Capitolo 7. Circuiti magnetici

Esercizio 7.1

Dato il circuito in figura 7.1 funzionante in regime stazionario, sono noti:
R1 = 7.333 Ω, R2 = 2 Ω, R3 = 7 Ω
δ1 = 1 mm, δ2 = 1.3 mm, δ3 = 1.5 mm
A = 8 cm^2, N1 = 100, N2 = 500
V1 = 30 V
Si consideri la permeabilità del ferro infinita. Determinare la totale energia immagazzinata

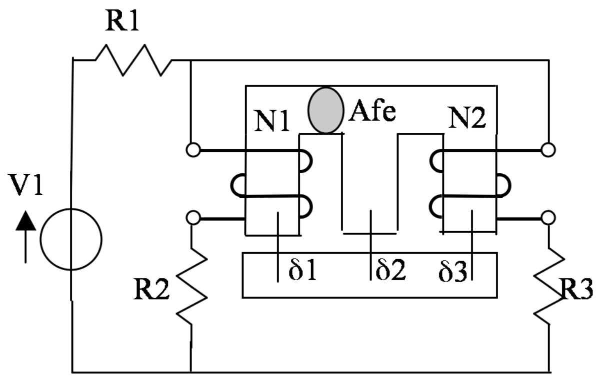
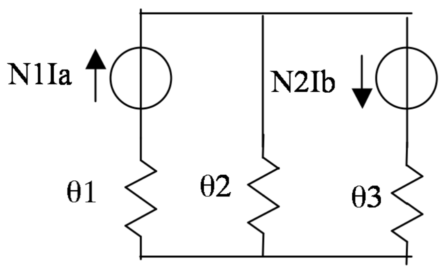


Figura 7.1

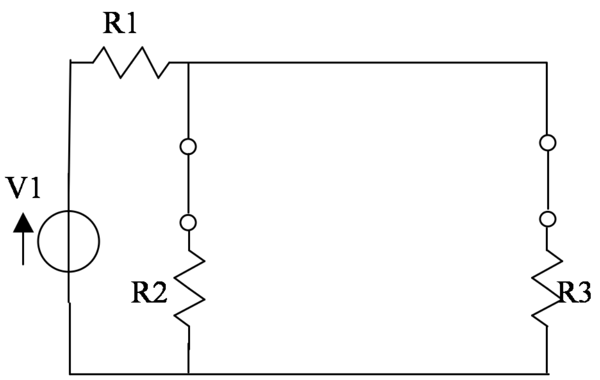
Soluzione

Per prima cosa è necessario calcolare i parametri di auto e mutua induttanza.
La rete magnetica equivalente, poiché la permeabilità del ferro è infinita, è composta dalle sole riluttanze dei traferri.
In particolare si ottiene quanto segue:

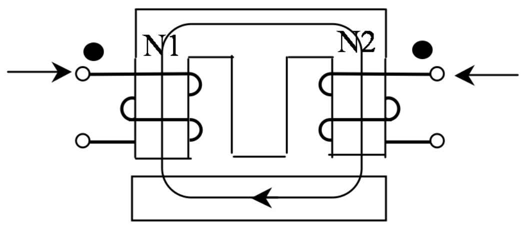


$\theta 1 = \delta 1/(\mu o \cdot Afe) = 9.947 \cdot 10^5\ H^{-1}$,
$\theta 2 = \delta 2/(\mu o \cdot Afe) = 1.293 \cdot 10^6\ H^{-1}$
$\theta 3 = \delta 3/(\mu o \cdot Afe) = 1.492 \cdot 10^6 H^{-1}$,

dove μo è la permeabilità dell'aria ($\mu o = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ H/m). Le auto induttanze si trovano come rapporto tra il numero di spire al quadrato e la riluttanza equivalente vista ai morsetti dei due generatori di f.m.m. quando il circuito sia reso passivo. Si ottiene quindi che $\theta eq1 = 1/(\Lambda 2+\Lambda 3)+\theta 1$ e $L1 = N12/\theta eq1 = 5.926$ mH. Per l'auto induttanza L2 si ha che $\theta eq2 = 1/(\Lambda 1+\Lambda 2)+\theta 3$ e $L2 = N22/\theta eq2 = 122$ mH.



