

Esercizio 1

Dato il circuito trifase in figura, sono noti:

$$V_{f1} = 80 \text{ V}, V_{f2} = 100 \text{ V}, V_{f3} = 120 \text{ V}$$

$$R = 7 \text{ } \Omega, Z_1 = 10 + j20 \text{ } \Omega$$

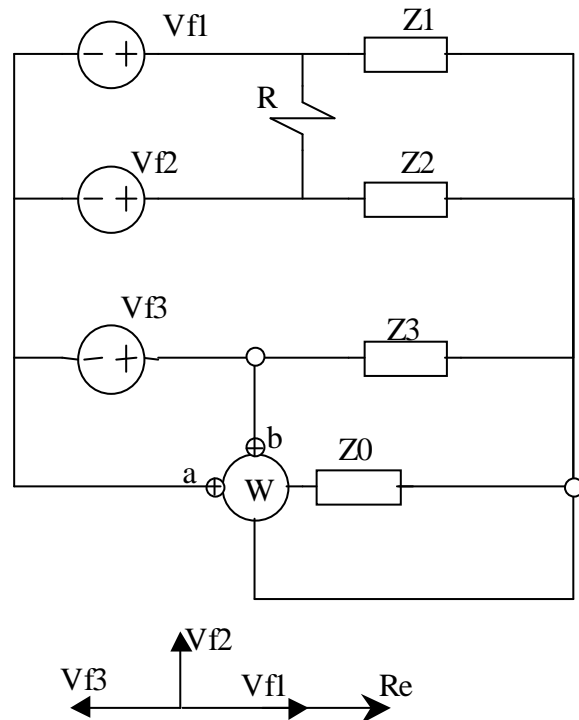
$$Z_2 = 30 \text{ } \Omega, Z_3 = -j15 \text{ } \Omega$$

$$Z_0 = 3 + j \text{ } \Omega$$

I morsetti *a* e *b* designano i morsetti contrassegnati amperometrico e voltmetrico

Determinare l'indicazione del wattmetro

$$[P = 218.908 \text{ W}]$$



{E' necessario calcolare la corrente I_w e La tensione V_w entranti nei morsetti contrassegnati. La tensione V_w è quella che si ha ai capi di Z_3 diretta verso sinistra, la corrente I_w è quella che percorre l'impedenza Z_0 verso destra.

La tensione tra il centro stella delle tensioni e il centro stella di Z_1 , z_2 , Z_3 e Z_0 è data

*dalla seguente espressione: $V_{00} = (V_{f1} * Y_1 + V_{f2} * Y_2 + V_{f3} * Y_3) / (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0) = 8.772 - j20.444 \text{ V}$ dove Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_0 sono le ammettenze corrispondenti. La tensione V_w è pari a $V_w = V_{f3} - V_{00} = -128.771 + j20.444 \text{ V}$. La corrente I_w è pari a $I_w = -V_{00} / Z_0 = -0.587 + j7.01 \text{ A}$. La potenza è allora pari a $P_w = \text{Re}(V_w * \underline{I_w}) = 218.908 \text{ W}$ }*

Esercizio 2

Dato il circuito trifase in figura, alimentato da una terna simmetrica di tensioni, sono noti:

