Il Linguaggio del I ordine.

La maggior parte delle affermazioni che ci troviamo a trattare non sono frasi che sono vere o false. Ad esempio una frase del tipo “x è un numero primo” sarà verà se alla variabile x si attribuisce il valore 7, ma sarà falsa se ad x si attribuisce il valore 4, mentre la frase “per ogni numero x, x è primo” è sempre falsa e la frase “esiste un numero x tale che x è primo” è sempre vera.
Questi semplici esempi mostrano che il linguaggio della logica predicativa non ha l’espressività sufficiente a formalizzare gran parte dei nostri processi di ragionamento.

Introdurremo quindi un nuovo linguaggio, detto *linguaggio del primo ordine*, il cui **alfabeto** è costituito da (al più un’infinità numerabile di)

costanti: a,b,…,
variabili: x,y,…,
lettere funzionali: f_i^n (i,n interi naturali)
lettere predicative: $\mathcal{A}_i^n$ (i,n interi naturali)

e da

connettivi: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$,
quantificatori: $\forall x$ (detto quantificatore universale), $\exists x$ (detto quantificatore esistenziale), dove x è una qualsiasi variabile,
simboli ausiliari: (,)

Con questi simboli definiamo ricorsivamente i **termini**:

ogni costante è un termine,
ogni variabile è un termine,
se $t_1,t_2,\dots t_n$ sono termini, anche $f_i^n(t_1,t_2,\dots t_n)$ è un termine,
niente altro è un termine.

Con i simboli e i termini possimo costruire delle frasi, che in questo contesto giocano il ruolo delle lettere enunciative, essendo i mattoni costitutivi di frasi più complesse, dette le **formule atomiche,** cioè le formule del tipo $\mathcal{A}_j^m(t_1,t_2,\dots t_m)$, dove $\mathcal{A}_j^m$ è una lettera predicativa e $t_1,t_2,\dots t_m$ sono termini generici.
Infine definiamo ricorsivamente le **formule ben formate** (fbf)

ogni formula atomica è una fbf,
se $\mathcal{A}$ è una fbf anche $(\sim\mathcal{A})$, $(\forall x\ \mathcal{A})$, $(\exists x\ \mathcal{A})$ sono fbf,
se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono fbf anche $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$ sono fbf,
niente altro è una fbf.

Esempio
Sia L un linguaggio del primo ordine, contenente le costanti a,b,c, le variabili x,y, le lettere funzionali f_1^1, f_1^2 , f_2^2 e le lettere predicative $\mathcal{A}_1^2$, $_2^2$, le sequenze
a, x, $f_2^2(a,x)$, $f_1^2(x, f_2^2(a,x))$, $f_1^1(f_1^2(x, f_2^2(a,x)))$ sono tutti termini (ovviamente non tutti i termini), infatti a è una costante, x è una variabile , $f_2^2(a,x)$ e $f_1^2(x, f_2^2(a,x))$ sono formati da una lettera funzionale di apice 2 applicata a due termini, $f_1^1(f_1^2(x, f_2^2(a,x)))$ è una lettera funzionale di apice 1 applicata ad un termine. Invece $f_1^1(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b)$ non è un termine in quanto la lettera funzionale f_1^1, che ha apice 1, è applicata a due argomenti: $f_1^2(x, f_2^2(a,x))$ e b.
$\mathcal{A}_2^2(a,b)$, $\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b)$ sono formule atomiche e quindi fbf, essendo costituite da una lettera predicativa di apice 2 applicata a due termini, anche $(\mathcal{A}_2^2(a,b))\Rightarrow(\forall x\ (\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b)))$ è una fbf, infatti $(\mathcal{A}_2^2(a,b))$ è una fbf ed anche $(\forall x(\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b)))$ è una fbf, perché è ottenuta applicando alla fbf $\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b)$ prima il connettivo $\sim$ poi il quantificatore $\forall x$.

La sequenza di simboli $\mathcal{A}_1^2(\mathcal{A}_2^2(x, f_2^2(a,x)),b)$ non è invece una fbf, infatti la lettera predicativa $\mathcal{A}_1^2$ non è applicata a due termini ma ad una fbf e ad un termine, anche la sequenza di simboli $(f_2^2(a,b))\Rightarrow(\forall x(\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b)))$ non è una fbf poiché $(f_2^2(a,b))$ non è una fbf ma un termine.

Data una formula A le **sottottoformule di** A**, Stfm(A),** sono così definite:

se $\mathcal{A}$ è una formula atomica, $\mathrm{Stfm}(\mathcal{A})=\{\mathcal{A}\}$,

se $\mathcal{A}$ è $\sim\mathcal{B}$, o $\forall x\ \mathcal{B}$, o $\exists x\ \mathcal{B}$, $\mathrm{Stfm}(\mathcal{A})=\{\mathcal{A}\}\cup \mathrm{Stfm}(\mathcal{B})$,

se $\mathcal{A}$ è $\mathcal{B}\wedge\mathcal{C}$, $\mathcal{B}\vee\mathcal{C}$, $\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}$, $\mathcal{B}\Leftrightarrow\mathcal{C}$, $\mathrm{Stfm}(\mathcal{A})=\{\mathcal{A}\}\cup \mathrm{Stfm}(\mathcal{B})\cup\mathrm{Stfm}(\mathcal{C})$.

Per evitare un eccessivo numero di parentesi è opportuno fissare una **priorità nella introduzione dei connettivi e quantificatori**:
se non altrimenti indicato dalle parentesi ci atterremo a queste regole:
$\sim$ ed i quantificatori (applicati nell'ordine in cui si trovano) precedono $\wedge$ che precede $\vee$ che precede $\Rightarrow$ che precede $\Leftrightarrow$
connettivi uguali si intendono associati a sinistra.

Esempio
Consideriamo la formula
$((\mathcal{A}_2^2(a,b)\vee(\exists y\ (\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x)))))\Rightarrow(\forall x\ ((\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b))\wedge\mathcal{A}_2^2(x,x))))$
può essere riscritta come
$\mathcal{A}_2^2(a,b)\vee\exists y\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x))\Rightarrow\forall x(\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b)\wedge\mathcal{A}_2^2(x,x))$

Osserviamo tuttavia che a volte vengono usate un diverso ordine di priorità (vedi Mendelson ad esempio) secondo il quale
$\sim$ precede $\wedge$ che precede $\vee$ che precede un qualsiasi quantificatore che precede $\Rightarrow$ che precede $\Leftrightarrow$
connettivi uguali si intendono associati a sinistra ed i quantificatori contigui si intendono applicati nell'ordine in cui si trovano

Esempio
Riferendoci allo stesso esempio la formula
$((\mathcal{A}_2^2(a,b)\vee(\exists y\ (\ \mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x)))))\Rightarrow(\forall x\ ((\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b))\wedge\mathcal{A}_2^2(x,x))))$
scritta col minimo ordine di parentesi sarebbe
$\mathcal{A}_2^2(a,b)\vee \exists y\ \mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x))\Rightarrow\forall x\ \sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b)\wedge\mathcal{A}_2^2(x,x)$.
Ma se ci trovassimo di fronte la formula
$\mathcal{A}_2^2(a,b)\vee \exists y\ \mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x))\Rightarrow\forall x\ \sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b)\wedge\mathcal{A}_2^2(x,x)$ ed usassimo non l a prima convenzione usata la formula avrebbe un diverso significato.

State perciò attenti a come sono fissate le precedenze. Notate tuttavia che in genere si usano più parentesi di quelle strettamente necessarie proprio per evitare queste ambiguità e che la prima convenzione è quella più naturale e più usata nei testi recenti.

Data una formula che contenga un quantificatore, la sottoformula a cui quel quantificatore si riferisce è detta **campo di azione** del quantificatore.

