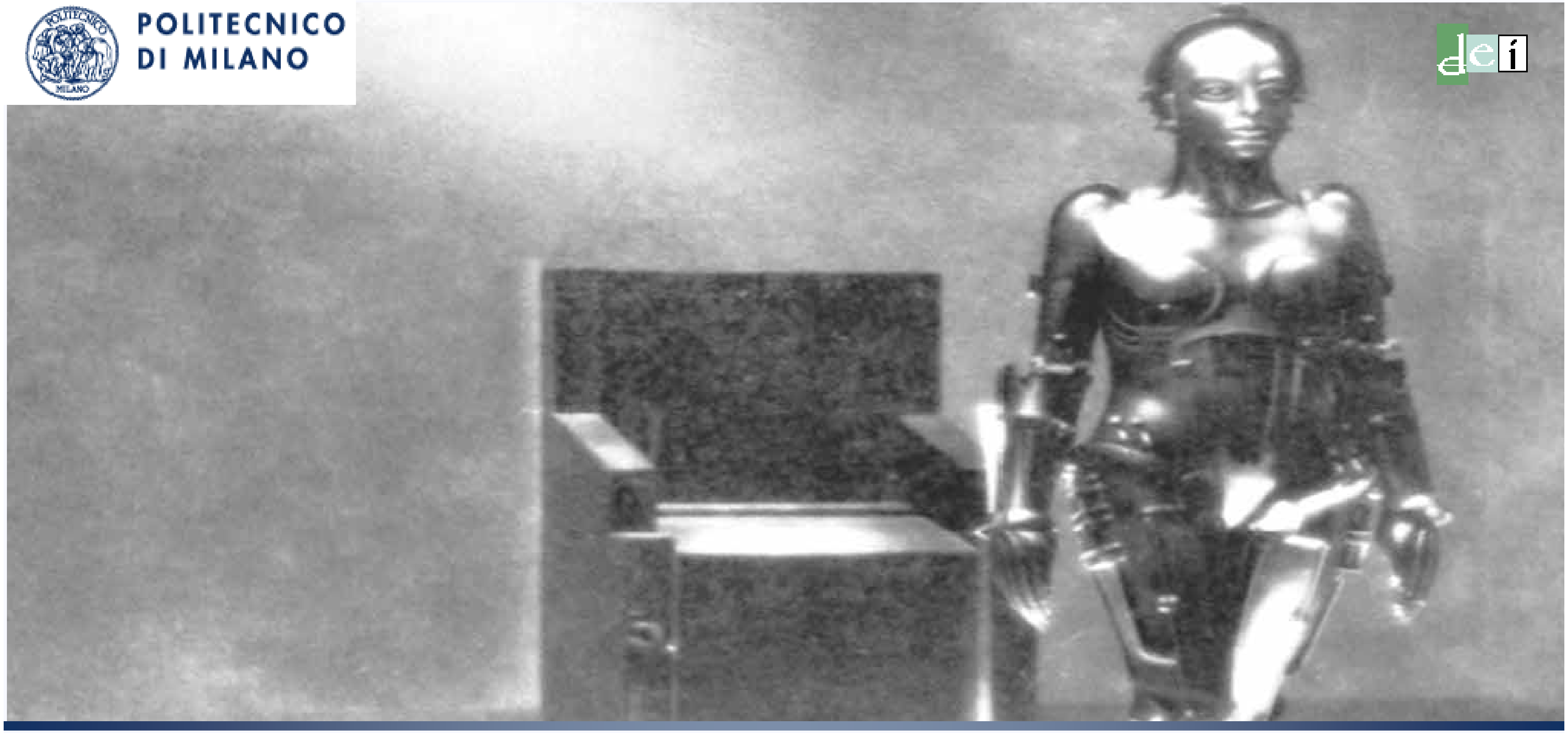
POLITECNICO DI MILANO



070342 – Robotica

http://home.dei.polimi.it/gini/robot/

Cinematica diretta

definizione

- Un **robot manipolatore** è una **catena cinematica** *sequenziale aperta* composta da **corpi rigidi (link)** uniti da **giunti**
  - no diramazioni
  - 1 estremità libera