$$V_f = 150 \text{ V}$$

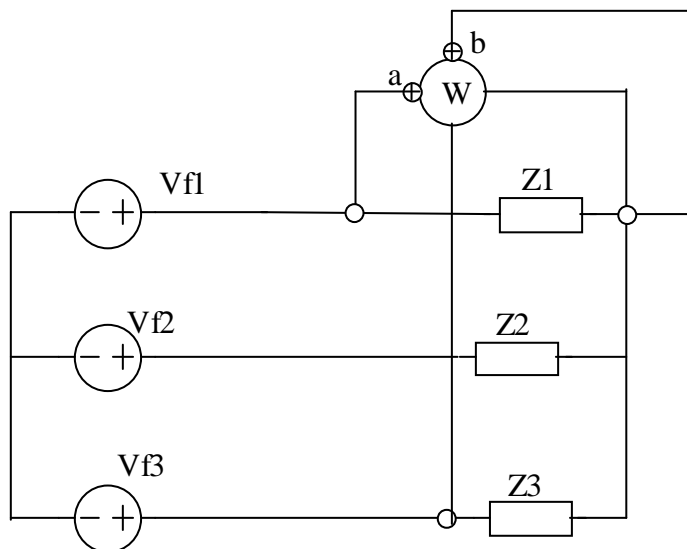
$$Z_1 = 20 + j15 \, \Omega$$

$$Z_2 = 5 - j8 \, \Omega, Z_3 = 10 + j2 \, \Omega$$

I morsetti *a* e *b* designano i morsetti contrassegnati amperometrico e voltmetrico del wattmetro.

Determinare l'indicazione del wattmetro

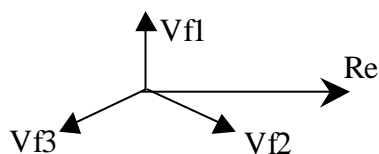
$$[P_w = 3.132 \text{ kW}]$$



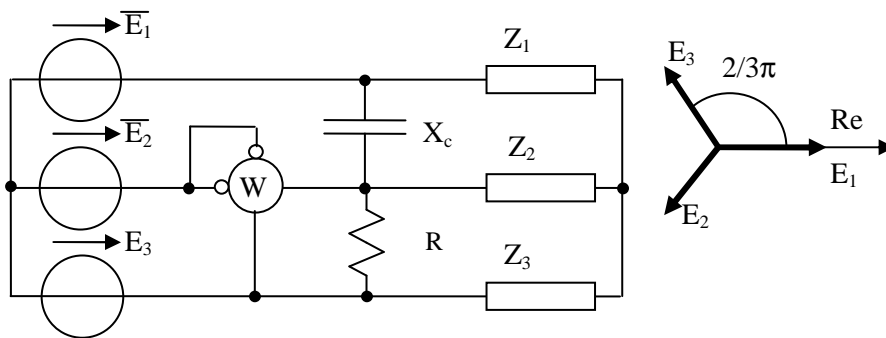
{ E' necessario calcolare la corrente I_w e la tensione V_w entranti nei morsetti contrassegnati.

La corrente I_w è pari alla corrente che percorre il corto circuito in parallelo

*all'impedenza Z_1 . La tensione V_w è data da $V_w = V_{f1} - V_{f3} = 129.904 + j225 \text{ V}$. La corrente I_w si può calcolare con una legge al nodo come somma algebrica dei due contributi relativi alle fasi 2 e 3. La tensione tra i due centri stella è infatti pari a V_{f1} , essendo cortocircuitata l'impedenza Z_1 . Si ottiene allora $I_2 = (V_{f1} - V_{f2})/Z_2 = -27.523 + j0.964 \text{ A}$, diretta verso sinistra e $I_3 = (V_{f1} - V_{f3})/Z_3 = 16.818 + j19.136 \text{ A}$, diretta verso sinistra. La corrente I_w è data da $I_w = I_2 + I_3 = -10.705 + j20.1 \text{ A}$. La potenza è allora pari a $P_w = \text{Re}(V_w * \underline{I_w}) = 3.132 \text{ kW}$ }*



Esercizio 3



Dati:

$$E_1 = E_2 = E_3 = 220 \text{ V}$$

$$X_c = 10 \Omega$$

$$R = 4 \Omega$$

$$\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = j10 \Omega$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

Si determini l'indicazione del wattmetro W

{ E' necessario calcolare la corrente I_w e la tensione V_w entranti nei morsetti contrassegnati. La corrente I_w si trova dalla legge al nodo come somma di tre contributi: la corrente che precorre l'impedenza Z_2 , la corrente che interessa la resistenza R (diretta verso il basso) e la corrente che interessa la reattanza X_c (diretta verso l'alto).

