesi.

In realtà siamo riusciti a recuperare anche le seguenti statistiche:

$$\sum_{i=1}^{1000} l_i = 92120, \quad \sum_{i=1}^{1000} t_i = 20990, \quad \sum_{i=1}^{1000} l_i t_i = 1935996, \quad \sum_{i=1}^{1000} l_i^2 = 8518217, \quad \sum_{i=1}^{1000} t_i^2 = 449233.5 \tag{2}$$

dove l_i e t_i rappresentano rispettivamente il voto di laurea e il punteggio totalizzato al test dal laureato i-esimo.

2. Alla luce di questi dati la risposta alla domanda 1. cambia o no? Per rispondere assumete l'ipotesi di gaussianità dei dati accoppiati $(l_i, t_i), i = 1, \ldots 1000$.

Soluzione

1. Completiamo la tabella dei dati, ricavando quelli mancanti:

laurea\test	[0,17]	[18,20]	[21,24]	[25,30]	
[66,90]	80	115	157	38	390
[91,99]	65	130	250	65	510
[100,110]	20	15	43	22	100
	165	260	450	125	1000

e impostiamo un test χ^2 di indipendenza fra le variabili L =voto di laurea e T = punteggio al test. La statistica di Pearson Q ha valore:

$$Q = 1000 \left(\sum_i \sum_j \frac{N_{ij}^2}{N_{li} N_{tj}} - 1 \right) \simeq 28.92$$

Asintoticamente Q ha fdr $\chi^2_{(3-1)(4-1)} = \chi^2_6$. Quindi, il p-value del test di Pearson è $1 - F_{\chi^2_6}(28.92) \geq 1 - F_{\chi^2_6}(22.458) = 1 - 99.9\% = 0.001$. (Abbiamo usato le tavole dei quantili della fdr χ^2_6 in rete). Concludiamo che c'è una forte evidenza empirica a rifiutare l'ipotesi di indipendenza fra punteggio al test e voto di laurea.

2. $\bar{l} = 92.12$, $\bar{t} = 20.99$, $\sum_i (l_i - \bar{l})^2 = 32122.6$, $\sum_i (t_i - \bar{t})^2 = 8653.4$, $\sum_i (l_i - \bar{l})(t_i - \bar{t}) = 2397.2$ e quindi il coefficiente di correlazione campionario R vale $R = \sum_i (l_i - \bar{l})(t_i - \bar{t}) / \sqrt{\sum_i (l_j - \bar{l})^2 \sum_i (t_i - \bar{t})^2} = 2397.2/\sqrt{8653.4 \times 32122.6} \simeq 0.144$. Impostiamo il test su ρ per dati accoppiati gaussiani: $H_0 : \rho = 0$ versus $H_1 : \rho > 0$, basato sulla statistica test $T = \dfrac{R}{\sqrt{1 - R^2}} \sqrt{n-2}$. Rifiutiamo H_0 se $T \geq t_{n-2}(1 - \alpha)$; T ha valore $\dfrac{0.144}{\sqrt{1 - 0.144^2}} \sqrt{998} = 4.645$: quindi il p-value del test è $P(T \geq 4.645) \simeq 1 - \Phi(4.645) \simeq 1 - \Phi(3.9) \simeq 0$: c'è una forte evidenza empirica a ritenere dipendenti positivamente le variabili L e T. ∎

Nello svolgere gli esercizi fornire passaggi e spiegazioni: non bastano i risultati finali.

Esercizio 2.1 La famosa azienda OISAC, leader nella produzione di batterie per computer portatili, dichiara che la sua nuova batteria ha un'autonomia di ben 8 ore, contro l'autonomia di quella di vecchia generazione pari a 3.92 (cioè quasi 3 ore e 55 minuti).

Ora noi vogliamo verificare quanto dichiarato da OISAC nell'ipotesi che la durata della nuova batteria sia una variabile aleatoria assolutamente continua con densità $f(x,\theta)$ data da

$$f(x,\theta) = \frac{1}{2\theta\sqrt{x}} \exp\left\{-\frac{\sqrt{x}}{\theta}\right\} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x), \qquad \theta > 0$$

con θ incognito e che abbiamo un campione casuale $X_1, \dots, X_n$ estratto da $\{f(x,\theta), \theta > 0\}$.

A tal fine, rispondete alle seguenti domande:

1. determinate uno stimatore di θ con il metodo di massima verosimiglianza;
2. determinate la densità di $\sqrt{X}$ se $X \sim f(x,\theta)$ e di $\displaystyle\frac{2}{\theta}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{X_j}$;
3. determinate la media di $X \sim f(x,\theta)$ in funzione di θ; quindi traducete le ipotesi H_0 :"$\mu = 3.92$" e H_1 :"$\mu = 8$" in ipotesi su θ;
4. verificate che il test di Neyman-Pearson per verificare l'ipotesi nulla H_0:"$\mu = 3.92$" contro l'alternativa H_1:"$\mu = 8$" ha regione critica della forma $\displaystyle\left\{(x_1, \dots, x_n) : \sum_{j=1}^{n}\sqrt{x_j} \geq k\right\}$;
5. determinate k nel caso di $n = 6$ osservazioni e di una significatività $\alpha = 10\%$.
6. calcolate la potenza del test al punto 4., o almeno indicate un intervallo in cui tale valore cade.

Soluzione

1. La verosimiglianza del campione è
$$L_\theta(x_1, \dots x_n) = \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n \frac{1}{\prod_{j=1}^{n}\sqrt{x_j}} \exp\left\{-\sum_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{x_j}}{\theta}\right\}$$
da cui deriviamo che
$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L_\theta(x_1, \dots x_n) = \frac{n}{\theta^2}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}\sqrt{x_j}}{n} - \theta\right)$$
e quindi $\displaystyle\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L_\theta(x_1, \dots x_n) \geq 0$ se e solo se $\displaystyle\frac{\sum_{j=1}^{n}\sqrt{x_j}}{n} \geq \theta$. Segue che $\displaystyle\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{X_i}}{n}$;
2. Se $X \sim f(x,\theta)$, allora $W = \sqrt{X} \sim Exp(\theta)$; infatti, $P(W > 0) = 1$, mentre per ogni $w > 0$ abbiamo $F_W(w) = P(\sqrt{X} \leq w) = F_X(w^2)$ e quindi $f_W(w) = 2wf(w^2,\theta)\mathbf{1}_{(0,\infty)}(w) = \dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{w}{\theta}}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(w)$, cioè $\sqrt{X} \sim Exp(\theta)$.
Se θ è il vero valore del parametro, allora $\sum_{j=1}^{n}\sqrt{X_j}$ è una somma di variabili aleatorie i.i.d. $\sim Exp(\theta)$ e quindi $\sum_{j=1}^{n}\sqrt{X_j} \sim \Gamma(n,\theta)$ e $\displaystyle\frac{2}{\theta}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{X_j} \sim \chi^2_{2n}$.

3. Sia $\mu(\theta)$ la media di X. Allora $\mu(\theta) = \mathrm{E}_\theta(X) = \int_0^\infty x f(x,\theta)\, dx = \int_0^\infty (\sqrt{x})^2 f(x,\theta)\, dx = \mathrm{E}(W^2) = \mathrm{Var}(W) + (\mathrm{E}(W))^2 = 2\theta^2$.

   Segue che $\mu = 3.92$ se e solo se $\theta = \sqrt{3.92/2} = 1.4$ e $\mu = 8$ se e solo se $\theta = 2$ e quindi le ipotesi H_0 :"$\mu = 3.92$" e H_1 :"$\mu = 8$" in termini di θ diventano $H_0 : \theta = 1.4$ e $H_1 : \theta = 2$, rispettivamente.

4. Abbiamo stabilito nel punto precedente che il problema di ipotesi: H_0: "$\mu = 3.92$" contro H_1:"$\mu = 8$" in termini di θ è diventato H_0: "$\theta = 1.4$" contro H_1:"$\theta = 2$". Per il Lemma di Neyman-Pearson il test più potente di livello α per verificare $H_0 : \theta = 1.4$ contro $H_1 : \theta = 2$ ha regione critica data da $\mathcal{G} = \left\{(x_1,\dots,x_n) : \frac{L_{1.4}(x_1,\dots,x_n)}{L_2(x_1,\dots,x_n)} \le \delta\right\}$ dove L_θ è la funzione di verosimiglianza e δ è tale che $\alpha = P_{1.4}\left(\frac{L_{1.4}}{L_2} \le \delta\right)$. Sviluppando il rapporto di verosimiglianza, la precedente richiesta si riduce a $P_{1.4}\left(\sum_{j=1}^n \sqrt{X_j} \ge k\right) = \alpha$. Ma $\frac{2}{\theta}\sum_{j=1}^n \sqrt{X_j} \sim \chi^2_{2n}$; concludiamo che il test più potente di di livello α con n osservazioni ha regione critica:

$$\left\{(x_1,\dots,x_n) : \sum_{j=1}^n \sqrt{x_j} \ge \frac{1.4}{2}\chi^2_{2n}(1-\alpha)\right\}$$

5. Per $\alpha = 10\%$ e $n = 6$, $\chi_{12}(0.9) = 18.549$ e la regione critica è

$$\left\{(x_1,\dots,x_6) : \sum_{j=1}^6 \sqrt{x_j} \ge \frac{1.4}{2}\times 18.549\right\} = \left\{(x_1,\dots,x_6) : \sum_{j=1}^6 \sqrt{x_j} \ge 12.9843\right\}$$

6. Se $\theta = 2$, allora $\sum_{j=1}^n \sqrt{X_j} \sim \chi^2_{2n}$ e quindi $\pi(2) = P_2\left(\sum_{j=1}^6 \sqrt{X_j} \ge 12.9853\right) = 1 - F_{\chi^2_{12}}(12.9843) \simeq 1 - 0.6 = 40\%$. ∎

Esercizio 2.2 Siano $\bar{X}$ e S^2 rispettivamente la media e la varianza campionarie di un campione casuale $X_1, \dots, X_n$ estratto da una popolazione gaussiana di media 2θ e varianza σ^2 ($X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(2\theta, \sigma^2)$, $\theta \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ entrambi incogniti).

1. Se il campione è costituito da 25 osservazioni, quanto vale $P_{\theta,\sigma^2}(\bar{X} - 0.342S - 2\theta \leq 0)$?

Abbiamo misurato la pressione sistolica del sangue di 25 maschi sani e abbiamo ottenuto una media campionaria pari a 120.0 mm di mercurio e un momento secondo campionario pari a 14616.00 mm^2 di mercurio.

