ALGEBRA E LOGICA MATEMATICA
Parte di ALGEBRA
CREMONA
17/7/2006

Esercizio 1.
Si consideri la relazione binaria $R \subseteq Z \times Z$ così definita: $(a,b) \in R$ se e solo se a divide b

1) Di quali proprietà gode R?
2) Dimostrare che la minima relazione di equivalenza che contiene R è la relazione universale su Z.
3) Si consideri la stessa relazione R ristretta all'insieme $X=\{1,2,3,5,6,15,30\}$. R è una relazione d'ordine su X? Rispetto a tale relazione X è un reticolo? Distributivo? Complementato?
4) Trovare, se possibile, un insieme X' contenente X tale che X' rispetto ad R sia un'algebra di Boole.
5) Mostrare che R non può essere contenuta in alcuna funzione da X in X.
6) Trovare, se esistono, le funzioni invertibili da X ad X contenute in R.
7) Trovare una funzione f da X ad X contenuta in R e determinare l'insieme quoziente X/ker f.

Giustificare ogni risposta.

Esercizio 2.
Dimostrare che la funzione $f: Z \rightarrow Z_6$ così definita : $f(z)=\{3z\}_6$ (dove $\{x\}_6$ indica la classe di resti modulo 6 contenente x) è un omomorfismo dell'anello $<Z, +, \cdot>$ in $<Z_6,+,\cdot>$. Trovare la ker f-classe di 0 e dire, giustificando la risposta , se è un ideale di $<Z, +, \cdot>$.
La corrispondenza $g: Z \rightarrow Z_4$ così definita : $g(z)=\{3z\}_4$ è un omomorfismo di $<Z,+,\cdot>$ in $<Z_4,+,\cdot>$?

ALGEBRA E LOGICA MATEMATICA
Parte di Logica
CREMONA
17/7/2006

Esercizio 1.
Scrivere una formula f(A,B,C) che sia equivalente alla formula $\sim A \vee C \Rightarrow B$ e contenga solo i connettivi $\sim$ e $\wedge$.
Dire, giustificando la risposta, se $\{B \wedge C, \sim f(A,B,C)\}$ è un insieme di formule insoddisfacibile e se $B \wedge C \vdash_L f(A,B,C)$.

Esercizio 2.
Si consideri la formula del primo ordine
$A_1^1(x) \Rightarrow (\sim\exists y \sim A_1^2(f_1^2(x,y),a) \wedge \forall z \exists v \exists w A_1^2(f_2^2(f_3^2(v,x),f_3^2(w,z)),a))$
e si dica se tale formula è vera, falsa o soddisfacibile quando si prendano come dominio N, come costante a il numero 1, come lettere funzionali f_1^2, f_2^2, f_3^2 rispettivamente l'operazione M.C.D., l'operazione di somma e quella di prodotto, come predicato $A_1^1(x)$ il predicato "x è un numero primo" e come predicato $A_1^2(x,y)$ il predicato "x è uguale ad y".
Cosa accade in tal caso delle chiusure universale ed esistenziale della formula data?
Portare la formula in forma normale prenessa e skolemizzarla.
La formula è logicamente valida?

PROVA DI LABORATORIO
CREMONA
17/7/2006

Dato il seguente problema:

1) Carlo ha un fratello.

2) Tutti i fratelli di Carlo hanno figli.

3) Ogni persona è zio del figlio di suo fratello.

Provare che Carlo è zio di qualcuno.

a) Formalizzare il problema in un opportuno linguaggio del primo ordine.

   b) Scrivere le precedenti formule usando la sintassi di SPASS vista in laboratorio

TRACCIA DI SOLUZIONE

ALGEBRA

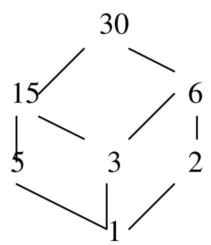
Esercizio 1.

La relazione binaria $R \subseteq Z \times Z$ così definita: $(a,b) \in R$ se e solo se a divide b

È seriale in quanto ogni intero divide sé stesso, quindi è anche riflessiva, inoltre è transitiva in quanto è ben noto che se a divide b e b divide c allora a divide c.

Sia ρ la minima relazione di equivalenza che contiene R, ovvero $\rho = \cup_{n \geq 0}(R \cup I_Z \cup R^{-1})^n$, consideriamo ora due qualsiasi interi a,b se a divide b si ha $(a,b) \in R \subseteq \rho$, se b divide a si ha $(b,a) \in R$, quindi $(a,b) \in R^{-1} \subseteq \rho$, se infine né a divide b, né b divide a, sia c=m.c.m.(a,b), allora $(a,c) \in \rho$ poiché a divide c, $(c,b) \in R^{-1} \subseteq \rho$ poiché b divide c, e dunque per la transitività di ρ $(a,b) \in \rho$, dunque ρ è la relazione universale su Z.