Studio del moto

- **Cinematica** - legame fra le variabili generalizzate indipendenti **q** e le variabili cartesiane **x**
- **Dinamica** - equazioni di moto
- **Calcolo traiettoria** - una legge temporale per ottenere traiettoria vincolata
- **Controllo** - ottenere la risposta voluta dal sistema

2 aspetti della cinematica

DAI VALORI DEI GIUNTI AL RIFERIMENTO MANO

DATI: la lunghezza di ogni link
l’angolo di ogni giunto

TROVARE: la posizione del punto raggiunto dal robot

DAL RIFERIMENTO MANO AI VALORE DEI GIUNTI

DATI: la lunghezza di ogni link
la posizione della mano del robot

TROVARE: gli angoli dei giunti per ottenere tale posizione

Cinematica diretta e inversa

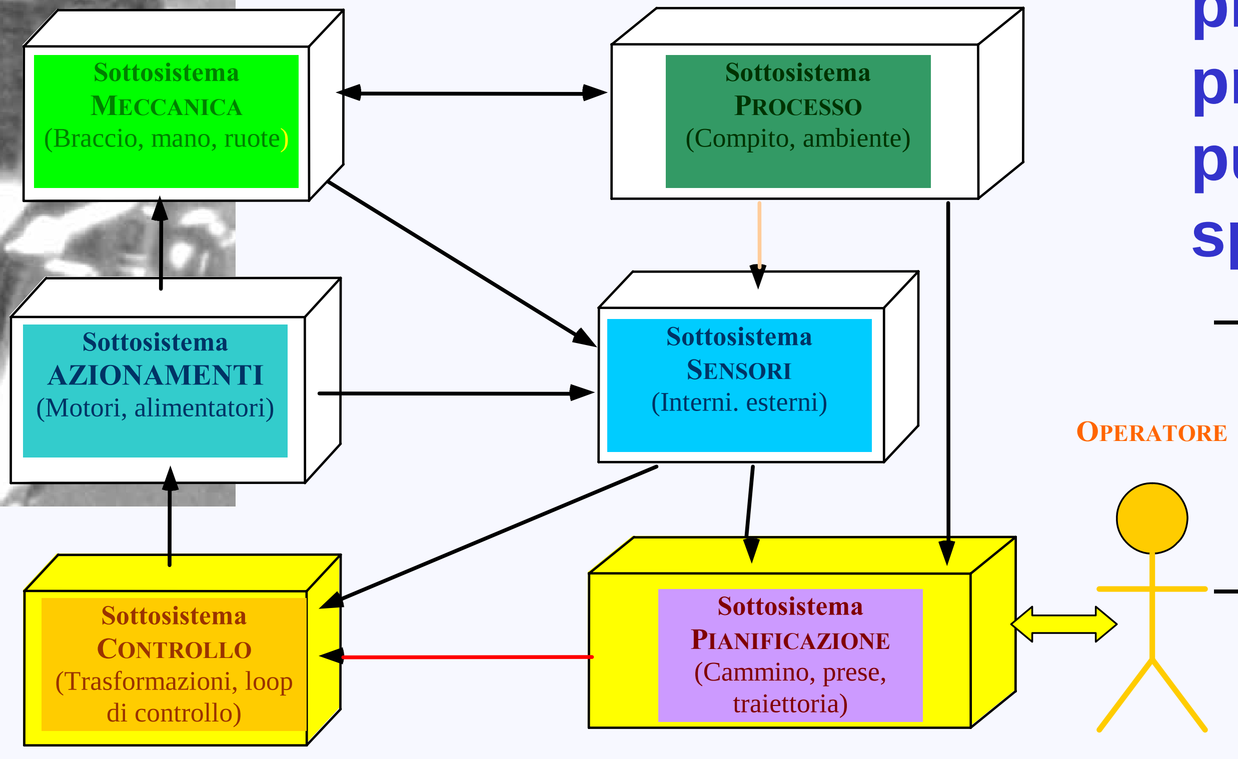
Parametri dei link

valori dei giunti: $\vartheta_1(t), \ldots \vartheta_n(t)$ → **Cinematica Diretta** → Posizione e orientamento dell'end effector

