Qualche nota matematica per Informatica 3*

Matteo Pradella

*Si veda Shaffer, cap. 2 e 14

SOMME

Linearità

$$\sum_{k=1}^{n} (ca_k + b_k) =$$

$$= c \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Comoda ad es. per:

$$\sum_{k=1}^{n} \Theta(f(k)) =$$

$$= \Theta\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right)$$

Serie aritmetica

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somma di quadrati

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Somma di cubi

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Serie geometriche

Per $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Per $|x| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}$$

Approssimazione con integrali

Se $f(k)$ una funzione monotona crescente, la sommatoria $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ può essere approssimata con i seguenti integrali:

$$\int_{m-1}^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=m}^{n} f(k) \leq \int_{m}^{n+1} f(x)dx$$

Analogamente se $f(k)$ monotona decrescente, si pu cos approssimare:

$$\int_{m}^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=m}^{n} f(k) \leq \int_{m-1}^{n} f(x)dx$$

Esempio (serie armonica)

Come limite inferiore:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \geq \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$$

Come limite superiore:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} \leq \int_{1}^{n} \frac{dx}{x} = \ln n$$

per cui vale la limitazione:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \leq \ln n + 1$$

INDUZIONE

Sia $T(n)$ una affermazione da provare

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq c.$

Induzione:

1. Caso base: $T(c)$ vale.

2. Passo induttivo: $T(n-1) \Rightarrow T(n)$

Induzione forte: Il passo induttivo diviene

$$\forall k(c \leq k < n \Rightarrow T(k))$$

$$\Rightarrow T(n)$$

Esempio di induzione

Si dimostri che:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Caso base: $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{i}{2^i} = 1/2 = 2 - \frac{1+2}{2^1}$$

Ipotesi induttiva:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$$

Dunque:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{2^i} + \frac{n}{2^n}$$

Per ip. ind.

$$= 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$$

Con qualche conto...

$$= 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

QED

METODI DI SHIFTING

Sottraggono alla somma una variazione della somma stessa, per cancellare termini indesiderati e semplificare l'espressione.

esempio 1

Soluzione della somma geometrica:

$$F(n) = \sum_{i=0}^{n} a\ r^i = a + a\ r + a\ r^2 + \ldots + a\ r^n$$

$$r\ F(n) = r\ \sum_{i=0}^{n} a\ r^i = a\ r + a\ r^2 + \ldots + a\ r^{n+1}$$

$$F(n) - r\ F(n) = a + a\ r + a\ r^2 + \ldots + a\ r^n -$$

$$-(a\ r + a\ r^2 + \ldots + a\ r^n) - a\ r^{n+1}$$

ergo:

$$(1 - r)F(n) = a - a\ r^{n+1}$$

il risultato:

$$F(n) = \frac{a - a\ r^{n+1}}{1 - r}, con\ r \neq 1$$

Esempio 2

Altro esempio di metodo di shifting:

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n} i\, 2^i = 1{\cdot}2^1{+}2{\cdot}2^2{+}3{\cdot}2^3{+}\ldots{+}n{\cdot}2^n$$

possiamo collassare i termini moltiplicando per 2:

$$2\ F(n) = 2 \sum_{i=1}^{n} i\ 2^i =$$

$$= 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \ldots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$$

dunque:

$$2\ F(n) - F(n) = \sum_{i=1}^{n} i\ 2^{i+1} - \sum_{i=1}^{n} i\ 2^{i}$$

spostiamo il valore di i nella seconda somma, sostituendoci $i+1$:

$$= n\ 2^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} i\ 2^{i+1}$$

$$- \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)\ 2^{i+1}$$

eliminiamo i termini opposti:

$$= n\ 2^{n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i+1}$$

della sommatoria sappiamo già il valore, dunque:

$$= n\ 2^{n+1} - (2^{n+1} - 2)$$

ricapitolando:

$$F(n) = (n-1)\ 2^{n+1} + 2$$

EQUAZIONI ALLE RICORRENZE

Espansione di ricorrenze

Si trovi la soluzione di:

$$T(n) = 2\ T(n/2) + 5\ n^2;\ T(1) = 7$$

Per semplicità, supponiamo che n sia una potenza di 2. Dunque possiamo riscrivere n come 2^k.

L'espansione risulta dunque la seguente:

$$T(n) = 2\ T(n/2) + 5\ n^2$$

$$= 2(2T(n/4) + 5(n/2)^2) + 5\ n^2$$

$$= 2(2(2\ T(n/8) + 5\ (n/4)^2) + 5(n/2)^2) + 5\ n^2$$

$$= 2^k\ T(1) + 2^{k-1} \cdot 5(\frac{n}{2^{k-1}})^2 + \ldots$$

$$+2 \cdot 5(\frac{n}{2})^2 + 5n^2$$

Questa espressione si può scrivere come:

$$= 7\ n + 5 \sum_{i=0}^{k-1} n^2/2^i$$

$$= 7\ n + 5\ n^2 \sum_{i=0}^{k-1} 1/2^i$$

ma conosciamo già la sommatoria precedente, dunque:

$$= 7\ n + 5\ n^2 (2 - \frac{1}{2^{k-1}})$$

ricapitolando e massaggiando un po':

$$T(n) = 10\ n^2 - 3\ n$$

che è la soluzione esatta per $n = 2^k$.

DIVIDE ET IMPERA

Tipico caso di equazioni alle ricorrenze che vengono da tecniche ricorsive alla *divide et impera*:

$$T(n) = a\ T(n/b) + c\ n^k;\ T(1) = c$$

In questo caso il problema di dimensione n è stato diviso in a sottoproblemi di dimensione n/b, mentre $c\ n^k$ è il lavoro necessario per combinare le soluzioni parziali.

Applichiamo l'espansione delle ricorrenze, assumendo $n = b^m$:

$$T(n) = a\ (aT(n/b^2) + c(n/b)^k) + c\ n^k$$

$$= a^m\ T(1) + a^{m-1}\ c(n/b^{m-1})^k + \dots$$

$$+a\ c(n/b)^k + c\ n^k$$

$$= c \sum_{i=0}^{m} a^{m-i} b^{ik}$$

$$= c\ a^m \sum_{i=0}^{m} (b^k/a)^i$$

infatti $a^m = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$.

La sommatoria è una serie geometrica che dipende dal rapporto $r = b^k/a$. Ci sono dunque tre casi possibili:

Caso $r < 1$:

sappiamo che:

$$\sum_{i=0}^{m} r^i < \frac{1}{1-r}$$

che è una costante. Dunque:

$$T(n) = \Theta(a^m) = \Theta(n^{\log_b a})$$

Caso $r = 1$:

Per def. di r, $a = b^k$. Dunque $k = \log_b a$. Inoltre $m = \log_b n$. Dunque:

$$\sum_{i=0}^{m} 1^i = m + 1 = \log_b n + 1$$

essendo $a^m = n^{\log_b a} = n^k$, otteniamo:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_b n) = \Theta(n^k \log n)$$

Caso $r > 1$:

Sappiamo che:

$$\sum_{i=0}^{m} r^i = \frac{r^{m+1} - 1}{r - 1} = \Theta(r^m)$$

Dunque:

$$T(n) = \Theta(a^m r^m) = \Theta(a^m (b^k/a)^m)$$

$$= \Theta(b^{km}) = \Theta(n^k)$$