Politecnico di Milano
Appunti delle lezioni del corso di Statistica (2L) per gli allievi INF e TEL, AA 2007/2008*

Intervalli di confidenza†

Ilenia Epifani

5 maggio 2010

Prima versione AA 2003/2004; Seconda versione AA 2004/2005; Terza versione AA 2006/2007; Edizione riveduta e corretta AA 2007/2008

†Gli sperabili miglioramenti nella corrente edizione derivano da quelli sicuramente apportati dal Prof. Barchielli e dalla Dott.ssa Salvati alla versione inglese

Indice

1 Intervalli di confidenza per media e varianza di popolazione gaussiana

In questa sezione affrontiamo il problema della stima intervallare dei parametri media e varianza della popolazione gaussiana. Nella Sezione 2 definiremo gli intervalli di confidenza in generale per i parametri incogniti di un modello statistico qualunque.

Nel seguito useremo le seguenti notazioni per i quantili delle distribuzioni campionarie: z_a indicherà il quantile di ordine $a \in (0,1)$ della f.d.r. gaussiana standard Φ, cioè $z_a = \Phi^{-1}(a)$; $t_n(a)$ sarà il quantile di ordine a della f.d.r. t di Student con n gradi di libertà; infine $\chi^2_n(a)$ sarà il quantile di ordine a della f.d.r. chiquadrato con n gradi di libertà.

1.1 Intervalli di confidenza per la media

Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione casuale estratto dalla popolazione di densità gaussiana di parametri μ, σ^2 ($X_1, \dots, X_n$ *i.i.d.* $\sim N(\mu, \sigma^2)$). Supponiamo che la deviazione standard σ sia nota e pari a 0.8. Abbiamo proposto (e motivato) nelle lezioni passate l'uso della media campionaria $\bar{X}$ come stimatore di μ. $\bar{X}$ è uno *stimatore puntuale* di μ. Ma la nozione di stima puntuale non è completamente soddisfacente per il seguente motivo: qualunque sia il valore di μ, $\bar{X}$ è variabile aleatoria assolutamente continua e quindi

$$P_{\mu,\sigma^2}(\bar{X} = c) = 0, \qquad \forall c \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0$$

In particolare è nulla la probabilità che $\bar{X}$ assuma il vero valore (incognito) di μ. Ma, possiamo fornire in termini probabilistici una "misura" dell'errore che si commette sostituendo al valore del parametro μ il valore assunto dallo stimatore $\bar{X}$ per data realizzazione campionaria.

Sia $\epsilon > 0$ tale che

$$P_{\mu,\sigma^2}\left(-\epsilon < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \epsilon\right) = 0.95 \tag{1}$$

Assegnati n e σ, ϵ è univocamente determinato dall'equazione $2\Phi(\epsilon) - 1 = 0.95$ e quindi

$$2\Phi(\epsilon) - 1 = 0.95 \textbf{ sse } \Phi(\epsilon) = \frac{1 + 0.95}{2} \textbf{ sse } \epsilon = \Phi^{-1}\left(\frac{1 + 0.95}{2}\right) = z_{0.975} \simeq 1.96$$

A priori, cioè prima di osservare il risultato dell'esperimento, e quindi, **indipendentemente dalla realizzazione campionaria**, siamo "abbastanza fiduciosi" che l'errore che commettiamo stimando μ con $\bar{X}$ è al più pari a $1.96\sigma/\sqrt{n}$. Se, per esempio, la dimensione del campione è 4, questo errore è $1.96 \times 0.8/\sqrt{4} = 0.784$. Il grado di fiducia nel verificarsi di ciò è misurato in termini di probabilità ed è pari a 95%. La relazione (1) può essere riscritta come segue:

$$P_{\mu,\sigma^2}(T_1 < \mu < T_2) = 0.95$$

dove

$$T_1 = \bar{X} - z_{(1+0.95)/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{e} \quad T_2 = \bar{X} + z_{(1+0.95)/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

In altri termini, *a priori*, c'è una possibilità pari a 95% che il valore incognito (ma deterministico) di μ cada nell'**intervallo aleatorio** (T_1, T_2). **Gli estremi T_1, T_2 sono statistiche**

che dipendono *a*) dal campione $X_1, \dots, X_n$, *b*) da informazioni note sulla f.d.r. del campione (cioè σ) e *c*) dal grado di fiducia (o *livello o coefficiente di confidenza*) 95%. Ovviamente, essenzialmente, $T_1 < T_2$.

Se poi implementiamo l'esperimento e osserviamo la realizzazione campionaria

$$x_1 = 4.87,\ x_2 = 5.06,\ x_3 = 2.8,\ x_4 = 5.32$$

allora $\bar{x} = 4.5125$, $t_1 = 4.5125 - 0.784 = 3.7285$ e $t_2 = 4.5125 + 0.784 = 5.2965$. L'intervallo aperto $(t_1, t_2) = (3.7285, 5.2965)$ è detto *intervallo di confidenza per il parametro* μ *di livello* 0.95.

Il significato del livello di confidenza è il seguente: se ripetiamo l'estrazione di un campione di dimensione 4 dalla popolazione gaussiana un numero grande di volte e calcoliamo per ognuno dei campioni l'intervallo $(\bar{x} - 0.784, \bar{x} + 0.784)$, ci aspettiamo che più o meno il 95% di questi intervalli contenga il valore della "vera" media μ.

Il termine inglese "confidence" (che abbiamo tradotto come fiducia) è usato dopo che l'esperimento è stato effettuato, riservando la parola "chance" (possibilità) all'intervallo aleatorio prima di osservare l'esperimento campionario. Infatti quando la realizzazione campionaria è a nostra disposizione non ha più senso parlare di possibilità o probabilità: a quel punto, il vero valore della media o cade o non cade nell'intervallo numerico trovato e la probabilità connessa a questo evento sarà zero o uno.

In generale abbiamo la seguente definizione.

