ALGEBRA E LOGICA MATEMATICA

20 FEBBRAIO 2008

I PARTE

1) Si consideri l'applicazione $f: Q^+ \to Q$ (dove Q^+ indica l'insieme dei numeri razionali non negativi) definita da $f(n / m) = (n-m) / (n+m)$
   a) Mostrare che f e' ben definita, cioè che frazioni equivalenti hanno la stessa immagine.
   b) Stabilire se f e' iniettiva, suriettiva, biiettiva.
   c) Stabilire se f ammette inversa destra, sinistra, bilatera e in caso affermativo determinarle.
   d) Qualora $f : Q^+ \to Q$ non fosse biiettiva, stabilire se e' possibile considerare un sottoinsieme A di Q in modo che $f: Q^+ \to A$ sia biiettiva.

2) Sia H l'insieme dei numeri complessi a coefficienti interi

$$H = \{ a+ib \mid a,b \in Z\}$$

e siano

$$K = \{ a+2bi \mid a,b \in Z\}$$
$$J = \{ 2a+2bi \mid a,b \in Z\}$$

due suoi sottoinsiemi.

Si mostri che:

a) H è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di numeri complessi ;
b) K è un sottoanello di H ma non un suo ideale;
c) J è un ideale di H.

Considerata ora l'applicazione

$$f: H \to Z_2$$
$$f: a+ib \to [a+b]_2$$

si verifichi se f è un omomorfismo dell' anello H nell'anello Z_2 e, in caso affermativo, se J è il nucleo Ker f (ovvero la Ker f classe dello 0 di H).

Giustificare ogni risposta.

II PARTE

1) Si considerino i seguenti enunciati:

$\mathcal{A}$: Se Anna è bionda o Beatrice è castana, allora Carla è mora.

$\mathcal{B}$: Se Anna è bionda, allora Carla non è mora.

$\mathcal{C}$: Carla è mora o Anna non è bionda.

Mostrare per via semantica che $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \mathcal{C}$. Provare lo stesso risultato utilizzando la risoluzione.
Scrivere una formula f(A,B,C) che non sia contraddittoria e tale che $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ sia conseguenza semantica di f(A,B,C).

2) Si consideri la formula ben formata

$(\forall x)\,(\forall y)(\, \mathcal{A}_1^2(x,y) \vee \mathcal{A}_1^2(y,x)) \Rightarrow (\exists z)\,(\mathcal{A}_1^2(x,z) \wedge \mathcal{A}_1^2(z,y))$.

Si consideri l'interpretazione il cui dominio D è Z e $\mathcal{A}_1^2(x,y)$ è $x<y$.
In tale interpretazione la formula è vera, soddisfacibile (ma non vera) o falsa?
Rispondere alla medesima domanda nel caso in cui D=Q e $\mathcal{A}_1^2(x,y)$ è $x \leq y$ e in quello in cui D=N e $\mathcal{A}_1^2(x,y)$ è x|y (x divide esattamente y).

Portare la formula data in forma normale prenessa.
Si consideri la chiusura universale della formula in forma normale prenessa: è una formula valida?

Giustificare ogni risposta.

LABORATORIO

Utilizzando un opportuno linguaggio del primo ordine si scrivano gli assiomi di monoide e si traduca la seguente frase con una formula chiusa:
"Se un elemento è invertibile a sinistra, allora è cancellabile a sinistra".
(Si ricordi che un elemento x si dice cancellabile a sinistra se ogni volta che vale l'uguaglianza xy=xz, allora si ha y=z.)

Si scriva nella sintassi di SPASS un programma che permetta di verificare se l'enunciato proposto è valido nella teoria dei monoidi.

TRACCIA DI SOLUZIONE

I PARTE

Es.1

Siano n/m , r/s due frazioni equivalenti, il che equivale a dire che ns=rm. Si ha f(n/m)= (n-m)/(n+m) e f(r/s)=(r-s)/(r+s), ed essendo (n-m)(r+s)=nr-mr+ns-ms e (r-s)(n+m) =rn-sn+rm-sm dall'ipotesi ns=rm si ottiene subito che (n-m)(r+s)= (r-s)(n+m) ovvero f(n/m) ed f(r/s) sono frazioni equivalenti (cioè rappresentano lo stesso numero razionale).
La funzione f è iniettiva, infatti supponiamo che esistano due razionali non negativi p/q ed h/k tali che f(p/q)=(p-q)/(p+q)=f(h/k)=(h-k)/(h+k), questo implica (p-q)(h+k)=(h-k)(p+q) ovvero ph-qh+pk-qk=hp-kp+hq-kq, da cui 2pk=2qh che tenuto conto che q ed h sono diversi da 0 porta a p/q=h/k.
La funzione non è suriettiva in quanto essendo $m\neq 0$ si ha $n-m\neq n+m$ e quindi 1 non ha controimmagini. La f quindi non è neppure biunivoca.
Essendo f iniettiva ammette inversa destra.
Per calcolare l'inversa destra di f osserviamo che per ogni $q=r/s \in Q$ tale che $-1<q<1$ esistono due interi n,m tali che (n-m)/(n+m)=q ed $n/m\in Q^+$, infatti si ottiene (n-m)s=(n+m)r da cui (s-r)n = (r+r)m, cioè n=s+r e m=s-r se supponiamo r,s entrambi non negativi (i limiti su Q dicono che s>r), n=-(s+r) e m=r-s se invece q è negativo (infatti possiamo assumere r negativo ed s positivo e quindi i limiti su Q danno |r|>s, quindi in ogni caso n/m=(s+r)/(s-r)).
Non c'è invece alcuna coppia di interi n,m tali che (n-m)/(n+m)=q ed $n/m\in Q^+$, se $q<-1$ o $q>1$.
Pertanto una inversa destra di f è la funzione g così definita: sia q=r/s

