Equazioni Differenziali Ordinarie		12 luglio 2006
Cognome	Nome	Firma
Proff. Arioli, Rossi, Vegni	Matricola	Sezione INF

1

SECONDA PROVA IN ITINERE

Esercizio 1. È dato il sistema autonomo

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 - y^2) \\ \dot{y} = 2y(x^2 - y^2). \end{cases}$$

a. Determinare la totalità dei punti critici.

b. Disegnare il campo delle direzioni delle soluzioni.

c. Dare la definizione di integrale primo per un sistema autonomo di due equazioni in due incognite.

d. Trovare gli integrali primi del sistema assegnato.

e. Cosa si può dire riguardo la stabilità dell'origine del sistema assegnato?

d. Disegnare il diagramma di fase di alcune soluzioni significative.

a) La totalità dei punti critici è data dalle soluzioni (x,y) del sistema:

$$\begin{cases} x(x^2-y^2)=0 \\ 2y(x^2-y^2)=0 \end{cases}$$

Il sistema si annulla in $(0,0)$ e nei punti che annullano $(x^2-y^2)=(x+y)(x-y)$ cioè $x+y=0$; $x-y=0$

La totalità dei punti critici è dunque costituita dai due luoghi di punti $y=x$ e $y=-x$ (tutti i punti delle bisettrici del 1° e 3° quadrante e 2° e 4° q.)

b) Per il campo di direzioni si veda il grafico allegato: $x=0$ è il luogo dei punti a tangente verticale, $y=0$ quello dei punti a tangente orizzontale. Risulta cruciale il segno del fattore (x^2-y^2).

d) gli integrali primi sono soluzioni dell'eq. differ.

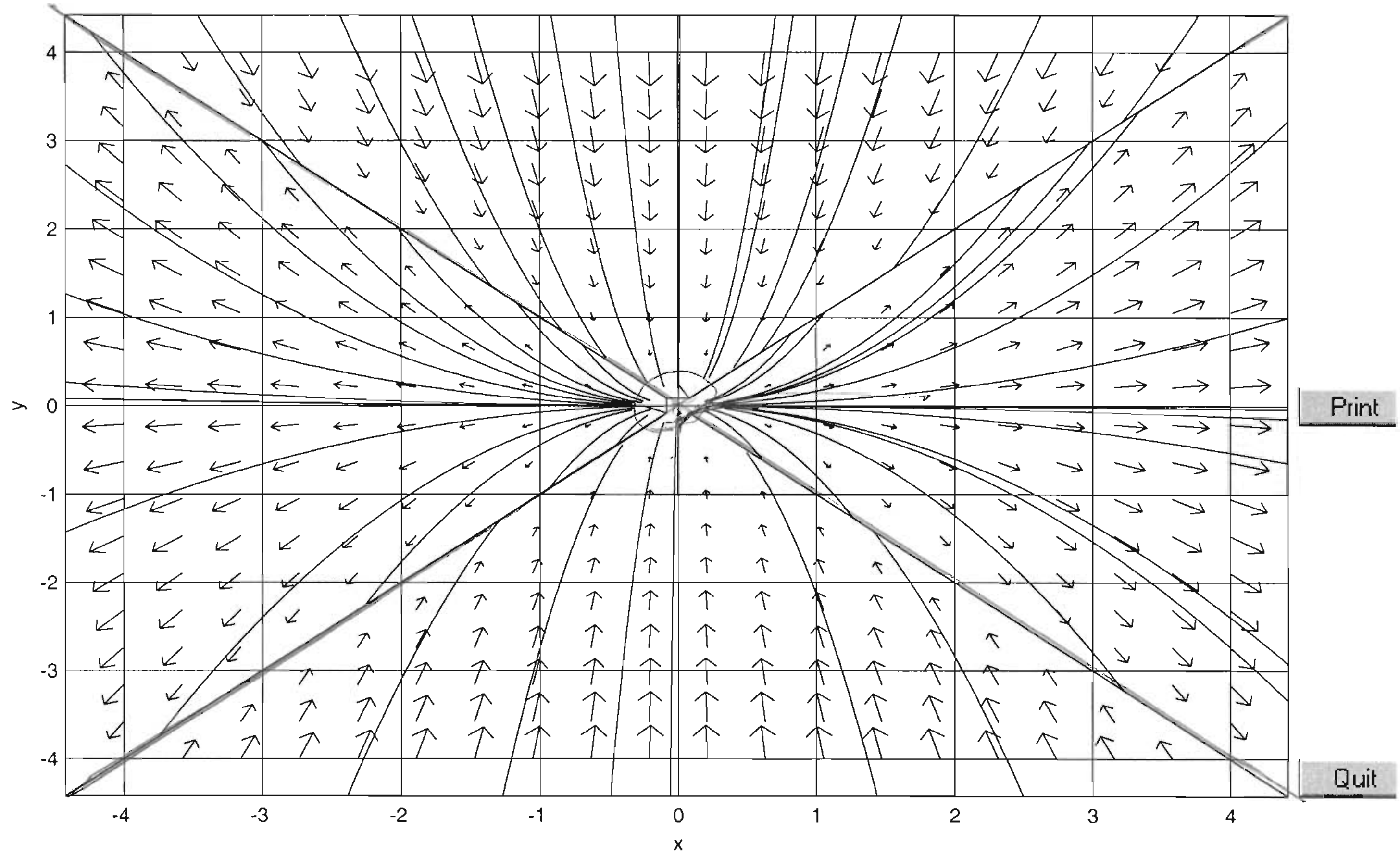
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}\,; \quad \frac{dy}{y}=2\frac{dx}{x}\,; \quad \log y = 2\log x + \log C\,; \quad y=Cx^2.$$