Definizione 1.1 Sia $x_1, \dots, x_n$ una realizzazione del campione casuale $X_1, \dots, X_n$ dalla popolazione $N(\mu, \sigma^2)$. Fissato $\gamma \in (0, 1)$, se la varianza σ^2 è nota, un *intervallo di confidenza per la media* μ *di livello* $\gamma 100\%$ è dato da

$$\boxed{\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

Supponiamo ora che anche la varianza σ^2 sia incognita. Per valutare *a priori* l'errore che commettiamo approssimando μ con $\bar{X}$ consideriamo $P_{\mu,\sigma^2}(-\epsilon < \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S < \epsilon)$, dove $S = \sqrt{S^2}$ e S^2 è la varianza campionaria e calcoliamo ϵ tale che

$$\boxed{P_{\mu,\sigma^2}\left(-\epsilon < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < \epsilon\right) = 0.95} \tag{2}$$

Usando il fatto che $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S \sim t_{n-1}$ e che t_{n-1} è una densità di probabilità simmetrica (intorno allo 0), analogamente al caso di varianza nota, otteniamo che ϵ coincide con il quantile di ordine $(1 + 0.95)/2$ della f.d.r. t di student con $n - 1$ gradi di libertà, cioè $\epsilon = t_{n-1}\left((1 + 0.95)/2\right)$.

Supponendo di avere ancora un campione di dimensione 4: $\epsilon = t_3(0.975) \simeq 3.182$ e la relazione (2) può essere riscritta come

$$P_{\mu,\sigma^2}\left(\bar{X} - 3.182\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 3.182\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

Nell'ultima equazione leggiamo che, prima di osservare le realizzazioni campionarie, è pari a 0.95 la probabilità che l'intervallo aleatorio di estremi $\bar{X} \mp 3.182 S/\sqrt{n}$ contenga μ. Se poi abbiamo osservato il campione

$$x_1 = 4.87,\ x_2 = 5.06,\ x_3 = 2.8,\ x_4 = 5.32$$

allora $\sum_{j=1}^n x_j^2/(n-1) \simeq 28.4876$, $s^2 = 28.4876 - 4/3(4.5125)^2 \simeq 1.337$ e $s = \sqrt{1.337} \simeq 1.1565$. Quindi,

$$\bar{x} - 3.182 s/\sqrt{n} \simeq 3.4484 \quad \text{e} \quad \bar{x} + 3.182 s/\sqrt{n} \simeq 5.5765$$

$(3.4484, 5.5765)$ è un *intervallo di confidenza per* μ *di livello* 95%.

Notate che per calcolare S^2 abbiamo usato la seguente decomposizione:

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}{n}\right) = \frac{n}{n-1}\left(\frac{\sum_{j=1}^n X_j^2}{n} - \bar{X}^2\right) = \frac{\sum_{j=1}^n X_j^2}{n-1} - \frac{n}{n-1}\bar{X}^2$$

In generale

Definizione 1.2 Siano $x_1, \dots, x_n$ una realizzazione del campione casuale $X_1, \dots, X_n$ estratto dalla popolazione $N(\mu, \sigma^2)$ e $\bar{x}$ e s^2 le realizzazioni su questo campione rispettivamente di media e varianza campionarie. Allora

$$\boxed{\left(\bar{x} - t_{n-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{n-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}$$

è un *intervallo di confidenza per* μ *di livello* $\gamma 100\%$, quando la varianza σ^2 è incognita.

Osservazione 1.3 Credo non sia inutile sottolineare che μ è un parametro il cui valore è incognito ma deterministico; quindi, "$\mu \in (\bar{X} - 3.182 S/\sqrt{n}, \bar{X} + 3.182 S/\sqrt{n})$" è un evento aleatorio in quanto gli estremi dell'intervallo sono aleatori e non μ.

Osservazione 1.4 Un intervallo di confidenza stima μ tramite un intervallo; la lunghezza dell'intervallo aleatorio (a partire dal quale costruiamo l'intervallo di confidenza) è un indice della precisione di questa stima intervallare di μ.

1.1 Se σ^2 *è nota*, la lunghezza dell'intervallo di confidenza è

$$\boxed{\mathscr{L} = 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{1+\gamma}{2}}}$$

$\mathscr{L}$ non è aleatoria perché NON dipende dalla particolare realizzazione campionaria, ma dipende da σ, n, γ. In particolare:

- Fissati σ e n, $\mathscr{L}$ è funzione crescente di γ. Quindi, l'intervallo di confidenza è un compromesso fra precisione e confidenza: più vogliamo essere sicuri che μ cada in un intervallo, meno precisa sarà la stima intervallare, ossia più lungo sarà l'intervallo di confidenza centrato in $\bar{x}$.

- Fissati σ e γ, $\mathscr{L}$ è funzione decrescente di n. All'aumentare di n, la varianza di $\bar{X}$ diminuisce e quindi è sensato che più preciso (cioè più corto) sia l'intervallo.

- Fissati γ e n, $\mathscr{L}$ è funzione crescente di σ. Infatti la varianza di $\bar{X}$ è funzione crescente di σ è quindi quanto maggiore è σ, tanto più grande è la probabilità che $\bar{X}$ assuma valori "lontani" da μ e quindi non è trascurabile la probabilità che l'intervallo sia più lungo.