Per il calcolo della mutua induttanza, si deve sempre procedere con la definizione: si alimenta uno dei due avvolgimenti lasciando a vuoto il secondo e si calcola il rapporto tra il flusso concatenato con il secondo avvolgimento e la corrente che percorre il primo avvolgimento. Si ottiene quindi che $\theta eq21 = (1/(\Lambda 2+\Lambda 3)+\theta 1)\cdot(\Lambda 3/(\Lambda 3+\Lambda 2))^{-1}$ e $Lm = N1 \cdot N2/\theta eq21 = 14$ mH. Per il calcolo dell'energia immagazzinata è necessario calcolare la corrente Ia e Ib che percorre i due avvolgimenti. Conviene allora trasformare V1-R1 nel suo equivalente parallelo e utilizzare la regola del partitore di corrente. Si ottiene quindi $Ia = I1 \cdot G2/(G1+G2+G3) = 2.625$ A, e $Ib = I1 \cdot G3/(G1+G2+G3) = 0.75$ A.



Poiché entrambe le correnti entrano nei morsetti contrassegnati si ottiene $W = ½ \cdot L1 \cdot Ia^2 + ½ \cdot L2 \cdot Ib^2 + Lm \cdot Ia \cdot Ib = 0.082$ J

Esercizio 7.2

Dato il circuito in figura 7.2 funzionante in regime stazionario, sono noti:

R1 = 4 Ω, R2 = 3 Ω R3 = 6 Ω,
N1 = 2000, N2 = 1500,
V1 = 200 V, V2 = 150 V, I1 = 10 A

Afe = 5 cm2, δ = 1mm, L = 1mH, μfe infinita
Determinare la totale energia magnetica immagazzinata

Soluzione

Si procede con il calcolo dei parametri di auto e mutua induttanza. L'auto induttanza è data da $L1 = N1^2/\theta eq1 = 1.676$ *H, dove la* $\theta eq1$ *è data dalla serie del parallelo delle due riluttanze* $\theta\delta$ *con* $\theta\delta$*. L'auto induttanza L2 si calcola come rapporto tra il quadrato del numero di spire N2 e la riluttanza equivalente* $\theta eq2$ *che vista la*

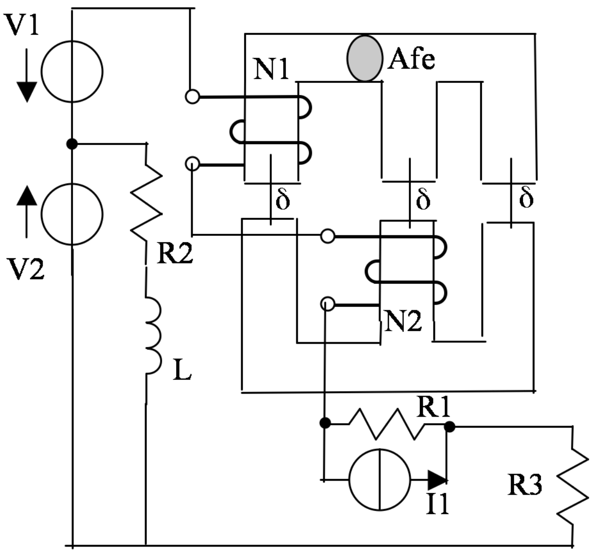
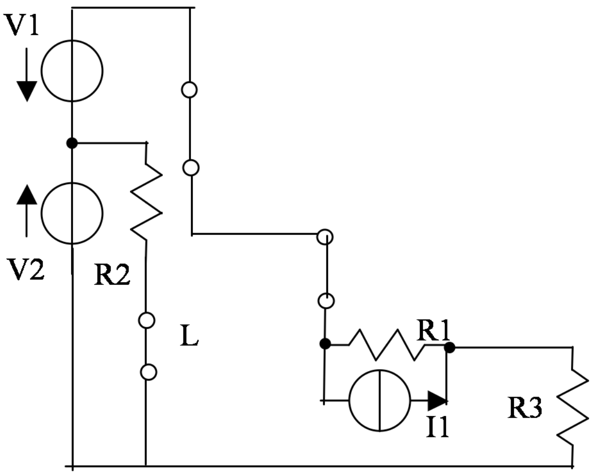
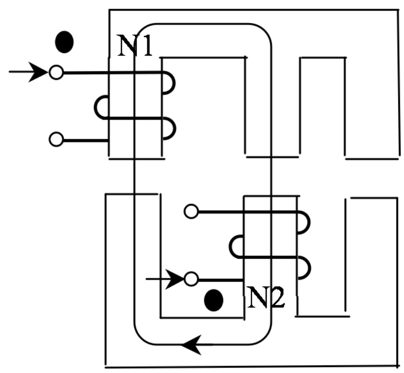