Esempio
Nella formula
$\mathcal{A}_2^2(a,b)\vee \exists y\ \mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x))\Rightarrow \forall x\ (\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b)\wedge\mathcal{A}_2^2(x,x))$
il campo di azione di $\exists y$ è $\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x))$, quello di $\forall x$ è $\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b)\wedge\mathcal{A}_2^2(x,x)$;
nella formula

$\mathcal{A}_2^2(a,b) \vee \exists y\ (\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x)) \Rightarrow \forall x\ (\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b) \wedge \mathcal{A}_2^2(x,x)))$
il campo di azione di $\exists y$ è $\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x)) \Rightarrow \forall x\ (\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b) \wedge \mathcal{A}_2^2(x,x))$, quello di $\forall x$ è $\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b) \wedge \mathcal{A}_2^2(x,x)$;
nella formula
$\mathcal{A}_2^2(a,b) \vee (\exists y)(\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x)) \Rightarrow (\forall x \sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,f_2^2(a,x)),b)) \wedge \mathcal{A}_2^2(x,x))$
il campo di azione di $\exists y$ è $\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x)) \Rightarrow (\forall x\ (\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,f_2^2(a,x)),b)) \wedge \mathcal{A}_2^2(x,x))$, quello di $\forall x$ è $\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,f_2^2(a,x)),b))$.

Una variabile può apprire più volte in una formula ed una sua occorrenza si dice libera o vincolata a seconda di come è collocata rispetto ai quantificatori che quantificano la variabile in questione. Più precisamente diciamo che una occorrenza di una variabile x è **libera** se non è nel campo di azione di quantificatori che quantifichino x, altrimenti si dice **vincolata**. Per convenzione si dice vincolata anche l'occorrenza della variabile che compare nel quantificatore.

Esempio
Nella formula
$\mathcal{A}_2^2(a,b) \vee \exists y\ \mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x)) \Rightarrow \forall x\ (\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b) \wedge \mathcal{A}_2^2(x,x))$
tutte le occorrenze di y sono vincolate, la prima e la seconda occorrenza di x sono libere e le altre sono vincolate;
nella formula
$\mathcal{A}_2^2(a,b) \vee \exists y\ (\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x)) \Rightarrow \forall x\ (\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b) \wedge \mathcal{A}_2^2(x,x)))$
tutte le occorrenze di y sono vincolate, la prima e la seconda occorrenza di x sono libere e le altre sono vincolate;
nella formula
$\mathcal{A}_2^2(a,b) \vee \exists y\ (\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x)) \Rightarrow (\forall x \sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b)) \wedge \mathcal{A}_2^2(x,x))$
tutte le occorrenze di y sono vincolate, la prima, la seconda, l'ultima e la penultima occorrenza di x sono libere e le altre sono vincolate.

Un termine t si dice **libero per una variabile** x in una formula $\mathcal{A}$ se nessuna occorrenza libera di x in $\mathcal{A}$ cade nel campo d'azione di un quantificatore che quantifichi una variabile che compare in t.

Esempio
Data la formula
$\mathcal{A}_2^2(a,b) \vee \exists y\ \mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x)) \Rightarrow \forall x\ (\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b) \wedge \mathcal{A}_2^2(x,x))$,
il termine $f_1^2(x,y)$ è libero per y, infatti in tutta la formula non ci sono occorrenze libere di y, ma non è libero per x, infatti la prima occorrenza di x che è libera cade nel campo d'azione del quantificatore $\exists y$ che quantifica una variabile presente nel termine.

Una formula in cui non ci sono occorrenze libere di variabili si dice **chiusa**, data una formula $\mathcal{A}$ se ne può fare la **chiusura (universale)** facendo precedere $\mathcal{A}$ da quantificatori universali che quantifichino le variabili che in $\mathcal{A}$ hanno occorrenze libere, mentre la **chiusura esistenziale** di $\mathcal{A}$ si ottiene facendo precedere $\mathcal{A}$ da quantificatori esistenziali che quantifichino le variabili che in $\mathcal{A}$ hanno occorrenze libere.

Esempio
Data la formula
$\mathcal{A}_2^2(a,b) \vee \exists y\ \mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x)) \Rightarrow \forall x(\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b) \wedge \mathcal{A}_2^2(x,x))$,
la sua chiusura universale è
$\forall x\ (\mathcal{A}_2^2(a,b) \vee \exists y\ \mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x)) \Rightarrow \forall x\ (\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x, f_2^2(a,x)),b) \wedge \mathcal{A}_2^2(x,x)))$

mentre la sua chiusura esistenziale è
$\exists x\ (\mathcal{A}_2^2(a,b)\vee(\exists y)\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x))\Rightarrow \forall x\ (\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,\ f_2^2(a,x)),b)\wedge\mathcal{A}_2^2(x,x)))$

Cerchiamo ora di dare una semantica alle formule che abbiamo scritto, introducendo il concetto di **interpretazione**: una interpretazione consiste di un insieme D detto *dominio* e di una *legge* che associa ad ogni costante un elemento di D, ad ogni lettera funzionale con apice n una operazione di arità n su D, ad ogni lettera predicativa con apice n una relazione di arità n su D.

Esempio
Sia L un linguaggio del primo ordine, contenente le costanti a,b,c, le variabili x,y, le lettere funzionali f_1^1, f_1^2 , f_2^2 e le lettere predicative $\mathcal{A}_1^2$, $\mathcal{A}_2^2$, una interpretazione per le formule di tale linguaggio si ottiene ad esempio fissando come dominio N, come costante a il numero 1, come costante b il numero 2, come costante c il numero 3, come lettera funzionale f_1^1 l'operazione di arità 1 che associa ad ogni numero il suo successivo, come lettere funzionali f_1^2 e f_2^2 rispettivamente le operazioni di prodotto e somma, come lettere predicative $\mathcal{A}_1^2$, $\mathcal{A}_2^2$ rispettivamente le relazioni di ugglianza e di minore. In tale interpretazione la formula
$\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x))$ si legge come "$x\cdot y=1+x$",
$\mathcal{A}_2^2(a,b)\vee \exists y\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x))\Rightarrow \forall x(\sim\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,\ f_2^2(a,x)),b)\wedge\mathcal{A}_2^2(x,x))$ si legge come
"se 1 è minore di 2 o esiste un numero naturale y tale che $x\cdot y=1+x$, allora per ogni numero naturale x è $x\cdot(1+x)\neq 2$ e $x<x$",
Ovviamente la formula "$x\cdot y=1+x$" non è né vera né falsa ma può essere soddisfatta da particolari assegnamenti di valori alle variabili x ed y (ad esempio per x=1 ed y=2), invece la formula "se 1 è minore di 2 o esiste un numero naturale y tale che $x\cdot y=1+x$, allora per ogni numero naturale x è $x\cdot(1+x)\neq 2$ e $x<x$" è falsa poiché l'antecedente è vero, essendo l'or di due formule atomiche di cui la prima (1 è minore di 2) è vera, mentre il conseguente è falso non potendo essere $x<x$.

Data una interpretazione, le costanti risultano elementi di D, i termini sono funzioni di funzioni su D, le formule atomiche sono delle relazioni fra termini; per valutare una formula atomica dobbiamo quindi assegnare dei valori in D alle varibili che eventualmente compaiono nella formula. Fissato un assegnamento di valori in D alle variabili, i termini che compaiono nella formula possono essere valutati sostituendo i valori alle variabili e risultano essere elementi di D, e le relazioni sono relazioni fra elementi di D, possiamo quindi dire se per i valori assegnati alle variabili la formula atomica è soddisfatta o no. Più precisamente:
- data una formula atomica $\mathcal{A}_i^n(t_1, t_2,\ldots,t_n)$ ed una sua una interpretazione, un assegnamento di valori alle variabili che occorrono nella formula *soddisfa* la formula se la n-upla di elementi di D, costituita dai valori corrispondenti ai termini $t_1, t_2,\ldots,t_n$ in quell'assegnamento, appartiene alla relazione che interpreta la lettera $\mathcal{A}_i^n$.