- se -1q<1, g(q)=(s+r)/(s-r)
- se q<-1 o q>1, g(q)=1.

L'insieme A tale che f: $Q^+ \rightarrow A$ sia biunivoca è, da quanto visto sopra, formato dai razionali compresi fra -1 ed 1.

Es.2

Poiché l'insieme C dei numeri complessi forma campo (e quindi anello) rispetto alle usuali somma e prodotto di numeri complessi, basta vedere se H è un sottoanello di C e quindi per il criterio di sottoanelli bisogna verificare se, presi comunque h_1 ed h_2 in H, $h_1- h_2$ ed h_1h_2 stanno in H. Siano allora $h_1= a_1+ib_1$ e $h_2= a_2+ib_2$ con $a_1, b_1, a_2, b_2\in Z$ risulta $h_1- h_2 =(a_1- a_2)+i(b_1- b_2)$ e $h_1h_2 =(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+ a_2b_1)$ dove $a_1- a_2$, $b_1- b_2$, $a_1a_2- b_1b_2$, $a_1b_2+ a_2b_1$ stanno in Z, quindi $h_1- h_2$ ed h_1h_2 stanno in H.
Verifichiamo che K = { a+2bi | a,b ∈ Z} è sottoanello di H, siano $k_1= a_1+2ib_1$ e $k_2= a_2+2ib_2$ con a_1, b_1, a_2, $b_2\in Z$, risulta $k_1- k_2 =(a_1- a_2)+2i(b_1- b_2)$ e $k_1k_2 =(a_1a_2- 4b_1b_2)+2i(a_1b_2+ a_2b_1)$ dunque $k_1- k_2$ e k_1k_2 stanno in K che è sottoanello di H, ma non è ideale infatti preso h=a+ib, con b dispari si ha $hk_1 =(a_1a- 2b_1b)+i(a_1b+ 2ab_1)$ dove $a_1b+ 2ab_1$ non è un multiplo di 2 dunque hk_1 non sta in K.
J = { 2a+2bi | a,b ∈ Z} è invece un ideale, infatti siano $j_1= 2a_1+2ib_1$ e $j_2= 2a_2+2ib_2$ con a_1, b_1, a_2, $b_2\in Z$, risulta $j_1- j_2 =2(a_1- a_2)+2i(b_1- b_2)\in J$ e $hj_1 =2(aa_1- bb_1)+2i(ab_1+ a_1b)\in J$.
L'applicazione f: $H\rightarrow Z_2$ definita da f(a+ib)= $[a+b]_2$ è un omomorfismo, infatti f((a+ib)+(c+id))= f((a+c)+i(b+d)) = $[(a+c)+(b+d)]_2 = [a+b]_2+[c+d]_2$ =f(a+ib)+nella ker f classe dello 0, infatti per ogni $j=2a+2ib\in J$ si ha f(j)= $[2a+2b]_2=[0]_2$=f(0), tuttavia non coincide con la ker f classe dello 0 infatti f(1+i)= $[1+1]_2=[0]_2$. e dunque anche 1+i appartiene alla ker f classe dello 0.