Parametri dei link

valori dei giunti: $\vartheta_1(t), \ldots, \vartheta_n(t)$ ← **Cinematica Inversa**

La cinematica nel sistema robot

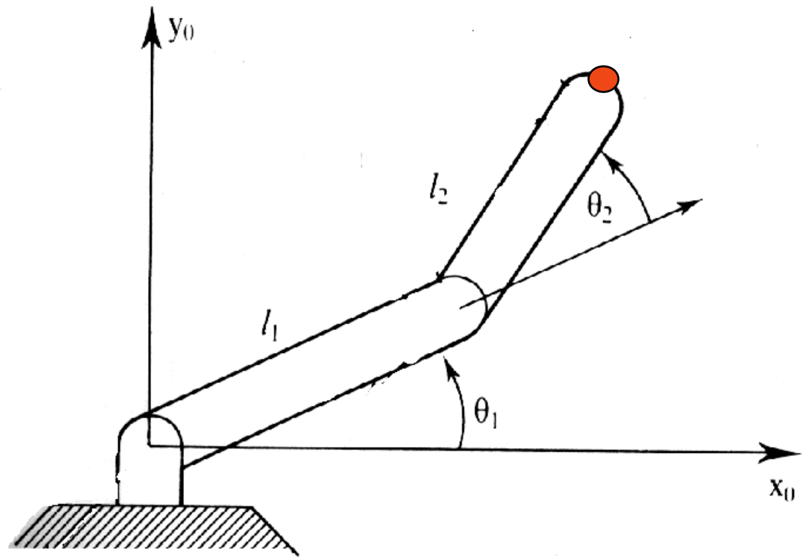


- Il sistema di pianificazione e programmazione può lavorare nello spazio del task
  - usare CD per integrare le posizioni dei giunti in una posizione cartesiana
  - usare CI per trasformare punti del task in valori dei giunti da attuare

Cinematica diretta

il braccio parte allineato lungo x_o; muoviamo il primo link di θ_1 e il secondo link di θ_2.

quale è la posizione della fine del braccio?



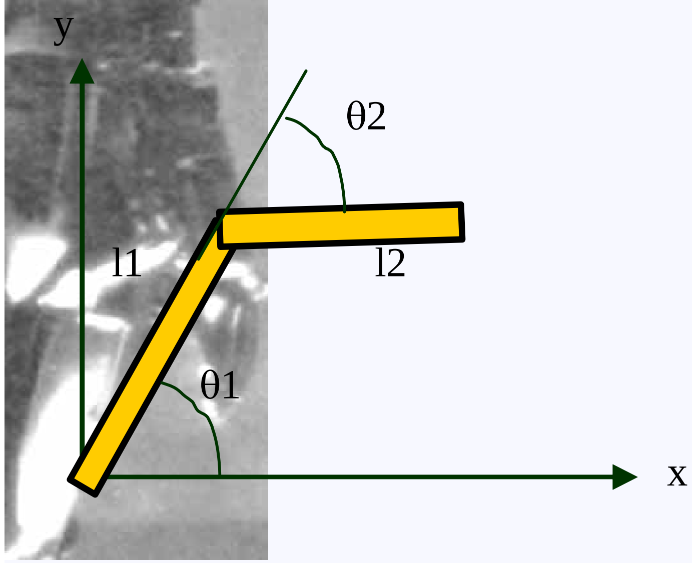
Soluzioni:

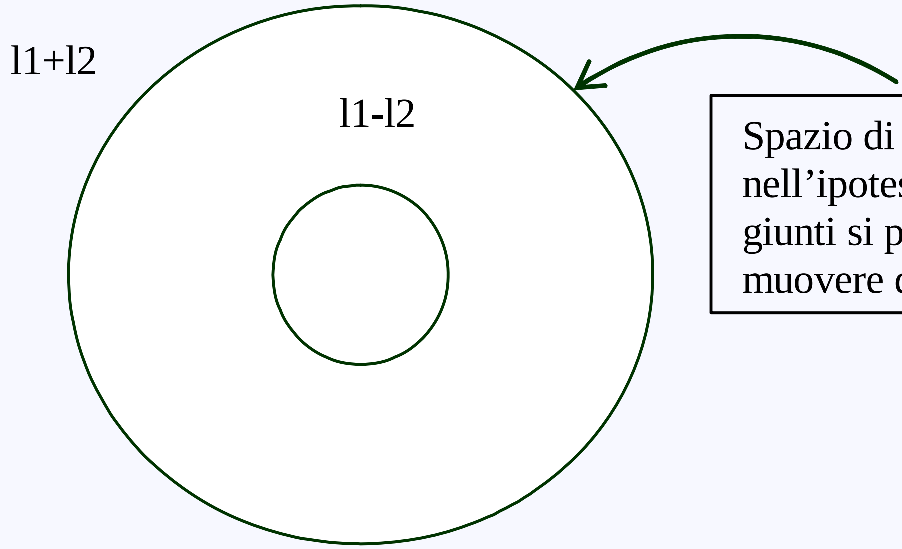
1. Approccio geometrico - è semplice l'esame sul piano, con più gradi di libertà può essere difficile.