La tensione tra i due centri stella V_{00} è nulla essendo la terna simmetrica e le tre impedenze uguali. Di conseguenza la corrente che interessa l'impedenza Z_2 è pari a $I_{Z2} = E_2/Z_2 = -19.053 + j11 \text{ A}$. La corrente I_r che interessa la resistenza è data da $I_r = (E_2 - E_3)/R = -j95.26 \text{ A}$ e la corrente che interessa la reattanza X_c è data da $I_c = (E_2 - E_1)/(-jX_c) = 19.05 - j33 \text{ A}$. La corrente I_w è pari a $I_w = I_{Z2} + I_r + I_c = -j117.26 \text{ A}$.

La tensione V_w si trova con una semplice legge alle maglie ed è pari a $V_w = E_2 - E_3$. La potenza è allora pari a $P_w = \text{Re}(V_w * \underline{I_w}) = 44.68 \text{ kW}$ }

Esercizio 4

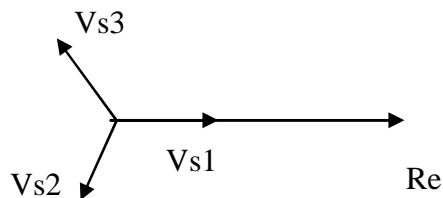
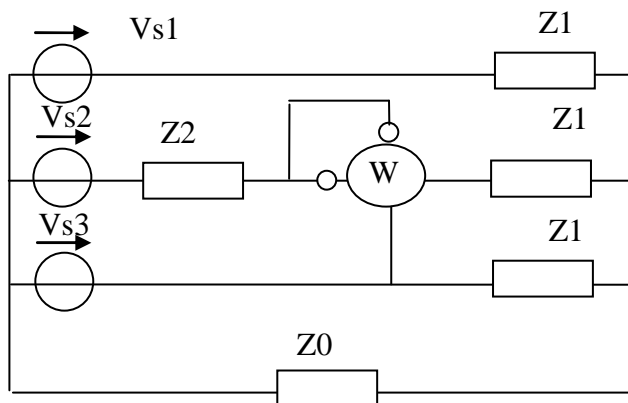
Dato il circuito trifase in figura, alimentato da una terna simmetrica di tensioni, sono noti:

$$V_f = 200 \text{ V}$$

$$Z_2 = 15 + j10 \, \Omega$$

$$Z_1 = 5 - j10 \, \Omega, Z_0 = 10 - j20 \, \Omega$$

Determinare l'indicazione del wattmetro



{ E' necessario calcolare la corrente I_w e la tensione V_w entranti nei morsetti contrassegnati.

La corrente I_w è pari alla corrente che percorre l'impedenza Z_2 e Z_1 . Per il calcolo di tale corrente bisogna calcolare la tensione tra i due centri stella $V_o =$

$(V_{s1}/Z_1 + V_{s2}/(Z_1 + Z_2) + V_{s3}/Z_1) / (1/Z_1 + 1/(Z_1 + Z_2) + 1/Z_1 + 1/Z_0) = -15.6 + j62.58 \text{ V}$. La corrente I_w è

pari a $I_w = (V_{s2} - V_o) / (Z_1 + Z_2) = -4.22 - j11.79 \text{ A}$. Per il calcolo della tensione V_w e' necessario

scrivere una legge alle maglie e risulta $V_w = V_{s2} - Z_2 I_w - V_{s3} = -54.59 - j127.37 \text{ V}$. La potenza è allora pari a $P_w = \text{Re}(V_w * \underline{I_w}) = 1732 \text{ W}$ }

ESERCIZI PROPOSTI

Ex 5

Dato il circuito trifase in figura 9.2, sono noti:

$V_{f1} = V_{f2} = V_{f3} = 220 \text{ V}$ (in modulo)

