Equazioni Differenziali Ordinarie		10 settembre 2008
Cognome	Nome	Firma
Prof. Vegni	Matricola	Sezione INF

Esercizio 1.

a. Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) = -y + \dfrac{x(9-x^2-y^2)}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} \\ \dot{y} = g(x,y) = x + \dfrac{y(9-x^2-y^2)}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

a. Mostrare che f e g possono essere estese con continuità nell'origine.

b. Trovare le eventuali soluzioni periodiche del sistema e discuterne la stabilità (origine compresa).

c. Disegnare un diagramma di fase qualitativo.

Soluzione.

a. Le funzioni $f(x,y)$ e $g(x,y)$ sono entrambe continue in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dove sono anche derivabili con continuità. La soluzione locale del problema di Cauchy assegnato in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ esiste unica.

Ridefiniamo in questo modo le funzioni f e g

$$f(x,y) = \begin{cases} -y + \frac{x(9-x^2-y^2)}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} x + \frac{y(9-x^2-y^2)}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Le funzioni $f(x,y)$ e $g(x,y)$, così ridefinite, risultano essere continue nell'origine; infatti, usando il passaggio in coordinate polari

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -y + \frac{x(9-x^2-y^2)}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} -\rho\sin\theta + \frac{\rho\cos\theta(9-\rho^2)}{\sqrt[4]{\rho}.} = 0$$

ed allo stesso risultato si perviene per la funzione g.

b. Utilizziamo il passaggio in coordinate polari per indagare la forma delle traiettorie. Siano $\rho^2 = x^2 + y^2$ e $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$; derivando si ottengono le relazioni dinamiche necessarie per la sostituzione: $\rho\dot{\rho} = x\dot{x} + y\dot{y}$ e $\rho^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}$. Il sistema può allora essere ricondotto a

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho^{1/2}(9-\rho^2) \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

La circonferenza $\rho = 3$ è allora soluzione periodica e ciclo limite; essendo $\dot{\theta} > 0$ essa è percorsa in senso antiorario.

Il ciclo limite $\rho = 3$ è stabile: infatti le traiettorie si allontanano dall'origine se $0 < \rho < 3$ ($\dot{\rho} > 0$) mentre diminuiscono la distanza dall'origine ($\dot{\rho} < 0$) se $\rho > 3$.

Osserviamo che l'origine non è punto critico del sistema assegnato. Tuttavia essa è punto critico (instabile) del sistema riscritto in coordinate polari.

c. Il diagramma di fase qualitativo è riportato in Figura 1.

Esercizio 2. È assegnato il sistema lineare a coefficienti costanti

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = (1+a)x. \end{cases}$$

a. Classificare la natura dell'origine come punto di equilibrio al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$

b. Per quali vaori del parametro $a \in \mathbb{R}$ esistono traiettorie rettilinee nel piano delle fasi?

c. Nel caso $a = -1$, riscrivere esplicitamente il sistema e disegnarne le orbite nel piano delle fasi, specificando il verso di percorrenza.

Soluzione.

a. L'origine è punto di equilibrio. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1+a & 0 \end{bmatrix}$. L'origine è l'unico punto critico se $\det A \neq 0$ ovvero se $a \neq -1$ (caso che verrà analizzato nel seguito).

- ⋆ L'equazione caratteristica di A è $\lambda^2 - \lambda + 1 + a = 0$, che ha Δ negativo se $a > -\frac{3}{4}$, e in questi casi l'origine si comporta come un fuoco instabile.
- ⋆ Se $a = -\frac{3}{4}$ ho un autovalore multiplo (non regolare) pari ad pari ad $1/2$, e l'origine è un fuoco ad una tangente instabile.
- ⋆ Se $-1 < a < -\frac{3}{4}$ $\det A < 0$, gli autovalori sono reali e di segno opposto quindi l'origine è una sella.
- ⋆ Se $a < -1$, $\det A > 0$ quindi gli autovalori hanno lo stesso segno. Siccome $\mathrm{tr} A > 0$, l'origine è un nodo a due tangenti stabile.

b. Ci sono traiettorie rettilinee tutte le volte che compaiono autovettori reali, quindi se $a < -\frac{3}{4}$.

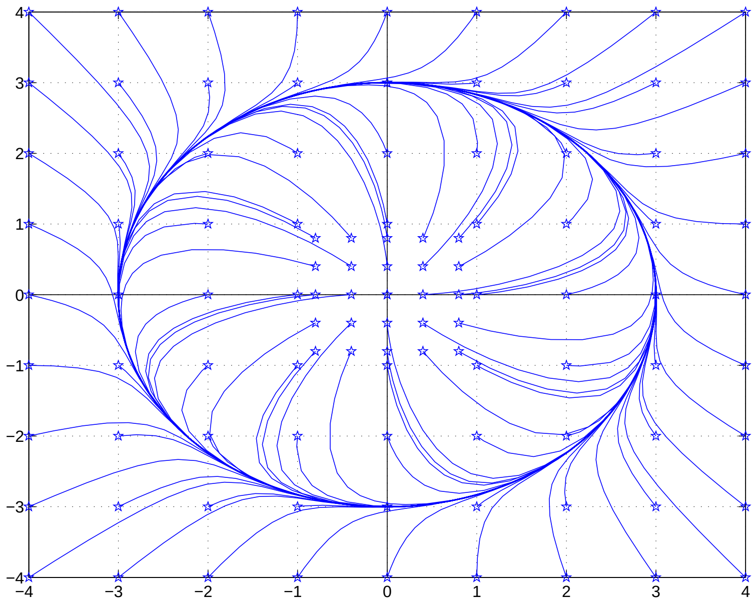

FIGURA 1. Diagramma di fase delle traiettorie del sistema proposto nell'Esercizio 1. Le traiettorie sono state trovate con MatLab utilizzando il risolutore numerico `ode45` per i problemi di Cauchy indicati con una stella blu in figura.

