1) Siano X={a,b,c,d} e $R \subseteq X \times X$ la relazione definita dalla seguente matrice di incidenza

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Di che proprietà gode R?
b) Costruire la chiusura riflessiva e la chiusura simmetrica di R.
c) Costruire la chiusura d'equivalenza di R e determinarne le classi di equivalenza.

Traccia di soluzione:
R gode della proprietà seriale (c'è almeno un 1 su ogni riga della matrice di incidenza), gode della proprietà antisimmetrica (non ci sono mai due 1 in posizioni simmetriche, ovvero per ogni i,j con $1 \le i \le 4$, $1 \le j \le 4$, $i \ne j$, se l'elemento di posto (i,j) è 1 quello di posto (j,i) è 0), non è riflessiva (non tutti gli elementi della diagonale principale sono1), non è simmetrica (ad esempio $(b,c) \in R$ e $(c,b) \notin R$), non è transitiva (ad esempio $(b,c) \in R$, $(c,d) \in R$ e $(b,d) \notin R$).
La chiusura riflessiva di R è la relazione che ha come matrice di incidenza

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la chiusura simmetrica di R è la relazione avente come matrice di incidenza

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

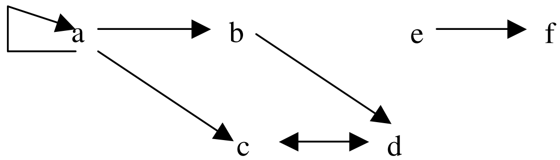
La chiusura di equivalenza di R è la chiusura transitiva della chiusura riflessiva e simmetrica di R ovvero la chiusura transitiva della relazione la cui matrice di incidenza è

$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, è immediato verificare che $M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e quindi la chiusura di equivalenza di R è la relazione universale su X. C'è pertanto una sola classe di equivalenza formata da tutti gli elementi di X.

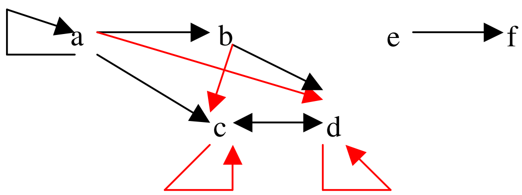
2) Siano X={a,b,c,d,e,f} e R⊆X×X così definita R={(a,a),(a,b),(a,c),(b,d),(c,d),(d,c),(e,f)}.
   a) Determinare la chiusura transitiva di R
   b) Costruire la chiusura simmetrica della chiusura riflessiva e transitiva di R

Traccia di soluzione

Il grafo di incidenza di R è



La chiusura transitiva di R ha allora il grafo di incidenza



e quindi la matrice di incidenza della chiusura riflessiva e transitiva di R è

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e pertanto la matrice di incidenza della chiusura simmetrica della chiusura riflessiva e transitiva di R è

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(notate che in questo caso si ottiene una relazione di congruenza, ma in generale questo non capita perché la chiusura simmetrica di una relazione riflessiva e transitiva può perdere la transitività).