$R = 10 \Omega$, $R_2 = 15 \Omega$

$L = 6 \text{ mH}$, $L_2 = 4 \text{ mH}$

$C = 5 \mu\text{F}$

$f = 50 \text{ Hz}$

Determinare le tre correnti I_1 , I_2 , I_3 in modulo e fase

$$\begin{aligned} I_1 &= 16.563 * e^{j0.324} \text{ A}, \\ I_2 &= 29.928 * e^{-j2.548} \text{ A} \\ I_3 &= 14.634 * e^{j0.9} \text{ A} \end{aligned}$$

{La terna di tensioni è data da $V_{f1} = 220 \text{ V}$, $V_{f2} = 220 * e^{-j2\pi/3} \text{ V}$, $V_{f3} = 220 * e^{j2\pi/3} \text{ V}$. Chiamiamo le tre impedenze longitudinali

$$Z_1 = R + j\omega L = 10 + j1.885 \Omega,$$

$Z_2 = R = 10 \Omega$, $Z_3 = R + j\omega L = 10 + j1.885 \Omega$, (Y_1 , Y_2 e Y_3 sono le rispettive ammettenze) e le tre impedenze trasversali $Z_a = -j/(\omega C) = -j*636.61 \Omega$, $Z_b = R_2 + j\omega L_2 = Z_c = 15 + j1.257 \Omega$. (Y_a , Y_b e Y_c sono le rispettive ammettenze).

Si calcola la tensione tra il centro stella della terna di tensioni e quello delle impedenze Z_1 , Z_2 e Z_3 $V_{00} = (V_{f1} * Y_1 + V_{f2} * Y_2 + V_{f3} * Y_3) / (Y_1 + Y_2 + Y_3) = 11.49 - j7.634 \text{ V}$. La tensione tra il centro stella delle tensioni e quello delle impedenze Z_a , Z_b e Z_c è pari a $V_{00} = (V_{f1} * Y_a + V_{f2} * Y_b + V_{f3} * Y_c) / (Y_a + Y_b + Y_c) = -110.28 + j3.895 \text{ V}$.

Le tre correnti richieste si possono calcolare con una legge al nodo considerando il contributo nei due carichi. Le tre correnti I_{z1} , I_{z2} e I_{z3} che percorrono le tre impedenze Z_1 , Z_2 e Z_3 si calcolano con una legge alla maglia e sono pari a $I_{z1} = (V_{f1} - V_{00}) / Z_1 = 20.274 - j3.058 \text{ A}$, $I_{z2} = (V_{f2} - V_{00}) / Z_2 = -12.149 - j18.289 \text{ A}$, $I_{z3} = (V_{f3} - V_{00}) / Z_3 = -8.125 + j21.347 \text{ A}$. Le tre correnti I_{za} , I_{zb} e I_{zc} che percorrono le tre impedenze Z_a , Z_b e Z_c si calcolano con una legge alla maglia e sono pari a $I_{za} = (V_{f1} - V_{00}) / Z_a = 6.118 * 10^{-3} + 0.519 \text{ A}$, $I_{zb} = (V_{f2} - V_{00}) / Z_b = -1.06 - j12.873 \text{ A}$, $I_{zc} = (V_{f3} - V_{00}) / Z_c = 1.054 + j12.354 \text{ A}$. Le tre correnti richieste si calcolano con una legge al nodo nel seguente modo:

$$I_1 = I_{z1} + I_{za} = 20.439 * e^{j0.125} \text{ A}, I_2 = I_{z2} + I_{zb} = 33.849 * e^{-j1.972} \text{ A}, I_3 = I_{z3} + I_{zc} = 34.435 * e^{j1.778} \text{ A}$$

