ALGEBRA E LOGICA MATEMATICA
5 LUGLIO 2005

I PARTE

1) Sia dato l'insieme X ={a,b,c,d,e,f}.
   a) Si consideri la relazione R su X rappresentata dal seguente grafo

$$a \to b \qquad c \to d \qquad e \to f$$

   Dire se esistono e quante sono le funzioni da X ad X contenenti R che ammettono inversa sinistra.
   Determinare la relazione d'equivalenza ρ generata da R e l'insieme quoziente X/ρ.
   b) Si consideri ora la relazione T su X avente la seguente matrice d'incidenza

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Costruire la chiusura simmetrica τ della chiusura riflessiva e transitiva S di T.
   E' una relazione d'equivalenza? Se sì, si costruisca l'insieme quoziente X/τ.
   c) Si consideri ora la relazione $R \cup T$ su X.
   Si mostri che esiste una ed una sola funzione biunivoca f di X in X contenuta in tale relazione.
   Si mostri inoltre che esiste una ed una sola funzione g da X/ρ a X/τ tale che $p_\rho \, g = p_\tau$ ove p_ρ e p_τ sono le usuali proiezioni canoniche.

Giustificare ogni risposta.

2) Trovare in Z_7 la soluzione dell'equazione

$$\{4\}x = \{2\}$$

e dimostrare che è unica.
Discutere esistenza ed unicità della soluzione della stessa equazione in Z_6.
Considerare l'equazione

$$\{4\}x^2 - \{2\}x = \{0\}$$

e mostrare che in Z_7 ha due sole soluzioni.
La stessa affermazione è valida in Z_6?
Giustificare ogni risposta.

ALGEBRA E LOGICA MATEMATICA
5 LUGLIO 2005

II PARTE

1) Trovare una formula A contenente solo i connettivi $\sim$ e $\Rightarrow$ avente la seguente tavola di verità

A	B	C	f (A, B, C)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

Determinare inoltre una formula B, che non sia una contraddizione, tale che in L da $A \wedge B$ si deduca $\sim A$.

2) Si considerino le seguenti proposizioni:
   a) se Anna è una pittrice, allora Giorgio è uno scrittore oppure Silvia è una insegnante;
   b) se Giorgio è uno scrittore, allora Lucia non fa la commessa oppure Silvia è una insegnante;
   c) se Lucia fa la commessa, allora Anna è una pittrice;
   d) Lucia fa la commessa;
   e) Silvia è una insegnante.

   Si mostri, utilizzando la teoria della risoluzione, che e) è deducibile da a), b), c), d).

3) Si consideri la seguente formula del I ordine

$$A_1^2(x,y) \Rightarrow (\exists z)\,(A_1^2(x,z) \wedge A_1^2(z,y))$$

si discuta la verità della formula data e delle sue chiusure esistenziale ed universale nell'interpretazione che ha come dominio N ed in cui $A_1^2(x,y)$ è da interpretarsi come la relazione $x<y$.
Dimostrare che la formula non è logicamente valida, né logicamente contraddittoria.

TRACCIA DI SOLUZIONE

PARTE 1

Esercizio 1.
Poiché X è finito una funzione da X ad X è suriettiva se e solo se è iniettiva. Dunque si tratta di decidere se esistono e quante sono le funzioni biunivoche da X ad X contenenti R. Per trovare tali funzioni dobbiamo vedere quali possono essere le immagini di b, d, f . Tali immagini vanno scelte fra a,c,e e quindi abbiamo in tutto 6 scelte possibili.
La relazione d'equivalenza ρ generata da R è formata dalle coppie $\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(c,d),(d,c),(d,d),(e,e),(e,f),(f,e),(f,f)\}$ e quindi $X/\rho=\{a\rho,c\rho,e\rho\}$ ove $a\rho=\{a,b\}$, $c\rho=\{c,d\}$, $e\rho=\{e,f\}$.
O usando il grafo di incidenza o usando la matrice di incidenza è facile osservare che la chiusura riflessiva e transitiva di T ha come matrice di incidenza

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ quindi la sua chiusura simmetrica τ ha come matrice di incidenza

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ ed è quindi una relazione di equivalenza (facile vedere che $\tau^2= \tau$ e quindi che τ è transitiva). Ovviamente $X/\tau=\{a\tau,e\tau\}$ ove $a\tau=\{a,b,c,d\}$, $e\tau=\{e,f\}$.

La matrice di incidenza di $R\cup T$ è

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ e quindi sapendo che una funzione biunivoca contenuta in essa deve avere una matrice di incidenza ottenuta portando eventualmente degli 1 a 0 nella matrice di $R\cup T$ in modo che in ogni riga e colonna rimanga uno ed un solo 1, l'unica possibile matrice ottenuta in questo modo è

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una funzione g tale che $p_\rho\, g = p_\tau$ è, come si può verificare direttamente la funzione così definita $g(a\rho)=g(c\rho)=a\tau$, $g(e\rho)=e\tau$.
Inoltre è facile osservare che la g così definita è l'unica possibile, infatti deve essere per ogni x di X $p_\rho\, g\,(x)=g\,(p_\rho\,(x))= p_\tau\,(x)$, ovvero $g(x\rho)=x\tau$ (oppure si può usare il II teorema di fattorizzazione delle applicazioni).