2. Sulla base di questi dati quanto siete confidenti che θ sia maggiore o uguale a 57.435?

Abbiamo raccolto ULTERIORI dati riguardanti 39 maschi sani e, per i nuovi 39 dati, abbiamo ottenuto una media campionaria pari a 110.0 mm di mercurio e un momento secondo campionario pari a 12715.0 mm^2

3. Aggiornate le stime puntuali di media e varianza sulla base di questi nuovi dati, usando l'intero campione di 64 misurazioni.

4. Determinate numericamente un intervallo di confidenza unilatero per il parametro θ di forma (c, ∞) e di confidenza 95%.

Soluzione

1. $P(\bar{X} - 0.342S - 2\theta \leq 0) = P\left(\sqrt{25}\dfrac{\bar{X} - 2\theta}{S} \leq \sqrt{25} \times 0.342\right) = P\left(\sqrt{25}\dfrac{\bar{X} - 2\theta}{S} \leq 1.71\right) \simeq F_{t_{24}}(1.711) =$ 0.95.

2. $\dfrac{\bar{X} - 0.342S}{2} \leq \theta$ con probabilità 0.95; se $\bar{X} = 120.0$ e $M_2 = 14616.0$, allora $S^2 = \dfrac{25}{24}(M_2 - \bar{X}^2) = 225$, $S = 15$ e $\dfrac{\bar{X} - 0.342S}{2} = 57.435$. Concludiamo che siamo confidenti al 95% che 57.435 sia il minimo valore che il parametro θ può assumere.

3. $\bar{X}_{64} = \dfrac{25\bar{X}_{25} + 39\bar{X}_{39}}{64} = \dfrac{7290}{64} = 113.9062$;
$M_{2;64} = \dfrac{25M_{2;25} + 39M_{2;39}}{64} = \dfrac{861286}{64} = 13457.58$;
$S^2 = \dfrac{64}{63}(13457.58 - (113.9062)^2) \simeq 490.6$ e $S = \sqrt{S^2} \simeq 22.15$.

4. Poiché $\dfrac{\bar{X} - 2\theta}{S/\sqrt{64}} \sim t_{63}$, allora $\dfrac{\bar{X} - 2\theta}{S/\sqrt{64}}$ è una quantità pivotale per θ tale che $\theta > \dfrac{\bar{X} - t_{63}(0.95)/\sqrt{64} \times S}{2}$ se e solo se $\dfrac{\bar{X} - 2\theta}{S/\sqrt{64}} < t_{63}(0.95) \simeq t_{60}(0.95) = 1.67$. D'altro canto, $P_{\theta,\sigma^2}\left(\dfrac{\bar{X} - 2\theta}{S/\sqrt{64}} < t_{63}(0.95)\right) = 0.95$, quindi, l'IC cercato è $(c, \infty) = \left(\dfrac{\bar{X} - 0.20875S}{2}, \infty\right) = \left(\dfrac{113.9062 - 0.20875 \times 22.15}{2}, \infty\right) \simeq (54.64, \infty)$.
∎

Esercizio 2.3 La specifica per un certo tipo di chiodi stabilisce che devono avere una lunghezza nominale di 20 mm; ma sono accettabili chiodi aventi lunghezza entro i limiti di tolleranza $[15, 24.6]$. L'azienda dichiara che le lunghezze reali dei chiodi sono variabili aleatorie uniformi di media 20 mm e varianza 12 mm^2.

1. Se l'azienda dichiara il vero, quanto valgono i parametri del modello uniforme delle lunghezze reali dei chiodi?
2. Se l'azienda dichiara il vero, qual è la percentuale di chiodi troppo corti? Quale quella di chiodi troppo lunghi? E quella di chiodi che soddisfano la specifica?

Su un campione casuale di 1000 chiodi, 120 sono troppo corti, 111 sono troppo lunghi e 769 rispettano la specifica.

3. Sulla base di questi dati, secondo voi l'azienda ha dichiarato il falso o il vero? Per rispondere costruite un opportuno test di livello $\alpha = 5\%$. Inoltre, provate a determinare il valore esatto del p-value.
4. Usate gli stessi dati per costruire un intervallo di confidenza approssimativamente 99% della percentuale di chiodi troppo corti.

Soluzione

1. Sia X la lunghezza reale di un chiodo; se l'azienda dichiara il vero, $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ con a, b tali che $\mathrm{E}(X) = 20$ e $\mathrm{Var}(X) = 12$; dato il vincolo $a < b$ il sistema $\begin{cases} \mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2} = 20 \\ \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = 12 \end{cases}$ nelle incognite a, b ha unica soluzione data da $a = 14$ e $b = 26$.

2. Se l'azienda dichiara il vero allora $X \sim \mathcal{U}(14, 26)$ e le percentuali cercate sono:

$$p_{01} = \%\text{ di chiodi troppo corti } = P(X < 15) = \frac{15-14}{26-14} = \frac{1}{12}$$
$$p_{02} = \%\text{ di chiodi che soddisfano la specifica } = P(15 < X < 24.6) = \frac{24.6-15}{26-14} = \frac{9.6}{12} = 0.8$$
$$p_{03} = \%\text{ di chiodi troppo lunghi } = 1 - \frac{1}{12} - \frac{9.6}{12} = \frac{1.4}{12}$$

3. Usiamo un test di adattamento χ^2 di Pearson per verificare l'ipotesi nulla $H_0 : p_i = p_{0i}$, $\forall i = 1, 2, 3$ contro l'alternativa $H_1 : p_i \neq p_{0i}$ per qualche $i = 1, 2, 3$. La statistica di Pearson è data da

$$Q_{1000} = \sum_{i=1}^{3} \frac{(N_i - 1000p_{0i})^2}{1000p_{0i}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{N_i^2}{1000p_{0i}} - 1000 = \frac{12}{1000}\left(120^2 + \frac{769^2}{9.6} + \frac{111^2}{1.4}\right) - 1000 \simeq 17.61$$

   (N_1, N_2, N_3 indicano rispettivamente il numero di chiodi troppo corti, che rispettano la specifica e troppo lunghi). Poiché $1000p_{01} = 1000/12 > 5$, se H_0 è vera, approssimativamente Q_{1000} ha distribuzione χ^2_{3-1} o, equivalentemente è esponenziale di parametro 2. Il p-value è $P_{H_0}(Q_{1000} > 17.61) = \mathrm{e}^{-17.61/2} = \mathrm{e}^{-8.81} \simeq 0.00015 = 0.015\%$: a ogni livello di significatività $\alpha \geq 0.015\%$ rifiutiamo l'ipotesi che l'azienda dica il vero.

4. La stima della percentuale p_1 di chiodi troppo corti è $\hat{p_1} = \frac{120}{1000} = 0.12$ e un intervallo di confidenza approssimativamente pari a 0.99 è dato da $\hat{p_1} \pm z_{0.995}\sqrt{\frac{\hat{p_1}(1-\hat{p_1})}{1000}} = 0.12 \pm 2.576\sqrt{\frac{0.12(1-0.12)}{1000}} = (0.0935, 0.1465)$. Osservate che (consistentemente a quanto stabilito nel punto 3.) $p_{01} = \frac{1}{12} \notin (0.0935, 0.1465)$.
   ∎

Esercizio 2.4 La solita azienda OISAC ha proposto una pila di ultima generazione `yyy` più durevole del tipo `xxx` di vecchia generazione. Per confrontare la durata delle due pile `xxx` e `yyy` abbiamo a disposizione i seguenti due campioni indipendenti di dati continui (espressi in ore):

$$x_i: \quad 7.26, \quad 2.04, \quad 0.94, \quad 1.76, \quad 11.08, \quad 0.60, \quad 9.04$$

(=durate di 7 pile `xxx`)

$$y_i: \quad 0.80, \quad 1.71, \quad 4.10, \quad 6.10, \quad 7.89, \quad 24.10$$

(=durate di 6 pile `yyy`).

1. Proponete a OISAC un test per verificare se le pile `yyy` durano più di quelle `xxx`, che funzioni anche quando non si ha nessun'altra informazione sul modello statistico generatore dei dati. Sulla base dei dati forniti che decisione prendete a livello $\alpha = 10\%$?

In realtà, successivamente, la nostra conoscenza sul modello statistico generatore dei dati è aumentata. Infatti, ora riteniamo plausibile modellare le durate delle pile, sia di nuova che di vecchia generazione, come variabili aleatorie gaussiane.

2. Avendo questa ulteriore informazione, la risposta alla domanda 1. cambia o no? Argomentate la risposta impostando una opportuna metodologia statistica.

   [Per risparmiare tempo, nell'eventualità vi occorrano, vi abbiamo già calcolato qualche statistica per i due campioni: $\sum_{j=1}^{7} x_j = 32.72$, $\sum_{j=1}^{6} y_j = 44.7$ $\sum_{j=1}^{7} x_j^2 = 265.7$, $\sum_{j=1}^{6} y_j^2 = 700.65$].

Soluzione

All'azienda OISAC che ha proposto la nuova pila piacerebbe dimostrare in modo convincente l'ipotesi che `yyy` sia più duratura di `xxx`. Motivati da ciò procederemo a verificare il seguente problema: H_0 :"*Le pile* `yyy` *durano al più quanto le pile* `xxx`" contro l'alternativa H_1 :"*Le pile* `yyy` *durano più delle pile* `xxx`"; in questo modo l'eventuale accettazione di H_1 sarebbe una conclusione forte.

1. Non avendo nessuna informazione sulla famiglia di densità da cui sono stati estratti i due campioni di dati, impostiamo il test di omogeneità unilatero non parametrico di Wilcoxon-Mann-Wintney per verificare l'ipotesi nulla H_0 :"*Le pile* `yyy` *durano al più quanto le pile* `xxx`" contro l'alternativa H_1 :"*Le pile* `yyy` *durano più delle pile* `xxx`" e usiamo la statistica T_X data dalla somma dei ranghi delle durate delle pile `xxx`: $T_X = 1+3+5+6+9+11+12 = 47$. Rifiutiamo H_0 a livello α se $T_X < w_{7,6}(\alpha)$; il p-value è $P(T_v < 47) = P(T_X \leq 46) > P(T_X \leq 40) = 0.10$ (dalle tavole); sicuramente per ogni $\alpha \leq 0.10$ riteniamo plausibile che le pile `yyy` durano al più quanto le pile `xxx`, quindi sembrerebbe nessun miglioramento nella tecnologia.

2. Sotto ipotesi di campioni indipendenti e gaussiani, come prima cosa impostiamo un F-test per il confronto di varianze per il problema: $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ versus $H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ di livello $\alpha = 5\%$:

   $$\bar{x} \simeq 4.67, \quad \bar{y} = 7.45$$
   $$S_X^2 = \frac{265.7 - 7 \times 4.67^2}{6} \simeq 18.84, \quad S_Y^2 = \frac{700.65 - 6 \times 7.45^2}{5} \simeq 73.53, \quad \frac{S_X^2}{S_Y^2} \simeq 0.256$$
   $$F_{6,5}(0.975) = 6.98 \quad F_{6,5}(2.5/100) = 1/F_{5,6}(0.975) = 1/5.99 \simeq 0.167$$

   Poiché $0.256 \in (0.167, 6.98)$, allora accettiamo l'ipotesi nulla di varianze uguali.