2. Approccio algebrico - si usano le trasformazioni di coordinate.

Studio geometrico ad hoc

Es: RR planare
cinematica diretta - metodo geometrico



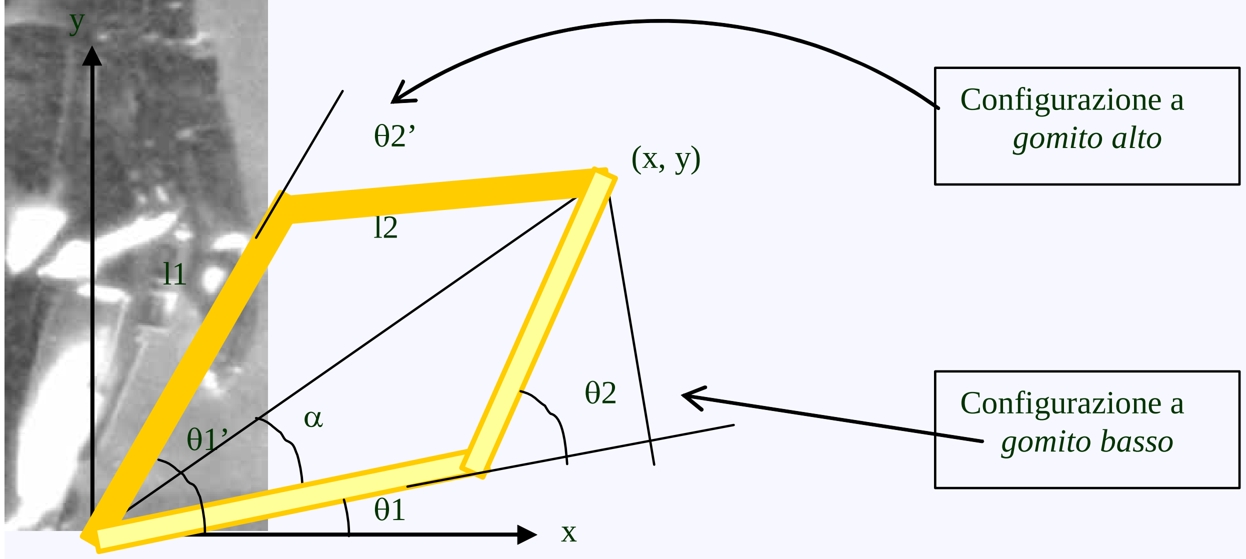


Spazio di lavoro nell'ipotesi che i giunti si possano muovere di 360 °

$$x = l1\cos(\theta 1) + l2\cos(\theta 1+\theta 2)$$

$$y = l1\,\mathrm{sen}(\theta 1) + l2\,\mathrm{sen}(\theta 1+\theta 2)$$

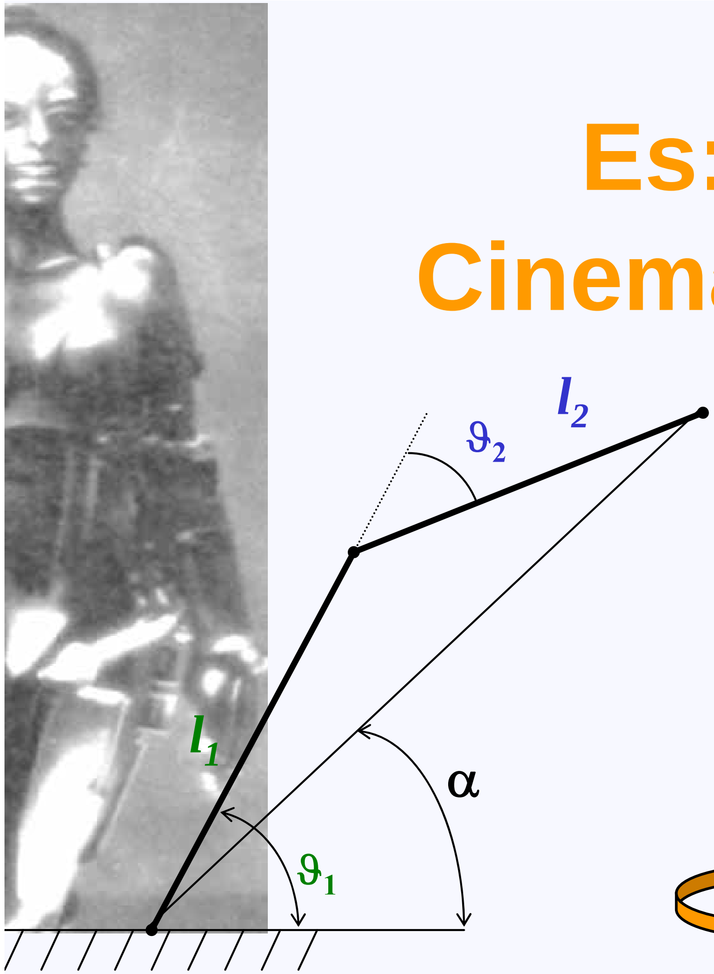
Es: RR planare
Cinematica inversa - 1



2 soluzioni o nessuna

Per trovare $\vartheta 2$ si usa la regola del coseno

Es: RR planare
Cinematica inversa - 2



$$x^2+y^2=(l_1+l_2\cdot C2)^2+(l_2\cdot S2)^2$$
$$=l_1^{\,2}+l_2^{\,2}C2^2+2\cdot l_1\cdot l_2\cdot C2+l_2^{\,2}\cdot S2^2$$
$$=l_1^{\,2}+l_2^{\,2}\left(C2^2+S2^2\right)+2\cdot l_1\cdot l_2\cdot C2$$
$$=l_1^{\,2}+l_2^{\,2}+2\cdot l_1\cdot l_2\cdot C2$$

$$C2=\frac{\left(x^2+y^2-l_1^{\,2}-l_2^{\,2}\right)}{2\cdot l_1\cdot l_2}$$

Es: RR planare
Cinematica inversa - 3

$$\vartheta 2 = \arccos\left[\frac{\left(x^2 + y^2 - l_1^{\,2} - l_2^{\,2}\right)}{2 \cdot l_1 \cdot l_2}\right]$$

2 soluzioni per θ2 che differiscono per segno (gomito alto/basso)