La famiglia di parabole al variare di C ($C>0$ e $C<0$) rappresenta le linee sulle quali giacciono una o più traiettorie.

c) vedi Testo

Nel piano delle fasi sono evidenti i due luoghi di punti critici, $y=x$ e $y=-x$. Le due rette intersecano la famiglia di parabole, così che su ciascuna di esse si trovano più traiettorie: le tre costanti costituite da $(0,0)$, $\left(\frac{1}{c}, \frac{1}{c}\right)$ e $\left(-\frac{1}{c}, +\frac{1}{c}\right)$ e altre quattro rappresentate dai quattro "segmenti" di parabole individuati dai tre punti precedenti.
Due traiettorie sono limitate, altre due illimitate e percorse coerentemente al campo di direzione.
L'origine è instabile; agli altri punti delle due bisettrici due traiettorie si avvicinano asintoticamente.

$x' = x(x^2 - y^2)$
$y' = 2y(x^2 - y^2)$



The backward orbit from (0.33, -0.18) --> a possible eq. pt. near (0.19, -0.058).
Ready.
The forward orbit from (-0.36, -0.29) --> a possible eq. pt. near (-0.45, -0.45).
The backward orbit from (-0.36, -0.29) --> a possible eq. pt. near (-0.22, -0.11).
Ready.

$$\begin{cases} y = cx^2 \\ y = x \end{cases}$$

$c \neq 0$

$cx^2 = x$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{c} \\ y = \frac{1}{c} \end{cases}$$

Equazioni Differenziali Ordinarie		12 luglio 2006
Cognome	Nome	Firma
Proff. Arioli, Rossi, Vegni	Matricola	Sezione INF

Esercizio 2. È data l'equazione alle differenze ad un passo

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 4}{x_n + 3} = \frac{(x_n+3)+1}{x_n+3} = 1 + \frac{1}{x_n+3}$$

a. Determinare le condizioni iniziali che determinano soluzioni stazionarie.

b. Studiare la stabilità della soluzione del problema di Cauchy

$$(*)\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n + 4}{x_n + 3} \\ x_0 = \alpha \end{cases}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

c. Visualizzare il comportamento qualitativo della soluzione del problema di Cauchy con $\alpha = -5$ con un diagramma a gradino.

a) ricerca dei punti fissi $x = \frac{x+4}{x+3}$ $\boxed{x \neq -3}$

$x^2 + 3x - x - 4 = 0$ $\quad x^2 + 2x - 4 = 0$ $\quad x = -1 \pm \sqrt{5}$

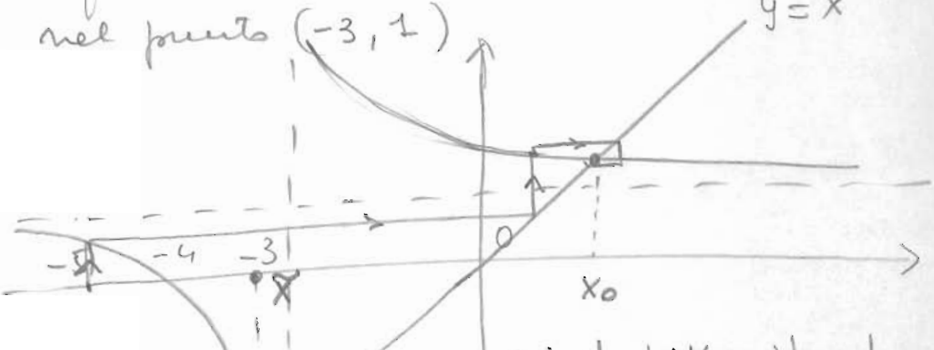
$x_0 = -1 + \sqrt{5}$ e $\bar{x} = -1 - \sqrt{2}$ rappresentano i due dati iniziali che determinano le soluzioni costanti

b) per analizzare meglio la stabilità del Prob. di Cauchy (*) conviene scrivere la successione nella forma

$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n+3}$; $f(x) = 1 + \frac{1}{x+3}$ rappresenta un'iperbole equilatera ottenuta traslando l'origine nel punto $(-3, 1)$

$f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}$

$|f'(x)| = \frac{1}{(x+3)^2}$



$|f'(-1-\sqrt{5})| = \frac{1}{(-\sqrt{5}+3)^2} =$

$= \frac{1}{9+5-6\sqrt{5}} = \frac{1}{14-6\sqrt{5}}$

$|f'(x_0)| = |f'(\sqrt{5}-1)| = \frac{1}{(\sqrt{5}+2)^2} =$

$= \frac{1}{9+4\sqrt{5}} < 1$ segue che x_0 è stabile

$14 - 6\sqrt{5} \lesseqgtr 1$

$13 < 6\sqrt{5}$ $\quad 169 < 36 \times 5 = 180$

si dunque $|f'(\bar{x})| > 1$ per $\bar{x}$ è soluz. instabile