ALGEBRA E LOGICA MATEMATICA
II PROVA IN ITINERE
2 febbraio 2009

ALGEBRA

1) Si consideri l'applicazione

$$f: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$$

così definita

$$f(n) = \begin{cases} 4n & \text{se n è pari} \\ 2n & \text{se n è dispari} \end{cases}$$

a) Verificare che f è iniettiva ma non suriettiva.

b) Dire se f ammette inverse sinistre e/o destre e, in caso affermativo, fornirne un esempio.

c) Cosa accade se f è pensata come funzione da N all'insieme P dei numeri naturali pari?

2) Si consideri l'insieme A delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi in Z_7 strutturato ad anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

a) Si consideri il sottoinsieme B di A così definito

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix} \middle| \ a, b \in Z_7 \right\}$$

e si mostri che è un anello rispetto alle stesse operazioni di A.

b) Si determinino i divisori dello zero di B. Quali sono gli elementi invertibili di B?

Giustificare ogni risposta.

ALGEBRA E LOGICA MATEMATICA
II PROVA IN ITINERE
2 febbraio 2009

LOGICA

1. Si consideri la seguente tavola di verità

A	B	C	f (A, B, C)
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

a) Si trovi una formula $\mathcal{A}$ che contenga solo i connettivi $\sim$ e $\Rightarrow$ e che abbia la tavola di verità data.

b) Si dica se esiste la deduzione

$$\mathcal{A},\ A \Rightarrow C \ \vdash_L A \wedge B$$

c) Si mostri lo stesso risultato utilizzando la risoluzione.

2. Data la formula

$$A_1^2(f_1^1(x), f_1^1(y)) \Rightarrow A_1^2(x, y)$$

si consideri l'interpretazione avente come dominio R ed in cui A_1^2 è la relazione d'uguaglianza e f_1^1 è il passaggio al quadrato.

a) Si dica se il tale interpretazione la formula è vera, falsa, soddisfacibile.

b) Si scrivano la chiusura universale e quella esistenziale di tale formula e se ne discuta la verità nell'interpretazione considerata.

Giustificare ogni risposta.

Laboratorio 02/02/2009
"Il brodo primordiale"

Si consideri una coltura batterica, di essa sappiamo che

1. i batteri presenti appartengono al più a quattro ceppi batterici denotati rispettivamente da A, B, C, D;

inoltre la coesistenza di questi ceppi batterici è regolata da alcune leggi:

2. se esiste almeno un batterio di tipo B, allora esiste almeno un batterio di tipo A;
3. se esiste un batterio di tipo D, allora ne esiste almeno uno di tipo B e uno di tipo C;
4. se esiste un batterio di tipo A, allora ne esiste uno di tipo C e uno di tipo D;
5. i batteri di tipo C si nutrono di tutti i batteri di tipo B (suggerimento: vederlo come se esiste un batterio di tipo C allora non esistono batteri di tipo B).

Da queste regole si supponga di voler dedurre che:

6. la coltura batterica è costituita al più da soli batteri di tipo C.

Formalizzare il precedente problema il un opportuno linguaggio della logica del primo ordine specificando le lettere funzionali e predicative eventualmente usate. Scrivere inoltre una bozza di programma nella sintassi di SPASS che traduca il problema così formalizzato.

TRACCIA DI SOLUZIONE

ALGEBRA

ES.1

Verifichiamo che f è iniettiva.

Dobbiamo provare che per ogni coppia di interi naturali n,m con n≠m si ha f(n) ≠f(m). Se n ed m sono entrambi pari si ha f(n)=4n, f(m)=4m ed ovviamente 4n≠4m , se sono entrambi dispari si ha f(n)=2n, f(m)=2m ed ovviamente 2n≠2m, siano allora n pari ed m dispari ovvero n=2h, m=2k+1, per qualche h,k in N, si ha f(n)=8h, f(m)=4k+2 e, poiché 4 divide sia 8h sia 4k ma non divide 2, si ha sempre 8h ≠ 4k+2.

La funzione f non è suriettiva in quanto f(n) è sempre pari e quindi (almeno) i numeri dispari non hanno controimmagini in f.