   Procediamo quindi a impostare un test t con $\alpha = 5\%$ per confrontare le medie di dati indipendenti e gaussiani. Infatti, a parità di variabilità, le ipotesi H_0, H_1 si traducono nel seguente modo: H_0:"$\mu_X \geq \mu_Y$" versus H_1:"$\mu_X < \mu_Y$":

   $S_p^2 \simeq 43.7$, $\dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p\sqrt{1/7 + 1/6}} = -0.756$; gradi di libertà della $t = 7+6-2 = 11$ e $-t_{11}(1-0.05) \simeq -1.7958$;
   Essendo $-0.756 > -1.7958$ allora anche in questo caso accettiamo l'ipotesi H_0 che le nuove pile non durano più delle vecchie a un livello di significatività pari a $1 - (1-0.05)(1-0.05) = 9.75\%$.

∎

3 STATISTICA per ING INF TEL [2L] I. Epifani 12.09.06

Nello svolgere gli esercizi fornire passaggi e spiegazioni: non bastano i risultati finali.

Esercizio 3.1 Abbiamo due campioni casuali indipendenti $X_1, \dots, X_m$ da una popolazione gamma[1] $\Gamma(\alpha, \theta)$ e $Y_1, \dots, Y_n$ da una popolazione gamma $\Gamma(\beta, \theta)$, con $\theta > 0$ parametro incognito e α, β parametri noti e diversi. Usiamo come stimatore di θ una statistica della forma $T = c\left(\sum_{j=1}^{m} X_j + \sum_{j=1}^{n} Y_j\right)$, dove c è un opportuno numero strettamente positivo.

1. Determinate la distribuzione di T in funzione di c.
2. Determinate c tale che T sia stimatore non distorto di θ.

Siano ora $m = 20$, $n = 10$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.3$ e sia c come trovato al punto precedente; se non siete stati in grado di trovarlo, scegliete voi un valore ragionevole per c (strettamente positivo) in modo da poter proseguire.

3. Usando T come statistica test, costruite una regione critica di ampiezza $\alpha = 5\%$ per verificare l'ipotesi nulla $H_0 : \theta \le 2.5$ contro l'alternativa $H_1 : \theta > 2.5$. Se $T = 6.36$ cosa deciderete con il vostro test di livello 5%?
4. Calcolate la potenza del test del punto 3. in $\theta = 4.05$, oppure indicate un intervallo in cui tale potenza cade.

Soluzione

1. In quanto somma di m componenti di un campione casuale di legge gamma, segue dalle proprietà della famiglia gamma che $\sum_{j=1}^{m} X_j \sim \Gamma(\alpha m, \theta)$; analogamente vale che $\sum_{j=1}^{n} Y_j \sim \Gamma(\beta n, \theta)$; T è quindi $c > 0$ volte la somma di due variabili gamma indipendenti con stesso parametro di scala θ; allora, sempre per le proprietà della famiglia gamma abbiamo $T \sim \Gamma(\alpha m + \beta n, c\theta)$.
2. $\mathrm{E}(T)$= media della densità $\Gamma(\alpha m + \beta n, c\theta) = (\alpha m + \beta n)c\theta$;

   oppure
   $$\mathrm{E}(T) = cm\,\mathrm{E}(X_1) + cn\,\mathrm{E}(Y_1) = cm\alpha\theta + cn\beta\theta = (\alpha m + \beta n)c\theta$$
   Quindi T è stimatore non distorto di θ se e solo se $c = \dfrac{1}{\alpha m + \beta n}$.

Se $m = 20$, $n = 10$, $\alpha = 0.1$ e $\beta = 0.3$, allora $c = 1/5 = 0.2$ e $T \sim \Gamma(5, \theta/5)$ che è equivalente a dire che $2 \times 5 \times T/\theta = 10T/\theta \sim \chi^2_{10}$.

3. Per verificare $H_0 : \theta \le 2.5$ contro $H_1 : \theta > 2.5$ usiamo la regione critica $\mathcal{G} = \{(x_1, \dots, x_{10}, y_1, \dots y_{20}) : T(x_1, \dots, x_{10}, y_1, \dots y_{20}) > k\}$, con k tale che $P_{2.5}(T > k) = \alpha = 0.05$. Per determinare esplicitamente k usiamo quanto stabilito prima e cioè che, se θ è il vero valore del parametro, allora $10T/\theta \sim \chi^2_{10}$. Otteniamo quanto segue:
   $$0.05 = P_{2.5}(T > k) = P_{2.5}\left(\frac{10T}{2.5} > \frac{10k}{2.5}\right) \quad \text{se e solo se} \quad \frac{10k}{2.5} = 4k = \chi^2_{10}(1 - 0.05) \simeq 18.307$$
   e quindi $k = 18.307/4 = 4.57675$. Riassumendo: rifiutiamo $H_0 : \theta \le 2.5$ a favore di $H_1 : \theta > 2.5$ a livello 5% se $T > 4.57675$. Se abbiamo un valore di T pari a 6.36, allora rifiutiamo l'ipotesi nulla.
4. La potenza del test in $\theta = 4.05$ è
   $$P_{4.05}(T > 4.57675) = P_{4.05}\left(\frac{10T}{4.05} > \frac{10 \times 4.57675}{4.05}\right) = P_{4.05}\left(\frac{10T}{4.05} > 11.30\right) =$$
   $$= 1 - F_{\chi^2_{10}}(11.30) \simeq 1 - F_{\chi^2_{10}}(11.317) = 1 - 66.7\% = 33.3\% \quad \blacksquare$$

[1] La densità $\Gamma(\alpha, \theta)$ è $\dfrac{x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x),\ \alpha > 0, \theta > 0$.

Esercizio 3.2 È noto che il peso di una donna italiana di 25 anni è una variabile aleatoria gaussiana X di media 62 Kg e varianza 16 Kg^2. Il programma dimagrante `WW` consente di ridurre il peso di una quantità $Y \sim \mathcal{N}(\mu, 20)$, con μ parametro incognito. In altre parole, alla fine della dieta il peso di una donna che ha seguito il programma è $Z = X - Y$ e assumiamo che X, Y siano indipendenti.

Nel depliant pubblicitario del programma dimagrante `WW` si sostiene che chi segue scrupolosamente il programma perde mediamente 5 Kg, e noi, per stabilire se il messaggio è ingannevole o no, abbiamo deciso di testare il programma `WW` su 64 donne; $Z_1, \dots, Z_{64}$ è il campione casuale ottenuto.

1. Qual è la distribuzione di Z?

2. Costruite un test su μ tale che sia al più pari al 4% la probabilità di commettere l'errore di prima specie di ritenere ingannevole il messaggio quando in realtà seguendo il programma `WW` si perdono effettivamente (almeno) 5 Kg.

3. Fornite analiticamente e rappresentate graficamente la funzione di potenza del test di livello 4% costruito al punto 2.

4. Se il campione dei dati ha fornito $\sum_{j=1}^{64} Z_j = 3712.0$, qual è il p-value del test?

SOLUZIONE

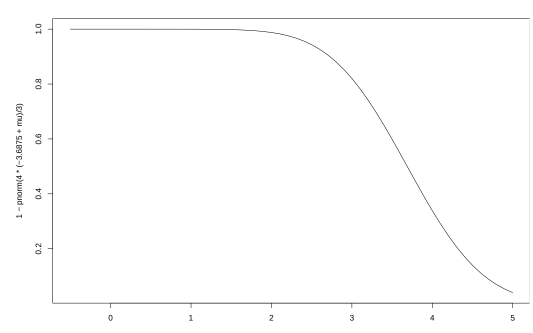
1. Z è una differenza di variabili aleatorie gaussiane indipendenti e quindi $Z \sim \mathcal{N}(\mu_Z, \sigma_Z^2)$ con $\mu_Z = 62 - \mu$ e $\sigma_Z^2 = 16 + 20 = 36$.

2. Deduciamo dalla domanda di dover impostare un test di verifica dell'ipotesi nulla H_0 : *"si perdono almeno* 5 Kg*"* contro l'alternativa H_1 : *"si perdono meno di* 5 Kg*"*, che in termini di μ traduciamo come $H_0 : \mu \geq 5$ contro l'alternativa $H_1 : \mu < 5$; infine, in termini della media di Z il problema di verifica di ipotesi diventa: $H_0 : \mu_Z \leq 57$ contro l'alternativa $H_1 : \mu_Z > 57$. Essendo la varianza di Z nota, usiamo il seguente z-test di livello $\alpha = 0.04$: rifiutiamo H_0 se $\overline{Z} \geq 57 + \dfrac{\sigma_Z}{\sqrt{64}} z_{0.96}$; cioè rifiutiamo H_0 se $\overline{Z} \geq 58.3125$.

3. La funzione di potenza del test è data da

$$\pi(\mu) = P_\mu\left(\overline{Z} \geq 58.3125\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{64}(58.3125 - 62 + \mu)}{\sqrt{36}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4}{3}(\mu - 3.6875)\right), \qquad \mu < 5$$

   Il grafico è nella figura che segue



4. Se il campione dei dati ha fornito $\sum_{j=1}^{64} Z_j = 3712.0$, allora $\overline{Z} = 58$ e il p-value dello z-test del punto 2. è $p = 1 - \Phi\left(\frac{\overline{z} - 57}{\sqrt{36}/\sqrt{64}}\right) = 1 - \Phi(4(58 - 57)/3) = 1 - \Phi(4/3) \simeq 1 - \Phi(1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$: per ogni $\alpha < 9.18\%$ (e quindi anche $\alpha = 0.04$) riteniamo plausibile l'ipotesi nulla H_0 : *"si perdono almeno* 5 Kg*"*. ∎

Esercizio 3.3 Il tempo di funzionamento in mesi di un componente prima di guastarsi può essere modellato come una variabile aleatoria T assolutamente continua con densità

$$f(t,\theta) = \frac{1}{6^{\frac{1}{\theta}}} \times \frac{1}{2\theta} t^{\frac{1}{2\theta}-1} \mathbf{1}_{(0,36)}(t), \quad \theta > 0$$

Il parametro θ è incognito.

1. Determinate in funzione di θ la caratteristica κ data dalla probabilità che un componente non si guasti nei primi 6 mesi di vita.

In un esperimento vengono messi in prova simultaneamente 169 componenti e $T_1, \dots, T_{169}$ sono i tempi di funzionamento rilevati.

2. Determinate gli stimatori di massima verosimiglianza di θ e di κ.

Sia $\hat{\theta}$ lo stimatore di massima verosimiglianza individuato al punto precedente.

