Como

Appello del 23 luglio 1999

PARTE 1

Esercizio 1

Si consideri la relazione binaria R su Z così definita:

$(a,b) \in R$ se e solo se a,b sono entrambi maggiori o uguali a 10
oppure a è minore di 10 e b=a+3.

Dimostrare che la relazione di equivalenza generata da R è la relazione universale su Z.
Come è fatta la chiusura transitiva di R?

Esercizio 2

Sia X={a,b,c,d} e sia R la relazione su X rappresentata dal seguente grafo.

$$a \longrightarrow b \qquad c \longleftarrow d$$

Dimostrare che ogni relazione che sia una funzione da X ad X con inversa destra e contenga R è una funzione biunivoca di X in X.
L'insieme S formato dalla funzione identica su X e dalle funzioni biunivoche da X ad X che contengono R è un sottogruppo del gruppo delle sostituzioni su X? Esiste un sottoinsieme di S che è un sottogruppo del gruppo delle sostituzioni su X?

PARTE 2

Esercizio 1

Si scriva una formula f(A,B,C) che contenga solo i connettivi ~ e $\Rightarrow$ che abbia la seguente tavola di verità

A	B	C	f(A,B,C)
V	V	V	F
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V

Dire se $A\Rightarrow \sim B,\ B\Rightarrow \sim C \models_L f(A,B,C)$.

Esercizio 2

Si indichino le occorrenze libere e vincolate di ogni variabile nella formula seguente:

$(\forall x)(\forall y)A_1^2(f_1^2(x,y),z)\Rightarrow(\exists x)(A_1^2(x,y) \Rightarrow (\forall y)A_1^2(x,y))$

e si porti la formula data in forma normale prenessa.

Si consideri l'interpretazione avente come dominio N, in cui il predicato $A_1^2(x,y)$ significa x>y e il termine $f_1^2(x,y)$ significa xy. Dire se in tale interpretazione la formula è vera, falsa o soddisfacibile.

TRACCIA DI SOLUZIONE

PARTE 1

Esercizio 1

Sia a un numero intero minore di 10 e indichiamo con ρ la relazione di equivalenza generata da R. E' immediato osservare che per ogni a esiste un intero positivo n tale che a+3n è maggiore di 10. Poiché $(a,a+3),(a+3,a+6),\dots,(a+3(n-1),a+3n)\in R$, allora (a,a+3n) appartiene alla chiusura transitiva di R che è contenuta in ρ, dunque $(a,a+3n)\in\rho$.

Dunque presi comunque due interi a,b esistono sempre due interi a' e b' maggiori o eguali a 10 tali che $(a,a')\in\rho$, $(b,b')\in\rho$, inoltre per definizione $(a',b')\in R\subset\rho$. Dunque, per la transitività di ρ, $(a,b)\in\rho$, ρ è perciò la relazione universale.

La chiusura transitiva di R è invece la relazione che ad ogni a maggiore o uguale a 10 associa tuttigli interi maggiori o uguali a 10 e ad ogni intero a<10 associa tutti gli interi minori di 10 della forma a+3n con n intero positivo e tutti gli interi maggiori o uguali a 10 . Infatti abbiamo già visto che per ogni intero positivo n, (a,a+3n) appartiene alla chiusura transitiva di R e se $a+3n\geq10$ e $m\geq10$, allora (a+3n,m) sta in R e quindi (a,b) sta nella chiusura transitiva di R.

Viceversa se a<10 e b<10 ma 3 non divide b-a, $(a,b)\notin R$, perché se (a,b) stesse in R dovrebbero esistere $z_1, z_2,\dots, z_r$ in Z tali che $(a, z_1),(z_1, z_2),\dots, (z_r,b)$ stiano in R, ma questo implica che tutti gli z_i, $1\leq i\leq r$, sono minori di 10 e quindi $z_{i+1}- z_i=3$ per ogni $1\leq i\leq r-1$, $z_1-a=3$ e $b- z_r=3$.

Esercizio 2

Dobbiamo trovare una funzione f da X ad X che contenga R e sia iniettiva. Poiché il dominio e il codominio di f sono finiti ed hanno la stessa cardinalità , una funzione iniettiva da X ad X deve anche essere suriettiva (e quindi biunivoca).