1.2 Se σ^2 *è incognita*, la lunghezza è:

$$\boxed{\mathscr{L} = \frac{2t_{n-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)}{\sqrt{n}} S}$$

Se σ^2 è incognita, $\mathscr{L}$ è aleatoria, dipende dalla realizzazione campionaria tramite S e ha media

$$\mathrm{E}(\mathscr{L}) = \frac{2t_{n-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)}{\sqrt{n}}\,\mathrm{E}(S) = \frac{2^{3/2}t_{n-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)}{\sqrt{n(n-1)}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sigma$$

Infatti, se $Y = S^2(n-1)/\sigma^2$, allora $Y \sim \chi^2_{n-1}$ e

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(S) &= \mathrm{E}\left(\sqrt{\frac{\sigma^2 Y}{n-1}}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}\,\mathrm{E}\left(Y^{1/2}\right) \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}\int_0^\infty y^{1/2} f_{\chi^2_{n-1}}(y)\,dy = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}\int_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}y^{\frac{n}{2}-1}\,dy \\
&= \sigma\sqrt{\frac{2}{n-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\infty f_{\chi^2_n}(y)\,dy = \sigma\sqrt{\frac{2}{n-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Osservazione 1.5 La scelta di una stima intervallare di μ simmetrica nella media campionaria non è del tutto arbitraria. Questa scelta è giustificata dal fatto che le variabili aleatorie da cui siamo partiti, $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma$ se σ^2 è nota e $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/S$ se σ^2 è incognita, hanno entrambe densità di probabilità simmetriche intorno allo zero e quindi la loro *moda* (cioè il punto in cui la densità è massima) è zero.

Segue per esempio che l'intervallo di confidenza di estremi $\bar{x} \mp z_{(1+\gamma)/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ fornisce la stima intervallare più precisa di μ (nel caso di varianza nota e popolazione gaussiana) fra tutte le stime intervallari del tipo $(\bar{x}+a, \bar{x}+b)$ e di livello $\gamma 100\%$.

Osservazione 1.6 Se la varianza è incognita, per determinare $\mathrm{E}(\mathscr{L})$ abbiamo dovuto calcolare $\mathrm{E}(S)$ e abbiamo ottenuto

$$\mathrm{E}(S) = \sigma\sqrt{\frac{2}{n-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

In particolare $\mathrm{E}(S) \neq \sigma\ \forall n = 2, \ldots$, qualunque sia il valore di σ. Per esempio, se $n = 2$ allora $\mathrm{E}(S) = \sigma\sqrt{2/\pi} < \sigma$. Pertanto, il fatto che S^2 sia uno stimatore non distorto della varianza σ^2 non implica che S sia uno stimatore non distorto della deviazione standard σ. Comunque, S è un esempio di stimatore *asintoticamente non distorto*. Infatti:

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(S_n) = \lim_{n\to\infty}\sigma\sqrt{\frac{2}{n-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\sigma\times\sqrt{\frac{2}{n-1}}\times\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}} = \sigma$$

Osservazione 1.7 Effettivamente S sottostima σ. Infatti $\mathrm{E}(S^2) = \sigma^2$, S non è variabile aleatoria costante e quindi $\mathrm{Var}(S) > 0$. Pertanto

$$0 < \mathrm{Var}(S) = \mathrm{E}(S^2) - (\mathrm{E}(S))^2 = \sigma^2 - (\mathrm{E}(S))^2$$

da cui otteniamo che $\mathrm{E}(S)$ è strettamente minore di σ.

1.2 Intervalli di confidenza per la varianza

Se μ è incognita, per costruire un intervallo di confidenza per σ^2 partiamo dalla quantità aleatoria $S^2(n-1)/\sigma^2$ che dipende dal parametro incognito σ^2 (di cui cerchiamo una stima intervallare) ma la cui f.d.r. non dipende da nessun parametro incognito, infatti $S^2(n-1)/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$. Fissato $\gamma \in (0,1)$, dobbiamo determinare a, b tali che

$$P_{\mu,\sigma^2}\left(a < \frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} < b\right) = \gamma \tag{3}$$

Per a, b abbiamo varie possibilità. Prendiamo in considerazione solo le seguenti tre che porteranno alla costruzione di tre diversi intervalli di confidenza $\gamma 100\%$ per σ^2.

1. $[a = 0]$ Se $a = 0$, allora l'equazione (3) si riduce all'equazione

$$P_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} < b\right) = \gamma \tag{4}$$

nell'unica incognita b; necessariamente $b = \chi^2_{n-1}(\gamma)$, quantile di ordine γ della f.d.r. χ^2_{n-1}. L'Equazione (4) è equivalente a

$$P_{\mu,\sigma^2}\left(\sigma^2 > \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{n-1}(\gamma)}\right) = \gamma$$

Se abbiamo la realizzazione campionaria $x_1 = 4.87$, $x_2 = 5.06$, $x_3 = 2.8$, $x_4 = 5.32$ e se $\gamma = 0.95$, allora $s^2(4-1) \simeq 1.337 \times 3$, $\chi^2_3(0.95) \simeq 7.814728$ e

$$\left(\frac{1.337 \times 3}{7.8148}, +\infty\right) \simeq (0.513, +\infty)$$

è un intervallo di confidenza a una coda superiore (*upper one-side confidence interval*) di livello 95%. In generale,

Definizione 1.8 Sia $\gamma \in (0,1)$ e sia s^2 il valore assunto da S^2 in corrispondenza della realizzazione campionaria $x_1, \ldots, x_n$ di un campione casuale estratto dalla popolazione $N(\mu, \sigma^2)$. Allora

$$\left(\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1}(\gamma)}, +\infty\right)$$

è un *intervallo di confidenza a una coda superiore di livello* $\gamma 100\%$ *per la varianza* σ^2, quando μ è incognita. Inoltre, la statistica $S^2(n-1)/\chi^2_{n-1}(\gamma)$ è detta *limite inferiore di confidenza per la varianza.*

2. $[b = +\infty]$ In questo caso l'equazione (3) diventa

$$P_{\mu,\sigma^2}\left(a < \frac{S^2(n-1)}{\sigma^2}\right) = \gamma \tag{5}$$

e abbiamo una sola incognita a; necessariamente $a = \chi^2_{n-1}(1-\gamma)$; (5) è equivalente a

$$P_{\mu,\sigma^2}\left(\sigma^2 < \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{n-1}(1-\gamma)}\right) = \gamma$$

Se abbiamo osservato $x_1 = 4.87$, $x_2 = 5.06$, $x_3 = 2.8$, $x_4 = 5.32$ e $\gamma = 0.95$, allora $s^2(4-1) \simeq 1.337 \times 3$, $\chi^2_3(0.05) \simeq 0.3518$; l'intervallo

$$\left(0, \frac{1.337 \times 3}{0.3518}\right) \simeq (0, 11.4)$$

è un intervallo di confidenza a una coda inferiore (*lower one-side confidence interval*) di livello 95%. In generale,