Esercizio 2
Sappiamo che Z_7 è un campo e che quindi ogni suo elemento non nullo ha inverso. Inoltre è noto che se $\cdot$ è un'operazione binaria associativa su un insieme X , ogni equazione $a\cdot x=b$ con $a,b\in X$ ha una e una sola soluzione della forma $x=a^{-1}\cdot b$ se a ha inverso. Poiché in Z_7 si ha $\{4\}^{-1}=\{2\}$, l'equazione $\{4\}x = \{2\}$ha la soluzione $x=\{2\}\{2\}=\{4\}$ e tale soluzione è unica. In Z_6 invece $\{4\}$ non ammette inverso, è facile comunque verificare che $x=\{2\}$ è una soluzione dell'equazione in Z_6, inoltre tale soluzione non è unica infatti anche $x=\{5\}$ è soluzione e questi due elemnti sono le uniche soluzioni.
Il polinomio $\{4\}x^2 - \{2\}x$ si decompone in $x(\{4\}x- \{2\})$, pertanto sia $x=\{0\}$ sia $x=\{4\}$ sono soluzione dell'equazione $\{4\}x^2 - \{2\}x =\{0\}$ in Z_7 , inoltre poiché Z_7 è privo di divisori dello 0 ogni soluzione dell'equazione deve o essere radice di x o radice di $\{4\}x- \{2\}$ e dunque le due soluzioni indicate sono le uniche soluzioni dell'equazione $\{4\}x^2 - \{2\}x =\{0\}$ in Z_7 . In Z_6 invece l'equazione $\{4\}x^2 - \{2\}x =\{0\}$ ha almeno le 3 soluzioni $x=\{0\}$, $x=\{2\}$, $x=\{5\}$, inoltre ammette anche la soluzione $x=\{3\}$ come si ottiene per verifica diretta o ragionando sui divisori dello 0.

PARTE 2

Esercizio 1.
La formula $\mathcal{A}$
$(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\sim B\wedge C)\vee(\sim A\wedge B\wedge\sim C)\vee(\sim A\wedge\sim B\wedge\sim C)\equiv(A\wedge C)\vee(\sim A\wedge\sim C)\equiv(A\Rightarrow\sim C)\Rightarrow\sim(\sim A\Rightarrow C)$ ha la tavola di verità data.
Una formula $\mathcal{B}$ che non sia una contraddizione tale cha da $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ in L si deduca $\sim\mathcal{A}$ è la formula $\sim\mathcal{A}$.
Infatti per i teoremi di correttezza e completezza da $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ si deduca $\sim\mathcal{A}$ in L se e solo se $(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}) \Rightarrow\sim\mathcal{A}$ è una tautologia e ovviamente $(\mathcal{A}\wedge\sim\mathcal{A}) \Rightarrow\sim\mathcal{A}$ è una tautologia essendo il suo antecedente sempre falso.

Esercizio 2.
Incicando con A la frase "Anna è una pittrice", con G la frase" Giorgio è uno scrittore", con S la frase "Silvia è una insegnante" e con L la frase "Lucia fa la commessa", le frasi a),b),c),d) ed e) diventano rispettivamente le formule

a) $A\Rightarrow(G\vee S)$
b) $G\Rightarrow(\sim L\vee S)$
c) $L\Rightarrow A$
d) L
e) S

a), b), c), d) in forma a clausole diventano
a) {~A,G,S},
b) {~G,~L,S}
c) {~L,A}
d) {L}
la e negata diventa la clausola
f) {~S}
Per dimostrare con la risoluzione che la frase e) si deduce dalle frasi a),b),c),d) bisogna mostrare che dalle clausole a),b),c),d),f) si deduce la clausola vuota .
La risolvente di f) e b) è la clausola {~G,~L}, che a sua volta con d) dà come risolvente {~G}, che con a) dà {~A,S}, che con f) dà {~A}, che con c) dà {~L} che con d) dà la clausola vuota.

Esercizio 3
Nell'interpretazione data la formula si legge
"x,y sono numeri naturali e se x è minore di y allora esiste un naturale z tale che x è minore di z e z è minore di y".
Ovviamente la formula è soddisfatta se y non è il successore di x perché in tal caso o y è minore o uguale ad x e non è soddisfatto l'antecedente o se y è maggiore di x il successore di x è compreso fra x ed y. La formula non è soddisfatta se y è il successore di x, perché in tal caso è soddisfatto l'antecedente ma non il conseguente.
Dunque la formula nell'interpretazione data è soddisfacibile ma non vera, per cui la sua chiusura esistenziale è vera e la sua chiusura universale è falsa.
La formula non può essere logicamente valida in quanto non è vera nell'interpretazione data, non è logicamente contraddittoria in quanto non è falsa (insoddisfacibile) nell'interpretazione data.