Figura 7.2





simmetria del circuito magnetico è pari a $\theta eq1$*. Si ottiene quindi* $L2 = N2^2/\theta eq2 = 0.942$ *H. Per il calcolo della mutua induttanza si alimenta uno dei due avvolgimenti lasciando a vuoto il secondo e si calcola il rapporto tra il flusso concatenato con il secondo avvolgimento e la corrente che percorre il primo avvolgimento. Si ottiene quindi che* $\theta eq21 = (3\cdot\theta\delta)$ *e* $Lm = N1\cdot N2/\theta eq21 = 0.628$ *H.*

Si contrassegnano poi i morsetti dei due avvolgimenti e risulta che il morsetto superiore del primo avvolgimento e quello inferiore del secondo sono i morsetti corrispondenti. Ritornando al circuito *elettrico è necessario calcolare la corrente che percorre il mutuo induttore per calcolare il contributo di energia immagazzinata legata al mutuo induttore. Trasformando il bipolo parallelo R1-I1 nell'equivalente serie si ottiene la corrente che percorre il mutuo induttore I = (V2-V1+R1·I1)/(R1+R3)=-1 A. Poiché tale corrente entra nel morsetto contrassegnato del primo avvolgimento ed esce da quello contrassegnato del secondo, l'espressione dell'energia è la seguente:* $W = ½·L1·Ia^2+ ½·L2·Ib^2-Lm·Ia·Ib=0.681$ *J. Il contributo di energia legato all'induttanza L è dato da* $WL = ½·L·IL^2 = ½·L·(V2/R2)^2=1.25$ *J e quindi l'energia totale è data da Wtot = W+WL = 1.931 J*

Esercizio 7.3

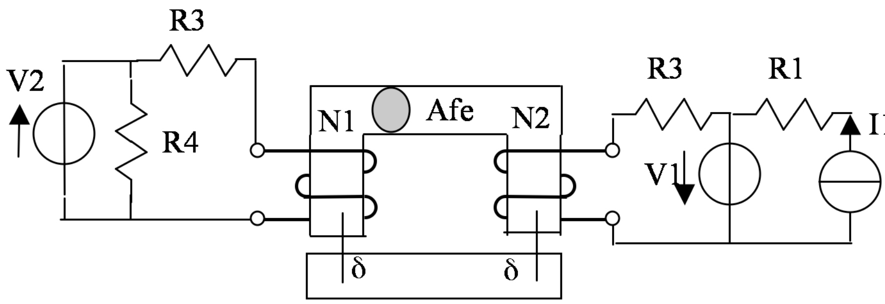


Figura 7.3

Dato il circuito in figura 7.3 funzionante in regime stazionario, sono noti:
V2 = 40 V, V1 = 30 V, R1 = 6 Ω, R2 = 10 Ω, R3 = 4 Ω, R4 = 2 Ω
N1 = 100, N2 = 500 Afe = 8 cm^2, I1 = 10 A
δ = 0.8 mm
Determinare i valori di auto e mutua induttanza e l'energia magnetica immagazzinata

---

Soluzione
Si procede con il calcolo dell'auto e mutua induttanza. L'auto induttanza L1 è data da $L1 =N1^2/(2·θδ) = 6.283$ *mH, dove θδ =δ/(μo·Afe). L'auto induttanza L2 è data da* $L2 = N2^2/(2·θδ) =157$ *mH. La mutua induttanza Lm è data da Lm = N1·N2/(2·θδ)= 31 mH. I*

morsetti ocrrispondenti sono i due superiori dei due avvolgimenti. Per calcolare l'energia magnetica immagazzinata è necessario calcolare le correnti Ia e Ib che percorrono i due avvolgimenti. Sostituendo le induttanze con dei corto circuiti si ottiene Ia = V2/R3 = 10 A (entrante nel morsetto contrassegnato), Ib = V1/R2 = 3 A uscente dal morsetto contrassegnato (I1 e R1 essendo in parallelo ad un generatore di tensione non sono influenti agli effetti esterni). L'energia immagazzinata ha quindi la seguente espressione: $W = ½·L1·Ia^2 + ½·L2·Ib^2 - Lm·Ia·Ib = 0.079\ J$