Definizione 1.9 Sia $\gamma \in (0,1)$ e sia s^2 il valore assunto da S^2 in corrispondenza della realizzazione campionaria $x_1, \dots, x_n$ di un campione casuale estratto dalla popolazione $N(\mu, \sigma^2)$. Allora

$$\left(0, \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1}(1-\gamma)}\right)$$

è un *intervallo di confidenza a una coda inferiore di livello* $\gamma 100\%$ *per la varianza* σ^2, quando μ è incognita. Inoltre, la statistica $S^2(n-1)/\chi^2_{n-1}(1-\gamma)$ è detta *limite superiore di confidenza per la varianza.*

3. $0 < a < b < +\infty$ Risolviamo l'equazione (3) nelle incognite a, b in modo tale che la massa rimanente $(1-\gamma)$ sia uniformemente distribuita a sinistra e a destra dell'intervallo (a, b). Necessariamente:

$$a = \chi^2_{n-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right) \quad \text{e} \quad b = \chi^2_{n-1}\left(\frac{1-\gamma}{2} + \gamma\right) = \chi^2_{n-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$$

Con questa scelta di a e b, riscriviamo l'equazione (3) nel seguente modo:

$$P_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)} < \sigma^2 < \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}\right) = \gamma \tag{6}$$

Definizione 1.10 Sia $\gamma \in (0,1)$ e sia s^2 il valore assunto da S^2 in corrispondenza della realizzazione campionaria $x_1, \dots, x_n$ di un campione casuale estratto dalla f.d.r. $N(\mu, \sigma^2)$. Allora

$$\left(\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)}, \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}\right)$$

è un *intervallo di confidenza bilatero per* σ^2 *di livello* $\gamma 100\%$, quando μ è incognita.

Se abbiamo osservato il campione $x_1 = 4.87$, $x_2 = 5.06$, $x_3 = 2.8$, $x_4 = 5.32$ estratto dalla popolazione $N(\mu, \sigma^2)$ e $\gamma = 0.95$, allora $\chi^2_3(0.975) \simeq 9.35$, $\chi^2_3(0.025) \simeq 0.216$ e

$$\left(\frac{1.337 \times 3}{9.35}, \frac{1.337 \times 3}{0.216}\right) \simeq (0.4284, 18.57)$$

è un intervallo di confidenza bilatero per σ^2 di livello 95%.

Osservazione 1.11 I dati usati erano stati simulati dalla f.d.r. $N(4.4, 0.8^2)$. Alla luce di questa informazione (che ovviamente in una vera applicazione non abbiamo) notiamo che l'estremo superiore dell'intervallo di confidenza bilatero per la varianza non è affidabile. D'altro canto, nella scelta degli estremi non abbiamo seguito nessun criterio di ottimalità, ma abbiamo solo semplificato il problema, imponendo una condizione di simmetria sulle code.

Infine, costruiamo una stima intervallare per σ^2 nel caso di media μ nota. Se μ è nota, stimiamo σ^2 con la statistica

$$S_0^2 := \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2}{n}$$

che rappresenta una misura empirica della dispersione del campione intorno alla media teorica μ. Vedremo in seguito che S_0^2 è lo stimatore di massima verosimiglianza di σ^2 nel caso di media nota. Notate che la variabile aleatoria $S_0^2 n/\sigma^2$ ha densità χ_n^2 e pertanto, procedendo analogamente al caso di media μ incognita, troviamo i seguenti *intervalli di confidenza per σ^2 di livello $\gamma 100\%$ quando μ è nota:*

$$\left(\frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2}{\chi_n^2(\gamma)}, +\infty \right) \text{ (intervallo di confidenza a una coda superiore);}$$

$$\left(0, \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2}{\chi_n^2(1-\gamma)} \right) \text{ (intervallo di confidenza a una coda inferiore);}$$

$$\left(\frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2}{\chi_n^2\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)}, \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \mu)^2}{\chi_n^2\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)} \right) \text{ (intervallo di confidenza bilatero).}$$

1.3 Regione di confidenza simultanea per media e varianza

Usiamo ora i risultati precedenti per costruire una "regione di confidenza" per una stima simultanea di μ e σ^2 per popolazioni gaussiane. Partiamo dall'osservazione che $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$ e $S^2(n-1)/\sigma^2$ sono variabili aleatorie indipendenti. Allora gli eventi

$$A = \left\{ \sqrt{n} \left| \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \right| < z_{\frac{1+\sqrt{\gamma}}{2}} \right\} = \left\{ n \left(\frac{\bar{X} - \mu}{z_{\frac{1+\sqrt{\gamma}}{2}}} \right)^2 < \sigma^2 \right\}$$

e

$$B = \left\{ \frac{S^2(n-1)}{\chi_{n-1}^2\left(\frac{1+\sqrt{\gamma}}{2}\right)} < \sigma^2 < \frac{S^2(n-1)}{\chi_{n-1}^2\left(\frac{1-\sqrt{\gamma}}{2}\right)} \right\}$$

sono eventi indipendenti. Inoltre, per quanto discusso nella costruzione dell'intervallo di confidenza per μ quando σ^2 è nota e per σ^2 quando μ è incognita, abbiamo $P_{\mu,\sigma^2}(A) = P_{\mu,\sigma^2}(B) = \sqrt{\gamma}$ e quindi

$$P_{\mu,\sigma^2} \left\{ n \left(\frac{\bar{X} - \mu}{z_{\frac{1+\sqrt{\gamma}}{2}}} \right)^2 < \sigma^2, \ \frac{S^2(n-1)}{\chi_{n-1}^2\left(\frac{1+\sqrt{\gamma}}{2}\right)} < \sigma^2 < \frac{S^2(n-1)}{\chi_{n-1}^2\left(\frac{1-\sqrt{\gamma}}{2}\right)} \right\} =$$

$$= P_{\mu,\sigma^2}(A \cap B) = P_{\mu,\sigma^2}(A) P_{\mu,\sigma^2}(B) = \gamma$$