3. Determinate media, varianza e distribuzione asintotica di $\hat{\theta}$. (Per comodità vi forniamo i seguenti risultati che è necessario usare: $\mathrm{E}_\theta[\ln(\sqrt{T})] = \dfrac{\mathrm{E}_\theta(\ln T)}{2} = \ln 6 - \theta$ e $\mathrm{E}_\theta[(\ln(\sqrt{T}))^2] = \dfrac{\mathrm{E}_\theta((\ln T)^2)}{4} = (\ln 6 - \theta)^2 + \theta^2$.)

4. Costruite un intervallo di confidenza asintotico bilatero per θ di livello 90% nel caso che $\displaystyle\sum_{j=1}^{169} \ln\sqrt{Y_j} = \frac{\sum_{j=1}^{169} \ln Y_j}{2} = -35.49$. Quindi deducetene uno per κ sempre di livello 90%.

Supponete ora di aver cancellato per distrazione l'unico file contenente i dati e che la sola informazione preservata sia la seguente: esattamente 52 componenti su 169 hanno funzionato per più di 6 mesi.

5. Stimate θ e κ sulla base di quest'ultima informazione. Quindi usate questa stima di κ per costruire un nuovo intervallo di confidenza asintotico bilatero per κ approssimativamente di livello 90%.

Soluzione

1. $\kappa = \kappa(\theta) = P_\theta(T > 6) = \displaystyle\int_6^{36} f(t,\theta)\, dt = \int_6^{36} \frac{1}{6^{\frac{1}{\theta}}} \times \frac{1}{2\theta} t^{\frac{1}{2\theta}-1}\, dt = 1 - 6^{-\frac{1}{2\theta}}, \qquad \forall \theta > 0.$

2.

$$L_\theta(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{6^{\frac{n}{\theta}}} \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n \left(\prod_{j=1}^n t_j\right)^{\frac{1}{2\theta}-1}$$

$$\ln L_\theta(t_1, \dots, t_n) = -\frac{n}{\theta} \ln 6 - n \ln(2\theta) + \left(\frac{1}{2\theta} - 1\right) \sum_{j=1}^n \ln t_j$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L_\theta(t_1, \dots, t_n) = \frac{n \ln 6}{\theta^2} - \frac{n}{\theta} - \frac{\sum_{j=1}^n \ln t_j}{2\theta^2} \geq 0$$

se e solo se

$$\ln 6 - \theta - \frac{\sum_{j=1}^n \ln t_j}{2n} \geq 0$$

Quindi, lo stimatore ML di θ è $\hat{\theta} = \ln 6 - \dfrac{\sum_{j=1}^n \ln T_j}{2n} = -\dfrac{\sum_{j=1}^n \ln\left(\frac{\sqrt{T_j}}{6}\right)}{n}$ e quello di κ è $\hat{\kappa} = 1 - 6^{-\frac{1}{2\hat{\theta}}}$.

3. $\mathrm{E}_\theta(\hat{\theta}) = \mathrm{E}_\theta\left(\ln 6 - \frac{\sum_{j=1}^n \ln T_j}{2n}\right) = \ln 6 - \frac{\mathrm{E}_\theta(\ln T)}{2} = \ln 6 - \ln 6 + \theta = \theta,$
   dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il suggerimento dato;

$$\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}) = \mathrm{Var}_\theta\left(\ln 6 - \frac{\sum_{j=1}^n \ln T_j}{2n}\right) = \mathrm{Var}_\theta\left(\frac{\sum_{j=1}^n \ln(\sqrt{T_j})}{n}\right) = \frac{\mathrm{Var}_\theta\left(\ln(\sqrt{T})\right)}{n} =$$

$$= \frac{\mathrm{E}_\theta((\ln\sqrt{T})^2) - (\mathrm{E}_\theta(\ln T))^2}{n} = \frac{(\ln 6 - \theta)^2 + \theta^2 - (\ln 6 - \theta)^2}{n} = \frac{\theta^2}{n}$$

   Segue dalle proprietà asintotiche degli stimatori ML per modelli "regolari" che $\hat{\theta}$ è asintoticamente gaussiano con media θ e varianza θ^2/n.

4. Se $\sum_{j=1}^{169} \ln\sqrt{Y_j} = \frac{\sum_{j=1}^{169} \ln Y_j}{2} = -35.49$, allora $\hat{\theta} = \ln 6 - \frac{-35.49}{169} \simeq 2$; avendo tante osservazioni, (169), la legge approssimata di $\sqrt{169}(\hat{\theta} - \theta)/\sqrt{\theta^2}$ è $\mathcal{N}(0,1)$ e quindi $\sqrt{169}(\hat{\theta} - \theta)/\sqrt{\theta^2}$ è (approssimativamente) una quantità pivotale, per la quale abbiamo

$$P_\theta(-1.645 < \frac{\sqrt{169}(\hat{\theta} - \theta)}{\sqrt{\theta^2}} < 1.645) = 0.90$$

   Invertendo la diseguaglianza $-1.645 < \frac{\sqrt{169}(\hat{\theta}-\theta)}{\sqrt{\theta^2}} < 1.645$ in θ otteniamo:

$$\frac{\hat{\theta}}{1 + 1.645/13} < \theta < \frac{\hat{\theta}}{1 - 1.645/13};\ \text{con i dati}\ \frac{2}{1.1265} < \theta < \frac{2}{0.8735};\ \text{infine}\ 1.774 < \theta < 2.290.$$

   Per κ un IC al 90% risulta:

$$1 - 6^{-\frac{1}{2\times 2.290}} < \kappa < 1 - 6^{-\frac{1}{2\times 1.774}} \quad \text{cioè}\ 0.324 < \kappa < 0.396$$

5. Esprimiamo θ in funzione di κ, perché ora dobbiamo partire dalla stima di κ; $\theta = -\frac{\ln 6}{2\ln(1-\kappa)}$. Allora: $\hat{\kappa} = \frac{52}{169} = \frac{4}{13} \simeq 0.308$ e $\hat{\hat{\theta}} = -\frac{\ln 6}{2\ln(1 - 4/13)} \simeq 2.437$. Infine, un IC asintotico per κ è $\frac{4}{13} \pm 1.645\frac{\sqrt{\frac{4}{13}\times\frac{9}{13}}}{13} =$ $(0.249, 0.366)$.

▮

Esercizio 3.4 I seguenti 12 dati forniscono la percentuale oraria dei capi danneggiati da una lavanderia di quartiere nella fascia oraria che va dalle 7:00 della mattina alle 19:00 della sera:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
0.05	0.18	0.55	0.08	0.04	0.11	0.03	0.09	0.13	0.50	0.36	0.61

(per esempio, $x_1 = 0.05 = 5\%$ rappresenta la percentuale dei capi danneggiati sul totale di quelli lavati fra le 7:00 e le 8:00, mentre, $x_{12} = 61\%$ è la percentuale di quelli danneggiati sul totale lavato fra le 18:00 e le 19:00.)

1. Costruite un opportuno test per stabilire se i precedenti dati costituiscano un campione casuale oppure la percentuale dei capi danneggiati aumenti con il trascorrere delle ore della giornata. Sulla base dei dati forniti che decisione prendete a livello $\alpha = 2.5\%$?

2. Costruite un opportuno test per verificare se la percentuale oraria dei capi danneggiati dalla lavanderia può essere modellata come una variabile aleatoria X assolutamente continua con densità data da

$$f_0(x) = 0.2x^{-0.8}\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$$

   Per rispondere a questo punto usate solo il seguente sottocampione di 6 dati: $(x_5, x_8, x_6, x_2, x_{11}, x_{12}) = (0.04, 0.09, 0.11, 0.18, 0.36, 0.61)$ e fissate un livello di significatività $\alpha = 10\%$.

Soluzione

1. Usiamo il test di aleatorietà di Kendall a una coda per verificare l'ipotesi nulla di assenza di trend contro l'alternativa di trend positivo. Contiamo il numero di concordanze e discordanze; con i simboli degli appunti abbiamo:

dati :	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
	0.05	0.18	0.55	0.08	0.04	0.11	0.03	0.09	0.13	0.50	0.36	0.61
C_i:	9	4	1	6	6	4	5	4	3	1	1	
D_i:	2	6	8	2	1	2	0	0	0	1	0	

   e

$$C = \sum_{i=1}^{11} C_i = 44, \qquad D = \sum_{i=1}^{11} D_i = 22, \qquad T = C - D = 22\,.$$

   Per un test di ampiezza α la regione di rifiuto è $\{T > q_{\text{Ken};n}(1-\alpha)\}$. Noi abbiamo $n = 12$ e, dalle tabelle, $q_{\text{Ken};12}(.975) = 28$. Essendo $T = 23 < 28$, segue che accettiamo l'ipotesi di casualità a livello $\alpha = 2.5\%$

2. Abbiamo un numero "piccolo" di dati (6) non raggruppati e il campione è ipotizzato provenire da una popolazione continua: impostiamo il test di Kolmogorov-Smirnov di livello 5% per verificare: $H_0 : f(x) = f_0(x) = 0.2x^{-0.8}\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$ contro l'alternativa $H_1 : f(x) \neq f_0(x)$. Pertanto,

$$F_0(s) = \int_0^s 0.2x^{-0.8}\,dx = s^{0.2} \qquad \forall s \in (0,1)$$

   e quindi

x_i	0.04	0.09	0.11	0.18	0.36	0.61
$F_0(x_i)$	0.525	0.618	0.643	0.710	0.815	0.906
$F_6(x_i)$	$1/6 \simeq 0.167$	$2/6 \simeq 0.334$	$3/6 = 0.500$	$4/6 \simeq 0.668$	$5/6 \simeq 0.835$	1

   Rifiutiamo al livello α se $D_6 := \sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{F}_6(x) - F_0(x)| > q_{D_6}(1-\alpha)$. Ma $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{F}_6(x) - F_0(x)| = \hat{F}_6(0.04) \simeq 0.525$, e dalle tavole dei quantili della statistica di Kolmogorov-Smirnov con $n = 6$ abbiamo $q_{D_6}(1 - 0.10) = 0.4680$: 0.525 è maggiore di 0.4680 e rifiutiamo H_0. ∎

Nello svolgere gli esercizi fornire passaggi e spiegazioni: non bastano i risultati finali.

Esercizio 4.1 Nel tiro al bersaglio il punto colpito da un tiratore scelto ha coordinate X, Y che sono variabili aleatorie gaussiane indipendenti centrate in zero e di varianza σ^2 incognita. La precisione τ del tiratore è data dal reciproco della deviazione standard, cioè $\tau = 1/\sigma$. Per fare inferenza su τ, abbiamo chiesto al nostro tiratore scelto di lanciare sequenzialmente n freccette e a ogni lancio abbiamo registrato il quadrato della distanza (euclidea) fra il punto colpito (X, Y) e il bersaglio, cioè $Q = X^2 + Y^2$. Sia $Q_1, \dots, Q_n$ il campione casuale così ottenuto.