Esempio:
$\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y),f_2^2(a,x))$ nella interpretazione sopra descritta è soddisfatta se si assegnano ad x e ad y rispettivamente i valori 1 e 2, mente non è soddisfatta se si assegnano ad x e ad y rispettivamente i valori 1 e 3.

Dati un linguaggio del I ordine, una sua interpretazione ed una f.b.f $\mathcal{A}$ che non sia atomica, per decidere se un assegnamento di valori alle variabili di $\mathcal{A}$ soddisfa la formula dobbiamo considerarne la struttura:
- se la formula $\mathcal{A}$ è del tipo $\sim\mathcal{B}$ l'assegnamento soddisfa $\mathcal{A}$ se e solo se non soddisfa $\mathcal{B}$,
- se la formula $\mathcal{A}$ è del tipo $\mathcal{B}\wedge\mathcal{C}$ l'assegnamento soddisfa $\mathcal{A}$ se e solo se soddisfa sia $\mathcal{B}$ sia $\mathcal{C}$,
- se la formula $\mathcal{A}$ è del tipo $\mathcal{B}\vee\mathcal{C}$ l'assegnamento soddisfa $\mathcal{A}$ se e solo se soddisfa una almeno delle formule $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$,

- se la formula $\mathcal{A}$ è del tipo $\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}$ l'assegnamento soddisfa $\mathcal{A}$ se e solo se soddisfa o non soddisfa $\mathcal{B}$ o soddifa $\mathcal{C}$,
- se la formula $\mathcal{A}$ è del tipo $\mathcal{B}\Leftrightarrow\mathcal{C}$ l'assegnamento soddisfa $\mathcal{A}$ se e solo se soddisfa sia $\mathcal{B}$ sia $\mathcal{C}$, o non soddisfa sia $\mathcal{B}$ sia $\mathcal{C}$,
- se la formula $\mathcal{A}$ è del tipo $\forall x\ \mathcal{B}$ l'assegnamento soddisfa $\mathcal{A}$ se e solo ogni assegnamento che differenzia da quello dato al più per il valore assegnato ad x soddisfa $\mathcal{B}$,
- se la formula $\mathcal{A}$ è del tipo $\exists x\ \mathcal{B}$ l'assegnamento soddisfa $\mathcal{A}$ se e solo esiste un assegnamento che differenzia da quello dato al più per il valore assegnato ad x che soddisfa $\mathcal{B}$.

In questo modo la valutazione di una formula è sempre riportata a valutazioni di formule più semplici ed il procedimento si può iterare fino ad arrivare alla valutazione di formule atomiche.

Dati un linguaggio del I ordine, una sua una interpretazione ed una f.b.f $\mathcal{A}$,
- $\mathcal{A}$ si dice **soddisfacibile in quella interpretazione** se esiste un assegnamento di valori alle variabili che soddisfa la f.b.f $\mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ si dice **vera in quella interpretazione** se ogni assegnamento di valori alle variabili soddisfa la f.b.f $\mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ si dice **falsa in quella interpretazione** se nessun assegnamento di valori alle variabili soddisfa la f.b.f $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ è falsa se e solo se è insoddisfacibile);

La f.b.f $\mathcal{A}$ si dice **logicamente valida** se è vera in ogni interpretazione.

Osserviamo che *una formula chiusa in una data interpretazione non può essere soddisfacibile ma non vera*, inoltre è facile verificare che data una f.b.f $\mathcal{A}$, la sua chiusura universale è vera in una data interpretazione se e solo se $\mathcal{A}$ è vera in quella interpretazione, la sua chiusura esistenziale è vera in una data interpretazione se e solo se $\mathcal{A}$ è soddisfacibile in quella interpretazione (N.B. una formula vera è anche soddisfacibile).
Una formula si dice *esempio di tautologia* se è ottenuta da una tautologia sostituendo formule del primo ordine alle lettere enunciative della tautologia, in modo che a lettere uguali vengano sostituite formule uguali. *Un esempio di tautologia è sempre una formula logicamente valida*.

Per esempi ed esercizi sull'argomento vedere i temi d'esame svolti.

Due formule $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si dicono *(semanticamente) equivalenti* se in ogni interpretazione sono soddisfatte dagli stessi assegnamenti di valori alle variabili, cioè se e solo se la formula $\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B}$ è logicamente valida; $\mathcal{B}$ si dice *conseguenza semantica* di $\mathcal{A}$ se in ogni interpretazione ogni assegnamento di valori alle variabili che soddisfa $\mathcal{A}$ soddisfa anche $\mathcal{B}$, cioè se e solo se la formula $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ è logicamente valida.

Per varie ragioni (tra cui i vincoli della programmazione logica) data una formula $\mathcal{A}$ sarebbe interessante poterla trasformare in una formula equivalemte che abbia tutti i quantificatori in testa, una formula di questo tipo si dice in **forma normale prenessa**. La stringa iniziale di quantificatori si dice *prefisso* della formula, mentre la parte di stringa che rimane dopo aver tolto il prefisso (che è ancora una fbf) si chiama *matrice* della formula. Per portare una formula in forma normale premessa si utilizzano ripetutamente queste equivalenze:
$\sim\forall x\ \mathcal{A}$ è equivalente a $\exists x \sim\mathcal{A}$
$\sim\exists x\ \mathcal{A}$ è equivalente a $\forall x \sim\mathcal{A}$
Inoltre, indicata $\mathcal{A}(x)$ una formula che ha occorrenze libere di x, detta $\mathcal{B}$ una qualunque fbf ed indicate con y una variabile che non ha occorrenze libere in $\mathcal{B}$ e con $\mathcal{A}[y/x]$ la formula ottenuta sostituendo in $\mathcal{A}(x)$ ogni occorrenza libera di x con y :

$\forall x\, \mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}$ è equivalente a $\forall y\, (\mathcal{A}[y/x] \wedge \mathcal{B})$,
$\exists x\, \mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}$ è equivalente a $\exists y\, (\mathcal{A}[y/x] \wedge \mathcal{B})$,
$\forall x\, \mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}$ è equivalente a $\forall y\, (\mathcal{A}[y/x] \vee \mathcal{B})$,
$\exists x\, \mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}$ è equivalente a $\exists y\, (\mathcal{A}[y/x] \vee \mathcal{B})$,
$\forall x\, \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}$ è equivalente a $\exists y\, (\mathcal{A}[y/x] \Rightarrow \mathcal{B})$,
$\exists x\, \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}$ è equivalente a $\forall y\, (\mathcal{A}[y/x] \Rightarrow \mathcal{B})$,
$\mathcal{B} \Rightarrow \forall x\, \mathcal{A}(x)$ è equivalente a $\forall y\, (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}[y/x])$,
$\mathcal{B} \Rightarrow \exists x\, \mathcal{A}(x)$ è equivalente a $\exists y\, (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}[y/x])$).
Osservate che se $\mathcal{B}$ non contiene occorrenze libere di x non serve fare il cambio di nome della variabile, notate inoltre che non abbiamo dato nessuna equivalenza per formule che contengono come connettivo principale $\Leftrightarrow$, questo non è un limite perché ogni formula con tale connettivo può essere riportata semplicemente ad una formula che non ne faccia uso.