Esercizio 7.4

Dato il circuito in figura 7.4 funzionante in regime stazionario, sono noti:
R1 = 3 Ω, R2 = 5 Ω
N1 = 100, N2 = 500,
V1 = 20 V, Afe = 8 cm^2,
L = 2mH, C = 8 μF
μfe infinita, δ = 1.5 mm

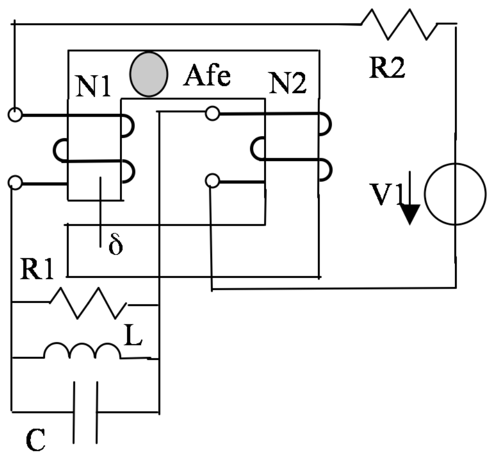
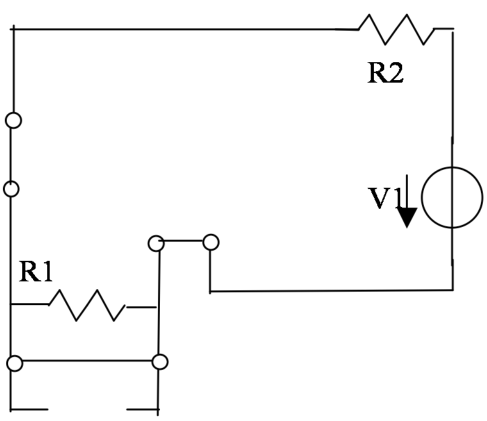


Figura 7.4

Soluzione

Per il calcolo delle auto e mutue induttanze è necessario tracciare la rete magnetica. Si ottiene quindi che $L1 = N1^2/(\theta\delta) = 6.702\ mH$, $L2 = N2^2/(\theta\delta) = 168\ mH$. *Il coefficiente di mutua induttanza è pari a* $Lm = N2·N1/(\theta\delta) = 34\ mH$. *I morsetti corrispondenti sono quello inferiore dell'avvolgimento N2 e quello superiore dell'avvolgimento N1.*



Per calcolare la totale energia magnetica immagazzinata è necessario calcolare la corrente che percorre l'induttanza L e la corrente del mutuo induttore. Poiché il condensatore in regime stazionario equivale ad un circuito aperto, la resistenza R1 *risulta corto circuitata dall'induttanza L e il circuito elettrico è costituito da una sola maglia che comprende V1 e R2. La corrente è dunque pari a I = V1/R2 = 4 A. L'energia immagazzinata nell'induttanza L è quindi pari a WL = ½·L·I^2= 0.016 J e l'energia immagazzinata nel mutuo induttore è pari a W = ½·L1·I^2+ ½·L2·I^2-Lm· I^2=0.8579 J. Quindi la totale energia immagazzinata è data dalla somma dei due contributi ed è pari a Wtot = 0.874 J*

Esercizio 7.5

Dato il circuito in figura funzionante in regime stazionario, sono noti:
R1 = 3 Ω, R2 = 6 Ω N = 100,
V1 = 18 V, I1=10 A
Afe = 100 cm^2, δ = 1mm,
μfe infinita

Determinare la forza F

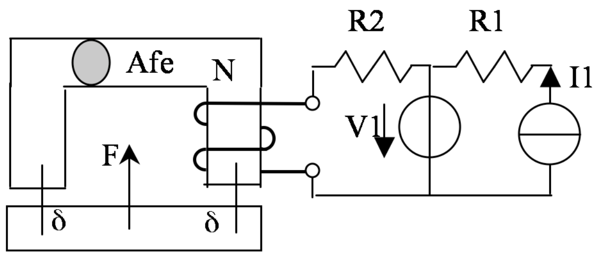


Figura 7.5

Soluzione

Per il calcolo della forza è necessario calcolare il flusso φ che si ha nei traferri. Si procede quindi con il calcolo della corrente che percorre l'avvolgimento di N spire e poi si risolverà la rete magnetica. Osservando che il generatore di corrente I1 e il resistore R1 non sono influenti agli effenti esterni in quanto in parallelo ad un generatore di tensione, si può calcolare la corrente che percorre l'avvolgimento come I = V1/R2 = 3 A. Se si disegna la rete magnetica, si ottiene una sola maglia e il calcolo del flusso nei traferri porta a φ = (N·I)/(2·θδ) =1.885 mWb. La forza F si calcola come F = 2·φ^2/(2·μo·Afe) = 282.74 N (è una forza attrattiva).

