Paolo Cremonesi

Impianti Informatici

POLITECNICO DI MILANO

Affidabilità
Cenni di statistica

Approccio probabilistico

- I meccanismi che determinano il comportamento di un impianto informatico sono complessi e dipendono da fattori diversi:
  - umani, tecnologici, ambientali, ...
- Le grandezze relative all'affidabilità e alle prestazioni di un sistema non posso essere descritte da leggi deterministiche
  - si è obbligati a considerare queste grandezze in termini statistici
  - le leggi che le governano sono leggi di tipo probabilistico

Probabilità: eventi indipendenti

Indichiamo con E_1 e E_2 due eventi **indipendenti**

Indichiamo

- con $\mathbf{P}(E_1)$ la probabilità che si verifichi l'evento E_1
- con $\mathbf{P}(E_2)$ la probabilità che si verifichi l'evento E_2

La probabilità che i due eventi si verifichino **contemporaneamente** è data da

- $\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1) \cdot \mathbf{P}(E_2)$

Probabilità: eventi mutuamente esclusivi

Indichiamo con E_1 e E_2 due eventi **mutuamente esclusivi**

Indichiamo

- con $\mathbf{P}(E_1)$ la probabilità che si verifichi l'evento E_1
- con $\mathbf{P}(E_2)$ la probabilità che si verifichi l'evento E_2

La probabilità che si verifichi uno qualsiasi dei due eventi è data da

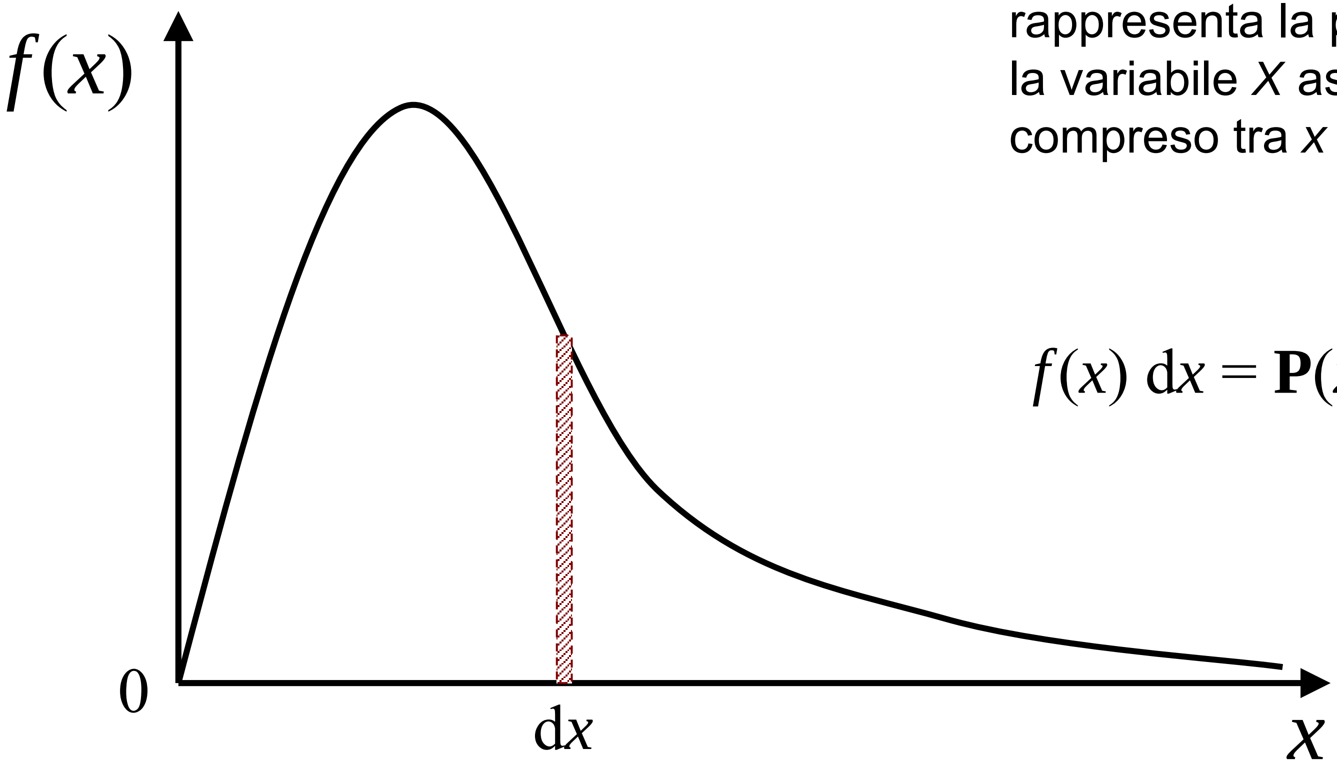
- $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$

