Politecnico di Milano — Anno accademico 2005–2006
Secondo anno di Laurea — Foglio 6

Algebra e Logica Matematica

Calcolo delle proposizioni
Logica del primo ordine

Esercizio 6.1. Costruire le tavole di verità per le seguenti forme enunciative:

1) $((A \Rightarrow B) \vee (\sim A))$

2) $((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)))$

3) $((A \Rightarrow B) \wedge A)$

4) $((A \vee (\sim C)) \Leftrightarrow B)$.

Esercizio 6.2.

a) Togliere le parentesi superflue nelle forme enunciative di sopra.

b) Rimettere le parentesi alle forme

1) $C \Rightarrow \sim(A \vee C) \wedge A \Leftrightarrow B$
2) $C \Rightarrow A \Rightarrow A \Leftrightarrow \sim A \vee B$.

Esercizio 6.3. Verificare se le seguenti espressioni sono tautologie:

1) $(((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

2) $((A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)))$

3) $((A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$.

Esercizio 6.4. Dimostrare (e ricordare !!!) l'equivalenza tra le seguenti coppie di forme enunciative:

1) $\sim(A \vee B)$ e $\sim A \wedge \sim B$

2) $\sim(A \wedge B)$ e $\sim A \vee \sim B$

3) $A \wedge (B \vee C)$ e $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

4) $A \vee (B \wedge C)$ e $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Ricordiamo inoltre che sono (per definizione) equivalenti le seguenti coppie:

5) $A \Rightarrow B$ e $\sim A \vee B$

6) $A \Rightarrow B$ e $\sim(A \wedge \sim B)$

7) $A \Leftrightarrow B$ e $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Esercizio 6.5. Trovare una forma enunciativa logicamente equivalente alla negazione di

$$(A \vee \sim B) \wedge A \wedge (\sim C \vee A \wedge C)$$

in cui le negazioni si applicano solo a A, B e C.

Esercizio 6.6. Dimostrare la verità o la falsità delle seguenti affermazioni

1) $(A \Leftrightarrow B)$ implica logicamente $(A \Rightarrow B)$

2) $((\sim A) \wedge B)$ implica logicamente $((\sim B) \wedge A)$

Esercizio 6.7. Dire se $A \wedge B \wedge D$ è conseguenza semantica di $(\sim B \vee C) \wedge \sim(A \wedge \sim B) \wedge (A \vee ((B \vee C) \wedge \sim C))$.

Esercizio 6.8.

1) Scrivere la tavola di verità della formula

$$(A \Rightarrow \sim B) \Rightarrow (C \Rightarrow \sim B \vee A)$$

e scrivere una formula ad essa equivalente, usando solo i connettori $\sim$, $\vee$, $\wedge$.

2) Esiste in L una deduzione di tale formula da A e B ?

Esercizio 6.9. Trovare una formula enunciativa coi connettori $\sim$, $\vee$ e $\wedge$ che abbia come funzione di verità:

A_1	A_2	A_3	$f(A_1, A_2, A_3)$
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

Dire se esiste una deduzione

$$A_1 \Rightarrow A_2 \vdash_{\mathrm{L}} \sim f(A_1, A_2, A_3)$$

e giustificare la risposta.

Esercizio 6.10. Trovare una formula $\mathcal{A}$ contenente solo i connettivi $\sim$ e $\Rightarrow$ avente la seguente tavola di verità

A_1	A_2	A_3	$f(A_1, A_2, A_3)$
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

Determinare inoltre una formula $\mathcal{B}$, non equivalente ad $\mathcal{A}$ e che non sia una tautologia, tale che in L da $\mathcal{A}$ si deduca $\mathcal{B}$.

Stabilire dai risultati precedenti se, data una qualunque formula $\mathcal{C}$ la formula ben formata $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$ è un teorema di L.

Mostrare, usando la risoluzione e tenuto conto dei risultati precedenti, che da $\mathcal{A}$ si deduce $\mathcal{B}$ e che esiste una formula $\mathcal{C}$, che non è una contraddizione, tale che l'insieme $\{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}, \sim\mathcal{C}\}$ è soddisfacibile.

Esercizio 6.11. Stabilire se da $(\sim A_1 \Rightarrow A_3) \wedge A_2$ è possibile dedurre in L la formula $\mathcal{A}$ avente la tavola di verità seguente:

A_1	A_2	A_3	$f(A_1, A_2, A_3)$
V	V	V	F
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	V

Esercizio 6.12. Dimostrare che:

1) $\vdash_{\mathrm{L}} (\sim\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}$

2) $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \vdash_{\mathrm{L}} \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$

3) $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \vdash_{\mathrm{L}} \mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$

4) $\vdash_{\mathrm{L}} \mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ (osservazione: questo spiega l'implicazione del **3)**)

5) $\vdash_{\mathrm{L}} (\sim\mathcal{B} \Rightarrow \sim\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$

6) $\vdash_{\mathrm{L}} (\sim\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\sim\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$

dove $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sono f.b.f.