Segue che

$$(7)\quad \left\{(\mu,\sigma^2)\in\mathbb{R}\times(0,\infty):\ n\left(\frac{\bar{x}-\mu}{z_{\frac{1+\sqrt{\gamma}}{2}}}\right)^2<\sigma^2,\ \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{\gamma}}{2}\right)}<\sigma^2<\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{\gamma}}{2}\right)}\right\}$$

è una *regione di confidenza per* (μ,σ^2) *di livello* $\gamma 100\%$, per ogni realizzazione campionaria $x_1,\dots,x_n$ di $X_1,\dots,X_n$ *i.i.d.* $\sim N(\mu,\sigma^2)$ tale che la media campionaria e la varianza campionaria hanno valore rispettivamente $\bar{x}$ e s^2.

Se abbiamo osservato $x_1 = 4.87$, $x_2 = 5.06$, $x_3 = 2.8$, $x_4 = 5.32$ allora una regione di confidenza di livello 95% per (μ,σ^2) è la regione del piano così delimitata:

$$\left\{(\mu,\sigma^2):\ \sigma^2>1.0412(4.5125-\mu)^2,\ 0.4284<\sigma^2<18.57\right\}$$

2 Intervalli di confidenza

Estendiamo la nozione intervallo di confidenza al caso di un modello statistico non necessariamente gaussiano.

Sia $X_1,\dots,X_n$ un campione casuale estratto dalla popolazione con densità $f(x,\theta)$ con $\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}^m$. Consideriamo la famiglia di sottoinsiemi di Θ, $\{S(x_1,\dots,x_n)\subset\Theta:\ (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\}$, cioè ottenuta al variare delle realizzazioni campionarie $(x_1,\dots,x_n)$ di $(X_1,\dots,X_n)$. Ciascun insieme $S(x_1,\dots,x_n)$ può essere letto come realizzazione dell'insieme aleatorio $S(X_1,\dots,X_n)$.

Definizione 2.1 Sia $x_1,\dots,x_n$ una realizzazione del campione casuale $X_1,\dots,X_n$ estratto da $f(x,\theta)$ con $\theta\in\Theta$ e sia $\gamma\in(0,1)$. Il sottoinsieme di Θ dato da $S(x_1,\dots,x_n)$ è detto *regione (o insieme) di confidenza per* θ *di livello* $\gamma 100\%$ se

$$P_\theta(S(X_1,\dots,X_n)\ni\theta)\geq\gamma$$

cioè se l'insieme aleatorio $S(X_1,\dots,X_n)$ contiene il vero valore del parametro θ con probabilità almeno pari a γ.

Se $\kappa(\theta)$ è una caratteristica della popolazione (unidimensionale) ed esistono due statistiche $T_1(X_1,\dots,X_n)$ e $T_2(X_1,\dots,X_n)$ tali che $P_\theta(T_1(X_1,\dots,X_n)<T_2(X_1,\dots,X_n))=1\ \forall\theta\in\Theta$ e

$$(8)\qquad P_\theta(T_1<\kappa(\theta)<T_2)\geq\gamma\qquad\forall\theta\in\Theta$$

allora l'intervallo $(T_1(x_1,\dots,x_n),T_2(x_1,\dots,x_n))$ è detto *intervallo di confidenza per* $\kappa(\theta)$ *di livello* $\gamma 100\%$.

Osservazione 2.2 È usuale assegnare il nome "intervallo di confidenza" anche all'intervallo aleatorio $(T_1(X_1,\dots,X_n),T_2(X_1,\dots,X_n))$.

Definizione 2.3 Sia $\kappa(\theta)$ una caratteristica della popolazione. Se T_U è una statistica tale che

$$(9)\qquad P_\theta[\kappa(\theta)<T_U)\geq\gamma\qquad\forall\theta\in\Theta$$

allora T_U è *un limite superiore di confidenza* di livello γ per $\kappa(\theta)$ e l'intervallo $(0,t_U)$ è un *intervallo a una coda inferiore* di livello γ per $\kappa(\theta)$. Se T_L è una statistica tale che

$$(10)\qquad P_\theta[\kappa(\theta)>T_L]\geq\gamma\qquad\forall\theta\in\Theta$$

allora T_L è *un limite inferiore di confidenza* di livello γ per $\kappa(\theta)$ e (t_L, ∞) è un *intervallo a una coda superiore* di livello γ per $\kappa(\theta)$.

Se le statistiche T_1, T_2, T_U, T_L sono variabili aleatorie continue, allora per determinare gli intervalli di confidenza ci sarà l'uguaglianza "$P_\theta(\cdots) = \gamma$" al posto di "$P_\theta(\cdots) \geq \gamma$" nelle equazioni (8), (9) e (10). Invece, nel caso discreto, potrebbe risultare impossibile sostituire "$P_\theta(\cdots) = \gamma$" a "$P_\theta(\cdots) \geq \gamma$" nelle equazioni (8), (9) e (10).

Esempio 2.4 Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale estratto dalla popolazione di densità $f(x, \theta) = (1/\theta)\mathrm{e}^{-x/\theta}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$, $\theta > 0$.

1. Determinate lo stimatore ML della caratteristica $\kappa(\theta) = \mathrm{E}_\theta(X)$.

2. Sia T lo stimatore di $\kappa(\theta)$ ottenuto al punto 1. Determinate la densità di $2nT/\theta$, $\forall\theta > 0$.

3. Supponiamo ora $n = 10$ e $\bar{x} = 3$. Usando il risultato ottenuto al punto 2., proponete un intervallo di confidenza (unilatero) della forma $(0, u)$ di livello 95% per la caratteristica $\kappa(\theta) = \mathrm{E}_\theta(X)$.