Probabilità condizionata e teorema di Bayes

Indichiamo con E_1 e E_2 due eventi **qualsiasi**

- La probabilità che si verifichi l'evento E_1 nel caso in cui si sia verificato l'evento E_2 è data da
  - $\mathbf{P}(E_1|E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) / \mathbf{P}(E_2)$
- Si noti che **se due eventi sono indipendenti**
  - $\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1) \cdot \mathbf{P}(E_2)$
- quindi
  - $\mathbf{P}(E_1|E_2) = \mathbf{P}(E_1)$

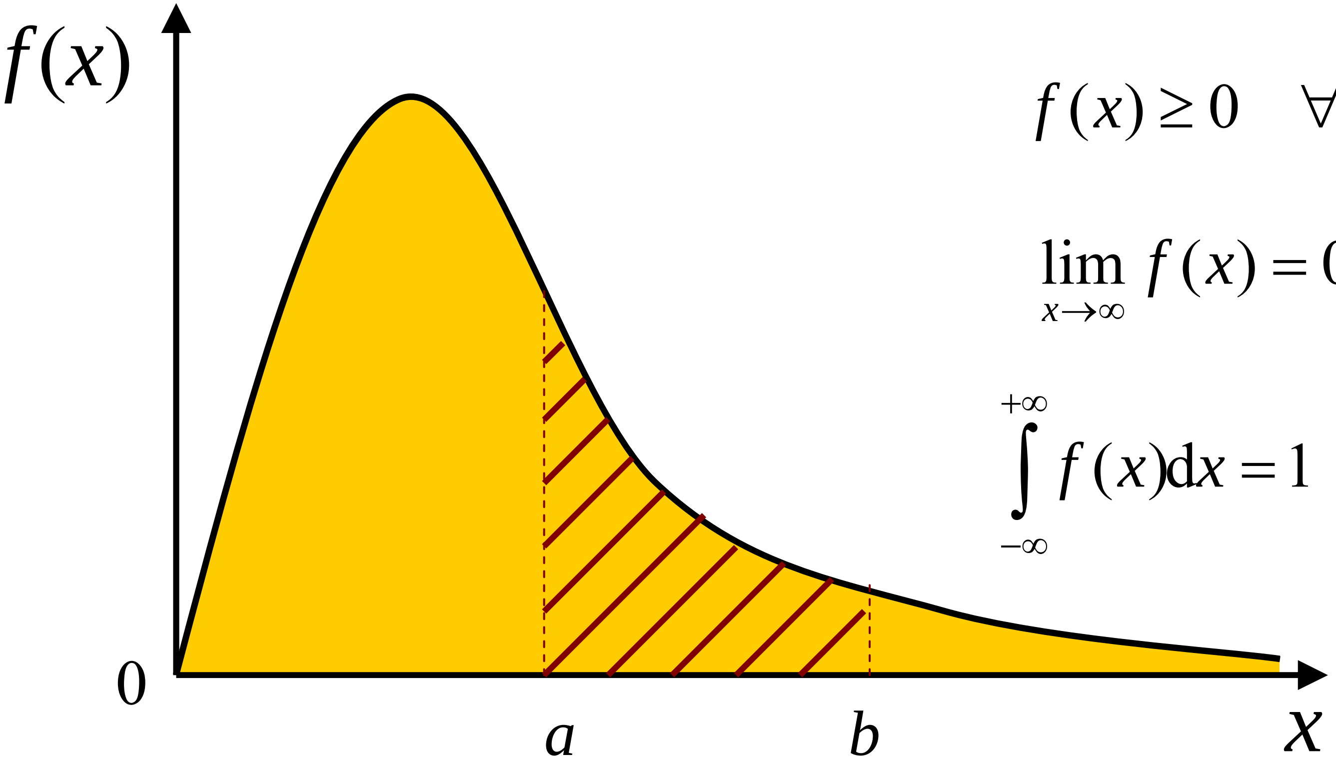
PDF: Probability Density Function



- Supponiamo che *X* sia una variabile casuale continua
- La *probability density function f*(*x*) rappresenta la probabilità *P* che la variabile *X* assuma un valore compreso tra *x* e *x*+d*x*