Osservazione: la formula 1 è una delle varianti della dimostrazione per assurdo mentre la 5 è la dimostrazione per contrapposizione.

Esercizio 6.13. Dimostrare facendo uso del teorema di deduzione che

$$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}), \mathcal{B} \vdash_{\mathrm{L}} \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}.$$

Rifare la dimostrazione senza usare il teorema di deduzione.

Esercizio 6.14. Date le frasi:

1) Se Alberto ha ucciso Giuseppe o Berta ha visto Chiara, allora Damiano era in discoteca o Fabiano è complice

2) Se Alberto ha ucciso Giuseppe, allora Damiano non era in discoteca

3) Fabiano è complice o Alberto non ha ucciso Giuseppe

Dimostrare che dalle formule che rappresentano 1 e 2 si può in L dedurre 3.

Esercizio 6.15. Provare che dalle seguenti affermazioni:

1) se Carlo non è di Agrigento allora o Bruno è di Catania o Roberto è di Napoli;

2) se Bruno non è di Catania allora Roberto non è di Napoli;

3) se Carlo non è di Agrigento allora Bruno non è di Catania;

si deduce l'affermazione:

4) Carlo è di Agrigento.

Esercizio 6.16. Partendo dalla citazione:

> *Se l'unicorno è mitologico è immortale e magico, se l'unicorno non è magico è mortale ed è un mammifero, se l'unicorno è magico o è un mammifero ha un corno, se l'unicorno ha un corno allora è mitologico.*

Dire se si può ricavare che l'unicorno non è magico.

Esercizio 6.17. Identificare le occorrenze libere e vincolate delle variabili nelle seguenti forme enunciative:

1) $(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \Rightarrow A_2^1(x_1)) \vee A_1^1(x_2)$

2) $(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \Rightarrow A_2^1(x_1) \vee A_1^1(x_2))$

3) $(\forall x_3)\Big(\big((\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2)\big) \Rightarrow A_1^2(x_3, \mathtt{a}_1)\Big)$

4) $(\forall x_2)A_1^2(x_3, x_2) \Rightarrow (\forall x_3)A_1^2(x_3, x_2)$

5) $\Big((\forall x_2)(\exists x_1)A_1^3\big(x_1, x_2, f_1^2(x_1, x_2)\big)\Big) \vee \sim(\forall x_1)A_1^2\big(x_2, f_1^1(x_1)\big)$

Esercizio 6.18. Scrivere la forma normale premessa per le seguenti formule:

1) $(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow \sim(\forall x_3)(A_2^2(x_1, x_3) \Rightarrow (\exists x_2)A_1^2(x_2, x_3))$

2) $(\exists x)\Big(\big((\forall y)(\exists z)\mathcal{C}(x, y, z) \Rightarrow A_1^1(x)\big) \Rightarrow (\forall x)A_1^1(x)\Big)$

3) $A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow (\forall x_3)(A_1^2(f_1^2(x_1, x_3), f_1^2(x_2, x_3)))$

4) $(\exists x_1)A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_2) \Rightarrow \sim(\forall x_2)(A_1^2(x_2) \Rightarrow (\exists x_1)A_2^2(x_1, x_2))$

5) $((\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow A_1^1(x_2)) \Rightarrow \sim(\exists x_2)(\sim A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow (\exists x_3)A_2^2(x_2, x_3))$

Esercizio 6.19. Determinare le occorrenze libere e vincolate delle variabili e portare in forma normale premessa la seguenti formule:

1) $((\forall x_2)A_1^1(x_2) \Rightarrow \sim(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2)) \Rightarrow A_2^2(x_1, x_2)$

2) $\sim(\forall x_1)(A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow A_1^1(x_1)) \Rightarrow (\exists x_3)(A_1^1(x_3) \Rightarrow A_1^2(x_1, x_3))$

Esercizio 6.20. Verificare che la formula

$$(\exists x)(\forall y)A(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)A(x, y) \qquad \text{(V)}$$

è logicamente valida. È un teorema per K ?

Torvare almeno un'interpretazione in cui la formula (V) sia vera mentre la formula

$$(\forall y)(\exists x)A(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)A(x, y) \qquad \text{(F)}$$

non lo è. Nell'interpretazione data, la formula (F) è falsa ?