Esercizio 7.6

Dato il circuito in figura funzionante in regime stazionario, sono noti:
R1 = 3 Ω, R2 = 6 Ω, R3 = 8 Ω
N1 = 100, N2 = 150
I1 = 18 A,
Afe = 100 cm^2,
δ = 1mm, μfe infinita
Determinare la forza F

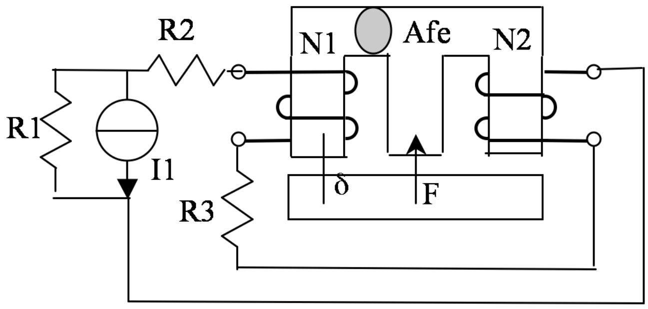
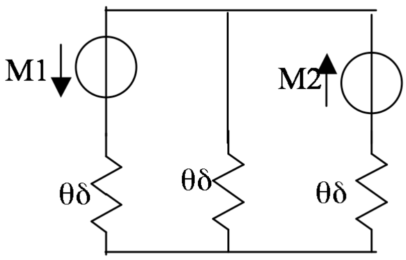


Figura 7.6

Soluzione



Per il calcolo della forza è necessario calcolare il flusso che si ha nei traferri. Si procede quindi con il calcolo della corrente che percorre gli avvolgimenti e poi si risolverà la rete magnetica. Tale corrente si calcola utilizzando la regola del partitore di corrente ed è data da I = I1·G23/(G23+G1) = 3.176 A, dove G23 = 1/(R2+R3)=0.071 S. Se si considera la rete magnetica, si ottengono due maglie, trasformando i due bipoli serie M1-θδ e M2-θδ nell'equivalente parallelo si ottiene la tensione magnetica ai capi della riluttanza del ramo centrale U = (-(N1·I/θδ)+(N2·I/θδ))/(3/θδ) = 52.94 Asp. I flussi nei tre traferri sono quindi φ1 = (U+N1·I)/θδ = 4.657 mWb, φ2 = (U)/θδ = 0.6653 mWb e φ3 = (U-N2·I)/θδ = -5.322 mWb. La forza F si calcola come F = ($φ1^2$+ $φ2^2$+ $φ3^2$)/(2·μo·Afe) = 2008 N (è una forza attrattiva).

Esercizio 7.7

Sia dato il sistema in Figura con ingressi stazionari. Si determini la forza F esercitata sulla parte mobile nelle condizioni di funzionamento indicate i coefficienti di auto e mutua induttanza e l'energia accumulata.