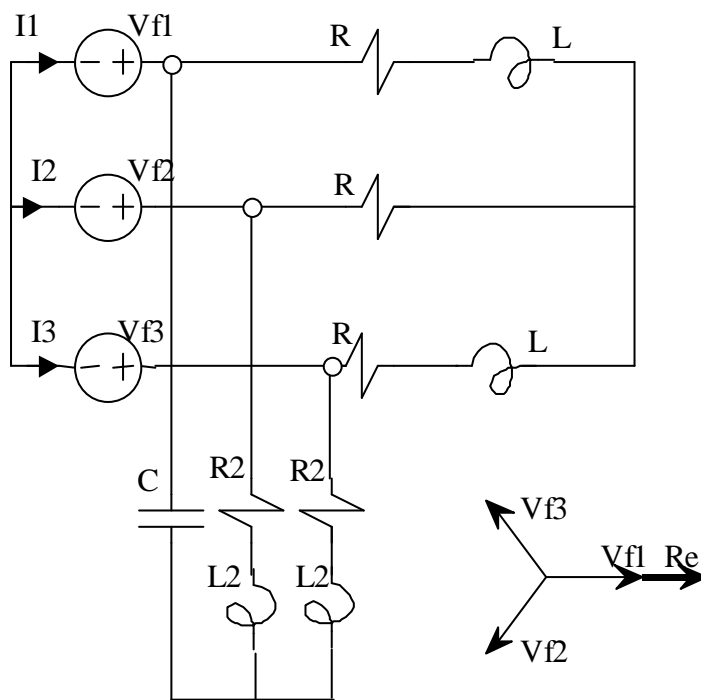


Fig. 9.2

Ex 6

Dato il circuito trifase in figura

9.4, sono noti:

$$V_{f1} = 100 \text{ V}, V_{f2} = 200 \text{ V},$$
$$V_{f3} = 150 \text{ V}$$
$$R = 30 \, \Omega, X_L = 10 \, \Omega$$

I morsetti a e b designano i

morsetti contrassegnati

amperometrico e voltmetrico

Determinare l'indicazione del

wattmetro

$[P_w = 1.875 \text{ kW}]$

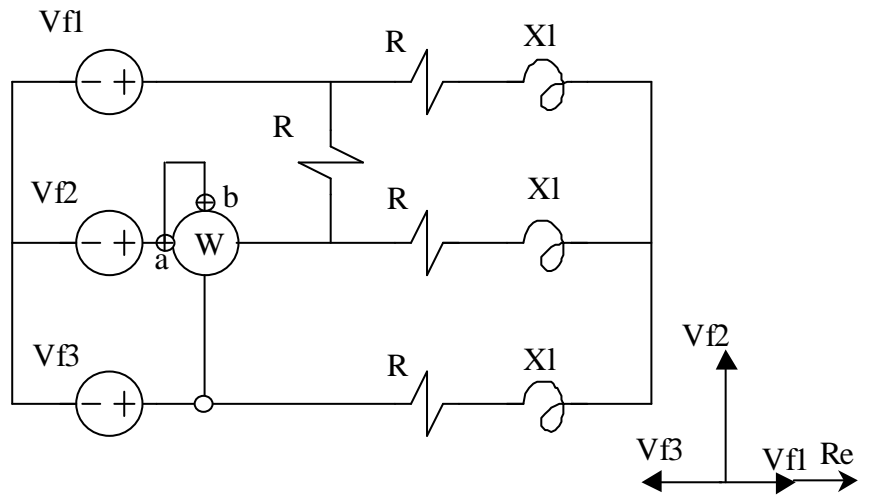


Fig. 9.4

{Per calcolare la potenza attiva

misurata dal wattmetro è

necessario calcolare la corrente

Iw entrante nel morsetto

amperometrico contrassegnato e

la tensione V_w . Tale tensione è

pari a $V_w = V_{f2} - V_{f3} = 150 + j200$ V, dove $V_{f1} = 100$ V, $V_{f2} = j200$ V, $V_{f3} = -150$ V.