Per esempi ed esercizi vedere i temi d'esame

Una formula si dice in **forma di Skolem** se è in forma normale prenessa e non contiene quantificatori esistenziali, in genere non è possibile data una formula $\mathcal{A}$ portarla in una formula equivalente che sia in forma di Skolem, ma è possibile trovare una formula $\mathcal{B}$ in forma normale di Skolem su un alfabeto più ampio di quello di partenza (precisamente un alfabeto che contiene nuove costanti e nuove lettere funzionali rispetto a quello di partenza) che risulta soddisfacibile in qualche interpretazione se e solo se $\mathcal{A}$ è soddisfacibile in qualche interpretazione. Il procedimento da seguire è questo:

- portare $\mathcal{A}$ in forma prenessa,
- se in testa c'è un quantificatore esistenziale eliminarlo sostituendo ogni occorrenza libera della variabile che era quantificata da quel quantificatore con una nuova costante e ripetere il procedimento fino a che o tutti i quantificatori esistenziali sono eliminati o il primo quantificatore è un quantificatore universale,
- se non ci sono quantificatori esistenziali, la formula è in forma di Skolem, altrimenti considerare il primo quantificatore esistenziale che si incontra percorrendo la formula da sinistra a desta, questo è preceduto da n (n>0) quantificatori universali, eliminare il quantificatore esistenziale sostituendo ogni occorrenza libera della variabile che era quantificata da quel quantificatore con un termine formato da una nuova lettera funzionale di apice n applicata alle n variabili quantificate dai quantificatori universali che precedevano il quantificatore esistenziale eliminato, ripetere il procedimento fino a che o tutti i quantificatori esistenziali sono eliminati.

Esempio
Si consideri la f.b.f in forma normale prenessa
$\exists x\, \forall y\, \forall z\, \exists u\, \exists v\, (\mathcal{A}_1^2(x,y) \wedge \mathcal{A}_1^2(v,z) \Rightarrow \mathcal{A}_1^3(x,u,v))$,
si elimini $\exists x$ sostituendo x con una costante a:
$\forall y\, \forall z\, \exists u\, \exists v\, (\mathcal{A}_1^2(a,y) \wedge \mathcal{A}_1^2(v,z) \Rightarrow \mathcal{A}_1^3(a,u,v))$,
si elimini $\exists u$ sostituendo u con il termine $f_1^2(y,z)$:
$\forall y\, \forall z\, \exists v\, (\mathcal{A}_1^2(a,y) \wedge \mathcal{A}_1^2(v,z) \Rightarrow \mathcal{A}_1^3(a,f_1^2(y,z),v))$,
si elimini $\exists v$ sostituendo v con il termine $f_2^2(y,z)$:
$\forall y\, \forall z\, \exists v\, (\mathcal{A}_1^2(a,y) \wedge \mathcal{A}_1^2(f_2^2(y,z),z) \Rightarrow \mathcal{A}_1^3(a,f_1^2(y,z), f_2^2(y,z)))$,
la formula ottenuta è in forma di Skolem.

Ovviamente proprio per il fatto che nella formula in forma di Skolem si introducono nuovi nomi di costanti e/o di lettere funzionali una formula e la sua forma normale di Skolem sono soddisfacibili in interpretazioni che possono essere diverse (nella forma di partenza non contano il valore assegnato alle nuove costanti introdotte e le operazioni associate nell'interpretazioni alle nuove lettere funzionali introdotte) e quindi la f.b.f di partenza e la sua forma di Skolem non sono in genere semanticamente equivalenti .

Come abbiamo fatto per la logica proposizionale, vogliamo anche per la logica del I ordine stabilire un sistema basato su riscrittura e manipolazione di formule che permetta di verificare se una formula è logicamente valida.
Poiché avevamo già notato che la risoluzione è un metodo abbastanza semplice, iniziamo con l'introdurre la **risoluzione per la logica del I ordine**.

A tal proposito aggiorniamo un po' la terminologia:
- si dice *letterale* una formula atomica o la negazione di una formula atomica
- si dice *clausola* la disgiunzione (finita) di letterali;
- una clausola viene rappresentata come insieme di letterali; una clausola che non contiene letterali si dice *vuota* e si indica con □
- una f.b.f. chiusa in forma normale di Skolem si dice in *forma a clausole* se la sua matrice è scritta come congiunzione di clausole, in tal caso la f.b.f. sarà denotata, trascurando il suo prefisso, come insieme di insiemi; ogni formula chiusa in forma normale di Skolem ammette una formula equivalente in forma a clausole.

Prima di definire la risolvente di due clausole dobbiamo introdurre la nozione di unificatore di due espressioni del linguaggio L.
Una *sostituzione* σ è una scrittura del tipo $\{t_1/x_1, t_2/x_2,\dots, t_r/x_r\}$ dove t_i è un generico termine diverso da x_i, e se $i\neq j$ si ha $x_i \neq x_j$. Data una qualunque espressione E sul linguaggio L ed una sostituzione σ, $E\sigma$ indica l'espressione ottenuta da E sostituendo tutte le occorrenze libere di x_i con il termine t_i per $i=1,2,\dots,r$.
Dato un insieme di espressioni $\{E_1,E_2,\dots, E_n\}$ sul linguaggio L si dice **unificatore** dell'insieme una sostituzione σ, se esiste, tale che $E_1\sigma=E_2\sigma =\dots= E_n\sigma$. Se una tale σ non esiste l'insieme di espressioni si dice *non unificabile*.
Osserviamo che l'unificatore se esiste non è unico.
Ad esempio i due termini $f^2(x,a)$, $f^2(y,z)$ possono essere unificati ad esempio sia da $\{x/y, a/z\}$, sia da $\{y/x, a/z\}$, sia da $\{a/x, a/y, a/z\}$.
Date due sostituzioni: $\sigma=\{t_1/x_1, t_2/x_2,\dots, t_r/x_r\}$, $\theta=\{u_1/y_1, u_2/y_2,\dots, u_h/y_h\}$ la sostituzione prodotto $\sigma\cdot\theta$ si ottiene da $\{t_1\theta /x_1, t_2\theta /x_2,\dots, t_r\theta /x_r, u_1/y_1, u_2/y_2,\dots, u_h/y_h\}$ cancellando tutti gli u_j/y_j tali che per qualche i sia $x_i=y_j$ e i $t_k\theta /x_k$ con $t_k\theta =x_k$.
Dato un insieme di espressioni $\{E_1,E_2,\dots, E_n\}$ unificabile sul linguaggio L, un unificatore σ di tale insieme si dice *unificatore più generale* se per ogni altro unificatore θ di tale insieme esiste una sostituzione ρ tale che $\theta=\sigma\cdot\rho$. Si può provare che dato l'insieme $\{f^2(x,a), f^2(y,z) \}$ sia $\{x/y, a/z\}$, sia $\{y/x, a/z\}$ sono unificatori più generali, mentre $\{a/x, a/y, a/z\}$ non lo è.
Esiste un algoritmo per determinare un unificatore più generale di un insieme di stinghe unificabile. Si tratta sostanzialmente di un parser delle stringhe dell'insieme. Da sinistra a destra si percorrono i caratteri delle stringhe dell'insieme (che per il momento supponiamo formato da due espressioni E_1, E_2) finché si trovano dei caratteri diversi in due o più espressioni dell'insieme. Se i caratteri diversi che troviamo sono una variabile x e la prima lettera di un termine (cioè un'altra variabile o una costante o una lettera funzionale), si considera il temine t che parte da quella posizione (cioè l'altra variabile, la costante o il temine formato da f e dai suoi argomenti) e si considera $\sigma_1=\{t/x\}$ e la si applica ad E_1, E_2, poi sulle stringhe $E_1\sigma_1$, $E_2\sigma_1$ si riparte col parser, che ovviamente andrà ripreso al punto in cui termina il temine t; se invece i due caratteri diversi non sono dei tipi precedenti le stringhe non sono unificabili. Quando si ritrova un nuovo carattere diverso sulle stringhe $E_1\sigma_1$, $E_2\sigma_1$

se tali caratteri sono una variabile y e la prima lettera di un termine u si considera $\sigma_2=\{u/y\}$ e la si applica ad $E_1\sigma_1$, $E_2\sigma_1$ ottenendo $(E_1\sigma_1)\sigma_2$, $(E_2\sigma_1)\sigma_2$, su cui si riparte col parser, se invece i caratteri diversi non sono del tipo dato le due stringhe iniziali non sono unificabili. Ovviamente il procedimento termina o fornendo due stringhe uguali $(..((E_1\sigma_1)\sigma_2)\ldots\sigma_n)$, $(..((E_2\sigma_1)\sigma_2)\ldots\sigma_n)$ e allora la sostituzione $\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\ldots\cdot\sigma_n$ è un unificatore più generale o dicendo che le stringhe non sono unificabili. Il procedimento è facilmente generalizzabile a più stringhe.