$$f(x)\,\mathrm{d}x = \mathbf{P}(x < X \leq x+\mathrm{d}x)$$

Proprietà della PDF



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{P}(a < X \leq b)$$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x$$

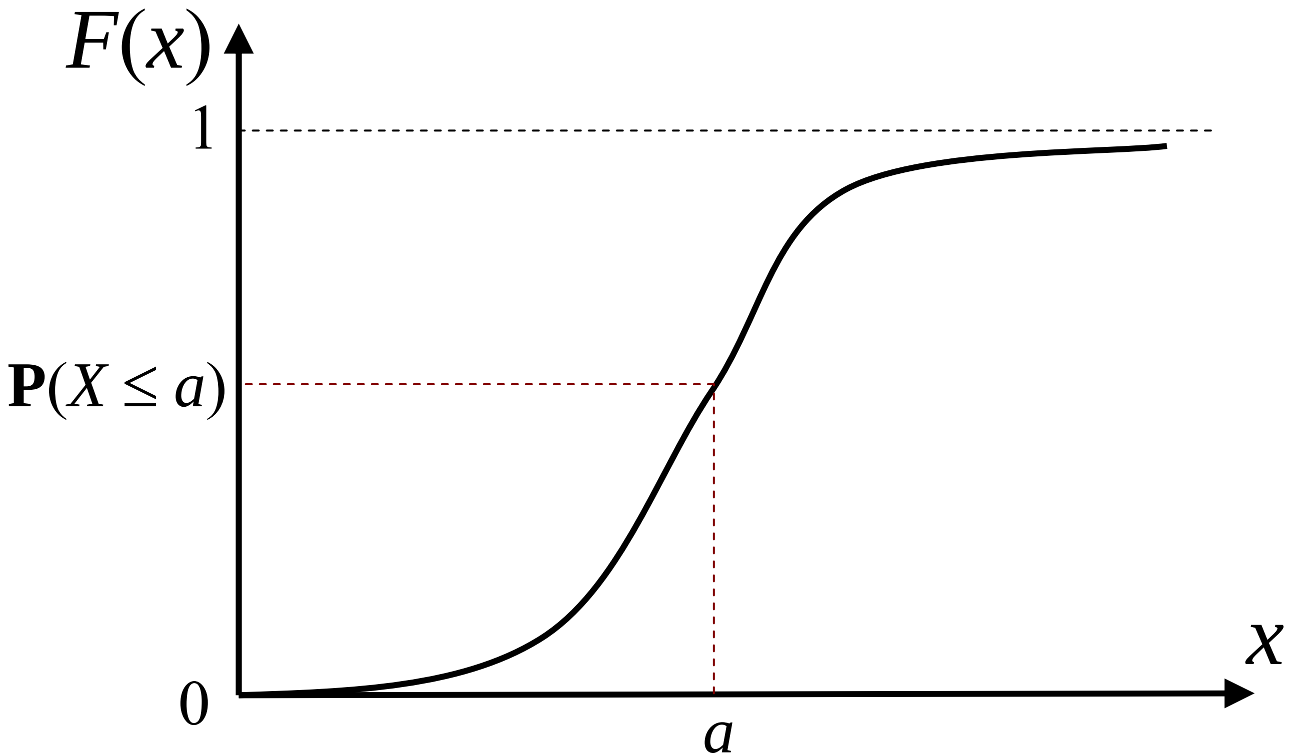
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \qquad \int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$$

CDF: Cumulative Distribution Function

- La *cumulative distribution function F*(*x*) rappresenta la probabilità *P* che la variabile *X* assuma un valore minore o uguale a *x*

