Equazioni Differenziali Ordinarie		30 giugno 2005
Cognome	Nome	Firma
Proff. Arioli, Rossi, Vegni	Matricola	Sezione INF

Esercizio 1.

a. Trovare eventuali soluzioni periodiche del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \dfrac{x(9-x^2-y^2)}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} = f(x,y) \\ \dot{y} = x + \dfrac{y(9-x^2-y^2)}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} = g(x,y) \end{cases}$$

b. Verificare la stabilità delle soluzioni periodiche (origine compresa).

c. Disegnare un diagramma di fase qualitativo.

$f(x,y)$ e $g(x,y)$ sono funzioni continue in $\mathbb{R}^2$, pur di porle nulle nell'origine: infatti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0}\left[-\rho\sin\theta + \frac{\rho\cos\theta(9-\rho^2)}{\rho^{1/2}}\right] =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho^{1/2}\left[-\rho^{1/2}\sin\theta + \cos\theta(9-\rho^2)\right] = 0$$ poiché la quantità $|-\rho^{1/2}\sin\theta + \cos\theta(9-\rho^2)| \le |\rho^{1/2}| + C$ è equilimitata in qualsiasi intorno di $(0,0)$. Analogamente per $g(x,y)$.

$f(x,y)$ e $g(x,y)$ (anche prolungate in $(0,0)$ ponendo $f(0,0)=g(0,0)=0$) non sono derivabili perciò il metodo di linearizzazione non è applicabile.

Passiamo a coordinate polari per vedere come è l'andamento delle traiettorie e di sol. periodiche.

$\rho\dot\rho = x\dot x + y\dot y \qquad \rho\dot\rho = -xy + \dfrac{x^2(9-x^2-y^2)}{\rho^{1/2}} + xy + \dfrac{y^2(9-\rho^2)}{\rho^{1/2}}$

$\cancel{\rho}\dot\rho = \rho^{1/2}(9-\rho^2) \qquad \rho=3$ è soluzione (ciclo limite

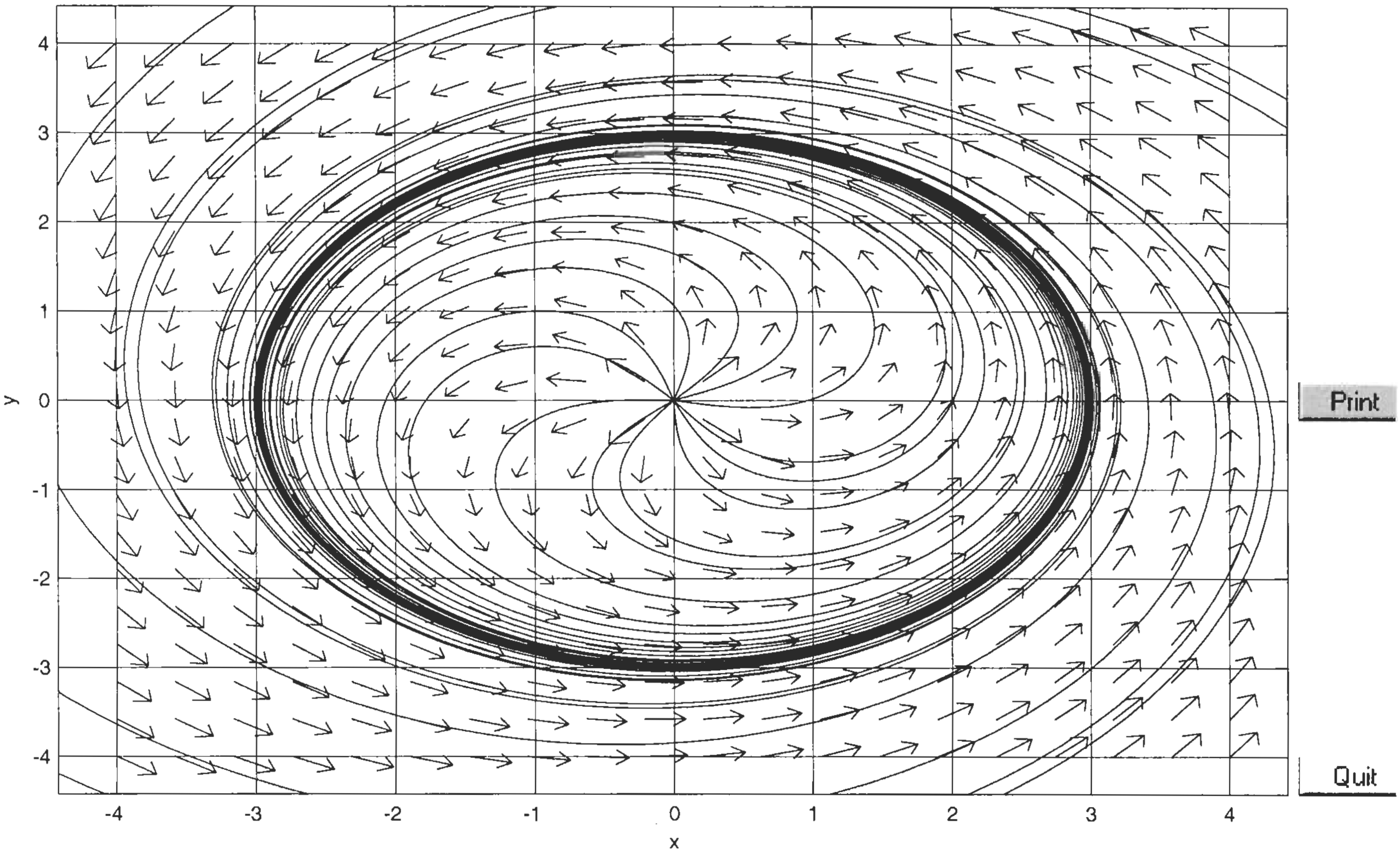
$\rho^2\dot\theta = -\dot x y + \dot y x = +y^2 - \cancel{xy\dfrac{(9-\rho^2)}{\rho^{1/2}}} + x^2 + \cancel{xy\dfrac{(9-\rho^2)}{\rho^{1/2}}} = \rho^2$

$\dot\theta = 1 \longrightarrow \theta = t + c$ (le traiettorie sono percorse in verso antiorario

$\dot\rho$ è positivo se $0<\rho<3$, $\dot\rho<0$ per $\rho>3$ -

L'origine è un pto critico instabile, il ciclo limite $\rho=3$ $(x^2+y^2=9)$ è stabile (cfr. diagramma di fase)

$x' = -y + x\,(9 - x^2 - y^2)\,(x^2 + y^2)^{(-1/4)}$
$y' = x + y\,(9 - x^2 - y^2)\,(x^2 + y^2)^{(-1/4)}$



The backward orbit from (0.19, -0.85) --> a nearly closed orbit.
Ready.
The forward orbit from (3, -3.1) --> a nearly closed orbit.
The backward orbit from (3, -3.1) left the computation window.
Ready.

Con il programma in Matlab pplane si constata che l'origine
può avere un diagramma locale topologicamente equivalente
ad una stella di rette instabile