Esempio

Cerchiamo un unificatore più generale, se esiste, per le tre espressioni
$E_1=f^3(x,y,f^2(a,x))$, $E_2=f^3(b,x,f^2(a,c))$, $E_3=f^3(z,u,f^2(a,v))$.
Percorrendole da sinistra a destra troviamo che la prima terna di caratteri diversi è x,b,z dove x,z sono variabili e b è una costante, eseguiamo dunque la sostituzione $\sigma_1=\{b/x,b/z\}$, si ha allora $E_1\sigma_1=f^3(b,y,f^2(a,b))$, $E_2\sigma_1=f^3(b,b,f^2(a,c))$, $E_3\sigma_1=f^3(b,u,f^2(a,v))$. La nuova terna i caratteri diversi è y,b,u dove y,u sono variabili e b è una costante, eseguiamo dunque la sostituzione $\sigma_2=\{b/y,b/u\}$, si ha allora $(E_1\sigma_1)\sigma_2=f^3(b,b, f^2(a,b))$, $(E_2\sigma_1)\sigma_2=f^3(b,b, f^2(a,c))$, $(E_3\sigma_1)\sigma_2=f^3(b,b, f^2(a,v))$. Ora troviamo ancora una terna di caratteri diversi e tale terna è b,c,v. Poiché v è una variabile ma b e c sono costanti diverse non possiamo unificare le tre espressioni. Potremmo invece unificare E_1, E_3; considerando la sostituzione $\sigma_3=\{b/v\}$, si ottiene infatti $((E_1\sigma_1)\sigma_2)\sigma_3=((E_3\sigma_1)\sigma_2)\sigma_3=f^3(b,b, f^2(a,b))$, in tal caso un unificatore più generale per E_1, E_3 è $\{b/x,b/z,b/y,b/u,b/v\}$, oppure potremmo unificare E_2, E_3 considerando la sostituzione $\sigma_4=\{c/v\}$, si ottiene infatti $((E_2\sigma_1)\sigma_2)\sigma_4=((E_3\sigma_1)\sigma_2)\sigma_4=f^3(b,b, f^2(a,c))$, in tal caso un unificatore più generale per E_2, E_3 è $\{b/x,b/z,b/y,b/u,c/v\}$, non è possibile invece unificare E_1 ed E_2.

Siamo ora in grado di definire la *risolvente* di due clausole C_1, C_2 in un linguaggio del I ordine:

- effettuiamo su C_1, C_2 due sostituzioni (eventualmente vuote) σ_1, σ_2 tali che $C_1\sigma_1$, $C_2\sigma_2$ siano privi di variabili comuni ,
- siano $L_1,L_2,\ldots,L_r$ letterali di $C_1\sigma_1$ e $L_{r+1},L_{r+2},\ldots,L_{r+s}$ letterali di $C_2\sigma_2$ tali che l'insieme di espressioni $L_1,L_2,\ldots,L_r,\overline{L}_{r+1},\overline{L}_{r+2},\ldots,\overline{L}_{r+s}$ (dove $\overline{L}_{r+i}$ indica il letterale $\sim L_{r+i}$ se L_{r+i} è una formula atomica, il letterale $\mathcal{A}_{r+i}$ se L_{r+i} è la negazione della formula atomica $\mathcal{A}_{r+i}$) sia unificabile. Indichiamo con σ un unificatore più generale di tale insieme.
- $R=(C_1\sigma_1\setminus\{ L_1,L_2,\ldots,L_r \})\sigma \cup (C_2\sigma_2\setminus\{ L_{r+1},L_{r+2},\ldots,L_{r+s} \})\sigma$ è una risolvente di C_1, C_2.

Sia Γ un insieme di clausole, una derivazione per risoluzione della clausola C da Γ (dove ricordiamo che è Γ un insieme di clausole che corrispondono alla rappresentazione sotta forma di clausole delle matrici di formule chiuse in forma normale di Skolem) ($\Gamma\vdash_R C$) è una sequenza di clausole di cui l'ultima è C e che o stanno in Γ o sono ottenute come risolvente da clausole precedenti (deduzione da Γ in un sistema formale con una sola regola di inferenza che fa passare da due clausole ad una loro risolvente)

Sussiste il seguente *teorema*
Un insieme di clausole Γ *è insoddisfacibile se e solo se* $\Gamma\vdash_R\Box$.

Da questo ricaviamo che
una formula chiusa $\mathcal{A}$ è semanticamente deducibile da Γ (insieme di formule chiuse in forma normale di Skolem) se e solo se $\Gamma\cup\{\sim\mathcal{A}\}\vdash_R\Box$ (dopo aver ridotto la $\sim\mathcal{A}$ in forma a clausole).

In conclusione:

- la risoluzione agisce per refutazione e opera su f.b.f. chiuse in forma normale di Skolem e scritte in forma a clausole.
- è un sistema corretto ed è completo per refutazione.

ma se $\Gamma|=\mathcal{A}$ non è detto che $\Gamma|-_R\mathcal{A}^c$.

Possono sembrare un po' stani i primi due passaggi descritti per calcolare una risolvente. Il I passaggio è giustificato dal fatto che le variabili che compaiono nelle clausole sono variabili che nelle formule originali erano quantificate universalmente e quindi non conta il loro nome, il I passaggio permette così di tener conto che variabili eventualmente scritte con lo stesso nome, non devono necessariamente assumere lo stesso valore. Il II passaggio tiene conto di contraddizioni che possono nascere fra due clausole quando si diano alle variabili (che possono assumere qualsiasi valore nel dominio) valori particolari.

Al contrario di quello che avviene nella logica proposizionale nella logica del I ordine non abbiamo un vero algoritmo per decidere se da $\Gamma|=\mathcal{A}$, infatti mentre nella logica proposizionale abbiamo che per un insieme ben formato di formule Δ, $Ris^*(\Delta)= \cup_{n>0}Ris^n(\Delta)$ si trova in un numero finito di passi e quindi si è sempre in grado di dire se $\Gamma\cup\{\sim\mathcal{A}\}|-_R\square$, questo non si verifica nella logica del I ordine per effetto delle sostituzioni ed unificazioni , dunque se proviamo che $\Gamma\cup\{\sim\mathcal{A}\}|-_R\square$ sappiamo che $\Gamma|=A$, in caso contrario in generale non sappiamo niente.

Teoria formale K per logiche del I ordine.

Come abbiamo fatto per la logica proposizionale, vogliamo anche per la logica del I ordine stabilire un sistema deduttivo o teoria formale, dobbiamo quindi anche in questo caso fissare:

- un insieme di simboli (alfabeto),
- un insieme di stringhe privilegiate di simboli (fbf),
- un insieme privilegiato di fbf (assiomi o base della conoscenza) e
- un insieme di regole di riscrittura (o di inferenza) che in presenza di un certo insieme di fbf permetta di scriverne in modo algoritmico altre (inferite o dedotte dalle precedenti).

Una *dimostrazione* in una teoria formale sarà, come per la logica preposizionale, una sequenza finita di fbf che siano o assiomi o formule dedotte da alcune delle precedenti tramite le regole di inferenza, e un *teorema della teoria formale* sarà una fbf $\mathcal{A}$ ($|-\mathcal{A}$) che sia l'ultima formula di una dimostrazione. Dato un insieme Γ di fbf, una formula $\mathcal{A}$ si dirà *deducibile nella teoria data da* Γ ($\Gamma|-\mathcal{A}$) se esiste una sequenza finita di fbf che siano o assiomi o formule di Γ o formule dedotte da formule precedenti tramite le regole di inferenza, la cui ultima formula sia $\mathcal{A}$.

