Equazioni Differenziali Ordinarie		12 luglio 2006
Cognome	Nome	Firma
Proff. Arioli, Rossi, Vegni	Matricola	Sezione INF

Esercizio 3. È data l'equazione

$$\ddot{x} = \frac{4 - 8x^2}{x^5} - k\frac{\dot{x}}{x^2}.$$

a. Trovare i punti critici del sistema equivalente e rappresentarli nel piano delle fasi.

b. Definire la funzione di Liapunov nel punto (x_0, y_0)[1] per un sistema autonomo, ed enunciare i teoremi citati nello svolgimento dei punti *d*.

Nel caso $k = 0$,

c1. determinare la funzione hamiltoniana del sistema ad un grado di libertà e disegnare le traiettorie nel piano delle fasi.

c2. Cosa si può dire riguardo alla stabilità dei punti critici del sistema?

c3. Specificare i livelli dell'hamiltoniana per i quali le traiettorie sono periodiche.

Nel caso $k = 1$,

d1. dimostrare che la funzione hamiltoniana trovata la punto *c1* è una funzione di Liapunov per il sistema relativamente ai suoi punti critici.

d2. Cosa è possibile concludere circa la stabilità dei punti critici?

a) sistema equivalente $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \dfrac{4-8x^2}{x^5} - k\dfrac{y}{x^2} \end{cases}$ $\boxed{x \neq 0}$

Ricerca punti critici

$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{4-8x^2}{x^5} = 0 \quad (\forall k) \end{cases}$ $\begin{cases} x = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 0 \end{cases}$ Due i punti critici $A\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

b) vedi testo

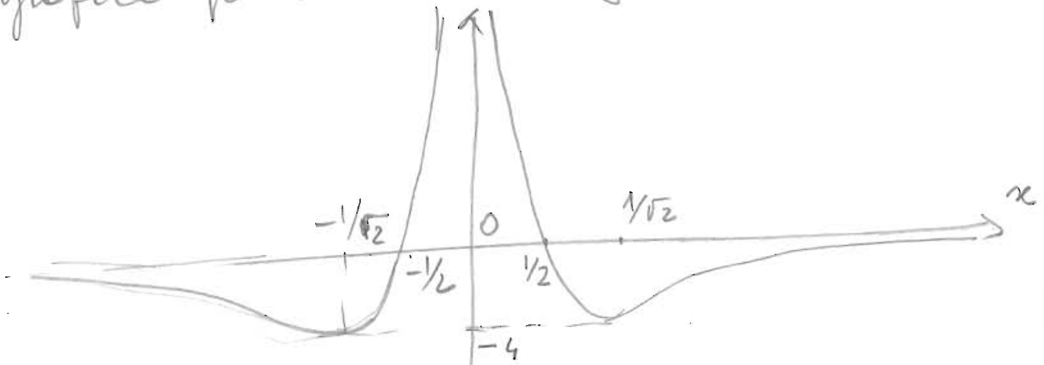
c) Nel caso $k=0$ si ha un sistema ad un grado di libertà (caso particolare di sistema Hamiltoniano) l'energia totale (che è integrale primo) rappresenta la funzione hamiltoniana

$$H(x,y) = E(x,y) = \frac{y^2}{2} - \int\left(\frac{4}{x^5} - \frac{8}{x^3}\right)dx = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{x^4} - \frac{4}{x^2}$$

[1] Per generalità si consideri $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

($E(x,y)$ è definita a meno di una costante additiva, che per comodità scegliamo nulla. In questo caso $x \neq 0$ ci vieta di porre condizioni nell'origine.)

La funzione potenziale $U(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{4}{x^2}$ è pari; un grafico probabile è il seguente



