ESERCIZI

1) Si considerino l'insieme A* delle parole sull'alfabeto A={a,b} e la relazione binaria ρ su A* definita ponendo $(u,v)\in\rho$ se e solo se $|u|\leq|v|$ e $\#_a u=\#_a v$, dove per ogni $x\in A^*$ $|x|$ indica la lunghezza della parola x e $\#_a x$ indica il numero di occorrenze di a in x. Si indichino le proprietà di cui gode ρ e si descrivano la chiusura simmetrica ρ^s e la chiusura transitiva ρ^t di ρ. Per ciascuna di esse si dica se si tratta di una relazione di equivalenza su A*.

2) Dimostrare che un gruppo G è abeliano se e solo se per ogni $a,b\in G$ si ha $(ab)^2=a^2b^2$.

3) Dimostrare che un gruppo G è abeliano se e solo se per ogni $a,b\in G$ si ha $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$.

4) Sia G un gruppo formato dai quattro elementi {a,b,c,d}. Sapendo che ab=c , ac=d e che a non è l'elemento neutro di G calcolare a^2.

5) Sia $<G,\cdot>$ un gruppo con elemento neutro e, tale che, per ogni $x\in G$ con $x\neq e$, non esista alcun intero positivo n tale che $x^n=e$.
Provare che:
   - Se $x^h=e$ per qualche intero negativo h allora x=e
   - Se esistono n,m interi relativi diversi fra loro tali che $x^n= x^m$ allora x=e
   - La relazione binaria R su G definita ponendo $(x,y)\in R$ se e solo se esiste un intero positivo n tale che $x=y^n$ è una relazione d'ordine su G.

   Dire se il gruppo $<Z,+>$ è un insieme totalmente ordinato e se è un reticolo rispetto alla suddetta relazione R.
   Verificare inoltre che se G è abeliano e per qualche intero relativo n diverso da 0 si ha $x^n= y^n$ allora x=y.