Come nel caso della logica proposizionale vogliamo costruire un sistema formale che permetta di dedurre da Γ tutte e sole le f.b.f. che sono conseguenza semantica di Γ, cioè un sistema *corretto* ($\Gamma|-\mathcal{A}$ implica $\Gamma|=\mathcal{A}$) e *completo* ($\Gamma|=\mathcal{A}$ implica $\Gamma|-\mathcal{A}$).

La teoria che introdurremo, che chiameremo teoria K, è sostanzialmente basata sul linguaggio che abbiamo introdotto all'inizio e risulta essere una teoria completa e corretta.

Simboli di K:

lettere enunciative: A,B,…,
connettivi: $\sim$, $\Rightarrow$,
quantificatore universale: $\forall x$ (applicato sempre ad una variabile)

parentesi: (,)

Formule ben formate (fbf) di K:

lettere enunciative,

se $\mathcal{A}$ è una f.b.f. anche $(\sim\mathcal{A})$ è f.b.f.,

se $\mathcal{A}$ è una f.b.f. anche $(\forall x\ \mathcal{A})$ è f.b.f.,

se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono f.b.f. anche $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$ è una f.b.f.

niente altro è una f.b.f.

(In realtà si accettano tra le f.b.f. formule del tipo $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$, $(\exists x\ \ \mathcal{A})$ ma tali formule vengono pensate come abbreviazioni di una formula ad esse equivalente che usi solo i connettivi $\sim$, $\Rightarrow$ ed il quantificatore universale).

N.B. Al solito, se non diversamente indicato dalle parentesi, $\sim$ e $\forall$ (applicati nell'ordine in cui si trovano) precedono $\Rightarrow$.

Assiomi logici di K:

A1. $\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A})$

A2. $(\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}))\Rightarrow((\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{C}))$

A3. $(\sim\mathcal{A}\Rightarrow\sim\mathcal{B})\Rightarrow((\sim\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow\mathcal{A})$

A4. $(\forall x\ \mathcal{A}(x)) \Rightarrow\ \mathcal{A}[t/x]$, dove t è un termine libero per x in $\mathcal{A}(x)$

A5. $\forall x\ (\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}) \Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow\forall x\ \mathcal{B})$, purché non ci siano occorrenze libere di x in $\mathcal{A}$.

N.B. A1,A2,A3, A4, A5 non sono 5 formule ma 5 schemi di formule perché al loro interno le sottoformule $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sono qualsiasi fbf. Con la scrittura $\mathcal{A}(x)$ vogliamo indicare una formula che contenga occorrenze libere di x, mentre $\mathcal{A}[t/x]$ indica la formula che si ottiene da $\mathcal{A}(x)$ sostituendo ogni occorrenza libera di x con t.

Osservate che la condizione che t sia libero per x in $\mathcal{A}(x)$ posta nell'assioma A4 serve per garantire la validità logica di A4, supponiamo infatti che $\mathcal{A}(x)$ sia la fbf $\exists y\ \mathcal{A}_1^2(x,y)$ e che il temine t sia y, x non è libera per y in $\mathcal{A}(x)$. Consideriamo allora la fbf

$\forall x\ \exists y\ \mathcal{A}_1^2(x,y) \Rightarrow\ \exists y\ \mathcal{A}_1^2(y,y)$

che può essere vista come un'istanza di A4 per cui non è verificata la condizione aggiuntiva se prendiamo come dominio l'insieme dei numeri naturali e come predicato $\mathcal{A}_1^2(x,y)$ la relazione $x<y$ l'antecedente della nostra formula è vera, infatti qualsiasi sia x esiste un naturale y maggiore di x (ad esempio x+1), ma il conseguente non è vero infatti non esiste alcun numero naturale maggiore di se stesso.

Anche la condizione che non ci siano occorrenze libere di x in $\mathcal{A}$ nell'assioma A5 serve a garantirne la validità logica, senza tale condizione infatti potremmo facilmente trovare un'istanza di A5 che non è vera. Basta prendere come $\mathcal{A}$ la fbf $\mathcal{A}_1^1(x)$ e come $\mathcal{B}$ la fbf $\mathcal{A}_2^1(f_1^1(x))$, la fbf

$\forall x\ (\mathcal{A}_1^1(x)\Rightarrow\ \mathcal{A}_2^1(f_1^1(x)) \Rightarrow (\mathcal{A}_1^1(x)\Rightarrow \forall x\ \mathcal{A}_2^1(f_1^1(x)))$

nell'interpretazione che ha come dominio N, come funzione associata ad f_1^1 quella che ad ogni intero associa il successivo e come predicati $\mathcal{A}_1^1(x)$ ed $\mathcal{A}_2^1(x)$ rispettivamente "x è pari", "x è dispari" ha l'antecedente vero, mentre il conseguente $\mathcal{A}_1^1(x)\Rightarrow \forall x\ \mathcal{A}_2^1(f_1^1(x))$ non è vero infatti se ad x viene assegnato ad esempio il valore 2, l'antecedente del conseguente è soddisfatto (2 è pari) ma il conseguente del conseguente è falso (non tutti gli interi sono pari).

Una teoria K del I ordine può inoltre avere degli **assiomi propri**, che servono a specificare l'ambiente in cui si opera e che quindi non possono essere dati in generale (questi assiomi propri possono essere visti come un insieme Γ di schemi da prendere come premesse)

Regole di inferenza di K:
Modus Ponens (MP). Dalle due formule $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ si riscrive $\mathcal{B}$.
Generalizzazione (Gen). Dalla formula $\mathcal{A}$ si riscrive $\forall x\, \mathcal{A}$.

Un *calcolo dei predicati* del I ordine è una teoria del I ordine senza assiomi propri (e serve a modellizzare gli schemi di ragionamento universali su un linguaggio del I ordine)

Come prima cosa osserviamo che
Ogni calcolo dei predicati del I ordine è consistente, ovvero non esiste una formula $\mathcal{A}$ tale che nel calcolo dei predicati del primo ordine si possa dedurre sia $\mathcal{A}$ sia $\sim\mathcal{A}$.
Supponiamo infatti per assurdo che esista $\mathcal{A}$ tale che $\vdash_K \mathcal{A}$, $\vdash_K \sim\mathcal{A}$ per un calcolo del I ordine K.
Consideriamo le due sequenze di formule che costituiscono una prova di $\mathcal{A}$ e una prova di $\sim\mathcal{A}$ rispettivamente.
Operiamo su ogni formula delle due sequenze con un operatore h che cancella quantificatori, termini e parentesi non strutturali; h trasforma ogni f.b.f del I ordine in un f.b.f del calcolo proposizionale quando le lettere proposizionali superstiti sono lette come lettere enunciative. In particolare h non modifica gli schemi di assiomi A1,A2,A3 (opera solo sulle sottoformule $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ che vi figurano, trasforma l'assioma A4 in formule del tipo $h(\mathcal{A})\Rightarrow h(\mathcal{A})$ e lo schema A5 in formula del tipo $(h(\mathcal{A})\Rightarrow h(\mathcal{B})) \Rightarrow (h(\mathcal{A})\Rightarrow h(\mathcal{B}))$, cioè in istanze del teorema $\mathcal{A} \Rightarrow\mathcal{A}$.
Se una formula $\mathcal{A}$ è dedotta da due formule $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ per MP, allora $h(\mathcal{A})$ è dedotta da due formule $h(\mathcal{B})$ e $h(\mathcal{C})$ per MP; se una formula $\mathcal{A}$ è dedotta dalla formula $\mathcal{B}$ per Gen, cioè se $\mathcal{A}$ è $\forall x\, \mathcal{B}$, si ha che $h(\mathcal{A})$ coincide con $h(\mathcal{B})$, dunque le sequenze di formule che si ottengono dalle sequenze di partenza sarebbero (a meno di formule inutilmente ripetute) dimostrazioni in L delle due formula $h(\mathcal{A})$ e $\sim h(\mathcal{A})$. Questo è assurdo in quanto per il teorema di correttezza sia $h(\mathcal{A})$ sia $\sim h(\mathcal{A})$ dovrebbero essere tautologie. Quindi non possono esserci in K dimostrazioni sia di $\mathcal{A}$ sia di $\sim\mathcal{A}$ e quindi K è consistente.