U si annulla per $\frac{x^2(1-4x^2)}{x^4}=0$

U ha punti stazionari se $\frac{4-8x^2}{x^5}=0$

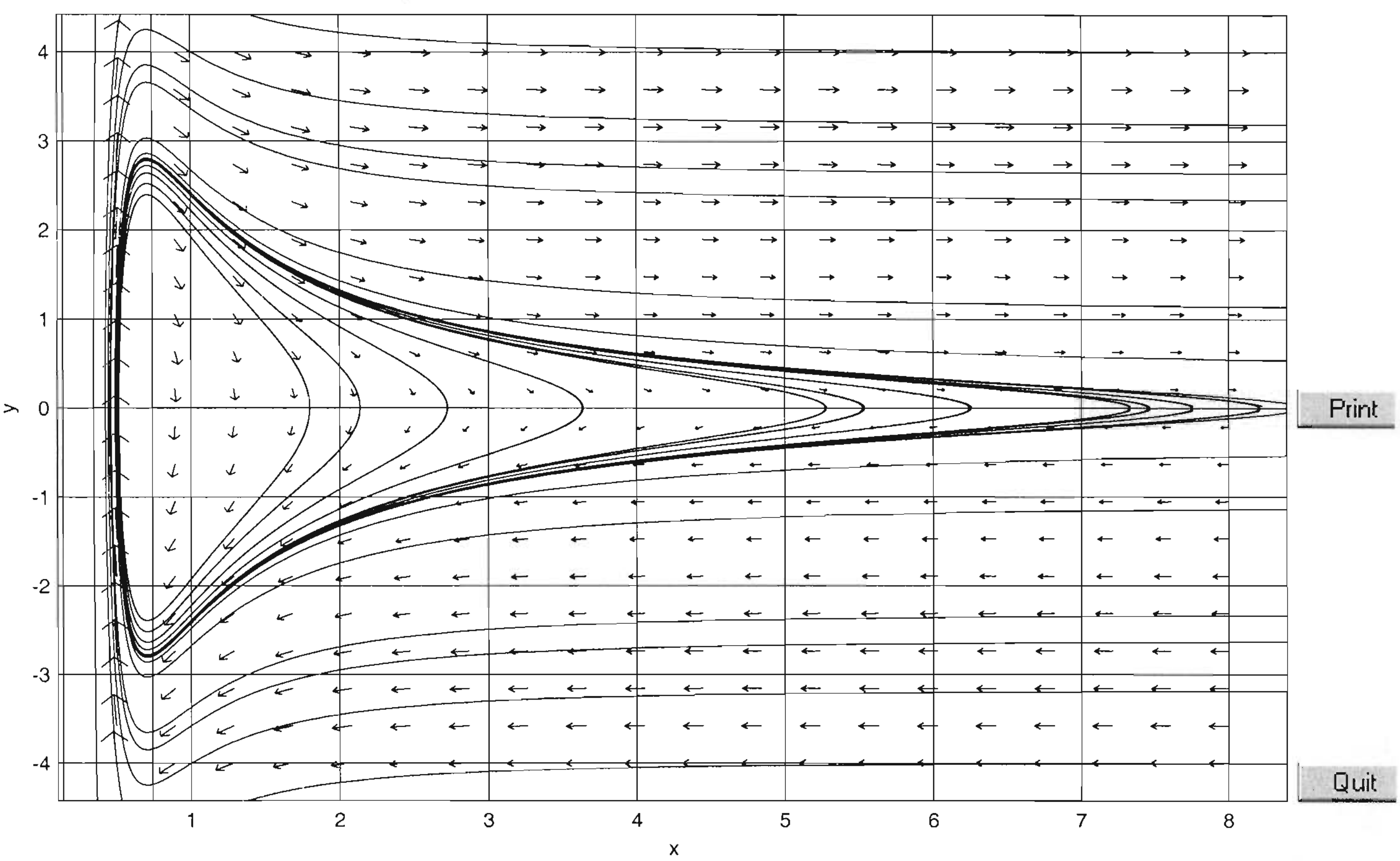
$U(x) \sim \frac{1}{x^4}$ per $x \to 0$

$U(x) \sim -\frac{4}{x^2}$ per $x \to +\infty$

$U\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 - 4 \cdot 2 = -4$

$x' = y$

$y' = (4 - 8x^2)/x^5$



The backward orbit from (8.2, 0.012) --> a possible eq. pt. near (8.2, -0.031).
Ready.
The forward orbit from (2.7, 0.22) --> a nearly closed orbit.
The backward orbit from (2.7, 0.22) --> a nearly closed orbit.
Ready.

Dall'andamento di $U(x)$ possiamo dedurre il diagramma di fase del sistema, qui riportato solo nel caso $x>0$ (speculare rispetto all'asse y l'altra parte omessa).

Le linee di livello di $E(x,y) \geq -4$ determinano le traiettorie

$E(x,y) = -4$ punti critici e traiettorie costanti $\begin{cases} x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -4 \end{cases}$

$-4 \leq E < 0$ soluzioni periodiche, verso di percorrenza orario in $x>0$ (sarà antiorario in $x<0$)

$E \geq 0$ traiettorie aperte. I due punti critici sono centri

Caso $k = 1$ (sempre con $x \neq 0$) $H(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{x^4} - \frac{4}{x^2} = V(x,y)$

$$\nabla V(x,y) = [V_x, V_y] = \left[-\frac{4}{x^5} + \frac{8}{x^3},\ y\right]$$

$$\nabla V(x,y) \times [\dot{x}, \dot{y}] = \cancel{-\frac{4y}{x^5}} + \cancel{\frac{8y}{x^3}} + \cancel{\frac{4y}{x^5}} - \cancel{\frac{8y}{x^3}} - \frac{y^2}{x^2} = -\frac{y^2}{x^2} \leq 0$$

$\nabla V \times [\dot{x}, \dot{y}] = 0$ solo nei punti dell'asse x, dove le traiettorie tagliano ortogonalmente

I punti critici $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ in questo caso sono fuochi stabili.

L'integrale dell'energia del sistema con $k=0$ diventa funzione di Liapunov per il sistema perturbato dal termine $-\frac{y}{x^2}$