La corrente I_w è data dalla somma algebrica di due contributi: quello che percorre l'impedenza Z_2

$= R + jX_l$ e quello che percorre la resistenza trasversale R . Chiamiamo Z_1 l'impedenza della fase 1

pari a $Z1 = R+jXl$, $Z2$ quella della fase 2 pari a $Z2 = R+jXl$ e $Z3$ quella della fase 3, pari a $Z3 =$

R+jXl. La tensione tra il centro stella delle tensioni e quello delle tre impedenze Z1, Z2 e Z3 è pari

$a \ V_{oo} = (V_{f1} \cdot Y_1 + V_{f2} \cdot Y_2 + V_{f3} \cdot Y_3) / (Y_1 + Y_2 + Y_3) = -16.667 + j66.667 \text{ V}$, essendo Y_1 , Y_2 e Y_3 le tre

ammettenze delle tre impedenze Z_1 , Z_2 e Z_3 . La corrente che percorre l'impedenza Z_2 verso destra

è pari a $I_2 = (V_f - V_{oo})/Z_2 = 1.833 + j3.833$ A. La corrente che percorre la resistenza R trasversale

è pari a $I_r = (V_{f2} - V_{f1})/R = -3.33 + j6.667$ A diretta verso l'alto. La corrente entrante nel morsetto

amperometrico del wattmetro è pari a $I_w = I_r + I_2 = -1.5 + j10.5$ A. La potenza misurata è pari a P_w

$$= Re(V_w^* \underline{I_w}) = 1.875k \text{ W}$$

}

Ex 7

Dato il circuito trifase in figura 9.6 sono noti:

$$v_1(t) = \sqrt{2} \, 220 \cos(\omega t)$$

$$v_2(t) = \sqrt{2} \, 220 \cos(\omega t + \pi/2)$$

$$v_3(t) = \sqrt{2} \, 220 \cos(\omega t - \pi/3)$$

$$R = 10 \, \Omega \quad L_1 = 5 \text{ mH},$$

$$L_2 = 10 \text{ mH}, \quad L_3 = 15 \text{ mH}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

Determinare la corrente I .

$$[I = 7.748 + j0.866 \text{ A}]$$

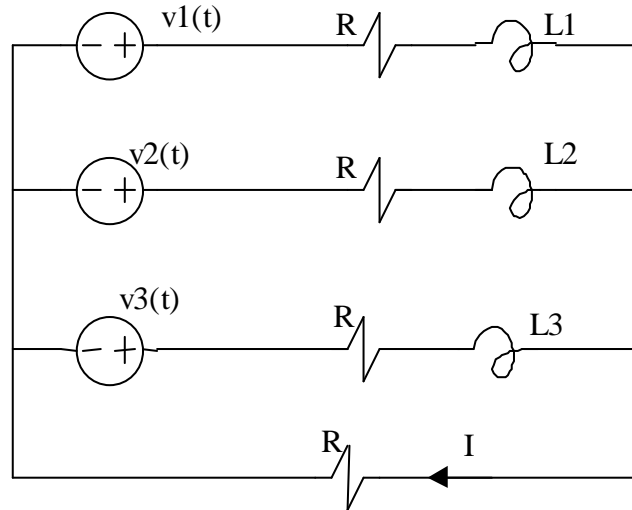


Fig. 9.6

{Per prima cosa è necessario passare dal dominio del tempo a quello fasoriale e si ottiene $V_{f1} = 220 \text{ V}$, $V_{f2} = 220 \cdot e^{j\pi/2} \text{ V}$,

$V_{f3} = 220 \cdot e^{-j\pi/3} \text{ V}$. Chiamiamo Z_1, Z_2, Z_3 le impedenze delle tre fasi e $Z_0 = R$. La tensione tra i due centri stella è data da $V_{00} = (V_{f1} \cdot Y_1 + V_{f2} \cdot Y_2 + V_{f3} \cdot Y_3) / (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0) = 77.477 + j8.665 \text{ V}$ dove Y_1, Y_2, Y_3, Y_0 sono le ammettenze corrispondenti alle impedenze Z_1, Z_2, Z_3 e Z_0 . La corrente richiesta è pari a $I = V_{00} / R = 7.748 + j0.866 \text{ A}$ }