Soluzione 1. $\kappa(\theta) = \mathrm{E}_\theta(X) = \theta$ e $T = \bar{X}$ è stimatore ML di θ. Infatti la funzione di verosimiglianza è $L_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^n f(x_j, \theta) = 1/\theta^n \exp\{-\sum_{j=1}^n x_j/\theta\} = \ldots\ldots$

2. $\sum_{j=1}^n X_j$ è somma di variabili aleatorie i.i.d. con densità $\Gamma(1, \theta)$; allora $\sum_{j=1}^n X_j \sim \Gamma(n, \theta)$. Inoltre, se $W \sim \Gamma(a, b)$, allora $cW \sim \Gamma(a, cb)$, $\forall c > 0$. In definitiva

$$\frac{2nT}{\theta} = \frac{2\sum_{j=1}^n X_j}{\theta} \sim \Gamma(n, 2) = \chi^2_{2n}$$

3. Osserviamo che

$$P_\theta\left(\theta < \frac{2nT}{k}\right) = P_\theta\left(\frac{2nT}{\theta} > k\right) = 0.95$$

se e solo se $k = \chi^2_{2n}(0.05) = \chi^2_{20}(0.05) \simeq 10.9$. Pertanto, $(0, 2 \times 10 \times 3/10.9] \simeq (0, 5.505]$ è un intervallo di confidenza di livello 95% per θ. In generale, $\left(0, \frac{2\sum_j^n x_j}{\chi_{2n}(1-\gamma)}\right)$ è un intervallo di confidenza per θ di livello γ, con $\gamma \in (0, 1)$. ∎

Esercizio 2.5 Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale estratto dalla popolazione di densità $f(x, \theta) = 1/\theta\mathrm{e}^{-x/\theta}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$, $\theta > 0$.
1. Proponete un intervallo di confidenza γ100% a una coda superiore per θ.
2. Proponete un intervallo di confidenza γ100% bilatero per θ.

2.1 Metodo della quantità pivotale

Tutti gli intervalli di confidenza forniti nelle sezioni precedenti, da quello per la media e la varianza della popolazione gaussiana a quello per la media della densità esponenziale dell'Esempio 2.4, sono stati costruiti a partire da una quantità che dipende sia dal campione che dai parametri incogniti, ma la cui distribuzione non dipende dai parametri incogniti.

Descriviamo in termini generali il metodo usato, noto in letteratura come *metodo della quantità pivotale*.

Definizione 2.6 (Quantità pivotale) Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale estratto dalla popolazione di densità $f(x, \theta)$ e sia Q_θ una funzione di $X_1, \ldots, X_n$ e del parametro θ, cioè $Q_\theta = q(X_1, \ldots, X_n, \theta)$. Se la legge di Q_θ non dipende da θ, Q_θ è detta *quantità pivotale*.

Esempio 2.7

1. Se $X_1, \ldots, X_n$ è un campione casuale estratto dalla popolazione gaussiana $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, esempi di quantità pivotali sono le seguenti: $Q^1_{\mu,\sigma^2} = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $Q^2_\mu = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S \sim t_{n-1}$, $Q^3_{\mu,\sigma^2} = \sum_{j=1}^n (X_j - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2_n$, $Q^4_{\sigma^2} = S^2(n-1)/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

2. Se $X_1, \ldots, X_n$ *i.i.d.* $\sim \mathcal{E}(\theta)$, $Q_\theta = 2n\bar{X}/\theta \sim \chi^2_{2n}$ è una quantità pivotale.

Osservate che una quantità pivotale NON è una statistica, perché una statistica dipende solo dal campione, ma la sua distribuzione campionaria in generale dipende dai parametri.

Decriviamo ora come funziona il metodo della quantità pivotale per costruire un intervallo di confidenza per una caratteristica $\kappa(\theta)$.

Primo passo Sia $Q_\theta = q(X_1, \ldots, X_n, \theta)$ una quantità pivotale. Poiché la sua distribuzione non dipende da θ, allora per ogni $\gamma \in (0, 1)$ esistono due numeri q_1, q_2 dipendenti soltanto da γ (e non da θ) tali che $P_\theta(q_1 < Q_\theta < q_2) = \gamma$. Come primo passo determiniamo delle soluzioni q_1, q_2 dell'equazione $P_\theta(q_1 < Q_\theta < q_2) = \gamma$.

Secondo passo Controlliamo se, per ogni realizzazione campionaria $x_1, \ldots, x_n$, la diseguaglianza $q_1 < q(x_1, \ldots, x_n, \theta) < q_2$ può essere riscritta (invertita) in $t_1(x_1, \ldots, x_n) < \kappa(\theta) < t_2(x_1, \ldots, x_n)$, per qualche statistica $T_1 = t_1(X_1, \ldots, X_n)$ e $T_2 = t_2(X_1, \ldots, X_n)$. Se ciò vale, allora $\gamma = P_\theta(q_1 < Q_\theta < q_2) = P_\theta(T_1 < \kappa(\theta) < T_2)$ e (t_1, t_2) è un intervallo di confidenza $100\gamma\%$ per $\kappa(\theta)$.

Osservazione 2.8 Notate che per ogni γ fissato possono esserci diversi valori di q_1, q_2 tali che $P_\theta(q_1 < Q_\theta < q_2) = \gamma$ e quindi diversi intervalli di confidenza γ. Lo abbiamo già sperimentato nella costruzione degli intervalli di confidenza della varianza di popolazione gaussiana, dove abbiamo descritto solo tre possibili scelte delle coppie (q_1, q_2) che hanno portato a tre diversi intervalli di confidenza.

3 Intervalli di confidenza per grandi campioni

In questa sezione affrontiamo il problema della costruzione di un intervallo di confidenza approssimato per una caratteristica della popolazione in presenza di un campione numeroso.