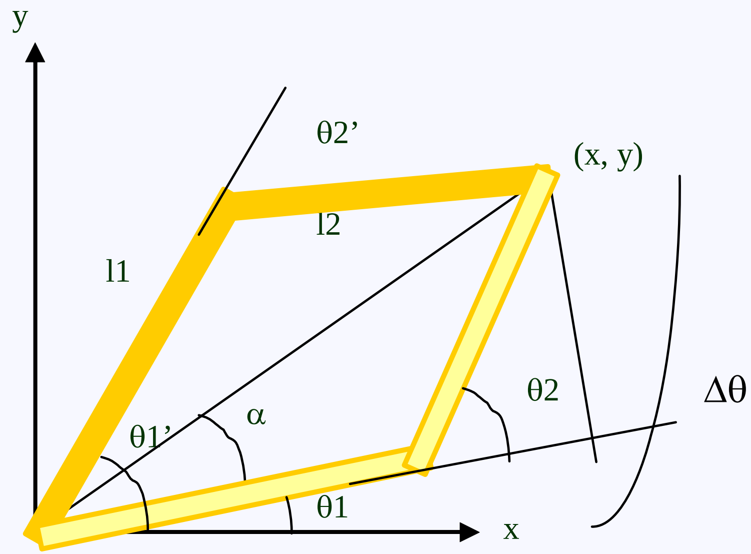
Per trovare θ1:

posto $\Delta\theta = \theta 1 + \alpha$

$\tan \Delta\theta = y/x$

$\tan(\alpha) = l_2 S2/(l_1 + l_2 C2)$

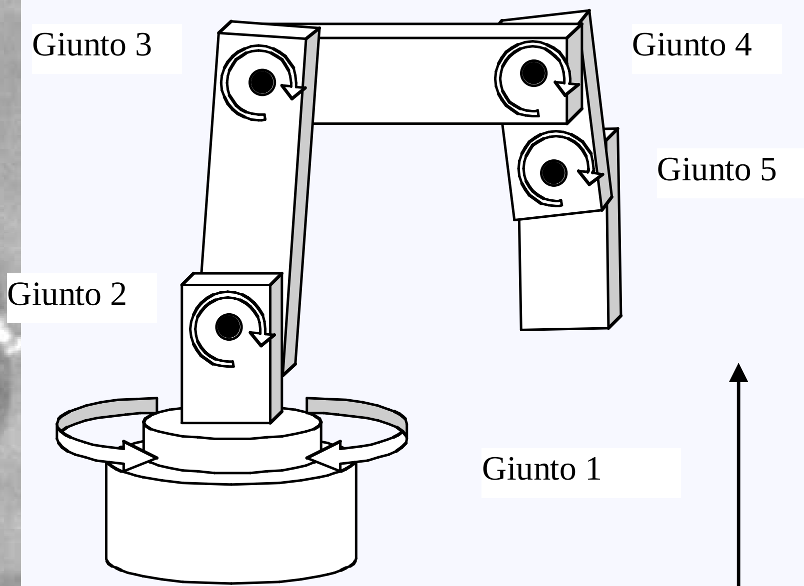
$\tan \theta 1 = \tan \Delta\theta - \tan \alpha$



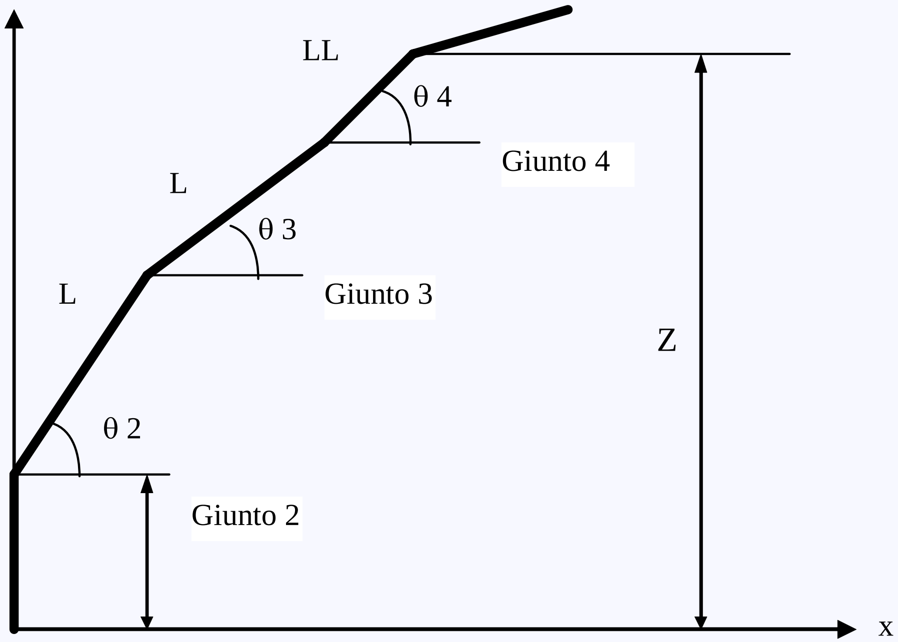
quindi:

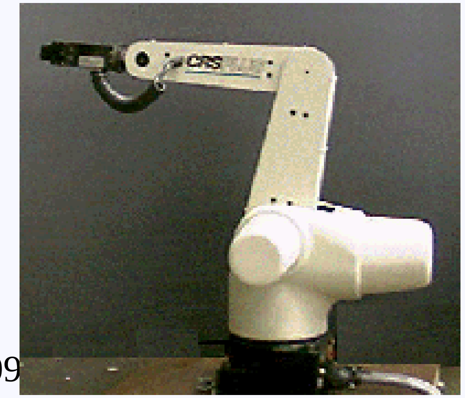
$$\vartheta 1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{l_2 \cdot S2}{l_1 + l_2 \cdot C2}\right)$$

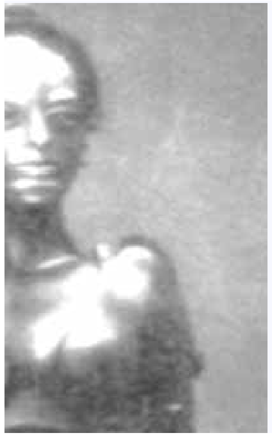
Esempi 5gdl - minimover, CRS255



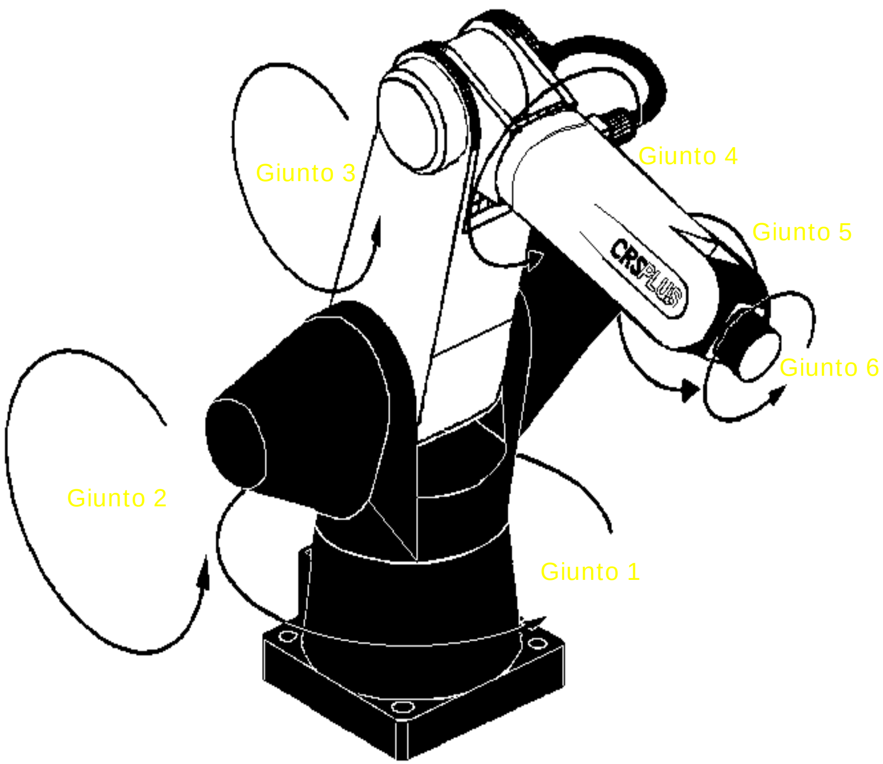
tutti i suoi links possono essere rappresentati in un piano.