1. Qual è la densità di $Q = X^2 + Y^2$?
2. Determinate gli stimatori di massima verosimiglianza di σ^2 e di τ basati sul campione $Q_1, \dots, Q_n$.
3. Stabilite se lo stimatore di massima verosimiglianza di σ^2 è efficiente.
4. Provate ad argomentare perché lo stimatore di massima verosimiglianza della precisione τ non è efficiente.

Soluzione

1. Osserviamo che le variabili aleatorie X^2/σ^2 e Y^2/σ^2 sono indipendenti e, in quanto quadrati di gaussiane standard, hanno entrambe distribuzione χ^2_1. Allora la loro somma $(X^2 + Y^2)/\sigma^2$ ha distribuzione χ^2_2 o, equivalentemente, esponenziale con parametro di scala 2. Infine, $Q = X^2 + Y^2 = \sigma^2(X^2 + Y^2)/\sigma^2$ ha distribuzione esponenziale di media $2\sigma^2$: $Q \sim \mathcal{E}(2\sigma^2)$.

2. Lo stimatore ML della media del modello esponenziale $\mathcal{E}(\mu)$ è dato dalla media campionaria. Quindi, per la proprietà di invarianza degli stimatori ML, lo stimatore ML di σ^2 basato sul campione $Q_1, \dots, Q_n$ è $\widehat{\sigma^2} = \overline{Q}/2$ e quello ML di τ è $\widehat{\tau} = \sqrt{2/\overline{Q}}$.

3. Innanzitutto $\widehat{\sigma^2}$ è stimatore non distorto di σ^2. Inoltre, il logaritmo della verosimiglianza del campione casuale $Q_1, \dots, Q_n$ è

$$\ln L_{\sigma^2}(q_1, \dots, q_n) = -n\ln(2\sigma^2) - \frac{\sum_{j=1}^n q_j}{2\sigma^2}$$

da cui

$$\frac{\partial \ln L_{\sigma^2}(q_1, \dots, q_n)}{\partial \sigma^2} = \frac{-n}{\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n q_j}{2\sigma^4} = \frac{n}{\sigma^4}\left(\widehat{\sigma^2} - \sigma^2\right) \tag{3}$$

Leggiamo nell'equazione (3) che la derivata del logaritmo della funzione di verosimiglianza è funzione lineare della differenza fra $\widehat{\sigma^2}$ e la caratteristica da stimare σ^2: questa proprietà è condizione necessaria e sufficiente affinché la varianza di $\widehat{\sigma^2}$ raggiunga il confine di Cramer Rao $1/(nI(\sigma^2)$ dove $I(\sigma^2)$ è l'Informazione di Fisher del modello esponenziale di media $2\sigma^2$.

4. Se $\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\log L_{\sigma^2}(q_1, \dots, q_n)$ è funzione lineare di $\widehat{\sigma^2}$, allora non può contemporaneamente essere funzione lineare del reciproco della radice quadrata di $\widehat{\sigma^2}$. Quindi $\widehat{\tau} = 1/\widehat{\sigma}$ non è stimatore efficiente della precisione τ. Alternativamente, si potrebbe far notare che $\widehat{\tau}$ è stimatore distorto di τ dal momento che $\mathrm{E}(\widehat{\tau}) = \dfrac{\tau\sqrt{n}\Gamma(n - \frac{1}{2})}{\Gamma(n)}$. Ma quest'ultimo calcolo è stato laborioso da ottenere... ∎

Esercizio 4.2 Un'urna contiene 400 palline rosse e nere in proporzione incognita $\vartheta \in (0,1)$. Per fare inferenza sul numero di palline rosse si sono estratte a caso con reimmissione n palline e si è registrato il numero X_n delle rosse ottenute.

1. Qual è la distribuzione, la media e la varianza di X_n?
2. Proponete uno stimatore non distorto, consistente e asintoticamente gaussiano del numero di palline rosse contenute nell'urna.

Sia $\hat{R}$ lo stimatore del numero di palline rosse contenute nell'urna proposto al punto 2.

3. Usate $\hat{R}$ per verificare con un test asintotico l'ipotesi nulla H_0:"*L'urna contiene 64 palline rosse*" contro l'alternativa H_1:"*L'urna contiene più di 64 palline rosse*" a livello 6%. Scrivete esplicitamente la regione critica se avete effettuato 40 estrazioni con reimmissione.
4. Calcolate la potenza del test se effettivamente nell'urna ci sono 120 palline rosse e avete effettuato 40 estrazioni con reimmissione.

Nel prossimo punto 5. il numero n delle estrazioni non è 40. Rimangono invece invariati il numero totale 400 di palline nell'urna, $\alpha = 6\%$, H_0 e H_1.

5. Determinate il minimo numero n di estrazioni con reimmissione necessarie perché sia al più pari a 0.10 la probabilità di errore di seconda specie del test quando le palline rosse dell'urna sono effettivamente 120.

Soluzione

1. $X_n \sim \mathbf{Bin}(n, \vartheta), \vartheta \in (0,1)$, dove ϑ è la proporzione di palline rosse nell'urna. Quindi $\mathrm{E}(X_n) = n\vartheta$ e $\mathrm{Var}(X_n) = n\vartheta(1-\vartheta)$.

2. La caratteristica da stimare è $R = R(\vartheta) = 400\vartheta$. Proponiamo come stimatore di R la statistica $\hat{R} = 400\dfrac{X_n}{n}$. Notate che $\widehat{R}$ è lo stimatore di R che otteniamo sia usando il metodo dei momenti che il metodo di massima verosimiglianza. Effettivamente vale che $\mathrm{E}(\hat{R}) = \dfrac{400}{n}\mathrm{E}(X_n) = 400\vartheta = R$, quindi $\hat{R}$ è stimatore non distorto; inoltre, $\mathrm{Var}(\hat{R}) = \dfrac{400^2}{n^2}\mathrm{Var}(X_n) = \dfrac{400^2\vartheta(1-\vartheta)}{n} = \dfrac{R(400-R)}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, quindi $\hat{R}$ è stimatore consistente in media quadratica. Infine, segue dal teorema centrale del limite che per n sufficientemente grande è ragionevole approssimare la fdr $\mathbf{Bin}(n,\vartheta)$ con la fdr $\mathcal{N}(n\vartheta, n\vartheta(1-\vartheta))$ e quindi $\hat{R}$ è stimatore di R asintoticamente gaussiano nel senso che

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sqrt{n}(\hat{R}-R)}{\sqrt{R(400-R)}} \le z\right) = \Phi(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

3. Le ipotesi da verificare sono H_0: $R = 64$ contro l'alternativa H_1: $R > 64$. In virtù della gaussianità asintotica, una regione critica asintotica di livello α per questo problema è $\mathcal{G} = \left\{\hat{R} > 64 + z_{1-\alpha}\sqrt{\dfrac{64(400-64)}{n}}\right\}$.
Se $\alpha = 6\%$ e $n = 40$, abbiamo $\mathcal{G} = \left\{\hat{R} > 64 + 1.555\sqrt{\dfrac{64(400-64)}{40}}\right\} = \left\{\hat{R} > 100.05\right\}$.

4. $\pi(120) = P_{120}(\mathcal{G}) = P_{120}\left(\hat{R} > 100.05\right) = P_{120}\left(\frac{\sqrt{40}(\hat{R}-120)}{\sqrt{120(400-120)}} > \frac{\sqrt{40}(100.05-120)}{\sqrt{120(400-120)}}\right) \simeq 1-\Phi\left(\frac{\sqrt{40}(100.05-120)}{\sqrt{120(400-120)}}\right) \simeq \Phi(0.109\sqrt{40}) \simeq \Phi(0.6883) \simeq \Phi(0.69) = 0.7549$

5. $\beta(120) = 1 - P_{120}(\mathcal{G}) = P_{120}\left(\hat{R} \le 64 + 1.555\sqrt{\frac{64(400-64)}{n}}\right) \simeq \Phi(1.555 \times 0.8 - 0.3055\sqrt{n}) \le 0.10$ se e solo se $1.555 \times 0.8 - 0.306\sqrt{n} \le -1.28$, se e solo se $n \ge ((1.555 \times 0.8 + 1.28)/0.3055)^2 \simeq 68.258$. Quindi, dobbiamo fare almeno 69 estrazioni con reimmissione per avere una probabilità di errore di secondo tipo minore o uguale a 0.1 quando $R = 120$. ∎

Esercizio 4.3 Un'azienda possiede due stabilimenti A e B per la produzione di transistor. Per verificare che i prodotti dei due stabilimenti siano equivalenti, si esaminano due campioni indipendenti di 8 e 10 transistor. Denotiamo con $X_1, \ldots, X_8$ i tempi di vita degli 8 transistor campionati dallo stabilimento A e con $Y_1, \ldots, Y_{10}$ i tempi di vita dei 10 provenienti dallo stabilimento B. Dalla classifica dei 18 esaminati (fatta in base al tempo di vita di ciascun transistor) scopriamo che il transistor meno durevole è stato prodotto nello stabilimento B (nella classifica occupa la prima posizione) e il più durevole è stato prodotto in A. Andando nel dettaglio, la classifica dei 18 transistor è la seguente

Rank	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	b	a	b	b	b	b	a	b	b	b	a	b	a	a	b	a	a	a

(a=stabilimento A, b=stabilimento B).

1. Impostate un test di verifica dell'ipotesi nulla H_0 :"*i prodotti dei due stabilimenti sono equivalenti*" contro l'alternativa H_1 :"*Il transistor dello stabilimento A dura più di quello dello stabilimento B*", di livello $\alpha = 5\%$. Sulla base dei dati cosa decidete?

In realtà, noi possiamo supporre che i transistor A e B abbiano tempi di vita esponenziali di medie θ_A, θ_B, entrambe incognite. Inoltre, conosciamo anche i valori delle medie campionarie: $\overline{X}_8 = 25.1$ e $\overline{Y}_{10} = 22.0$.

2. Determinate le distribuzioni di $\dfrac{16\overline{X}_8}{\theta_A}$, di $\dfrac{20\overline{Y}_{10}}{\theta_B}$ e del rapporto $\overline{X}_8 / \overline{Y}_{10}$ nell'ipotesi che $\theta_A = \theta_B$.

3. Traducete le ipotesi H_0 :"*i prodotti dei due stabilimenti sono equivalenti*" contro H_1 :"*Il transistor dello stabilimento A dura più di quello dello stabilimento B*" in ipotesi sui parametri θ_A, θ_B. Quindi, costruite un nuovo test (questa volta parametrico) di livello $\alpha = 5\%$ basato sulla statistica test $\overline{X}_8 / \overline{Y}_{10}$. Quale decisione prendete se $\overline{X}_8 = 25.1$ e $\overline{Y}_{10} = 22.0$?