Intervallo approssimato per la media. Partiamo dal caso in cui la caratteristica per cui costruire un IC è la media teorica del modello $\mu = \mathrm{E}(X_1)$. Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale estratto da una popolazione che ha media μ e varianza σ^2 e σ^2 è non nulla. Sappiamo dal teorema centrale del limite che la media campionaria $\bar{X}$ è asintoticamente gaussiana con media μ e varianza σ^2/n. Quindi, se abbiamo a disposizione un numero sufficientemente elevato di osservazioni, approssimativamente vale che $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Se σ^2 non è nota, il risultato è preservato anche quando sostitutiamo σ^2 con la varianza campionaria S^2, cioè per n "grande", approssimativamente $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Ripetendo quanto già fatto nella costruzione di un intervallo di confidenza per la media da popolazione gaussiana, otteniamo che

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

è un intervallo di confidenza per μ se la varianza è incognita, di livello approssimativamente pari a $\gamma 100\%$ ($\bar{x}$ e s^2 rappresentano le realizzazioni campionarie di media e varianza campionarie).

Intervallo approssimato per una caratteristica $\kappa(\theta)$. Per costruire intervalli di confidenza approssimati per una generica caratteristica $\kappa(\theta)$, una strada si basa sull'uso dello stimatore di massima verosimigliaza per $\kappa(\theta)$, a patto che esista e la gaussianità asintotica dello stimatore valga.

Consideriamo un campione casuale numeroso $X_1, \ldots, X_n$ estratto da una popolazione di densità $f(x, \theta)$ e sia $\hat{\kappa}$ lo stimatore di massima verosimiglianza della caratteristica della popolazione $\kappa(\theta)$. Supponiamo che siano soddisfatte tutte le ipotesi di regolarità che garantiscono la gaussianità asintotica di $\hat{\kappa}$. Segue che, per n "grande", $\dfrac{\hat{\kappa} - \kappa(\theta)}{\sqrt{(\kappa'(\theta))^2/(nI(\theta))}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, dove $I(\theta)$ è l'informazione di Fisher. Allora, per ottenere un intervallo di confidenza $\gamma 100\%$ approssimato, dovremo a procedere a invertire la seguente

$$P_\theta\left(-z_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\hat{\kappa} - \kappa(\theta)}{\sqrt{\frac{(\kappa'(\theta))^2}{(nI(\theta))}}} < z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right) = \gamma$$

Se non riusciamo a invertire, potremo procedere a sostituire all'informazione di Fisher $I(\theta)$ e a $(\kappa'(\theta))^2$ le rispettive stime di massima verosimiglianza date da $I(\hat{\theta})$ e $\kappa'(\hat{\theta}))^2$. Otterremo così il seguente intervallo di confidenza $\gamma 100\%$ approssimato:

$$\left(\hat{\kappa} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{|\kappa'(\hat{\theta}))|}{\sqrt{nI(\hat{\theta})}}, \hat{\kappa} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{|\kappa'(\hat{\theta}))|}{\sqrt{nI(\hat{\theta})}}\right)$$

Esempio 3.1 Sia $X_1, \ldots X_n$ un campione casuale estratto da una popolazione di densità geometrica di parametro $\theta \in (0,1)$. Lo stimatore di massima verosimiglianza di θ è dato da $1/\bar{X}$, l'informazione di Fisher del modello è $I(\theta) = \dfrac{1}{\theta^2(1-\theta)}$ e lo stimatore di massima verosimiglianza di $I(\theta)$ è $\dfrac{\bar{X}^2}{(1 - 1/\bar{X})}$.

Segue che un intervallo di confidenza bilatero asintotico di livello approssimativamente $\gamma 100\%$ per θ è dato da

$$\left(\frac{1}{\bar{x}} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{1}{\bar{x}} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{\bar{x}}\right)}{n}}, \frac{1}{\bar{x}} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{1}{\bar{x}} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{\bar{x}}\right)}{n}}\right)$$

4 Dualità fra verifica di ipotesi e stima intervallare

Esiste una stretta relazione fra la teoria della verifica di ipotesi e degli intervalli di confidenza. Diamone qui un'idea facendo vedere che

i) un intervallo di confidenza bilatero di livello γ per un parametro unidimensionale θ può essere usato per costruire un test di ipotesi di livello $\alpha = 1 - \gamma$ per verificare $H_0 = \theta_0$ e, viceversa, che

Solo informalmente faremo vedere anche come usare un intervallo di confidenza unilatero per verificare ipotesi unilatere sulla varianza da popolazione gaussiana.

ii) una famiglia di test: $\{(X_1, \dots, X_n; H_0 = \theta_0, H_1 : \theta \neq \theta_0; G_{\theta_0})\}_{\theta_0 \in \Theta}$ può essere usata per costruire una "regione di confidenza" per θ.

4.1 Dall'intervallo di confidenza al test di ipotesi

Sia $(x_1, \dots, x_n)$ la realizzazione di un campione casuale $X_1, \dots, X_n$ estratto da $f(x, \theta)$ e sia $IC(x_1, \dots, x_n)$ un intervallo di confidenza per θ di livello γ, cioè tale che $P_\theta(\theta \in IC(X_1, \dots, X_n)) = \gamma$. Siamo interessati a verificare: $H_0 = \theta_0$ contro $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Consideriamo il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$

$$A_0 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \theta_0 \in IC(x_1, \dots, x_n)\} \tag{11}$$

Allora $(x_1, \dots, x_n) \in A_0$ se e solo se $\theta_0 \in IC(x_1, \dots, x_n)$ e quindi

$$P_{\theta_0}(A_0) = P_{\theta_0}(\theta_0 \in IC(X_1, \dots, X_n)) = \gamma$$

Segue che $G := A_0^c$ è una regione critica per $H_0 = \theta_0$ contro $H_1 : \theta \neq \theta_0$ di ampiezza $\alpha = 1 - \gamma$.

