

Algebra

Prima Semiunità

Appello del 30 Giugno 1999

Esercizio 1

Si consideri il gruppo additivo $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ degli interi relativi. Siano n, m due interi fissati e siano H_n ed H_m i sottogruppi di $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ costituiti dai multipli di n ed m rispettivamente. Si provi che l'intersezione insiemistica di H_n ed H_m è a sua volta un sottogruppo di $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$, mentre l'unione insiemistica di H_n ed H_m è un sottogruppo di $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ se e solo se n divide m od m divide n .

Provare che il minimo sottogruppo contenente H_n ed H_m coincide con $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ se e solo se n ed m sono primi fra loro.

Esercizio 2

Si provi che nella teoria L è possibile dedurre la formula $(C \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow \sim A)$ dalla formula $A \Rightarrow \sim B$.

Tenendo conto di quanto sopra, giustificare brevemente il fatto che la formula del primo ordine

$$((\forall x) A_1^2(x, y) \Rightarrow B_1^2(x, y)) \Rightarrow ((A_1^1(x) \Rightarrow \sim B_1^2(x, y)) \Rightarrow (A_1^1(x) \Rightarrow (\exists x) \sim A_1^2(x, y)))$$

è una formula logicamente valida.

TRACCIA DI SOLUZIONE

Esercizio 1

L'intersezione di H_n ed H_m è ovviamente un sottogruppo infatti se r ed s stanno sia in H_n sia in H_m allora $r-s$ è multiplo sia di n sia di m e quindi sta nell'intersezione di H_n ed H_m . Tale intersezione è costituita dai multipli del m.c.m(n,m). Se l'unione insiemistica di H_n ed H_m è un sottogruppo ed n non divide m , sia r un multiplo di m che non sia multiplo di n , e si consideri $r+n$. Tale elemento deve stare nell'unione e dunque non essendo un multiplo di n deve essere un multiplo di m e dunque m divide n . Viceversa, supponiamo, senza perdita di generalità) che m divida n allora ogni elemento di H_n sta in H_m e l'unione coincide con H_m che è un sottogruppo.

E' noto che, dati due interi n,m , $r = M.C.D(n,m)$ si può scrivere come combinazione lineare (a coefficienti interi) di n , m . E' facile provare che il minimo sottogruppo contenente H_n ed H_m è costituito da tutti e soli i multipli di r e dunque coincide con $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ se e solo se $r=1$.

Esercizio 2

E' immediato verificare che la formula $(A \Rightarrow \sim B) \Rightarrow ((C \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow \sim A))$ è una tautologia, dunque, tenendo conto del teorema di completezza tale formula è un teorema e dunque dall'ipotesi $A \Rightarrow \sim B$ si può dedurre $(C \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow \sim A)$.

La formula del primo ordine indicata è ottenuta dalla precedente tautologia sostituendo ad A la formula $(\forall x)A_1^2(x,y)$, a B la formula $\sim B_1^2(x,y)$ e a C la formula $A_1^1(x)$ e dunque essendo un esempio di tautologia è logicamente valida.