ESERCIZI SULLE RELAZIONI

18 ottobre 2007

ESERCIZIO 1

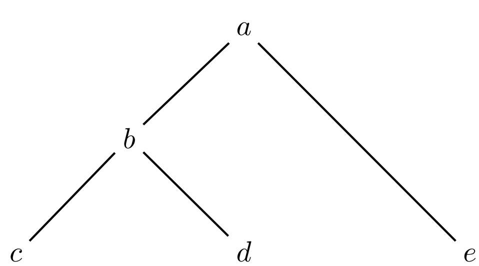
Siano S un insieme non vuoto e $\mathcal{P}$ l'insieme delle parti di S. Posto $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \setminus \emptyset$, si consideri la relazione $\rho \subseteq \overline{\mathcal{P}} \times \overline{\mathcal{P}}$ così definita:

$$\forall\, X, Y \in \overline{\mathcal{P}} \qquad X \,\rho\, Y \Leftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset.$$

Provare che ρ non è una relazione d'ordine.

ESERCIZIO 2

Sia $\leq$ la relazione d'ordine definita sull'insieme $X = \{a, b, c, d, e\}$ avente il seguente diagramma di Hasse:



1. Determinare elementi massimali, minimali, minimo e massimo di X rispetto a $\leq$.
2. Scrivere la matrice di incidenza di $\leq$.
3. Costruire una relazione d'ordine totale ρ contenente $\leq$.

ESERCIZIO 3 (I prova in itinere a.a. 2006/2007)

Si consideri l'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ dei numeri naturali e la relazione R su $\mathbb{N}$ così definita:

$$n \,R\, m \Leftrightarrow n \text{ è dispari ed esiste } t \text{ naturale pari tale che } n = m + t.$$

Si consideri inoltre la relazione T su $\mathbb{N}$ così definita:

$$n \,T\, m \Leftrightarrow n \,R\, m \text{ oppure } n = m \text{ pari.}$$

1. Si dica di quali proprietà gode R.
2. Si dimostri che T è una relazione d'ordine su $\mathbb{N}$.
3. T è la chiusura d'ordine di R?
4. Si determinino, se esistono, gli elementi minimali, massimali, minimo e massimo di $\mathbb{N}$ rispetto a T.
5. Posto $A = \{5, 9, 11, 23\}$, si determinino gli eventuali minoranti, maggioranti, estremo superiore ed estremo inferiore di A rispetto a T in $\mathbb{N}$.
6. Si stabilisca se A rispetto a T è un reticolo (e se è un'algebra di Boole).