Osserviamo ora che in ogni teoria del I ordine K possono essere dimostrate tutte le formule che si deducono da teoremi di L sostituendo ordinatamente lettere enunciative uguali con le stesse f.b.f del I ordine, cioè *ogni esempio di tautologia è un teorema di* K.
Di conseguenza *in ogni teoria del I ordine non consistente si può dimostrare una qualunque f.b.f.*, infatti se K è non consistente esiste una formula $\mathcal{A}$ tale che $\vdash_K \mathcal{A}$, $\vdash_K \sim\mathcal{A}$; inoltre per ogni formula $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\Rightarrow(\sim\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$ è un teorema di K, essendo un esempio di tautologia, e allora con due applicazioni di MP si ottiene che $\mathcal{B}$ è un teorema di K.

Come ultima osservazione verfichiamo che *$\mathcal{A}$ è un teorema di una teoria del I ordine* K *se e solo se è un teorema di* K *la chiusura universale di $\mathcal{A}$.*
Infatti se $\mathcal{A}$ è un teorema di K aggiungendo alla sequenza di formule che sono una dimostrazione per $\mathcal{A}$, successive applicazione di Gen a tutte le variabili libere in $\mathcal{A}$ si ottiene una dimostrazione della chiusura di $\mathcal{A}$. Se invece la chiusura $\forall x_n \forall x_{n-1} \dots \forall x_1\, \mathcal{A}$ di $\mathcal{A}$ è un teorema di K, la formula $\forall x_n \forall x_{n-1} \dots \forall x_1\, \mathcal{A}\Rightarrow \forall x_{n-1} \dots \forall x_1\, \mathcal{A}$ è un esempio di A4 (dove come formula $\mathcal{A}$ si è preso $\forall x_{n-1} \dots \forall x_1)\mathcal{A}$ e come t si è preso x_n). Con MP si ottiene allora $\forall x_{n-1}\dots\forall x_1\mathcal{A}$. A questo punto la formula $\forall x_{n-1}\dots\forall x_1\mathcal{A}\Rightarrow \forall x_{n-2}\dots\forall x_1\mathcal{A}$ è un esempio di A4 (dove come formula $\mathcal{A}$ si è preso $\forall x_{n-2} \dots\forall x_1\mathcal{A}$ e come t si è preso x_{n-1}). Con MP si ottiene allora $\forall x_{n-2}\dots\forall x_1\mathcal{A}$. A questo punto ripetendo l'argomento si arriva con n-2 passi a una prova di $\mathcal{A}$.

Un calcolo predicativo del I ordine K è:
- *corretto*, cioè tutti i suoi teoremi sono f.b.f logicamente valide,
- *completo*, cioè tutte le f.b.f logicamente valide sono teoremi di K,

Non è *decidibile*, cioè non esiste alcun algoritmo che con un numero finito di passi permette di decidere se una data formula è un teorema o non è un teorema della teoria, ma è solo semidecidibile, cioè si possono elencare le formule dimostrabili.

La dimostrazione del teorema di correttezza procede in modo analogo alla dimostrazione dello stesso teorema nella logica proposizionale, facendo vedere che ogni assioma logico è una formula logicamente valida e che le regole di inferenza portano da formule logicamente valide a formule logicamente valide.

Nel caso di una logica del I ordine con assiomi propri, questi assiomi non sono formule logicamente valide e quindi il teorema di correttezza risulta un po' modificato. Ovviamente ogni teorema del calcolo dei predicati soggiacente a K è un teorema, ma in K ci sono altri teoremi che non sono teoremi del calcolo dei predicati soggiacente.
Si dice *modello* di una teoria ogni interpretazione in cui ogni assioma proprio della teoria sia vero.
Il teorema di correttezza diventa allora: *Tutti i teoremi di una teoria del I ordine sono formule vere in ogni modello della teoria*.
La dimostrazione del teorema di correttezza in questa forma è del tutto analoga alla precedente. Tutti gli assiomi (logici e propri sono veri in un modello) e le regole di inferenza portano da formule vere in una interpretazione a formule vere nella stessa interpretazione.
I teoremi di completezza viene enunciato nella forma:
Data una teoria del I ordine K, ogni formula vera in ogni modello della teoria è un teorema di K.
La *dimostrazione* di questo teorema si basa su alcuni importanti lemmi:

1) Una teoria del I ordine è consistente se e solo se ammette un modello
2) Se $\mathcal{A}$ è una formula chiusa e non è un teorema per un una teoria K consistente del I ordine, la teoria K' che si ottiene da K aggiungendo agli assiomi di K la formula $\sim\mathcal{A}$ è ancora consistente.

Proviamo ora il teorema di completezza . Siano K una teoria del ordine ed $\mathcal{A}$ una formula vera in ogni modello di K. Se K non è consistente, abbiamo gia visto che ogni formula può essere dedotta in K. Supponiamo dunque K consistente. Possiamo sempre pensare che $\mathcal{A}$ sia una formula chiusa (infatti $\mathcal{A}$ è vera in una interpretazione se e solo se è vera la sua chiusura universale ed $\mathcal{A}$ è un teorema di una teoria se e solo se lo è la sua chiusura universale, perciò se $\mathcal{A}$ non è chiusa possiamo passare alla sua chiusura universale). Se $\mathcal{A}$ non fosse un teorema di K, per 2) la teoria K' che si ottiene da K aggiungendo agli assiomi di K la formula $\sim\mathcal{A}$ è consistente e quindi per 1) ammette un modello che è anche un modello di K, avremmo dunque trovato un modello di K in cui $\mathcal{A}$ non è vera, contro l'ipotesi.

Osserviamo ora che la dimostrazione di 1) si fa costruendo un modello di K basato sulla sintassi il cui dominio è dato dai termini del linguaggio su cui K è costruito (arricchito eventualmente con una infinità numerabile di variabili e di lettere funzionali), quindi un modello numerabile.

La dimostrazione di 2) invece richiede l'uso del teorema di deduzione sintattica.
Possiamo subito osservare che il teorema di deduzione non vale nella formulazione che potremmo ricavare traducendo immediatamente quello dato per la logica proposizionale, in tale formulazione infatti avremmo subito che poiché in ogni calcolo predicativo del I ordine (e quindi in ogni teoria del I ordine) con una semplice applicazione di Gen si ha $\mathcal{A}|\!-_K \forall x\, \mathcal{A}$, la formula $\mathcal{A}\Rightarrow\forall x\mathcal{A}$ sarebbe logicamente valida, mentre basta prendere come $\mathcal{A}$ la formula atomica $\mathcal{A}_1^1(x)$ per osservare che nell'interpretazione che ha come dominio N e come predicato $\mathcal{A}_1^1(x)$ "x è pari", la formula $\mathcal{A}_1^1(x) \Rightarrow \forall x\, \mathcal{A}_1^1(x)$ non è vera "infatti se ad x viene assegnato ad esempio il valore 2 , l'antecedente è soddisfatto (2 è pari) ma il conseguente è falso (non tutti gli interi sono pari).
In effetti nell'uso del teorema di deduzione ci sono alcuni problemi che vengono dall'applicazione di Gen. Il teorema di deduzione sintattica puo essere riformulato così:
Teorema di deduzione (sintattica): Sia $\Gamma = \Delta\cup\{\mathcal{B}\}$ un insieme di fbf. Se $\Delta|\!-_K \mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}$, allora $\Gamma|\!-_K \mathcal{A}$. Se $\Gamma|\!-_K \mathcal{A}$ e se nessuna applicazione di Gen è stata fatta su formule che dipendono da $\mathcal{B}$ quantificando variabili libere per $\mathcal{B}$, allora $\Delta|\!-_K \mathcal{B} \Rightarrow\mathcal{A}$.
Ovviamente si dice che una formula dipende da $\mathcal{B}$ se per trovare una deduzione di tale formula si è fatto in qualche punto uso di $\mathcal{B}$.
Nella formulazione data il teorema risulta poco utile (avremmo bisogno di avere la deduzione $\Gamma|\!-_K \mathcal{A}$ per sapere se c'è la deduzione $\Delta|\!-_K \mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}$, si utilizza quindi più di frequente la seguente formulazione più debole (tuttavia molto utile perché spesso si utilizzano solo formule chiuse)
Corollario del teorema di deduzione (sintattica): Sia $\Gamma = \Delta\cup\{\mathcal{B}\}$ un insieme di fbf e sia $\mathcal{B}$ una formula chiusa. $\Delta|\!-_K \mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}$ se e solo se $\Gamma|\!-_K \mathcal{A}$.