Esercizio 6.21. Usando la lettera predicativa A_1^2 per l'uguaglianza e le lettere funzionali f_1^2 (risp. f_2^2) per $\wedge$ (risp. $\vee$), specificare un insieme di assiomi propri atti a definire la teoria dei reticoli.

Quali delle seguenti formule sono teoremi della teoria ?

1) $A_1^2(x, f(x, x))$

2) $(\forall x)(\exists y)A_1^2(x, f_1^2(x, y))$

3) $(\exists x)(\forall y)A_1^2(x, f_1^2(x, y))$

4) $A_1^2(x, f_1^2(x, y)) \Rightarrow A_1^2(y, f_2^2(y, x))$

Mettere sotto forma di formule del primo ordine i seguenti enunciati:

5) Se un reticolo ha elemento 0, questo elemento è unico.

6) Se un reticolo ha 0 ed 1, ed un elemento del reticolo ammette complemento, questo complemento è unico.

Per ognuna delle suddette frasi, si dica se si tratta o no di un teorema, e nel caso negativo se la frase è soddisfacibile o falsa.

Esercizio 6.22.

1) Con la lettera predicativa A_1^2 interpretata come $\geqslant$, esprimere i concetti "c'è un minimo" e "non c'è un massimo."

2) Con la lettera predicativa A_1^2 interpretata come $=$, la lettera funzionale f_1^2 interpretata come il prodotto e la costante a_1 interpretata come 1, esprimere il concetto "x è primo."

Esercizio 6.23. Consideriamo la formula

$$A_1^2(x,y) \Rightarrow (\exists z)(A_1^2(x,z) \wedge A_1^2(z,y)).$$

Supponendo di considerare $\mathbb{N}$ come dominio e la lettera predicativa A_1^2 in modo tale che la formula atomica $A_1^2(x,y)$ sia $x < y$, dire se tale formula è vera, falsa o soddisfacibile nell'interpretazione considerata. Scrivere poi un'interpretazione in cui la formula è vera. Scrivere la chiusura della formula e dire se è vera o falsa nelle due interpretazioni di cui sopra.

Esercizio 6.24. Determinare le occorenze libere e vincolate delle variabili nella formula

$$((\forall x_2)A_1^1(x_2) \Rightarrow \sim(\exists x_2)A_1^2(x_1,x_2)) \Rightarrow A_2^2(x_1,x_2)$$

e dire se il termine x_2 è libero per x_1. Portare la formula in forma normale premessa.

Esercizio 6.25. Dopo aver provato che

$$\sim(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \vdash_{\mathrm{L}} (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \sim(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$$

è una tautologia, mostrare che la formula del primo ordine

$$\sim(A_1^2(x,y) \Rightarrow A_1^1(x)) \Rightarrow \big((A_1^2(x,y) \Rightarrow (\forall y)A_1^2(y,x)) \Rightarrow \sim((\forall y)A_1^2(y,x) \Rightarrow A_1^1(x))\big)$$

è logicamente valida. Portare la formula in forma normale premessa.

Esercizio 6.26. Si scriva in un linguaggio del primo ordine la seguente frase come formula chiusa:

In un insieme D con una legge di composizione interna binaria, il quadrato della composizione di due qualsiasi elementi coincide con la composizione dei loro quadrati se e solo se la legge di composizione è commutativa.

Tale formula è vera ?

Esercizio 6.27. Mostrare che

$$(\exists y)A_1^1(y) \wedge A_2^1(y) \wedge A_3^1(y)$$

implica, ma non è logicamente equivalente a

$$\big((\exists y)A_1^1(y) \wedge A_3^1(y)\big) \wedge \big((\exists y)A_2^1(y) \wedge A_3^1(y)\big)$$

Mostrare che

$$(\exists y)(A_1^1(y) \vee A_2^1(y)) \wedge A_3^1(y)$$

è logicamente equivalente a

$$\big((\exists y)A_1^1(y) \wedge A_3^1(y)\big) \vee \big((\exists y)A_2^1(y) \wedge A_3^1(y)\big)$$

Interpretazione: siano tre insiemi X, Y, Z. Il dominio è l'insieme Y. Sia ρ una relazione tra X e Y e siano σ, τ relazioni tra Y e Z, allora per un $x \in X$ e un $z \in Z$ dati, $A_1^1(y)$ significa $(x, y) \in \sigma$, $A_2^1(y, z)$ (risp. $A_3^1(y, z)$) significa $(y, z) \in \sigma$ (risp. τ). Confrontare con la dimostrazione dell'esercizio **1.5**.