Si potrebbe notare che l'esercizio poteva anche essere svolto elencando tutte le funzioni da X ad X che contengono R:

f_1: a->b,b->a,c->a,d->c

f_2: a->b,b->a,c->b,d->c

f_3: a->b,b->a,c->c,d->c

f_4: a->b,b->a,c->d,d->c

f_5: a->b,b->b,c->a,d->c

f_6: a->b,b->b,c->b,d->c

f_7: a->b,b->b,c->c,d->c

f_8: a->b,b->b,c->d,d->c

f_9: a->b,b->c,c->a,d->c

f_{10}: a->b,b->c,c->b,d->c

f_{11}: a->b,b->c,c->c,d->c

f_{12}: a->b,b->c,c->d,d->c

f_{13}: a->b,b->d,c->a,d->c

f_{14}: a->b,b->d,c->b,d->c

f_{15}: a->b,b->d,c->c,d->c

f_{16}: a->b,b->d,c->d,d->c

di queste solo f_4 ed f_{13} sono iniettive (tutte le altre hanno due elementi distinti con la stessa immagine) e sono ovviamente anche suriettive perché f(X)=X.

E' a questo punto facile osservare che le funzioni biunivoche da X ad X che contengono R non formano sottogruppo in quanto f_{13}^2 non contiene R .

E' invece immediato che f_4 e la funzione identica formano un sottogruppo del gruppo di sostituzioni su X..

PARTE 2

Esercizio 1.

f(A,B,C) in forma normale è $(A\wedge\sim B\wedge C)\vee(\sim A\wedge\sim B\wedge C)\vee(\sim A\wedge\sim B\wedge\sim C)$, che si riduce a $(\sim B\wedge C)\vee(\sim A\wedge\sim B\wedge\sim C)$, equivalente a $\sim B\wedge(C\vee(\sim A\wedge\sim C))$, cioè a $\sim B\wedge(C\vee\sim A)$, cioè a $\sim B\wedge(A\Rightarrow C)$, cioè a $\sim(B\vee\sim(A\Rightarrow C))$ da cui $\sim((A\Rightarrow C)\Rightarrow B)$.
Per il teorema di deduzione $A\Rightarrow \sim B$, $B\Rightarrow \sim C \models_L f(A,B,C)$ se e solo se, $\models_L (A\Rightarrow\sim B)\Rightarrow((B\Rightarrow \sim C)\Rightarrow f(A,B,C))$ e quindi per il teorema di completezza se e solo se $(A\Rightarrow\sim B)\Rightarrow((B\Rightarrow\sim C)\Rightarrow f(A,B,C))$ è una tautologia. Vediamo se si possono dare ad A,B,C dei valori diverità che rendano falsa la formula precedente. Dovrebbe essere $A\Rightarrow\sim B$ vera con $(B\Rightarrow\sim C)\Rightarrow f(A,B,C)$ falsa, cioè $A\Rightarrow\sim B$ vera , $B\Rightarrow\sim C$ vera e f(A,B,C) falsa.
Perché $A\Rightarrow\sim B$ e $B\Rightarrow\sim C$ siano entrambe vere deve essere o A,B falso e C qualsiasi, o A falso, B vero e C falso, o A vero, B falso e C qualsiasi. Dalla tavola di verità di f(A,B,C) risulta che per A falso, B vero e C falso, f(A,B,C) è falsa e dunque la formula non è una tautologia e pertanto la deduzione non esiste.

Esercizio 2

Nella formula

$$(\forall x)(\forall y)A_1^2(f_1^2(x,y),z)\Rightarrow(\exists x)(A_1^2(x,y) \Rightarrow (\forall y)A_1^2(x,y))$$

z è una variabile libera ed inoltre è libera la prima occorrenza di y nel conseguente. Tutte le altre occorrenze di x ed y sono vincolate.

Per portare la formula a forma prenessa cominciamo a portare in forma prenessa il suo conseguente:

$$(\forall x)(\forall y)A_1^2(f_1^2(x,y),z)\Rightarrow(\exists x)(\forall u)(A_1^2(x,y) \Rightarrow A_1^2(x,u))$$

poi portiamo davanti a tutto i quantificatori dell'antecedente:

$$(\exists x)(\exists v)(A_1^2(f_1^2(x,v),z)\Rightarrow(\exists x)(\forall u)(A_1^2(x,y) \Rightarrow A_1^2(x,u)))$$

e da ultimo portiamo davanti a tutto i quantificatori del conseguente

$$(\exists x)(\exists v)(\exists w)(\forall u)(A_1^2(f_1^2(x,v),z)\Rightarrow(A_1^2(w,y) \Rightarrow A_1^2(w,u))).$$

Nell’interpretazione suggerita dal testo la formula data si legge come:
se per ogni x e per ogni y $xy>z$ allora esiste un x tale che se $x>y$ allora per ogni y, $x>y$, dove x,y,z stanno in N.
Comunque assegniamo un valore a z, la formula per ogni x e per ogni y $xy>z$ è falsa, dunque la nostra formula è vera.