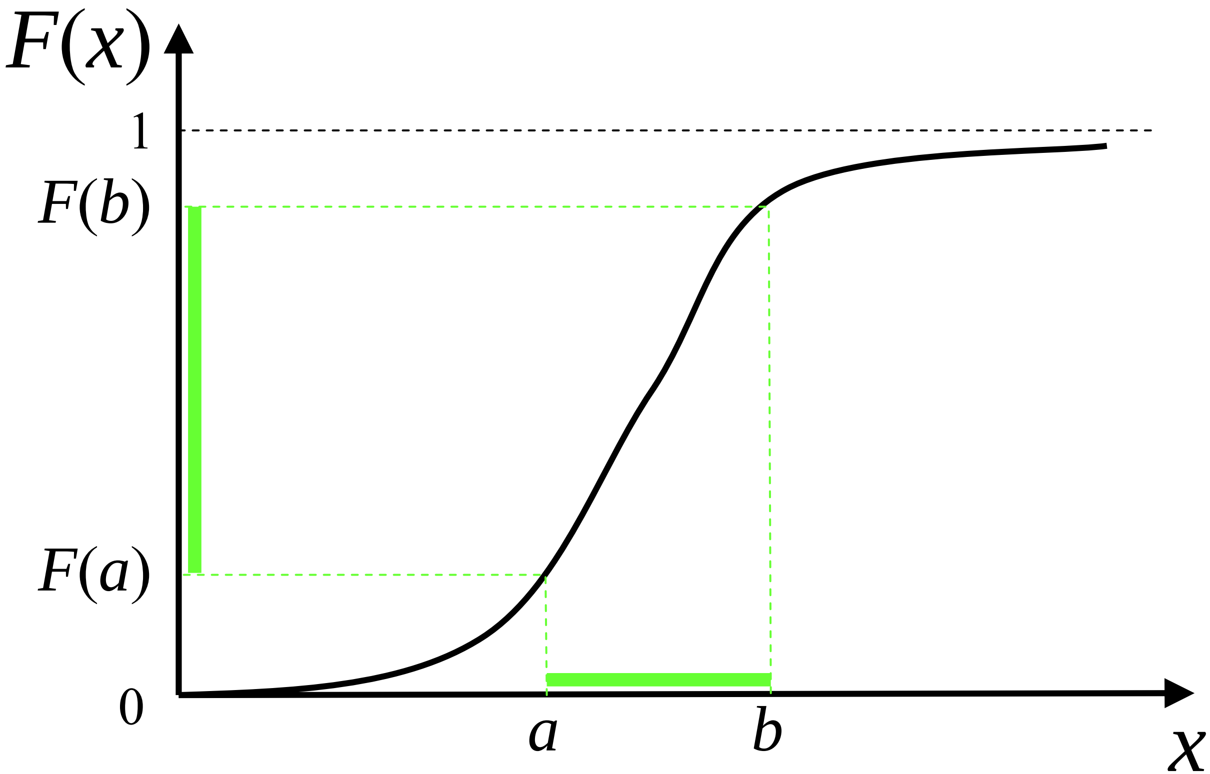
$$F(x) \equiv \mathbf{P}(X \le x)$$



$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = F(x)$$

Proprietà della CDF



$$F(b) - F(a) = \mathrm{P}(a < X \le b)$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

Media e Percentile

- Il valore medio μ è calcolato come media della variabile *x* pesata con la probabilità f

$$\mu = \mathrm{E}\left[X\right] = \int_{-\infty}^{-\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Il percentile μ_p è il valore assunto dalla variabile *x* al di sotto del quale cade una determinata percentuale *p* della distribuzione