I1 = 15 A

R1 = 5 Ω, R2 = 20 Ω, R3 = 10 Ω

N1 = 200 spire

N2 = 150 spire

μfe = ∞

Afe = 150 cm^2 δ = 3 mm

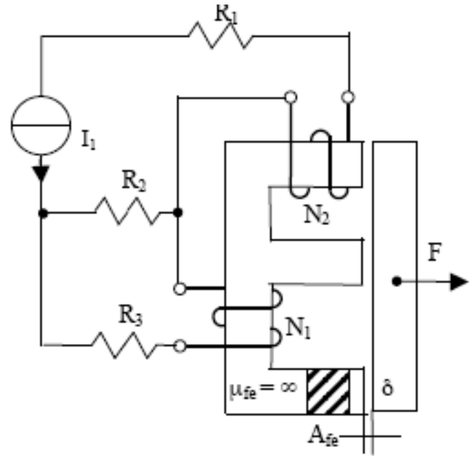


Figura 7.7

Soluzione

Per prima cosa è necessario calcolare i parametri di auto e mutua induttanza. Si considera quindi la rete magnetica e poiché la permeabilità del ferro è ipotizzata infinita, nel circuito magnetico compariranno solo le riluttanza dei traferri. In particolare si ottiene quanto segue: $\theta = \delta/(\mu o \cdot Afe) = 1.592 \cdot 10^5 H^{-1}$, dove μo è la permeabilità dell'aria ($\mu o = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$). Le auto induttanze si trovano come rapporto tra il numero di spire al quadrato e la riluttanza equivalente vista ai morsetti di una delle due f.m.m. quando il circuito sia reso passivo. Si ottiene quindi che $\theta eq1 = \theta eq2 = (3/2) \cdot \theta$, data dal parallelo di due riluttanze θ in serie a θ. L1è quindi pari a $L1 = N1^2/\theta eq1$ = 168 mH e L2=94 mH. Per il calcolo della mutua induttanza si alimenta uno dei due avvolgimenti lasciando a vuoto il secondo e si calcola il rapporto tra il flusso concatenato con il secondo avvolgimento e la corrente che percorre il primo avvolgimento. Si ottiene quindi che $\theta eq21 = 3\theta$ e $Lm = N1 \cdot N2/\theta eq21$ = 63 mH. Per il calcolo dell'energia immagazzinata è necessario calcolare la corrente Ia e Ib che percorre i due avvolgimenti calcolata con il verso entrante nei morsetti corrispondenti, (quello di sinistra nelle N2 spire, quello in basso nelle N1 spire). La corrente Ib che percorre le N2 spire Ib =I1 e la corrente Ia è pari a $Ia = I1 \cdot (R2)/(R3+R2) = 10$ A. Per il calcolo dell'energia si ottiene W =

$\frac{1}{2}\cdot L1\cdot Ia^2+\frac{1}{2}\cdot L2\cdot Ib^2+Lm\cdot Ia\cdot Ib=28.405$ J. Per il calcolo della forza è necessario calcolare i flussi nei tra ferri. Conviene calcolare la differenza di potenziale magnetico tra i due nodi della rete magnetica che risulta pari a $U=(N1\cdot Ia-N2\cdot Ib)/3=-83.33$ Asp. Il flusso nei traferri è pari a $\varphi 1=(N1\cdot Ia-U)/\theta=0.013Wb$, $\varphi 2=(N2\cdot Ib+U)/\theta=0.014Wb$, $\varphi 3=U/\theta=-5.23\cdot 10^{-4}Wb$. La forza è data da $F=(\varphi 1^2+\varphi 2^2+\varphi 3^2)/(2\cdot\mu o\cdot Afe)=9.468$ m N

Esercizio 7.8

Sia dato il circuito con ingressi stazionari riportato in figura 7.8. Sono noti:
R1 = 20 Ω, R2 = 5 Ω,
V = 50 V, δ = 3 mm
N1 = 150, N2 = 300
Afe = 150 cm^2
Si determino i coefficienti di auto e mutua induttanza, l'energia totale accumulata nel campo magnetico (ipotizzando la permeabilità del ferro infinita) e la forza F specificando se si tratta di una forza attrattiva o repulsiva rispetto all'armatura in ferro superiore.

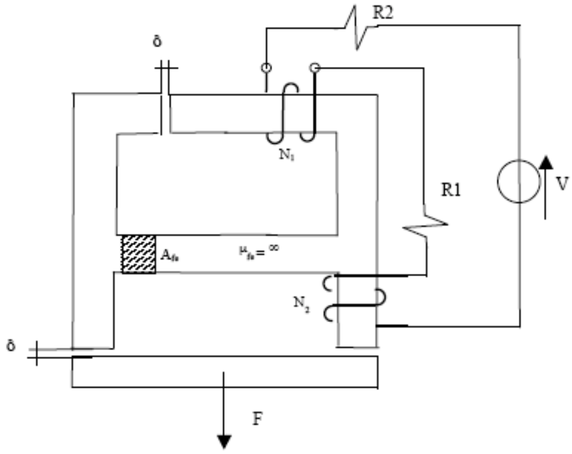
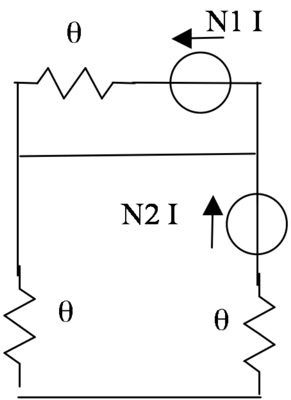


