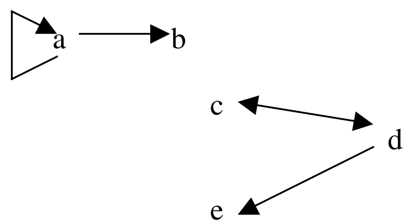
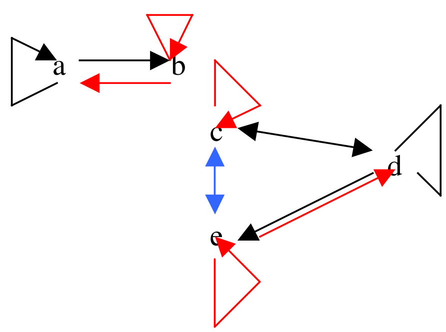
Esercizio 1)
Siano $X=\{a,b,c,d,e\}$ ed $R \subseteq X \times X$ la relazione rappresentata dal seguente grafo di incidenza



a) Di che proprietà gode R?
b) Costruire la relazione di equivalenza ρ generata da R.
c) Determinare l'insieme quoziente X/ ρ.

Traccia di soluzione
R non gode di alcuna delle proprietà che abbiamo considerato a lezione: non è seriale in quanto non esiste alcuna coppia la cui prima componente sia b appartenente ad R, non è simmetrica in quanto ad esempio $(a,b) \in B$, ma $(b,a) \notin R$, non è antisimmetrica in quanto (c,d) e (d,c) appartengono entrambe ad R e $c \neq d$, non è transitive in quanto ad esempio $(c,d), (d,c) \in R$ e $(c,c) \notin R$.
Per trovare ρ bisogna calcolare la chiusura transitiva della chiusura riflessiva e simmetrica di R , si vede facilmente che il grafo di incidenza di ρ è



dove i nuovi archi rossi vengono dalle chiusure riflessive e simmetriche quelli azzurri dalla chiusura transitiva.
L'insieme X/ρ ha come elementi le classi di equivalenza di X, la ρ−classe di a, ρ_a, è {a,b} e quindi coincide con ρ_b, la ρ−classe di c, ρ_c, è {c,d,e} e quindi coincide con ρ_c e ρ_d.
Dunque $X/\rho=\{\rho_a, \rho_c\}$.

Esercizio

Sia R[x] l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x e sia $R \subseteq R[x] \times R[x]$ la relazione definita nel seguente modo:

$\forall f,g \in R[x]$ $(f,g) \in R$ se e solo se $\exists b \in R$ tale che $f(b)=g(b)=0$

a) Di che proprietà gode R
b) Sia ρ la chiusura di equivalenza di R. Dimostrare che due polinomi che ammettono una radice reale sono sempre associati rispetto a ρ.

Traccia di soluzione

R non è seriale e quindi neppure riflessiva perché ad esempio il polinomio x^2+1 non avendo radici reali non è associato ad alcun polinomio. R è ovviamente simmetrica. R non è antisimmetrica perché ad esempio $(x^2+x, x^2-1), (x^2-1, x^2+x) \in R$ e $x^2-1 \neq x^2+x$. R non è transitiva in quanto ad esempio $(x^2-1, x^2+x) \in R$, $(x^2+x, x) \in R$, ma $(x^2-1, x) \notin R$.

Siano ora f e g due polinomi che ammettono una radice reale e sia a una radice reale di f e b una radice reale di g il polinomi $(x-a)(x-b)= x^2-(a+b)x+ab$ è tale che $(f, x^2-(a+b)x+ab) \in R \subseteq \rho$, $(x^2-(a+b)x+ab, g) \in R \subseteq \rho$, quindi per la transitività di ρ, $(f,g) \in \rho$.