Politecnico di Milano — Anno accademico 2005–2006
Secondo anno di Laurea — Foglio 4

Algebra e Logica Matematica

Sottogruppi, morfismi

Esercizio 4.1. Sia G un gruppo. Si definisce il centro di G, $Z(G)$ nel modo seguente:

$$Z(G) = \{z \in G / \forall g \in G, gz = zg\}.$$

Mostrare che $Z(G)$ è un sottogruppo normale di G.

Esercizio 4.2. Sia $f : G \to G'$ un morfismo di gruppi. Mostrare che

a) Se H è un sottogruppo di G, $f(H)$ è un sottogruppo di G'.

b) Se H è un sottogruppo normale di G e f è suriettiva, $f(H)$ è un sottogruppo normale di G'. Cosa può succedere se f non è suriettiva ?

c) Se H' è un sottogruppo di G', $f^{-1}(H')$ è un sottogruppo di G.

d) Se H' è un sottogruppo normale di G', $f^{-1}(H')$ è un sottogruppo normale di G.

e) Dedurre che $\operatorname{Ker} f$ è un sottogruppo normale di G.

Esercizio 4.3. Sia G un gruppo finito e H un sottogruppo di G di indice n. Supponiamo che H è l'unico sottogruppo di G di indice n. Verificare che H è normale in G.

Esercizio 4.4. Sia G un gruppo finito e H un sottogruppo di G di indice 2. Verificare che H è normale in G.

Esercizio 4.5. a) Sia G un gruppo finito. Mostrare che se $G/Z(G)$ è ciclico allora G è abeliano (che cos'è $Z(G)$?).

b) Dedurre che ogni gruppo di ordine p^2 con p primo è isomorfo a $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ o a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. (Si ricorda che un gruppo di ordine p è necessariamente isomorfo a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).

c) Verificare che i due gruppi di cui sopra non sono isomorfi.

Esercizio 4.6. Sia G un gruppo di ordine $2p$ dove p è un numero primo dispari. Calcolare l'ordine di $Z(G)$ secondo che G è abeliano o meno.

Esercizio 4.7. Sia G un gruppo e H un sottogruppo normale di G. Mostrare che esiste una biiezione naturale tra l'insieme dei sottogruppi (risp. sottogruppi normali) di G/H e i sottogruppi (risp. sottogruppi normali) di G che contengono H.

Esercizio 4.8. Siano G un gruppo e A e B due sottogruppi normali di G tali che $A \subseteq B$. Mostrare que ${}^{B}/_{A}$ è un sottogruppo normale di ${}^{G}/_{A}$ e che $({}^{G}/_{A})/({}^{B}/_{A})$ è isomorfo a ${}^{G}/_{B}$.

Esercizio 4.9. (**teorema di isomorfismo di Noether**)
Sia G un gruppo e H e K due sottogruppi di G tale che K è normale in G.

a) Verificare che $HK = \{hk/h \in H; k \in K\}$ è un sottogruppo di G e che K è normale in HK.

b) Verificare che $H \cap K$ è normale in H.

c) Mostrare che i gruppi ${}^{H}/_{H \cap K}$ e ${}^{HK}/_{K}$ sono isomorfi (Indicazione: studiare l'omomorfismo $s \circ j$ dove $j : H \longrightarrow HK$ è l'iniezione canonica e dove $s : HK \longrightarrow {}^{HK}/_{K}$ è la suriezione canonica).