II PARTE

Es. 1

Denotiamo le formule enunciative Anna è bionda, Beatrice è castana, Carla è mora con le lettere enunciative A,B,C rispettivamente. La frase $\mathcal{A}$ è allora $(A\vee B)\Rightarrow C$, la $\mathcal{B}$ è $A\Rightarrow \sim C$ e la $\mathcal{C}$ è $C\vee \sim A$. Bisogna quindi mostrare che $\{(A\vee B)\Rightarrow C,\ A\Rightarrow\sim C\} \models C\vee\sim A$, ovvero per il teorema di deduzione semantica che $((A\vee B)\Rightarrow C) \Rightarrow((A\Rightarrow\sim C) \Rightarrow(C\vee\sim A))$ è una tautologia (tramite la tavola di verità), oppure direttamente che ogni modello di $\{(A\vee B)\Rightarrow C,\ A\Rightarrow\sim C\}$ è anche modello di $C\vee\sim A$: supponiamo $v(C\vee\sim A)=0$, cioè $v(C)=0$ e $v(A)=1$, questo implica $v(A\vee B)=1$ e $v((A\vee B)\Rightarrow C)=0$ quindi ogni assegnamento che non è modello per $C\vee\sim A$ non è modello per $\{(A\vee B)\Rightarrow C,\ A\Rightarrow\sim C\}$.
Usando la risoluzione, che è corretta e completa per refutazione dobbiamo provare che dalle clausole corrispondenti alle formule $\mathcal{A},\mathcal{B}, \sim\mathcal{C}$ si ricava la clausola vuota, la forma a clausole di $\mathcal{A}$ è costituita dall'insieme dalle due clausole $\{\sim A, C\}, \{\sim B, C\}$, quella di $\mathcal{B}$ è $\{\sim A,\sim C\}$, mentre $\sim\mathcal{C}$ è formata dall'insieme delle due clausole $\{A\},\{\sim C\}$. Ora per risoluzione da $\{\sim A,\sim C\}$ e $\{\sim A, C\}$, si ricava $\{\sim A\}$ che con la clausola $\{A\}$ produce la clausola vuota.
Un modello di $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ è ad esempio $v(A)=v(B)=v(C)=0$, pertanto la fbf $\sim A\wedge\sim B\wedge\sim C$ (che ha v come unico modello) è una formula non contraddittoria da cui su deduce semanticamente $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$.

Es.2

Nella prima interpretazione la fbf
$(\forall x)\ (\forall y)(\mathcal{A}_1^2(x,y) \vee \mathcal{A}_1^2(y,x))\Rightarrow (\exists z)\ (\mathcal{A}_1^2(x,z) \wedge \mathcal{A}_1^2(z,y))$
si legge come
Se per ogni coppia x,y di interi si ha $x<y$ o $y<x$, allora esiste un intero z tale che $x<z$ e $z<y$.
Questa formula è ovviamente vera perché l'antecedente è falso in quanto posso dare ad x ed y lo stesso valore.
Nella seconda interpretazione la fbf si legge come
Se per ogni coppia x,y di numeri razionali si ha $x\leq y$ o $y\leq x$, allora esiste un numero razionale z tale che $x\leq z$ e $z\leq y$.
L'antecedente di questa formula è vero, consideriamo allora il conseguente. Se assegniamo ad x ed y (che nel conseguente sono variabili libere) due valori tali che $x\leq y$ allora z esiste e quindi la formula è soddisfacibile dall'assegnamento considerato, se invece ad x ed y assegniamo due valori tali che $y\leq x$, non possiamo dare a z un valore per cui $x\leq z$ e $z\leq y$. Dunque la formula non è vera.
Nella terza interpretazione la fbf si legge come
Se per ogni coppia x,y di numeri naturali x divide y o y divide x, allora esiste un numero naturale z tale che x divide z e z divide y.
Ancora la formula è vera in quanto l'antecedente è falso.
La forma normale prenessa della formula data è
$(\exists u)\ (\exists v)\ (\exists z)\ ((\mathcal{A}_1^2(u,v) \vee \mathcal{A}_1^2(v,u))\Rightarrow (\mathcal{A}_1^2(x,z) \wedge \mathcal{A}_1^2(z,y)))$, la sua chiusura universale diventa $(\forall x)\ (\forall y)\ (\exists u)\ (\exists v)\ (\exists z)\ ((\mathcal{A}_1^2(u,v) \vee \mathcal{A}_1^2(v,u))\Rightarrow (\mathcal{A}_1^2(x,z) \wedge \mathcal{A}_1^2(z,y)))$ e non è una formula valida perché nella seconda interpretazione risulta essere falsa (in quanto chiusura universale di una formula soddisfacibile ma non vera).

LABORATORIO

Usiamo una teoria del I ordine con identità. Abbiamo quindi un predicato binario $\mathcal{A}_1^2$ da interpretare come uguaglianza e per il quale valgono quindi gli assiomi A6 ed A7 delle teorie del I ordine con identità. Abbiamo poi una lettera funzionale f_1^2 che interpreta il prodotto nel monoide ed una costante a che interpreta l'elemento neutro

Dobbiamo scrivere che il prodotto è associativo :

$(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ \mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_1^2(y,z)), f_1^2(f_1^2(x,y),z))$

e che esiste l'elemento neutro

$(\forall x)\ (\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, a),x) \wedge \mathcal{A}_1^2(f_1^2(a, x),x))$.

Scriviamo ora una formula chiusa che traduca la frase

"Se un elemento è invertibile a sinistra, allora è cancellabile a sinistra".

$(\forall x)((\exists y)\ \mathcal{A}_1^2(f_1^2(y, x),a) \Rightarrow (\forall z)\ (\forall v)(\ \mathcal{A}_1^2(f_1^2(z, x), f_1^2(v, x)) \Rightarrow \mathcal{A}_1^2(z,v)))$.

La traduzione in SPASS è facilmente eseguibile.