Praticamente, *per verificare $H_0 : \theta = \theta_0$ contro $H_1 : \theta \neq \theta_0$ a un livello di significatività α, determiniamo un intervallo di confidenza bilatero $(1-\alpha)100\%$ per θ. Se l'intervallo contiene θ_0 accettiamo H_0, altrimenti la rifiutiamo.*

Esempio 4.1 (Test bilatero sulla media da popolazione gaussiana con σ^2 nota) Sia $X_1, \dots, X_n$ *i.i.d.* $\sim N(\mu, \sigma^2)$. Se la varianza è nota, un intervallo di confidenza bilatero $\gamma 100\%$ per la media μ è

$$IC(x_1, \dots, x_n) = \left(\bar{x} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} z_{\frac{1+\gamma}{2}}, \bar{x} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$

Procedendo come in (11), definiamo

$$\begin{aligned} G &= \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ \mu_0 \notin \left(\bar{x} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} z_{\frac{1+\gamma}{2}}, \bar{x} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)\right\} \\ &= \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \geq z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\} \end{aligned}$$

Ritroviamo la regione critica del test del rapporto di verosimiglianza di livello $\alpha = 1 - \gamma$ per $H_0 : \mu = \mu_0$ contro $H_1 : \mu \neq \mu_0$, per popolazione gaussiana con varianza nota.

Esempio 4.2 (Test bilatero sulla media da popolazione gaussiana con σ^2 incognita) Sia $X_1, \dots, X_n$ *i.i.d.* $\sim N(\mu, \sigma^2)$. Se σ^2 è incognita, un IC bilatero $\gamma 100\%$ per la media μ è

$$IC(x_1, \dots, x_n) = [\bar{x} - \sqrt{\frac{s^2}{n}} t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1), \bar{x} + \sqrt{\frac{s^2}{n}} t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)]$$

Definiamo ora

$$G = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ \bar{x} - \sqrt{\frac{s^2}{n}} t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) < \mu_0 < \bar{x} + \sqrt{\frac{s^2}{n}} t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \right\}^c$$
$$= \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \geq t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \right\}$$

Scopriamo che G è la regione critica del test del rapporto di verosimiglianza di livello $\alpha = 1-\gamma$ per $H_0 : \mu = \mu_0$ contro $H_1 : \mu \neq \mu_0$, per popolazione gaussiana con varianza incognita.

Esempio 4.3 (Test bilatero sulla varianza da popolazione gaussiana con μ incognita) Sia $X_1, \ldots, X_n$ *i.i.d.* $\sim N(\mu, \sigma^2)$. Se la media μ è incognita, un IC bilatero $(1-\alpha)100\%$ per la varianza σ^2 è

$$IC(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}, \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right)$$

Definiamo ora

$$G = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ \sigma_0^2 \notin \left(\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}, \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right) \right\}$$
$$= \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ \text{or } \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ or } \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right\}$$

Allora G è una regione critica di livello α per $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ contro $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, per popolazione gaussiana con media incognita.

Esempio 4.4 (Test unilatero sulla varianza da popolazione gaussiana con μ nota) Costruiamo un test di ipotesi per $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ contro $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$, quando la media è nota. Sappiamo che $\left(0, \dfrac{ns_0^2}{\chi^2_n(1-\gamma)}\right)$ è un intervallo di confidenza a una coda inferiore per σ^2. Quindi abbiamo alta confidenza (γ) che il vero valore di σ^2 sia minore o uguale di $\frac{ns_0^2}{\chi^2_n(1-\gamma)}$. Cioè, stando ai dati, un valore di $\sigma^2 \geq \frac{ns_0^2}{\chi^2_n(1-\gamma)}$ è altamente implausibile. Pertanto, se $\sigma_0^2 \geq \frac{ns_0^2}{\chi^2_n(1-\gamma)}$, allora ogni σ^2 compatibile con H_0 non è plausibile. *"Rifiutare $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ a favore di $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ se $\sigma_0^2 \geq \frac{ns_0^2}{\chi^2_n(1-\gamma)}$"* è allora una regola decisionale sensata. Il test per la varianza da popolazione gaussiana con media nota, costruito sulla base di questa regola, ha regione critica $\mathcal{G} = \{(x_1, \ldots, x_n) : \frac{s_0^2 n}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_n(1-\gamma)\}$ di significatività $\alpha = 1 - \gamma$.

4.2 Dalla teoria delle ipotesi alla regione di confidenza

Viceversa, consideriamo una famiglia di test di ipotesi tutti di livello α: $\{(X_1, \ldots, X_n; H_0 = \theta_0, H_1 : \theta \neq \theta_0; G_{\theta_0})\}_{\theta_0 \in \Theta}$, cioè abbiamo un test di ipotesi per ogni possibile specificazione di θ_0 in Θ. Allora

$$SC(x_1, \ldots, x_n) := \{\theta_0 \in \Theta : \ (x_1, \ldots, x_n) \notin G_{\theta_0}\} \tag{12}$$

è un sottoinsieme di Θ aleatorio (perché varia al variare delle realizzazioni campionarie) tale che

$$P_{\theta_0}(\theta_0 \in SC(X_1, \dots, X_n))) = P_{\theta_0}((x_1, \dots, x_n) \notin G_{\theta_0}) = 1 - P_{\theta_0}(G_{\theta_0}) = 1 - \alpha.$$

Quindi, se $x_1, \dots, x_n$ è una realizzazione del campione casuale, allora $SC(x_1, \dots, x_n)$ è una regione di confidenza $(1-\alpha)100\%$ per θ.

Esempio 4.5 (Test bilatero sulla media da popolazione gaussiana con σ^2 incognita) Sia $X_1, \dots, X_n$ *i.i.d.* $\sim N(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 noto. Allora

$$A(\mu_0) = \left\{ (x_1 \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

è la regione di accettazione di ampiezza α del test del rapporto di verosimiglianza per $H_0 : \mu = \mu_0$ contro $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Procedendo come in (12) possiamo definire:

$$IC(x_1, \dots, x_n) := \left\{ \mu_0 \in \mathbb{R} : \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\} = \left(\bar{x} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)$$

riottenendo così l'intervallo di confidenza per la media di una popolazione gaussiana di varianza nota, di livello $\gamma = 1 - \alpha$ e di minima lunghezza.