Politecnico di Milano — Anno accademico 2005–2006
Secondo anno di Laurea — Foglio 2

Algebra e Logica Matematica

Funzioni

Esercizio 2.1. Siano $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$ due insiemi e sia ρ la relazione tra A e B definita da:

$$\rho = \{(1, c); (2, b); (3, d); (4, c); (5, a)\}.$$

Dire se ρ è un'applicazione da A a B. Dire se ρ^{-1} è un'applicazione da B a A. In caso di risposta affermativa, precisare se l'applicazione è iniettiva e/o suriettiva.

Esercizio 2.2. Per ogni funzione proposta dire se è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

1) $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} f_a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a^x \end{aligned}$ con $a \in \mathbb{R}^+$.

5) $\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ z &\longmapsto z^2 \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ z &\longmapsto nz \end{aligned}$ con $n \in \mathbb{N}$.

7) $\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{P} \\ z &\longmapsto 2z \end{aligned}$ (numeri interi pari)

8) $\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto x + 1 \end{aligned}$

9) Sia $S = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / b > 0\}$.
$\begin{aligned} f : \quad S &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\longmapsto a^b \end{aligned}$

10) $\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\longmapsto 10a + 6b \end{aligned}$

Esercizio 2.3. Siano $X = \{a, b, c, d\}$ e $Y = \{1, 2, 3\}$ due insiemi.

1) Quante sono le applicazioni da X in Y ? Tra queste, quante sono suriettive ? Quante iniettive ? Quante biiettive ?

2) Sia f l'applicazione da X in Y definita da:

$$\begin{aligned} &f(a) = f(b) = 1 \\ &f(c) = 3 \\ &f(d) = 2 \end{aligned}$$

Determinare tutte le inverse sinistre di f.

3) Esitono inverse destre dell'applicazione f definita in 2) ? Giustificare la risposta.

Esercizio 2.4. Sia f l'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ definita da $f(n) = n + 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

1) f ha un'inversa sinistra ?

2) f ha un'inversa destra ?

3) Si provi che f ha infinite inverse destre distinte.

Esercizio 2.5. Siano A e B due insiemi e $f : A \longrightarrow B$ un'applicazione. Dimostrare che

1) $\forall X, Y \subseteq A$, $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

2) $\forall X, Y \subseteq A$, $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.

3) f è iniettiva se e solo se $\forall X, Y \subseteq A$, $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Esercizio 2.6. Siano $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ due insiemi. Sia R la relazione tra X e Y avente la seguente matrice d'incidenza:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dimostrare che la relazione R^{-1} inversa di R è un'applicazione da Y ad X. Tale applicazione ammette un'applicazione inversa destra o sinistra ? In caso di risposta affermativa, costruire almeno un esempio e dire in quanti altri modi è possibile costruirla.

Costruire la relazione di equivalenza su Y generata da $R^{-1}R$ e dare le classi di equivalenza.

Esercizio 2.7. (Tema d'esame) Sia $X = \{a, b, c, d\}$ ed R la relazione su X rappresentata dal grafo:

$$a \longrightarrow b$$

$$c \longleftarrow d$$

1) Dimostrare che ogni relazione su X che sia una funzione da X in X con inversa destra e che contenga R è una funzione biunivoca.

2) L'insieme S formato dalla funzione identica su X e dalle funzione biunivoche su X che contengono R è un sottogruppo del gruppo delle sostituzioni su X ?

Esercizio 2.8. (Tema d'esame) La relazione sull'insieme dei reali $\mathbb{R}$ definita da $x \ \rho \ y$ se e solo se $y = 3x^2 + 1$ è una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$? Se sì, è una funzione suriettiva ? È iniettiva ? La relazione data, se pensata sull'insieme dei numeri naturali è una funzione ? È suriettiva ? È iniettiva ?

Esercizio 2.9. (Tema d'esame) Sia $X = \{a, b, c, d, e\}$ e sia R la relazione definita dalla seguente matrice d'incidenza:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Si dica di quali proprietà gode la relazione R e si costruisca la chiusura riflessiva e transitiva ρ di R. Si dica se ρ è una relazione di ordine. In caso di risposta affermativa, si dica se X rispetto a ρ è un reticolo.

2) È possibile trovare una funzione da X in X contenente R e che ammetta funzione inversa ? Può esistere una funzione da X a X che ammetta inversa destra ma non inversa sinistra ? Giustificare le risposte.

Esercizio 2.10. (Tema d'esame) Data la funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definita da:

$$f(n) = \begin{cases} n^2 + 3 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 2n + 4 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

discutere l'esistenza di possibili inverse. Nel caso in cui un'inversa esiste, esibirne un esempio.