Soluzione Introduciamo le variabili aleatorie X, Y con X = "tempo di vita del transistor prodotto nello stabilimento A" e Y = "tempo di vita del transistor prodotto nello stabilimento B".

1. Se abbiamo a disposizione la sola classifica dei 18 transistor esaminati in base al tempo di vita, impostiamo il test di omogeneità non parametrico di Wilcoxon-Mann-Wintney e usiamo la statistica T_X data dalla somma dei ranghi delle tempi di vita dei transistor A: $T_X = 2 + 7 + 11 + 13 + 14 + 16 + 17 + 18 = 98$. L'ipotesi nulla H_0 :"*i prodotti dei due stabilimenti sono equivalenti*" si traduce in H_0 :"I tempi di vita X, Y dei transistor A e B sono regolati dalla stessa fdr" e l'alternativa H_1 :"*Il transistor dello stabilimento A dura più di quello dello stabilimento B*" si traduce in H_1:"X domina stocasticamente Y". Quindi confrontiamo 98 con il quantile di ordine $w_{0.95}$ della statistica T_X con $m = 8$ e $n = 10$: $w_{0.95} = 8 \times (8 + 10 + 1) - w_{0.05} = 152 - 57 = 95$. Essendo $95 < 98$, a livello 5% rifiutiamo l'ipotesi che i due transistor siano equivalenti a favore dell'ipotesi che quello di tipo A tende a durare più di quello di tipo B.

Alla luce delle nuove informazioni, il modello statistico di riferimento è quello di due campioni casuali indipendenti: $X_1, X_2, \ldots, X_8$ i.i.d. $\sim \mathcal{E}(\theta_A)$ e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{10}$ i.i.d. $\sim \mathcal{E}(\theta_B)$, con θ_A, θ_B entrambi incogniti.

2. In quanto somma di 8 componenti di un campione casuale da popolazione esponenziale, segue dalle proprietà della famiglia gamma che $\dfrac{16\overline{X}_8}{\theta_A} \sim \Gamma(8, 2) = \chi^2_{16}$; analogamente vale che $\dfrac{20\overline{Y}_{10}}{\theta_B} \sim \Gamma(10, 2) = \chi^2_{20}$.

Per quanto riguarda $\overline{X}_8 / \overline{Y}_{10}$ osserviamo che, se $\theta_A = \theta_B$, allora $\dfrac{\overline{X}_8}{\overline{Y}_{10}} = \dfrac{\dfrac{16\overline{X}_8}{\theta_A}/16}{\dfrac{20\overline{Y}_{10}}{\theta_B}/20}$, cioè, se $\theta_A = \theta_B$ allora $\overline{X}_8 / \overline{Y}_{10}$ è il rapporto fra due variabili aleatorie chiquadrato indipendenti, ciascuna divisa per i corrispondenti gradi di libertà. Concludiamo che se $\theta_A = \theta_B$, allora il rapporto $\overline{X}_8 / \overline{Y}_{10}$ ha distribuzione F di Fisher con $16, 20$ gradi di libertà.

3. X, Y sono regolate dalla stessa fdr esponenziale se e solo se $\theta_A = \theta_B$. Invece, X domina Y, cioè $F_X(x) \leq F_Y(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $F_X(x) < F_Y(x)$ per qualche $x > 0$, se e solo se $1 - \mathrm{e}^{-x/\theta_A} \leq 1 - \mathrm{e}^{-x/\theta_B}$ $\forall x > 0$ e $1 - \mathrm{e}^{-x/\theta_A} < 1 - \mathrm{e}^{-x/\theta_B}$ per qualche $x > 0$. Concludiamo che X domina Y se e solo se $\theta_A > \theta_B$. Quindi, sotto l'ipotesi parametrica che entrambi i campioni provengano da popolazioni esponenziali, le ipotesi H_0 :"*i prodotti dei due stabilimenti sono equivalenti*" contro H_1 :"*Il transistor dello stabilimento A dura più di quello dello*

stabilimento B" diventano: H_0 :"$\theta_A = \theta_B$" contro H_1 :"$\theta_A > \theta_B$". Il fatto che sotto H_0, il rapporto $\overline{X}_8 / \overline{Y}_{10}$ ha distribuzione F di Fisher con 16, 20 gradi di libertà suggerisce di costruire ll test di H_0 :"$\theta_A = \theta_B$" contro H_1 :"$\theta_A > \theta_B$" come segue: rifiutiamo H_0 a favore di H_1 a livello 0.05 se $\overline{X}_8 / \overline{Y}_{10} \geq F_{16,20}(1-0.05)$. Dalle tavole otteniamo che $F_{16,20}(1-0.05) = 2.28$, quindi la regione critica è $\mathcal{G} = \{(x_1, \ldots, x_8, y_1, \ldots, y_{10} : \ \overline{x}_8 / \overline{y}_{10} \geq 2.28\}$ e se $\overline{x}_8 / \overline{y}_{10} = 25.1/22.0 = 1.141$ accettiamo H_0. ▮

Esercizio 4.4 Gli allievi del primo anno di un corso di laurea sono stati suddivisi in tre sezioni A, B, C nelle quali il corso di PCCP è tenuto da tre diversi docenti. Un controllo dei verbali delle prove d'esame di PCCP degli ultimi due anni ha fornito i dati sul numero di appelli che 1000 allievi hanno provato per superare l'esame. Questi dati sono ripartiti per sezione e riportati nella tabella seguente:

Sezione \ # *appelli provati*	1	2	3	4 o più	
A	202	100	28	20	
B	200	90	30	30	
C	172	78	20	30	

(Per esempio 202 è il numero di studenti della sezione A che sono stati promossi al primo appello provato).

1. Stabilite se i criteri di valutazione dei tre docenti delle tre sezioni siano omogenei con un opportuno test di ipotesi.
2. Stabilite se il numero di appelli necessari per essere promossi sia una variabile aleatoria geometrica di parametro 0.58, con un opportuno test di ipotesi.
3. Costruite un intervallo di confidenza approssimativamente 90% della probabilità di non essere promossi prima del terzo appello provato.

Soluzione

1. Completiamo la tabella dei dati, ricavando quelli mancanti

Sezione \ # *appelli provati*	1	2	3	4 o più	
A	202	100	28	20	350
B	200	90	30	30	350
C	172	78	20	30	300
	574	268	78	80	1000

e impostiamo un test χ^2 di indipendenza fra la variabile categorica S="sezione" e X="numero di appelli provati per superare l'esame". La statistica di Pearson Q_1 del test di indipendenza ha valore:

$$Q_1 = \sum_i \sum_j \frac{\left(N_{ij} - \frac{N_{si}N_{xj}}{1000}\right)^2}{\frac{N_{si}N_{xj}}{1000}} = 1000 \left(\sum_i \sum_j \frac{N_{ij}^2}{N_{si}N_{xj}} - 1 \right) \simeq 1000 \times 1.005 - 1000 = 5$$

Asintoticamente Q ha fdr $\chi^2_{(3-1)(4-1)} = \chi^2_6$. Quindi il p-value del test di Pearson è $1-F_{\chi^2_6}(5) \in (1-F_{\chi^2_6}(5.348), 1-F_{\chi^2_6}(4.074)) = (50\%, 66.7\%)$. (Abbiamo usato le tavole dei quantili della fdr χ^2_6 in rete). Concludiamo che c'è una forte evidenza empirica ad accettare l'ipotesi che i diversi docenti valutino gli allievi in modo omogeneo.

2. Nel punto precedente abbiamo accettato l'ipotesi di omogeneità di valutazione dei docenti. Possiamo allora considerare l'intero campione dei 1000 allievi come un campione casuale. Verifichiamo l'ipotesi nulla $H_0 : X \sim Geom(0.58)$ contro l'alternativa $H_1 : X \not\sim Geom(0.58)$ con un test chiquadrato di adattamento. Accorpiamo i 1000 dati nella seguente tabella:

$X =$ # *appelli provati*	1	2	3	4 o più	
$N_i =$	574	268	78	80	Tot= 1000

Se l'ipotesi nulla è vera abbiamo $\theta_{0i} := P_{H_0}(X = i) = 0.58 \times 0.42^{i-1}$, $\forall i = 1, 2, 3$ e $\theta_{04} := P_{H_0}(X \geq 4) = 0.42^3$. La statistica di Pearson Q_2 per questo test di adattamento ha valore

$$Q_2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(N_i - 1000\theta_{0i})^2}{1000\theta_{0i}} = \sum_{i=1}^{4} \frac{N_i^2}{1000\theta_{0i}} - 1000 = 8.755$$

Sotto H_0 approssimativamente $Q_2 \sim \chi^2_3$ e il p-value del test è pari a $P_{H_0}(Q_2 > 8.755) = 1 - F_{\chi^2_3}(8.755) \in (1 - F_{\chi^2_3}(9.348), 1 - F_{\chi^2_3}(7.815)) = (2.5\%, 5\%)$. Concludiamo che la decisione di rifiutare o accettare H_0 dipende dalla significatività del test: rifiuteremo H_0 per $\alpha \geq 5\%$ e la accetteremo per $\alpha \leq 2.5\%$.

3. Nel punto 1. abbiamo accettato l'ipotesi di omogeneità di valutazione dei docenti. Possiamo allora considerare l'intero campione dei 1000 allievi come un campione casuale. La stima della percentuale p di essere promossi non prima del terzo tentativo è $\hat{p} = \dfrac{78 + 80}{1000} = 0.158$ e un intervallo di confidenza approssimativamente pari a 0.90 è dato da $\hat{p} \pm z_{0.95}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{1000}} = 0.158 \pm 1.645\sqrt{\dfrac{0.158 \times 0.842}{1000}} = (0.139, 0.177)$. ∎

Esercizio 5.1 Stiamo studiando le piogge annue del bacino idrografico `xxx` mediante un modello gamma, in base al quale l'altezza annua di pioggia registrata in una stazione di rilevamento è una variabile aleatoria X di densità gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$, cioè

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{(1/\beta)^{\alpha} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

I dati che seguono riguardano le altezze annue di pioggia espresse in millimetri (mm) registrate dal 1989 al 2000 nella stazione di rilevamento `pippo`:

anni	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
dati	683	765	675	786	1015	799	779	1344	995	635	668	596

1. Supponete che entrambi i parametri α, β siano incogniti. Determinate degli stimatori dei parametri α e β usando il metodo dei momenti e un campione casuale $X_1, \dots, X_n$ estratto dalla densità $f(x, \alpha, \beta)$. Fornitene poi le stime basate sul precedente set di 12 dati.