Figura 7.8

Soluzione

Per il calcolo delle auto e mutua induttanza è necessario riferirsi alla rete magnetica costituita da un generatore di f.m.m. $N1\cdot I$ in serie ad una riluttanza θ e in parallelo ad un ramo in corto circuito e ad un ramo costituito dal generatore $N2\cdot I$ e dalla serie di 2θ. L'induttanza L1 e' pari a $N1^2/\theta eq$, dove $\theta eq=\theta=1.592\cdot 10^5H^{-1}$,da cui risulta L1=0.141 H. L'induttanza L2 è pari a $N2^2/\theta eq2$ dove $\theta eq2=2\theta$ e L2=0.283H. La mutua induttanza



è nulla a causa della presenza del ramo in corto circuito. Si risolve poi il circuito elettrico per
trovare la corrente I che quindi è a pari a $I=V/(R1+R2)=2$ A. L'energia accumulata è quindi pari a $W=1/2\cdot L1\cdot I^2+1/2\cdot L2\cdot I^2=0.848$ J. Per il calcolo della forza e' necessario trovare il flusso che interessa la parte mobile che è dato da $\varphi=N2\cdot I/(2\cdot\theta)=1.885$ mWb. La forza e' di natura attrattiva ed è pari a
$F=2\cdot\varphi^2/(2\cdot\mu o\cdot Afe)=188.496$ N

Esercizio 7.9

Dato il circuito in figura 7.9 funzionante in regime stazionario, sono noti:
R1 = 5 Ω, R2 = 7 Ω,
N1 = 100, N2 = 250
L = 3 mH, C = 4 μF,
Afe = 18 cm^2,
δ = 1.75 mm, μfe infinita
V1 = 20 V.
Determinare la forza F agente sulla struttura.

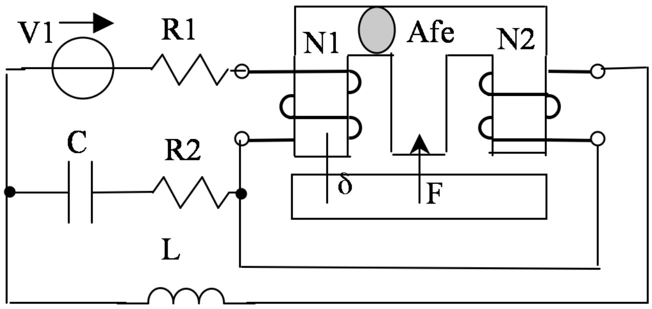
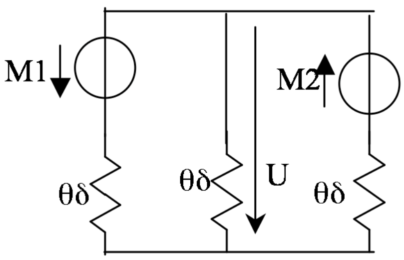


Figura 7.9

Soluzione



Per il calcolo della forza è necessario calcolare i flussi nei traferri. Essendo il regime stazionario si ha che la corrente I è pari a I = V1/R1 = 4 A, ricordando che in regime stazionario l'induttore L è un corto circuito e la capacità C un circuito aperto. La rete magnetica è costituita da 2 maglie, e trasformando tutti i bipoli magnetici nel loro equivalente parallelo è possibile calcolare la tensione magnetica tra i due nodi della rete *magnetica. Questa vale* $U = ((N1 \cdot I/\theta\delta) - (N2 \cdot I/\theta\delta))/(3/\theta\delta) = -200$ *Asp. Da cui è possibile calcolre i flussi* $\varphi 1 = (N1 \cdot I - U)/\theta\delta = 0.77552$ *mWb,* $\varphi 2 = -(U)/\theta\delta = -0.2585$ *mWb,* $\varphi 3 = (U + N2 \cdot I)/\theta\delta = 1.034$ *mWb. La forza F di natura attrattiva è allora pari a come* $F = (\varphi 1^2 + \varphi 2^2 + \varphi 3^2)/(2 \cdot mo \cdot Afe) = 384.045$ *N*