Ex 8

Dato il circuito trifase in figura 9.8, alimentato da una terna simmetrica di tensioni, sono noti:

$$V_f = 100 \text{ V}$$

$$R = 20 \, \Omega, Z_1 = 2 + j5 \, \Omega$$

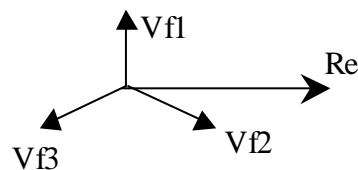
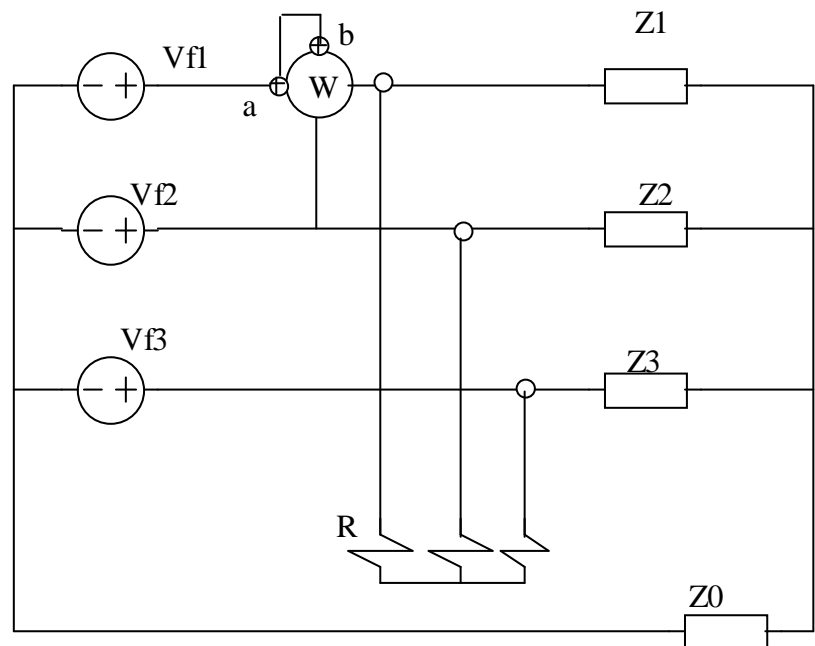
$$Z_2 = 3 - j7 \, \Omega, Z_3 = 4 \, \Omega$$

$$Z_0 = j9 \, \Omega$$

I morsetti *a* e *b* designano i morsetti contrassegnati amperometrico e voltemetrico del wattmetro.

Determinare l'indicazione del wattmetro

$$[P = 710.537 \text{ W}]$$



{E' necessario calcolare la corrente I_w e la tensione V_w entranti nei morsetti

contrassegnati. La corrente I_w è

quella relativa alla fase 1, la tensione è pari a $V_w = V_{f1} - V_{f2} = -86.603 + j150 \text{ V}$. Per calcolare I_w è necessario calcolare i due contributi di corrente che percorrono Z_1 e il carico trasversale R . La corrente che percorre Z_1 può essere calcolata una volta che sia nota la tensione tra il centro stella delle tensioni e quello dei carichi longitudinali. Tale tensione è pari a $V_{00} =$

$(V_{f1} \cdot Y_1 + V_{f2} \cdot Y_2 + V_{f3} \cdot Y_3) / (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0) = 11.557 + j11.18 \text{ V}$. La corrente che percorre Z_1 è

data da $I_{z1} = (V_{f1} - V_{00}) / Z_1 = 14.517 + j8.118 \text{ A}$ (diretta verso sinistra). La tensione tra il centro

stella delle tensioni e quello del carico trasversale è nulla essendo la terna simmetrica e il carico

equilibrato, tale corrente è allora pari a $I_r = V_{f1} / R = j5 \text{ A}$. La corrente I_w si ottiene con una legge

al nodo $I_w = I_r + I_{z1} = 14.517 + j13.118 \text{ A}$. La potenza è allora pari a $P_w = \text{Re}(V_w \cdot \underline{I_w}) = 710.537 \text{ W}$

}