2. Supponete ora che il parametro α sia noto e pari a 15 mm. Costruite lo stimatore di massima verosimiglianza di β basato un campione casuale $X_1, \dots, X_n$ estratto dalla densità gamma $\Gamma(15, \beta)$. Fornitene poi la stima ML di β basata sul precedente set di 12 dati.

In realtà nutriamo qualche dubbio sull'"andamento casuale" dei dati. Anzi sospettiamo che le piogge siano diminuite nel corso degli anni.

3. Voi cosa ne pensate? Rispondete costruendo un opportuno test di ipotesi e determinate un valore approssimato del p-value, o almeno stabilite un confine inferiore per tale p-value.

Soluzione

1. La densità $\Gamma(\alpha, \beta)$ ha media $\mathrm{E}(X) = \alpha\beta$ e varianza $\mathrm{Var}(X) = \alpha\beta^2$. Risolviamo il sistema in α, β:

$$\begin{cases} \mathrm{E}(X) = \bar{X} \\ \mathrm{E}(X^2) = M_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha\beta = \bar{X} \\ \alpha\beta^2 = M_2 - \bar{X}^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha\beta = \bar{X} \\ \bar{X}\beta = M_2 - \bar{X}^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \hat{\alpha} = \frac{\bar{X}^2}{M_2 - \bar{X}^2} \\ \hat{\beta} = \frac{M_2 - \bar{X}^2}{\bar{X}} \end{cases},$$

dove M_2 è il momento secondo campionario. Con i 12 dati a nostra disposizione abbiamo $\bar{X} = 9740/12 \sim 811.67$, $M_2 = 8401628/12 \sim 700135.7$ e le stime dei momenti di α e β sono $\hat{\alpha} \simeq 15.94$, $\hat{\beta} \simeq 50.92$.

2. Se α è noto e pari a 15, il logaritmo della funzione di verosimiglianza è $\ln L_\beta(x_1, \dots, x_n) = -15n \ln \beta + 14 \ln(\prod_{j=1}^n x_j) - (1/\beta) \sum_{j=1}^n x_j - n \ln \Gamma(15)$, la cui derivata rispetto a β è

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ln L_\beta(x_1, \dots, x_n) = \frac{-15n}{\beta} + \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{\beta^2}$$

Segue che se α è noto e pari a 15 allora lo stimatore ML di β è $\widetilde{\beta}_{ML} = \bar{X}/15$ e la stima è $811.67/15 \simeq 54.11$. Notate che $\widetilde{\beta}_{ML}$ coincide con lo stimatore dei momenti di β quando α è noto e pari a 15.

3. Verifichiamo l'ipotesi nulla H_0: *"l'andamento dei dati è completamente casuale"* contro l'alternativa: H_1: *"i dati seguono un trend decrescente"*. Usiamo un test di aleatorietà di Kendall a una coda. Contiamo il numero di concordanze e discordanze:

dati	683	765	675	786	1015	799	779	1344	995	635	668	596
C_i	7	6	6	4	1	2	2	0	0	1	0	
D_i	4	4	3	4	6	4	3	4	3	1	1	

e $C = \sum_{i=1}^{11} C_i = 29, D = \sum_{i=1}^{11} D_i = 37, T = C - D = -8$. Per un test di ampiezza α la regione di rifiuto è $\{T < -q_{\mathrm{Ken};n}(1-\alpha)\}$ e il p-value è dato da $P_0(T \le -8) = 1 - P_0(T \le 8)$. Noi abbiamo $n = 12$ e quindi $q_{\mathrm{Ken};12}(.90) = 18$, da cui p-value$= 1 - P_0(T \le 8) \ge 1 - 0.90 = 10\%$. Concludiamo che a qualunque livello di significatività $\alpha \le 10\%$, accettiamo l'ipotesi nulla che i dati provengano da un campione casuale: alla luce dei dati il sospetto che le piogge stiano diminuendo sembrerebbe infondato. (Usando R si ottiene p-value $= 0.3192$). ∎

Esercizio 5.2 Una grande azienda tessile italiana produce tappeti. Sul mercato vengono immessi solo i tappeti di prima e seconda scelta, mentre gli scarti sono venduti nell'outlet interno. Un tappeto è classificato di prima scelta se non presenta difetti, è di seconda se presenta uno o due difetti, ed è scarto se presenta più di due difetti. È poi noto che il numero di difetti di ogni tappeto può essere modellato mediante una variabile aleatoria discreta X avente densità di Poisson di parametro $\theta > 0$, cioè $X \sim f(x, \theta)$ con

$$f(x, \theta) = \frac{\mathrm{e}^{-\theta}\theta^x}{x!}\mathbf{1}_{\{0,1,2,\dots\}}(x),$$

dove $\theta > 0$ è un parametro incognito. Per fare inferenza su θ e sulle percentuali (attese) di tappeti di prima e seconda scelta è stato analizzato un campione casuale $X_1, \dots, X_n$ del numero di difetti di n tappeti.

1. Determinate lo stimatore di massima verosimiglianza del parametro θ e delle percentuali di tappeti di prima e seconda scelta prodotti dall'azienda e fornitene il valore numerico nel caso che siano stati contati in totale 25 difetti su un campione di 100 tappeti.

2. Discutete le proprietà asintotiche degli stimatori di massima verosimiglianza individuati al punto 1.

3. Chiamiamo p_1 la percentuale (attesa) dei tappeti di prima scelta prodotti dall'azienda. Verificate l'ipotesi nulla $H_0 : p_1 \leq 70\%$ contro l'alternativa $H_1 : p_1 > 70\%$ con un test asintotico di livello $\alpha = 10\%$, sempre nel caso che siano stati contati in totale 25 difetti su un campione di 100 tappeti.

4. Chiamiamo p_2 la percentuale (attesa) dei tappeti di seconda scelta prodotti dall'azienda e $\hat{p}_2$ il suo stimatore di massima verosimiglianza. Calcolate un intervallo di confidenza bilatero asintotico per p_2 (basato su $\hat{p}_2$) di livello approssimativamente pari a 95%, sempre nel caso che siano stati contati in totale 25 difetti su un campione di 100 tappeti.

Soluzione

1. Le percentuali attese di tappeti di prima e seconda scelta sono caratteristiche della popolazione date da

$$p_1 = p_1(\theta) = P(X_1 = 0) = \mathrm{e}^{-\theta},\ p_2 = p_2(\theta) = P(X_1 = 1) + P(X_1 = 2) = \mathrm{e}^{-\theta}\theta\left(1 + \frac{\theta}{2}\right),$$

Lo stimatore ML di θ è la media campionaria $\hat{\theta} = \bar{X}$ e gli stimatori ML di p_1, p_2 sono dati rispettivamente da $\hat{p}_1 = \mathrm{e}^{-\bar{X}},\ \hat{p}_2 = \mathrm{e}^{-\bar{X}}\bar{X}\left(1 + \bar{X}/2\right)$.

Se sono stati contati in totale 25 difetti su un campione di 100 tappeti, allora abbiamo $n = 100$ e $\sum_{j=1}^n X_j = 25$ e le stime ML sono $\hat{\theta} = 0.25,\ \hat{p}_1 = \mathrm{e}^{-0.25} \simeq 0.779$ e $\hat{p}_2 = \mathrm{e}^{-0.25}0.25\,(1 + 0.25/2) \simeq 0.219$.

2. Il modello statistico di Poisson e tutte le caratteristiche su sui stiamo facendo inferenza ($\theta, p_1(\theta)$ e $p_2(\theta)$) soddisfano le ipotesi del Teorema sulla disuguglianza di Cramer Rao. Inoltre la densità di Poisson $f(x, \theta)$ è derivabile in θ infinite volte. Segue che gli stimatori ML trovati sono tutti asintoticamente non distorti, asintoticamente efficienti (e quindi anche consistenti) e asintoticamente gaussiani con media asintotica data dalla rispettiva caratteristica che stimano e varianza asintotica coincidente con il rispettivo limite inferiore di Cramer Rao. Più in dettaglio, asintoticamente abbiamo:
$\hat{\theta} \sim \mathcal{N}(\theta, \frac{\theta}{n})$, infatti $nI(\theta) = n/\theta$; $\hat{p_1} \sim \mathcal{N}(p_1(\theta), \frac{\theta\mathrm{e}^{-2\theta}}{n})$, infatti $nI(\theta) = n/\theta$ e $p_1(\theta)' = -\mathrm{e}^{-\theta}$;
$\hat{p_2} \sim \mathcal{N}(p_2(\theta), \frac{\theta\mathrm{e}^{-2\theta}(1-\theta^2/2)^2}{n})$, infatti $nI(\theta) = n/\theta$ e $p_2(\theta)' = \mathrm{e}^{-\theta}(1 - \theta^2/2)$.

3. Verificare $H_0 : p_1 \leq 70\%$ contro $H_1 : p_1 > 70\%$ è equivalente a verificare $H_0 : \theta \geq -\ln 0.7$ contro $H_1 : p_1 < -\ln 0.7$ e una regione critica asintotica di livello 0.1 è $\mathcal{G} = \{\bar{x} < -\ln 0.7 - z_{1-0.1}\sqrt{\frac{-\ln 0.7}{100}}\} \simeq \{\bar{x} < 0.28\}$. Sul nostro campione $\bar{x} = 0.25 < 0.28$, quindi a livello 0.1 rifiutiamo H_0.

4. Usiamo il risultato sulla distribuzione asintotica trovato al punto 2. Abbiamo "tanti" (100) tappeti, quindi, approssimativamente $\hat{p_2} \sim \mathcal{N}(p_2(\theta), \sigma_2^2)$ con $\sigma_2^2 = \theta\mathrm{e}^{-2\theta}(1 - \theta^2/2)^2/n$. Approssimiamo ora la varianza asintotica usando lo stima $\bar{x}$ di θ:

$$\widehat{\sigma_2^2} = \frac{\bar{x}\mathrm{e}^{-2\bar{x}}(1 - \bar{x}^2/2)^2}{n} \simeq 0.0014$$

Quindi un intervallo bilatero asintotico di confidenza 0.95 per p_2 è $(\hat{p}_2 - z_{\frac{1+0.9}{2}}\sqrt{0.0014}, \hat{p}_2 + z_{\frac{1+0.9}{2}}\sqrt{0.0014}) \simeq (0.219 - 1.96 \times 0.037, 0.219 + 1.96 \times 0.037) \simeq (0.146, 0.292)$. ∎

Esercizio 5.3 Il regolamento della Comunità Europea n. 975/98 ha stabilito che la moneta da 1 euro ha un peso di 7.50 gr. In realtà, le monete coniate presentano pesi differenti dal valore prestabilito di 7.50 gr e gli addetti ai lavori sospettano che la macchina che le conia non sia sufficientemente precisa. In particolare, gli addetti sospettano che la deviazione standard del peso di una moneta da 1 euro sia maggiore o uguale a 0.6 gr. Per questo implementano il seguente esperimento: si pesano a caso 50 monete ottenendo una somma dei pesi pari a 379.77 gr e somma dei quadrati dei pesi pari a 2894.80 gr^2.