La funzione f ammette allora inversa destra. Un esempio di inversa destra di f è la seguente funzione g:

$$g(m) = \begin{cases} \dfrac{m}{4} \quad \text{se} \quad m \quad \text{è} \quad \text{multiplo} \quad \text{di} \quad 8 \\ \dfrac{m}{2} \quad \text{se m è pari ma non multiplo di 8} \\ 1 \quad \text{se} \quad m \quad \text{è} \quad \text{dispari} \end{cases}$$

infatti preso comunque n in N, se n=2h si ha f∘g(n)=g(f(2h))=g(8h)=2h, se n=2k+1 si ha f∘g(n)=g(f(2k+1))=g(4k+2)=2k+1.

Se consideriamo f come funzione da N a P, f è ancora ovviamente una funzione iniettiva, ma rimane anche non suriettiva perché ad esempio il numero 4 non ha controimmagini mediante f.

ES. 2

Sappiamo che A è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici, per dimostrare che B è un anello rispetto alle stesse operazioni si usa il criterio per i sottoanelli.

Siano $M_1=\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$, $M_2=\begin{bmatrix} c & 0 \\ d & c \end{bmatrix}$ due generici elementi di B, risulta

$M_1- M_2=\begin{bmatrix} a-c & 0 \\ b-d & a-c \end{bmatrix}$, $M_1M_2=\begin{bmatrix} ac & 0 \\ bc+ad & ac \end{bmatrix}$, ora poiché a,b,c,d ∈ Z_7, si ha che anche

a-c, b-d, ac, bc+ad ∈ Z_7, inoltre entrambe le matrici $M_1- M_2$ e M_1M_2 sono triangolari basse ed hanno gli elementi diagonali uguali, dunque stanno in B, pertanto B, essendo sottoanello di A, è anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici.

Cerchiamo i divisori dello zero di B. Dobbiamo cercare, se esistono, matrici M_1 ed M_2 , entrambe non nulle, tali che M_1M_2 sia la matrice nulla. Bisogna cioè vedere se possiamo trovare a,b non entrambi nulli e c,d non entrambi nulli tali che ac=0 e bc+ad=0 e questo si può fare con a=0 e c=0, sono divisori dello zero quindi le matrici della forma $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$ con b≠0.

I divisori dello zero non sono mai invertibili e dunque perché un elemento di B sia invertibile deve essere $a\neq 0$. Vediamo se tutti gli elementi con $a\neq 0$ sono invertibili.

Sia $M_1=\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$, con $a\neq 0$. Si ha det $M_1=a^2\neq 0$. Poiché è a^2 un elemento non nullo del campo Z_7 ammette inverso a^{-2} e allora si ha $M_1^{-1}=\begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ -a^{-2}b & a^{-1} \end{bmatrix}$ che è ancora un elemento di B, in quanto a^{-1} e $-a^{-2}b\in Z_7$, la matrice è triangolare bassa e gli elementi diagonali sono uguali, quindi gli elementi invertibili di B sono tutte e sole le matrici di B con gli elementi diagonali diversi da 0.

LOGICA

ES.1

Una formula A con la tavola di verità data è (A∧B∧C)∨(A∧B∧~C)∨(A∧~B∧~C)≡ (A∧B)∨(A∧~B∧~C)≡ A∧(B∨~C)≡~((C⇒B)⇒~A). Dunque $\mathcal{A}$ è ~((C⇒B)⇒~A).

Dobbiamo verificare se esiste la deduzione $\mathcal{A}$,A⇒ C $\vdash_L$ A ∧ B, per il teorema di correttezza e completezza nella versione forte questo equivale a verificare se esiste la deduzione $\mathcal{A}$,A⇒ C ⊨A∧B, ovvero se tutti i modelli di {$\mathcal{A}$,A⇒ C} sono modelli per A∧B. L'unico modello v di {$\mathcal{A}$,A⇒ C} è v(A)=1, v(B)=1,v(C)=1 che è ovviamente modello per A∧B.