La stessa R ristretta all'insieme X={1,2,3,5,6,15,30} continua a godere delle proprietà riflessiva e transitiva ed inoltre è antisimmetrica poiché X è composto di numeri naturale e quindi se a divide b e b divide a si ha a=b, dunque R su X è relazione d'ordine (notate che in Z si hanno i due interi n,-n che si dividono scambievolmente, quindi su Z la relazione non è d'ordine). Rispetto a tale relazione X ha il seguente diagramma di Hasse:



e dunque è un reticolo, inoltre si verifica facilmente che tale reticolo non è distributivo, in quanto contiene il sottoreticoli "proibito" di ordine 5 formato da {1,2,5,6,30}, inoltre non è complementato, perché ad esempio 3 non ha complemento. X è un reticolo finito con atomi 2,3,5 dunque per ottenere da X un'algebra di Boole dobbiamo sicuramente introdurre un elemento che si scriva in uno e un sol modo come sup di 2,5, infatti nel diagramma dato sup(2,5)=30=sup (2,3,5), ovvero dobbiamo aggiungere l'elemento 10, in tal caso facendo il diagramma di Hasse di X'={1,2,3,5,6,10,15,30} otteniamo un diagramma che è quello dell'algebra di Boole di ordine 8.

La relazione R non può essere contenuta in alcuna funzione da X in X in quanto ad esempio (1,1), (1,2) appartengono ad R e dunque c'è più di un elemento associato ad 1.

Da una verifica esaustiva si osserva che l'unica funzione invertibile da X ad x contenuta in R è la funzione identica su X, questa è una funzione da X ad X il cui ker è la relazione identica su X.

N.B. Nell'esercizio originario la relazione era data nella forma $(a,b) \in R$ se e solo se a divide b. Per non rifare i disegni ho cambiato la definizione. L'esercizio è sostanzialmente lo stesso (vanno solo scambiati unione con intersezione e l'ordinamento con l'ordinamento inverso).

Esercizio 2.

La funzione f: $Z \rightarrow Z_6$ così definita : $f(z)=\{3z\}_6$ (che associa ovviamente ad ogni elemento di Z uno ed un solo elemento di Z_6) conserva l'operazione di somma, infatti presi comunque z_1,z_2 in Z si ha $f(z_1+z_2)= \{3(z_1+z_2)\}_6 = \{3z_1+3z_2\}_6 = \{3z_1\}_6+\{3z_2\}_6 = f(z_1)+f(z_2)$ e conserva anche l'operazione di prodotto, infatti $f(z_1z_2)= \{3z_1z_2\}_6$, $f(z_1)f(z_2)= \{3z_1\}_6\{3z_2\}_6 =\{9z_1z_2\}_6$ e $\{3z_1z_2\}_6 = \{9z_1z_2\}_6$ poiché $3 \equiv 9 \pmod 6$. La ker f-classe di 0 è formata da tutti e soli gli interi relativi z tali che $f(z)=f(0)= \{0\}_6$ ed è quindi facile osservare che è composta da tutti e soli gli interi pari, infatti se

$z=2h$ si ha $f(2h)= \{6h\}_6=\{0\}_6$, se invece $f(z)= \{0\}_6$ questo significa che $3z\equiv 0 \pmod 6$ e quindi 2 deve dividere z.. E' noto che dato un omomorfismo f da un anello A ad un anello B la ker f-classe dello 0 è un ideale di A, nel nostro caso si può facilmente fare una verifica diretta che i pari sono un ideale di Z, infatti la differenza di due numeri pari è un numero pari e il prodotto di un qualsiasi intero per un numero pari è un numero pari. La corrispondenza $g: Z\to Z_4$ così definita : $g(z)=\{3z\}_4$ non è un omomorfismo di $\langle Z,+,\cdot\rangle$ in $\langle Z_4,+,\cdot\rangle$ infatti in generale $g(z_1z_2) = \{3z_1z_2\}_4 \neq g(z_1)g(z_2)$, basta infatti prendere $z_1=z_2=1$ e si ha $g(z_1z_2) =g(1)= \{3\}_4$ mentre $g(z_1)g(z_2)=g(1)g(1)= \{9\}_4$ ed ovviamente $\{3\}_4 \neq \{9\}_4$.

TRACCIA DI SOLUZIONE

LOGICA

Esercizio 1

Trasformando la formula $\sim A\vee C\Rightarrow B$ si trova

$\sim A\vee C\Rightarrow B \equiv \sim(\sim A\vee C)\vee B \equiv (A\wedge\sim C)\vee B \equiv \sim(\sim(A\wedge\sim C)\wedge\sim B)$.

