Testi di esercizi di logica

1. Data la tavola di verità

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

   scrivere una formula $\boldsymbol{A}$ che abbia la suddetta tavola di verità e contenga solo i connettivi ~ e $\Rightarrow$. Si scriva poi una formula $\boldsymbol{B}$, non equivalente a $\sim\boldsymbol{A}$, tale che $\boldsymbol{A}\Rightarrow\sim\boldsymbol{B}$ sia una tautologia e si dica , giustificando la risposta, se $\boldsymbol{B}\vdash_L \sim\boldsymbol{A}$.
   Infine si dica sempre giustificando la risposta se la formula che si ottiene da $\boldsymbol{A}\Rightarrow\sim\boldsymbol{B}$ sostituendo rispettivamente ad ogni occorrenza delle lettere enunciative A, B, C le formule del I° ordine $\exists x A_1^1(x)$, $\forall y A_1^2(x,y)$, $A_1^1(z)$, è logicamente valida.

2. Data la formula del I° ordine:
   $\forall x A_1^2(x,y)\Rightarrow\sim(\exists x A_1^1(x)\Rightarrow\forall y A_2^2(x,f_1^2(x,y)))$
   si stabilisca quali occorrenze delle variabili sono libere e quali vincolate si dica se il termine $f_1^2(x,y)$ è libero per la variabile x e si porti la formula in forma normale premessa.
3. Supposto di aver già scritto gli assiomi propri della teoria degli anelli, si aggiungano gli assiomi propri che servono per descrivere la teoria dei campi. Nello stesso linguaggio si scrivano inoltre le seguenti due frasi:
   a) Se un elemento ammette inverso questo inverso è unico
   b) Ogni elemento ammette un unico inverso. Si dica se e quali di queste frasi sono teoremi della teoria dei campi.

4. Dire se date tre f.b.f. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ della logica delle proposizioni tali che $\boldsymbol{A}\vdash_L\boldsymbol{B}$ e da $\boldsymbol{B}\vdash_L\boldsymbol{C}$ si ha anche $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}\vdash_L\boldsymbol{C}$.

5. Si determinino le variabili libere e vincolate della formula del primo ordine
   $\sim(\forall x\, A_1^2(x,y)\Rightarrow \forall x\, A_2^2(x,y))\vee\forall x(A_1^2(x,y)\Rightarrow A_2^2(x,y))$
   La si porti in forma normale prenessa e si stabilisca se si tratta di una formula logicamente valida o solo soddisfacibile.

6. Si provi che nella teoria L è possibile dedurre la formula $(C\Rightarrow B)\Rightarrow(C\Rightarrow\sim A)$ dalla formula $A\Rightarrow\sim B$.
   Tenendo conto di quanto sopra, giustificare brevemente il fatto che la formula del primo ordine
   $((\forall x)A_1^2(x,y) \Rightarrow B_1^2(x,y))\Rightarrow((A_1^1(x)\Rightarrow\sim B_1^2(x,y))\Rightarrow(A_1^1(x)\Rightarrow(\exists x)\sim A_1^2(x,y)))$
   è una formula logicamente valida.

6. Dopo aver verificato che

   $A, \sim B \vdash_L (A \wedge C) \Rightarrow \sim (C \Rightarrow B)$

   provare che la formula del primo ordine

   $\mathcal{A}_1^1(x) \Rightarrow ((\forall x)\mathcal{A}_1^2(x,y) \Rightarrow ((\mathcal{A}_1^1(x) \wedge \mathcal{A}_1^1(y)) \Rightarrow \sim (\mathcal{A}_1^1(y) \Rightarrow (\exists x) \sim \mathcal{A}_1^2(x,y))))$

   è logicamente valida.

   Determinare occorrenze libere e vincolate delle variabili in tale formula, dire se il termine $f_1^2(x,y)$ è libero per x nella formula data e portarla in forma normale prenessa.

7. Si consideri la tavola di verità:

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

   Scrivere una formula equivalente ad f(A,B,C) che contenga solo i connettivi ~ e $\Rightarrow$. Trovare una formula $\mathcal{A}$ non equivalente ad f(A,B,C) tale che $\mathcal{A} \vdash f(A,B,C)$ e dire perché la formula $\mathcal{A} \Rightarrow f(A,B,C)$ è una tautologia.

8. Si consideri la formula del primo ordine

   $(\forall x)(\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x)) \Rightarrow (\forall x)\mathcal{A}(x) \vee (\forall x)\mathcal{B}(x)$

   Dire se si tratta di una formula logicamente valida e portarla in forma normale prenessa.

9. Si consideri la formula del primo ordine

   $(\forall x)(\forall y)(\mathcal{A}_1^2(f_1^1(x),f_1^1(y)) \Rightarrow \mathcal{A}_1^2(x,y)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)\mathcal{A}_1^2(f_1^1(x),y)$.

   La si porti in forma normale prenessa; si dica se la formula è logicamente valida ed in caso contrario si dia una interpretazione in cui è vera ed una in cui è falsa.

10. Si scriva in un opportuno linguaggio del I ordine la frase "Se un intero x è divisibile per un numero pari, allora x è pari".

11. Si scriva una formula f(A,B,C), contenente solo i connettivi ~ e $\Rightarrow$, con la seguente tavola di verità

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Si provi che f(A,B,C) non si può dedurre in L da ~B ⇒C e si esibisca una formula non equivalente a f(A,B,C) da cui f(A,B,C) si possa dedurre.

12. Si consideri la formula del primo ordine:
$\sim(\forall x)A_1^1(x)\wedge(\exists x)A_2^1(x)\Rightarrow(\exists x)(\sim A_1^1(x)\wedge\ A_2^1(x))$
si dica se è una formula logicamente valida, se è vera in qualche interpretazione, se è soddisfacibile ma non vera in qualche interpretazione , se è insoddisfacibile in ogni interpretazione.
La si porti in forma normale prenessa .

13. Si scriva una formula f(A,B,C) che contenga solo i connettivi ~ e ⇒ che abbia la seguente tavola di verità

A	B	C	f(A,B,C)
V	V	V	F
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V

Dire se A⇒ ~B, B⇒ ~C $\models_L$ f(A,B,C).

14. Si indichino le occorrenze libere e vincolate di ogni variabile nella formula seguente:
$(\forall x)(\forall y)A_1^2(f_1^2(x,y),z)\Rightarrow(\exists x)(A_1^2(x,y) \Rightarrow (\forall y)A_1^2(x,y))$
e si porti la formula data in forma normale prenessa.
Si consideri l'interpretazione avente come dominio N, in cui il predicato $A_1^2(x,y)$ significa x>y e il termine $f_1^2(x,y)$ significa xy. Dire se in tale interpretazione la formula è vera, falsa o soddisfacibile.