Mettendovi sotto ipotesi di gaussianità del peso delle monete da 1 euro, rispondete alle seguenti domande.

1. Costruite un intervallo di confidenza 97.5% unilatero della forma $(0, c)$ per la deviazione standard del peso di una moneta da 1 euro.

2. Impostate un opportuno test di ipotesi tale che sia al più pari a $\alpha = 2.5\%$ la probabilità di commettere l'errore di prima specie di ritenere precisa una macchina che ha effettivamente deviazione standard maggiore o uguale a 0.6 gr. Per rispondere dovete specificare: ipotesi nulla, ipotesi alternativa e regione critica di livello $\alpha = 2.5\%$.

3. Fornite analiticamente e rappresentate graficamente la funzione di potenza del test di livello 2.5% costruito al punto 2.

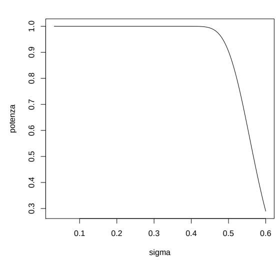
4. Quale decisione prendete a livello $\alpha = 0.1\%$? La vostra decisione cambia per $\alpha = 10\%$?

Soluzione Riteniamo che plausibilmente la macchina che conia le monete da 1 euro non commetta errori sistematici. Quindi, in quanto segue, assumeremo che il peso medio degli euro sia noto e pari a 7.5 gr. Siano σ la deviazione standard e σ^2 la varianza del peso di una moneta da 1 euro e sia $X_1, \ldots, X_{50}$ il campione casuale dei pesi delle 50 monete. Per il nostro campione abbiamo $\sum_{j=1}^{50} X_j = 379.77$ e $\sum_{j=1}^{50} X_j^2 = 2894.80$. Baseremo tutta l'inferenza statistica richiesta su $S_0^2 = \sum_j (X_j - 7.5)^2/50$ che è stimatore non distorto di σ^2 in caso di media nota. Il valore numerico di S_0^2 sul campione è dato da $s_0^2 = \dfrac{2894.80}{50} + 7.5^2 - 2 \times 7.5 \times \dfrac{379.77}{50} = 0.215$.

1. Un $IC(\sigma^2)$ di confidenza al 97.5% della forma $(0, c)$ è $\sigma^2 < \dfrac{S_0^2 \times 50}{\chi^2_{50}(2.5\%)}$. Con i dati a nostra disposizione abbiamo $(0, 0.215 \times 50/32.357) \simeq (0, 0.332)$. Segue che l'IC per la deviazione standard è $(0, 0.576)$.

2. Deduciamo dalla domanda di dover impostare un test di verifica dell'ipotesi nulla H_0 : *"La macchina è imprecisa"* contro l'alternativa H_1 : *"La macchina è precisa"*, che in termini di σ traduciamo come $H_0 : \sigma \geq 0.6$ contro $H_1 : \sigma < 0.6$. Una regione critica è data dal duale dell'intervallo di confidenza trovato al punto 1, cioè: $\mathcal{G} = \left\{(x_1, \ldots, x_{50}) : 0.6^2 \notin \left(0, \frac{S_0^2 \times 50}{32.357}\right)\right\}$. Essendo $0.36 > 0.332$ rifiutiamo l'ipotesi H_0 a livello 2.5%: alla luce dei dati a livello 2.5% il sospetto sembrerebbe infondato.

3. $\pi(\sigma) = P_{\sigma^2}\left(0.36 \notin \left(0, \dfrac{S_0^2 \times 50}{32.357}\right)\right) = P_{\sigma^2}\left(\dfrac{S_0^2 \times 50}{\sigma^2} < \dfrac{0.36 \times 32.357}{\sigma^2}\right) = F_{\chi^2_{50}}\left(\dfrac{11.64852}{\sigma^2}\right), \ 0 < \sigma < 0.6$
La funzione di potenza $\pi(\sigma)$ è funzione strettamente decrescente di σ con $\lim_{\sigma \to 0} \pi(\sigma) = 1$ e $\lim_{\sigma \to 0.6} \pi(\sigma) = 2.5\%$. Il grafico è nella figura che segue



4. Poiché rifiutiamo H_0 per $\alpha = 2.5\%$, allora continuiamo a rifiutare H_0 per ogni $\alpha > 2.5\%$ e quindi anche per $\alpha = 10\%$. Invece, per $\alpha = 0.1\%$ abbiamo $\chi^2_{50}(0.1\%) = 24.674$ e l'IC di σ di forma $(0, c)$ è $\left(0, \sqrt{\dfrac{S_0^2 \times 50}{24.674}}\right) \simeq (0, 0.66)$, quindi cambiamo decisione, accettiamo H_0 e riteniamo fondato il sospetto. ∎

Esercizio 5.4 Dobbiamo fare inferenza sui tempi di guasto di un sistema formato da due componenti 1 e 2 connessi in parallelo, cosicché il sistema funziona quando almeno uno dei due componenti funziona.

Per esempio vogliamo stabilire se i due componenti sono indipendenti, se funzionano mediamente lo stesso tempo e, ancora, vorremmo stimare la durata dell'intero sistema.

Per questo, abbiamo acquistato 60 componenti di tipo 1 e 60 di tipo 2 e abbiamo costruito 60 sistemi in parallelo.

Allo scadere della 11-esima ora dall'attivazione, abbiamo controllato quanti sistemi funzionavano ancora venendo a scoprire che: dopo 11 ore dall'attivazione, 16 sistemi funzionavano ancora sebbene il componente 1 fosse guasto, 6 funzionavano ancora sebbene il componente 2 fosse guasto e infine 10 non funzionavano più.

1. Alla luce di queste informazioni, possiamo concludere che i due componenti funzionano in modo indipendente? Rispondete con un opportuno test di ipotesi e determinate un valore approssimato del p-value.

2. Verificate l'ipotesi nulla che il tempo di guasto di un intero sistema abbia densità esponenziale di media 9 ore. Usate i precedenti dati e costruite un opportuno test.

Non avendo fretta, abbiamo deciso di proseguire l'esperimento e abbiamo continuato a tenere attivi fino a rottura solo i sistemi costituiti da due componenti che funzionavano entrambi dopo 11 ore. In questa seconda fase abbiamo ottenuto che esattamente 15 fra questi sistemi hanno smesso di funzionare perché si è rotto per primo il componente 2.

3 Integrando le prime informazioni con questo nuovo dato, verificate a livello $\alpha = 5\%$ se i tempi di guasto dei due componenti 1 e 2 sono omogenei contro l'alternativa che il componente 1 si guasta dopo il 2.

Soluzione

1. Ricaviamo dai dati forniti la seguente tabella delle contingenze:

$X_1 \setminus X_2$	≤ 11	> 11	
≤ 11	10	16	$\boxed{26}$
> 11	6	$\boxed{28}$	$\boxed{34}$
	$\boxed{16}$	$\boxed{44}$	60

dove X_1 è la variabile aleatoria che modella il tempo di guasto del componente 1, X_2 è il tempo di guasto del componente 2 e le numerosità non incasellate sono quelle direttamente fornite dal testo. Impostiamo un test χ^2 di indipendenza fra X_1, X_2 con dati accoppiati. La statistica di Pearson Q_1 del test di indipendenza ha valore

$$Q_1 = \sum_i \sum_j \frac{\left(N_{ij} - \frac{N_{1i}N_{2j}}{60}\right)^2}{\frac{N_{1i}N_{2j}}{60}} = 60\left(\sum_i \sum_j \frac{N_{ij}^2}{N_{1i}N_{2j}} - 1\right) \simeq 3.264 \text{ e asintoticamente ha fdr } \chi^2_{(2-1)(2-1)} = \chi^2_1.$$

Essendo $\chi^2_1(90\%) = 2.706 < 3.264 < 3.841 = \chi^2_1(95\%)$, allora il p-value cade nell'intervallo $(5\%, 10\%)$: la decisione dipende dall'ampiezza α del test: sicuramente rifiutiamo H_0 per ogni $\alpha \geq 10\%$ e accettiamo H_0 per ogni $\alpha < 5\%$. (Usando R si ottiene p-value $= 7.1\%$).

2. Sia X_s il tempo di guasto dell'intero sistema. Verifichiamo l'ipotesi nulla $H_0 : X_s \sim Exp(9)$ contro l'alternativa $H_1 : X_s \not\sim Exp(9)$ con un test chiquadrato di adattamento. Su 60 sistemi esattamente $N_1 = 10$ non funzionano più di 11 ore e quindi i rimanenti $N_2 = 60 - 10 = 50$ funzionano più di 11 ore. Inoltre abbiamo $\theta_{01} := P_{H_0}(X_c \leq 11) = 1 - \mathrm{e}^{-11/9}$ e $\theta_{02} := P_{H_0}(X_c > 11) = \mathrm{e}^{-11/9}$. La statistica di Pearson $Q_2 = \sum_{i=1}^2 \frac{(N_i - 60\theta_{0i})^2}{60\theta_{0i}} = \sum_{i=1}^2 \frac{N_i^2}{60\theta_{0i}} - 60$ per questo test di adattamento sotto H_0 ha approssimativamente fdr χ^2_1. Inoltre $Q_2 \simeq 83.81$. Essendo $83.81 > 10.828 = \chi^2_1(99.90\%)$, per ogni $\alpha \geq 0.1\%$ rifiutiamo H_0.

3. Sia T^+ il numero di sistemi tali che il componente 1 si rompe dopo il 2. Integrando con i nuovi dati deduciamo che ci sono $6 + 15 = 21$ sistemi con componente 1 che vive più del 2 e 16 sistemi con componente 1 che vive meno del 2. Rimangono 10 sistemi (quelli che erano già guasti dopo 11 ore dall'attivazione) per i quali non possiamo confrontare i tempi di guasto dei due componenti. Comunque, possiamo affermare che $21 \leq T^+ \leq 21 + 10 = 31$. Applicando il test di Wilcoxon per dati accoppiati, rifiutiamo H_0 :*"componenti omogenei"* a favore di H_1 :*"componente 1 più duraturo del componente 2"* se $T^+ > q^+_{1-0.05}$. Avendo 60 dati, $q^+_{1-0.05} \simeq 60/2 + 1.645 \times \sqrt{60}/2 \simeq 36.37$ e poiché $T^+ \in [21, 31]$, allora sicuramente $T^+ < 36.37$. Quindi, abbiamo informazioni sufficienti ad accettare l'ipotesi H_0 di omogeneità a livello 5% anche se non conosciamo il valore esatto di T^+. ∎