$\{B\wedge C, \sim f(A,B,C)\}$ è un insieme di formule insoddisfacibile , infatti ogni modello di $B\wedge C$ deve assegnare a B il valore 1 ed in tal caso la formula $\sim A\vee C\Rightarrow B$ (equivalente ad $f(A,B,C)$) assume valore 1 perché ha il conseguente vero e quindi $\sim f(A,B,C)$ assume valore 0.

Questa parte di esercizio si poteva anche risolvere con la risoluzione, infatti $\{B\wedge C, \sim f(A,B,C)\}$ in forma a clausole si riduce all'insieme di clausole $\{\{B\},\{C\},\{\sim A,C\}, \{\sim B\}\}$ e ovviamente dalle due clausole $\{B\},\{\sim B\}$ si ottiene per risoluzione la clausola vuota.

Da $B\wedge C$ si deduce in L $f(A,B,C)$, infatti essendo l'insieme $\{B\wedge C, \sim f(A,B,C)\}$ insoddisfacibile si ha che $B\wedge C\models f(A,B,C)$ e quindi per il teorema di completezza (forte) si ha $B\wedge C\vdash_L f(A,B,C)$.

Esercizio 2.

La formula del primo ordine

$A_1^1(x)\Rightarrow(\sim\exists y\sim A_1^2(f_1^2(x,y),a)\wedge\forall z\exists v\exists w A_1^2(f_2^2(f_3^2(v,x),f_3^2(w,z)),a))$

Nell'interpretazione data si legge così:

Se x è un numero primo, allora non esiste alcun y intero naturale tale che il massimo comun divisore fra x ed y sia diverso da 1 e per ogni intero naturale z esistono due interi naturali v e w tali che 1=wx+wz.

Quindi la formula è soddisfatta per tutti gli assegnamenti che assegnano ad x un intero naturale non primo.

La formula non è vera invece perché se assegniamo ad esempio ad x il valore 3 l'antecedente è soddisfatto, inoltre banalmente esiste un y tale che MCD(3,y) sia diverso da 1 e tale y è 3 per cui ogni assegnamento che attribuisce ad x il valore 3 non soddisfa la formula

Quindi la formula data è soddisfacibile ma non vera, di conseguenza la sua chiusura universale è falsa e la sua chiusura esistenziale è vera.

La formula non è logicamente valida perché non è vera nell'interpretazione considerata.

Portiamo ora in forma normale prenessa la formula data

$A_1^1(x)\Rightarrow(\sim\exists y\sim A_1^2(f_1^2(x,y),a)\wedge\forall z\exists v\exists w A_1^2(f_2^2(f_3^2(v,x),f_3^2(w,z)),a)) \equiv$

$A_1^1(x)\Rightarrow(\forall y\sim\sim A_1^2(f_1^2(x,y),a)\wedge\forall z\exists v\exists w A_1^2(f_2^2(f_3^2(v,x),f_3^2(w,z)),a)) \equiv$

$A_1^1(x)\Rightarrow \forall y\forall z\exists v\exists w\,(A_1^2(f_1^2(x,y),a)\wedge A_1^2\,(f_2^2(f_3^2(v,x),f_3^2(w,z)),a)) \equiv$

$\forall y\forall z\exists v\exists w\,(A_1^1(x)\Rightarrow (A_1^2(f_1^2(x,y),a)\wedge A_1^2\,(f_2^2(f_3^2(v,x),f_3^2(w,z)),a)))$

Adesso per skolemizzare la formula ne consideriamo la chiusura universale

$\forall x\,\forall y\forall z\exists v\exists w\,(A_1^1(x)\Rightarrow (A_1^2(f_1^2(x,y),a)\wedge A_1^2\,(f_2^2(f_3^2(v,x),f_3^2(w,z)),a)))$ e eliminiamo $\exists v\exists w$ sostituendo ogni occorrenza libera di v e w con $f_1^3(x,y,z)$, $f_2^3(x,y,z)$.

TRACCIA DELLA SOLUZIONE

PARTE a) DEL LABORATORIO

Usiamo la costante c per indicare Carlo e i predicati B(x,y) per dire che x è fratello di y , F(x,y) per indicare che x è figlio di y e Z(x,y) per indicare che x è zio di y.

La formula corrispondente alla frase 1 diventa $\exists x\, B(x,c)$.
La formula corrispondente alla frase 2 diventa $\forall x\, (B(x,c) \Rightarrow \exists z F(z,x))$.
La formula corrispondente alla frase 3 diventa $\forall x \forall y \forall z\, (B(x,y) \wedge F(z,y) \Rightarrow Z(x,z))$.
La congettura è $\exists x Z(c,x)$.
Può servire tenere conto di questa proprietà del predicato B(x,y) da usare come assiomi:
$\forall x \forall y (B(x,y) \Rightarrow B(y,x))$.