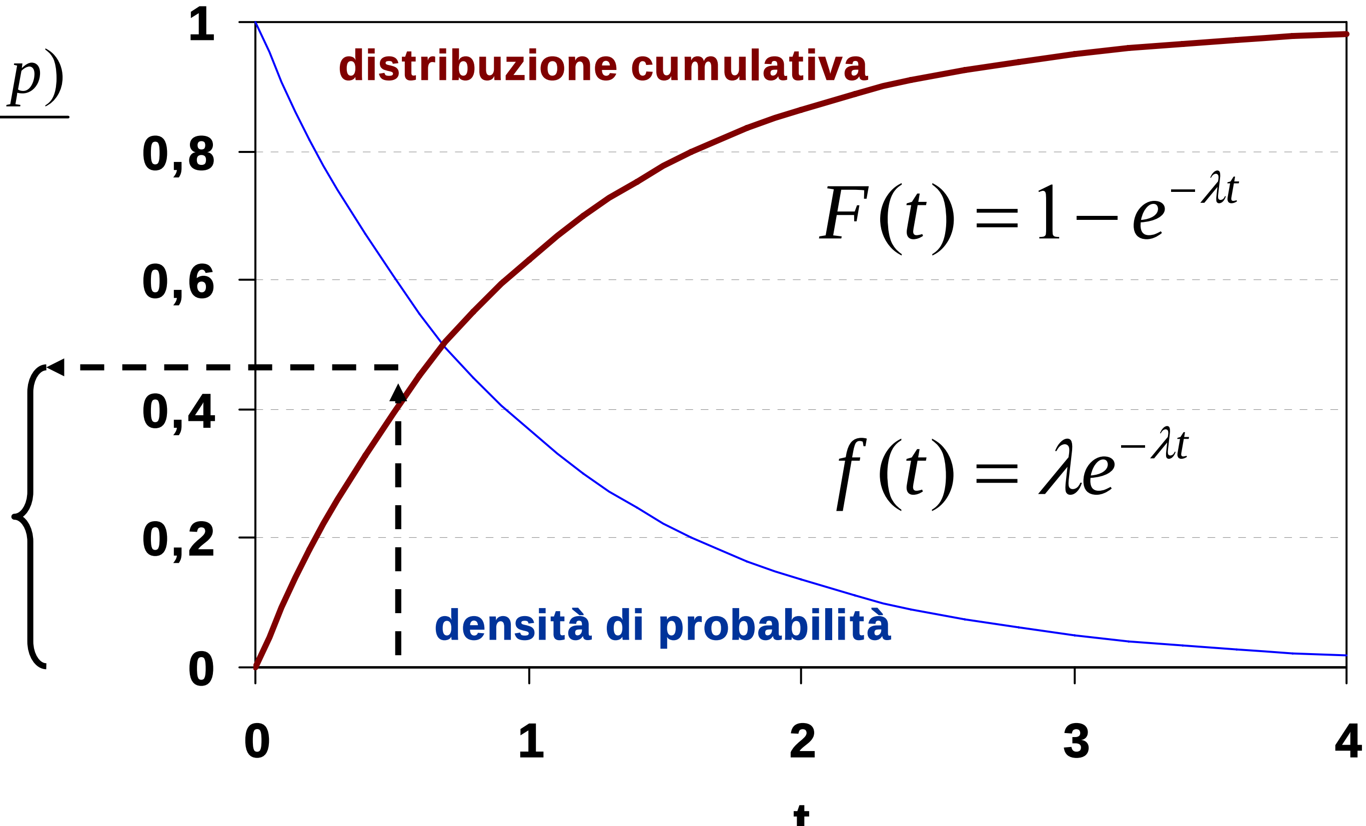
$$F(\mu_p) = p$$

Distribuzione esponenziale

$$\mathrm{E}[t] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{E}_p[t] = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda}$$

$$\mathrm{P}(T \le t)$$



Proprietà memoryless dell'esponenziale

Il futuro non dipende dal passato

$$\mathrm{P}(T > t + \Delta t \mid T > t) = \frac{\mathrm{P}(T > t + \Delta t \cap T > t)}{\mathrm{P}(T > t)} =$$

$$= \frac{\mathrm{P}(T > t + \Delta t)}{\mathrm{P}(T > t)} = \frac{1 - F(t + \Delta t)}{1 - F(t)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - F(\Delta t) = \mathrm{P}(T > \Delta t)$$

Un oggetto che segue una distribuzione esponenziale non ha memoria di quanto tempo ha funzionato, cioè non è soggetto a invecchiamento

Distribuzione di Weibull a tre parametri

Generalizzazione dell'esponenziale

$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}} \qquad t \geq \gamma$$

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

- α è detto parametro di scala o vita caratteristica
- β è detto parametro di forma
- γ è detto vita minima

Distribuzione di Weibull (2)

$$E[t] = \gamma + \alpha\,\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$$

$$E_p[t] = \gamma + \alpha[-\ln(1-p)]^{1/\beta}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$$