c. Se $a = -1$ la seconda equazione si disaccoppia dalla prima. Il sistema ammette una retta di punti critici corrispondenti all'autovettore dell'autovalore nullo ovvero $x = y$. Integrata separatamente la seconda equazione dà $y =$ costante, e sostituendo nella prima abbiamo $\dot{x} = x -$ costante $\Rightarrow x(t) = Ke^t +$ costante. Le orbite quindi sono semirette orizzontali che si allontanano dal punto critico che si trova su $y = x$.

Esercizio 3. Considerare il sistema conservativo ad un grado di libertà

$$\ddot{x} = 3x^2 - 6x.$$

a. Scrivere il sistema di equazioni differenziali equivalente e determinarne i punti di equilibrio.

b. Disegnare il grafico dell'energia potenziale associata al sistema, dopo averne determinato l'espressione analitica.

b. Dedurre con cura le traiettorie del sistema nel piano $(x, \dot{x})$, determinandone i versi di percorrenza e i livelli di energia per i quali il sistema ammette traiettorie periodiche.

Soluzione.

a.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 3x^2 - 6x. \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono $(0, 0)$ e $(2, 0)$.

b. L'energia potenziale associata al sistema è $\mathcal{U} = -\int_0^x (3s^2 - 6s)\, ds = -x^3 + 3x^2$, il cui grafico è rappresentato in Figura 2.

c. Le traiettorie del sistema coincidono con le linee di livello della funzione energia totale $\mathcal{E} = \dfrac{y^2}{2} - x^3 + 3x^2$, rappresentate in Figura 2. I versi di percorrenza posso essere dedotti dalle frecce che compaiono in Figura e che ritraggono il campo di direzioni del sistema.

Esercizio 4. È data l'equazione alle differenze

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^3 - x_2^2), & n \geq 0 \\ x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a. Trovare i punti di equilibrio, dopo avere disegnato il grafico della funzione generatrice.

b. Disegnare con un diagramma a gradino le orbite relative ai dati iniziali $x_= -\frac{1}{2}$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = \frac{3}{2}$, $x_0 = 3$.

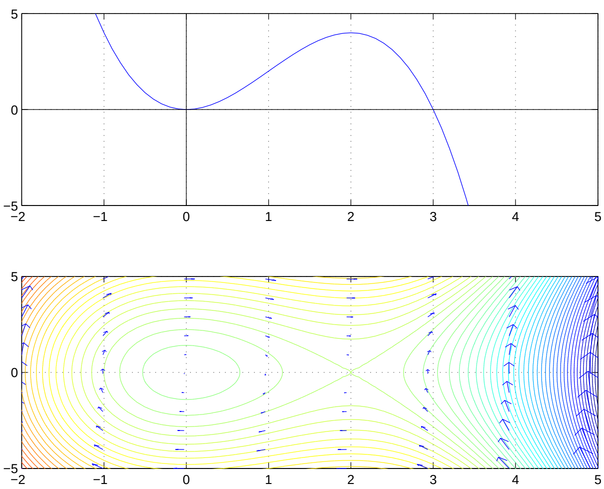

FIGURA 2. In alto il potenziale, in basso le traiettorie del sistema dell'Esercizio 3.

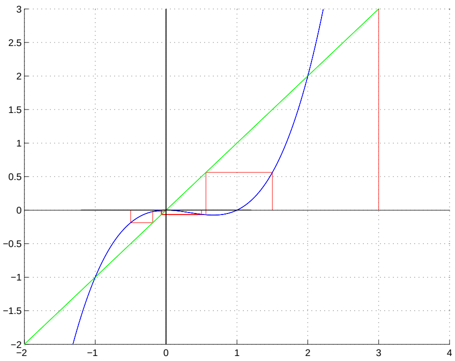

FIGURA 3. Generatrice (in blu) e diagrammi a gradino corrispondenti ai valori iniziali assegnati.

c. Determinare la natura dei punti di equilibrio ed il loro eventuale bacino di attrazione.

Soluzione.

a. I punti di equilibrio risolvono $\frac{1}{2}(x_n^3 - x_2^2) = x$ e sono $x^* = -1, 0, 2$.

b. La generatrice ed i diagrammi a gradino sono in figura.

c. Per studiare la natura dei punti di equilibrio si può utilizzare il criterio di linearizzazione $f' = 3/2x^2 - x$ e $f'(0) = 0 < 1$ mentre $f'(2) = 4 > 1$ e $f'(-1) = 5/2 > 1$. Quindi l'origine è l'unico punto di equilibrio stabile.