Possiamo ora anche accennare alla dimostrazione di 2). Supponiamo per assurdo che la teoria K' che si ottiene da K aggiungendo agli assiomi di K la formula $\sim\mathcal{A}$ non sia consistente, allora da K' possiamo dedurre $\mathcal{A}$, cioè $\sim\mathcal{A} \vdash_K \mathcal{A}$ ed essendo $\mathcal{A}$ (e quindi $\sim\mathcal{A}$) una formula chiusa per il corollario precedente $\vdash_K \sim\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$. Ora $\vdash_K (\sim\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}$ in quanto $(\sim\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}$ è un esempio di tautologia e dunque per MP si ottiene l'assurdo $\vdash_K \mathcal{A}$.

Osserviamo ora che ogni interpretazione è un modello per un calcolo predicatiovo del I ordine (gli assiomi propri sono fbf logicamente valide) dunque i teoremi di completezza e correttezza per il calcolo predicativo del I ordine sono immediata conseguenza di quelli per le teorie del I ordine.

Una relazione binaria ampiamente utilizzata in quasi tutti i contesti è la relazione di uguaglianza, quindi quasi tutte le teorie del I ordine hanno bisogno di un predicato "speciale" di arità 2 che dovrà poi essere interpretato come relazione di uguaglianza. Ovviamente perché tale predicato possa essere interpretato come uguaglianza bisogna scrivere degli assiomi (propri) che traducano nel linguaggio del I ordine le proprietà di cui gode l'uguaglianza (riflessività, simmetria, transitività, "sostituibilità" di oggetti uguali). Una teoria in cui esiste questo predicato speciale e sono specificati gli opportuni assiomi per questo predicato, si dice *teoria del I ordine con identità*.
Si può dimostrare che indicato con $\mathcal{A}_1^2$ il predicato "speciale", dagli schemi di assiomi

A6 $\forall x\, \mathcal{A}_1^2(x,x)$

A7 $\mathcal{A}_1^2(x,y) \Rightarrow (\mathcal{A}(x,x) \Rightarrow \mathcal{A}(x,[y/x]))$,
dove $\mathcal{A}(x,x)$ indica una qualsiasi formula con occorrenze libere di x(il fatto che x sia ripetuto due volte indica che le occorrenze libere di x sono suddivise arbitrariamente in due gruppi) ed $\mathcal{A}(x,[y/x])$ indica che in $\mathcal{A}(x,x)$ le occorrenze libere di x del secondo gruppo sono state sostituite con y,

si possono ottenere (come teoremi tutte le formule che traducono le proprietà precedentemente elencate di cui dovrebbe godere una relazione di uguaglianza
Si dice teoria del I ordine con identità una teoria del I ordine con un predicato $\mathcal{A}_1^2$ e con gli schemi A6,A7 fra gli assiomi propri.
Una teoria del I ordine con identità, se è consistente, ha un modello. In tale modello il predicato $\mathcal{A}_1^2$ è semplicemente una relazione di congruenza ρ sul dominio, che ha in più la caratteristica che ogni relazione n-aria soddisfatta da una n-upla di elementi $(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ del dominio è anche soddistatta da ogni n-upla $(d_1', d_2', \ldots, d_n')$ con $(d_i,d_i') \in \rho$. Un modello in cui ρ sia proprio la relazione di uguaglianza si dice *modello normale* della teoria.
Si può provare che *ogni teoria del I ordine con se ha un modello ha un modello normale*.
A tal proposito basta prendere il modello dato di dominio D in cui $\mathcal{A}_1^2$ sarà interpretato come una relazione di congruenza ρ su D. Se ρ è l'uguaglianza il modello è già normale, se ρ non è l'uguaglianza si prende come dominio l'insieme quoziente D/ρ, come interpretazione delle lettere funzionali le operazioni indotte sul quoziente dalle operazioni che nel modello di partenza interpretavano le lettere di ugual nome (che sono ben definite perché ρ è una congruenza), come interpretazione delle lettere predicative di arità n (per ogni n) le relazioni n-arie su D/ρ definite dicendo che una n-upla di classi di congruenza appartiene alla relazione se e solo se la n-upla dei rappresentanti delle classi appartiene alla relazione che nel dominio dato interpretava la lettera predicatva con lo stesso nome. In tal modo ρ diventa proprio l'uguaglianza su D/ρ.
In una teoria del I ordine con identità è possible introdurre un quantificatore derivato di ampio utilizzo $\exists! x$ (esiste unico). $\exists! x\, \mathcal{A}(x)$ va inteso come un'abbreviazione per
$\exists x\, (\mathcal{A}(x) \wedge \forall y\, (\mathcal{A}(y) \Rightarrow \mathcal{A}_1^2(x,y)))$.

Le *strutture algebriche* possono essere presentate come teorie del primo ordine con identità in cui si introducono tante lettere funzionali quante sono le operazioni di Ω; le

proprietà di cui godono le varie strutture dovranno essere dati come assiomi propri della teoria insieme agli assiomi A6 e A7.
Ad esempio, cerchiamo di presentare la teoria dei semigruppi come teoria del primo ordine. Avremo bisogno di una lettera funzionale f_1^2, da interpretare come la legge di composizione binaria, e della lettera predicativa $\mathcal{A}_1^2$. Dovremo poi specificare con un assioma che l'operazione è associativa. Avremo perciò come assioma proprio della teoria dello schema di assiomi

$$\forall x_1\ \forall x_2\ \forall x_3\ \mathcal{A}_1^2(f_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_3),f_1^2(x_1,f_1^2(x_2,x_3))).$$

Inoltre dovremo aggiungere A6 ed A7 per specificare le proprietà dell'uguaglianza.

Presentiamo adesso la teoria dei gruppi: dobbiamo far uso di una costante individuale a_1 da interpretare come unità, di una lettera funzionale f_1^2 da interpretare come la legge di composizione binaria e della lettera predicativa $\mathcal{A}_1^2$, come assiomi propri della teoria dobbiamo scrivere oltre agli assiomi A6 e A7 gli assiomi:

$$\forall x_1\ \forall x_2\ \forall x_3\ \mathcal{A}_1^2(f_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_3),f_1^2(x_1,f_1^2(x_2,x_3))),$$

$$\forall x_1\ \mathcal{A}_1^2(f_1^2(x_1,a_1),x_1),$$

$$\forall x_1\ \exists x_2\ \mathcal{A}_1^2(f_1^2(x_1,x_2),a_1)$$

Possiamo introdurre la teoria dei gruppi anche facendo uso di una lettera funzionale f_1^1 di arità 1, sostituendo poi l'assioma $\forall x_1 \exists x_2\ \mathcal{A}_1^2(f_1^2(x_1,x_2),a_1)$ con il nuovo assioma $\forall x_1 \mathcal{A}_1^2(f_1^2(x_1,f_1^1(x_1)),a_1)$.