

| | | |
|--|----------------------|-----------------------|
| Equazioni Differenziali Ordinarie | Primo appello | 17 luglio 2008 |
| Cognome | Nome | Firma |
| Proff. Furioli, Rossi, Vegni | Matricola | Sezione INF |

© I seguenti quesiti e il relativo svolgimento sono coperti da diritto d'autore; pertanto essi non possono essere sfruttati a fini commerciali o di pubblicazione editoriale. Ogni abuso sarà perseguito a termini di legge dal titolare del diritto

Esercizio 1. È data l'equazione alle differenze

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n + x_n^3}{1 + x_n^4}, & n \geq 0 \\ x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Trovarne i punti di equilibrio, dopo aver disegnato il grafico di f .
- Disegnare con un diagramma a gradino le orbite relative ai dati iniziali $x_0 = -2$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = 2$.
- Determinare la natura dei punti di equilibrio ed il loro eventuale bacino di attrazione.

| | | |
|--|----------------------|-----------------------|
| Equazioni Differenziali Ordinarie | Primo appello | 17 luglio 2008 |
| Cognome | Nome | Firma |
| Proff. Furioli, Rossi, Vegni | Matricola | Sezione INF |

© I seguenti quesiti e il relativo svolgimento sono coperti da diritto d'autore; pertanto essi non possono essere sfruttati a fini commerciali o di pubblicazione editoriale. Ogni abuso sarà perseguito a termini di legge dal titolare del diritto

Esercizio 2. Sia data l'equazione differenziale

$$y' + xy + x\sqrt{y} = 0.$$

- (1) Si dica, in base alla teoria, dove è possibile garantire esistenza ed unicità della soluzione locale.
- (2) Si precisi se è possibile applicare un teorema di prolungamento. Possono esistere soluzioni definite su \mathbb{R} ?
- (3) Risolvere il problema di Cauchy $y(0) = 1$ associato all'equazione assegnata.
- (4) Discutere il problema di Cauchy $y(0) = 0$.

| | | |
|--|----------------------|-----------------------|
| Equazioni Differenziali Ordinarie | Primo appello | 17 luglio 2008 |
| Cognome | Nome | Firma |
| Proff. Furioli, Rossi, Vegni | Matricola | Sezione INF |

© I seguenti quesiti e il relativo svolgimento sono coperti da diritto d'autore; pertanto essi non possono essere sfruttati a fini commerciali o di pubblicazione editoriale. Ogni abuso sarà perseguito a termini di legge dal titolare del diritto

Esercizio 3. Sia dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x - 1) \\ \dot{y} = xy(2 - y) \end{cases}$$

- (1) Trovarne i punti critici.
- (2) Linearizzare il sistema nell'intorno dei punti critici, dove possibile, e determinare la natura dei punti critici del sistema linearizzato.
- (3) Dedurre, se possibile, la natura dei punti critici del sistema non lineare.
- (4) Determinare le isocline orizzontali, verticali ed il verso di percorrenza delle orbite.
- (5) Determinare un integrale primo del sistema ed esplicitare le traiettorie come funzioni $y = y(x)$ oppure $x = x(y)$.

| | | |
|--|----------------------|-----------------------|
| Equazioni Differenziali Ordinarie | Primo appello | 17 luglio 2008 |
| Cognome | Nome | Firma |
| Proff. Furioli, Rossi, Vegni | Matricola | Sezione INF |

© I seguenti quesiti e il relativo svolgimento sono coperti da diritto d'autore; pertanto essi non possono essere sfruttati a fini commerciali o di pubblicazione editoriale. Ogni abuso sarà perseguito a termini di legge dal titolare del diritto

Esercizio 4. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (1) Trovare gli autovalori di A e gli autovettori relativi.
- (2) Determinare la matrice e^A .
- (3) Scrivere l'integrale generale del sistema autonomo $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$.
- (4) Determinare la soluzione del sistema $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ che risolve il problema di Cauchy $\mathbf{y}(1) = (0, -1, -2)^T$.