Abbiamo già detto che esiste la deduzione $\mathcal{A}$,A⇒ C $\vdash_L$ A ∧ B se e solo se $\mathcal{A}$,A⇒ C ⊨A∧B ma questo equivale a dire che l'insieme di formule Γ={$\mathcal{A}$,A⇒ C, ~(A ∧ B) } è insoddisfacibile e quindi che da Γ, scritto come insieme di clausole, si deduce per risoluzione la clausola vuota. La formula $\mathcal{A}$ è equivalente all'insieme di clausole {{A},{B, ~C }}, A⇒ C è equivalente alla clausola {~A,C} ed infine ~(A ∧ B) è equivalente alla clausola {~A,~B}. Pertanto Γ^c= {{A},{B,~C},{~A,C},{~A,~B}}.

Ora {A} con {~A,C} produce la clausola {C}, che con {B,~C} produce la clausola {B}, la quale a sua volta con {~A,~B} produce {~A} che di nuovo con {A} produce la clausola vuota.

ES.2

Nella interpretazione data la formula $A_1^2(f_1^1(x), f_1^1(y)) \Rightarrow A_1^2(x, y)$ non è vera infatti se consideriamo l'assegnamento che assegna ad x il valore 1 e ad y il valore –1 abbiamo che questo assegnamento soddisfa l'antecedente in quanto $(1)^2=(-1)^2$, ma non soddisfa il conseguente in quanto 1≠-1. La formula nell'interpretazione data non è neppure falsa in quanto l'assegnamento che attribuisce ad x il valore 1 e ad y il valore 2 non soddisfa l'antecedente e quindi soddisfa la formula.

Dunque la formula data è soddisfacibile ma non vera.

La chiusura universale della formula è $\forall x \forall y(A_1^2(f_1^1(x), f_1^1(y)) \Rightarrow A_1^2(x, y))$ ed è una formula falsa nell'interpretazione data perché la chiusura universale di una formula è vera se e solo se la formula di partenza è vera.

La chiusura esistenziale della formula è $\exists x \exists y(A_1^2(f_1^1(x), f_1^1(y)) \Rightarrow A_1^2(x, y))$ ed è una formula vera nell'interpretazione data perché la chiusura esistenziale di una formula soddisfacibile è vera .

Laboratorio

(solo formalizzazione in Logica del I ordine)

Servono 4 lettere predicative di arità 1, indichiamole con A, B, C, D.

A(x) significa che x è un batterio di ceppo A etc…

La formula corrispondente a 1 diventa $\forall x(A(x) \vee B(x) \vee C(x) \vee D(x))$

La formula corrispondente a 2 diventa $\exists xB(x) \Rightarrow \exists xA(x)$

La formula corrispondente a 3 diventa $\exists xD(x) \Rightarrow \exists xB(x) \wedge \exists xC(x)$.

La formula corrispondente a 4 diventa $\exists xA(x) \Rightarrow \exists xC(x) \wedge \exists xD(x)$.

La formula corrispondente a 5 (col suggerimento) diventa $\exists xC(x) \Rightarrow \sim\exists xB(x)$.

La frase da dedurre è $\forall xC(x)$.

Alcune osservazioni.

L'ambiguità del linguaggio naturale potrebbe suggerire che ci sia una diversità fra il dire "esiste almeno un" ed "esiste un", infatti la presenza della locuzione "esiste almeno un" sembra suggerire che alla frase "esiste un" si voglia dare il significato "esiste esattamente un", con questa lettura le formule corrispondenti alle frasi 3,4,5 sarebbero un po' diverse e il tutto richiederebbe la presenza di una lettera predicativa binaria U da interpretare come l'uguaglianza

La 3 in tal caso sarebbe $\exists x(D(x) \wedge \forall y(D(y) \Rightarrow U(x,y))) \Rightarrow \exists xB(x) \wedge \exists x(C(x) \wedge \forall y(C(y) \Rightarrow U(x,y)))$

La 4 sarebbe sarebbe

$\exists x(A(x) \wedge \forall y(A(y) \Rightarrow U(x,y))) \Rightarrow \exists x(C(x) \wedge \forall y(C(y) \Rightarrow U(x,y))) \wedge \exists x(D(x) \wedge \forall y(D(y) \Rightarrow U(x,y)))$

La 5 diventerebbe $\exists x(C(x) \wedge \forall y(C(y) \Rightarrow U(x,y))) \Rightarrow \sim\exists xB(x)$.

Proprio il suggerimento dato per la formula 5 dovrebbe però indicare che "esiste un " ed "esiste almeno un" sono viste come locuzioni equivalenti.