ROBOT a 6 gdl



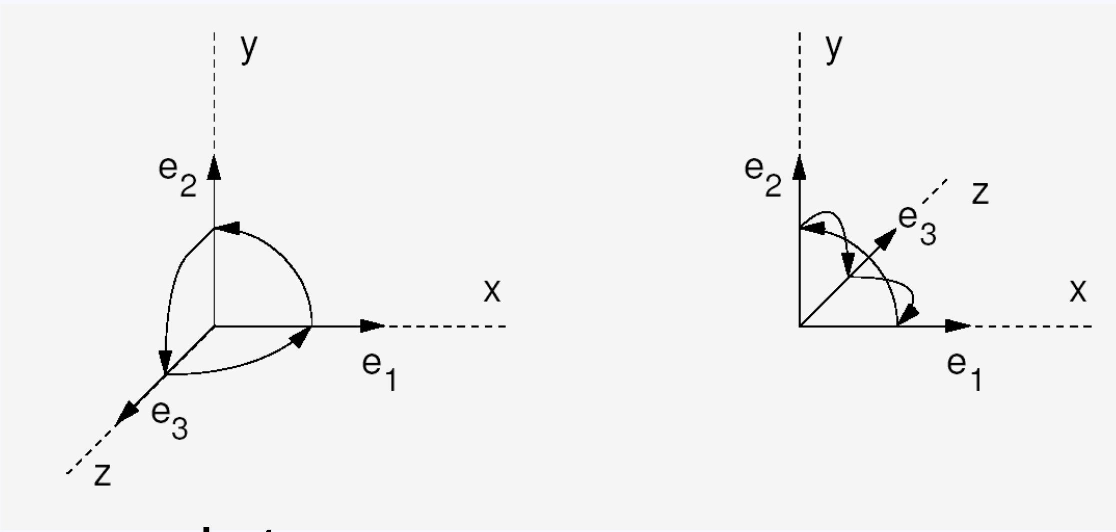
- Robot CRS 460
- La catena dei primi 3 link è planare, gli ultimi 3 link possono uscire dal piano

Metodo sistematico

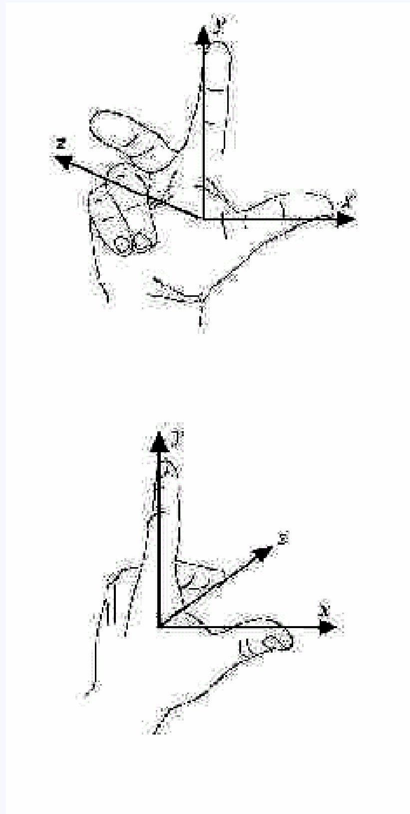
- Rappresentare ogni catena cinematica aperta con lo stesso formalismo
- Trovare soluzioni algebriche
  - Usare coordinate omogenee
- Costruire i riferimenti con un procedimento (quasi) algoritmico
  - Soluzione di Denavit Hartemberg - 1954

Regola della mano destra

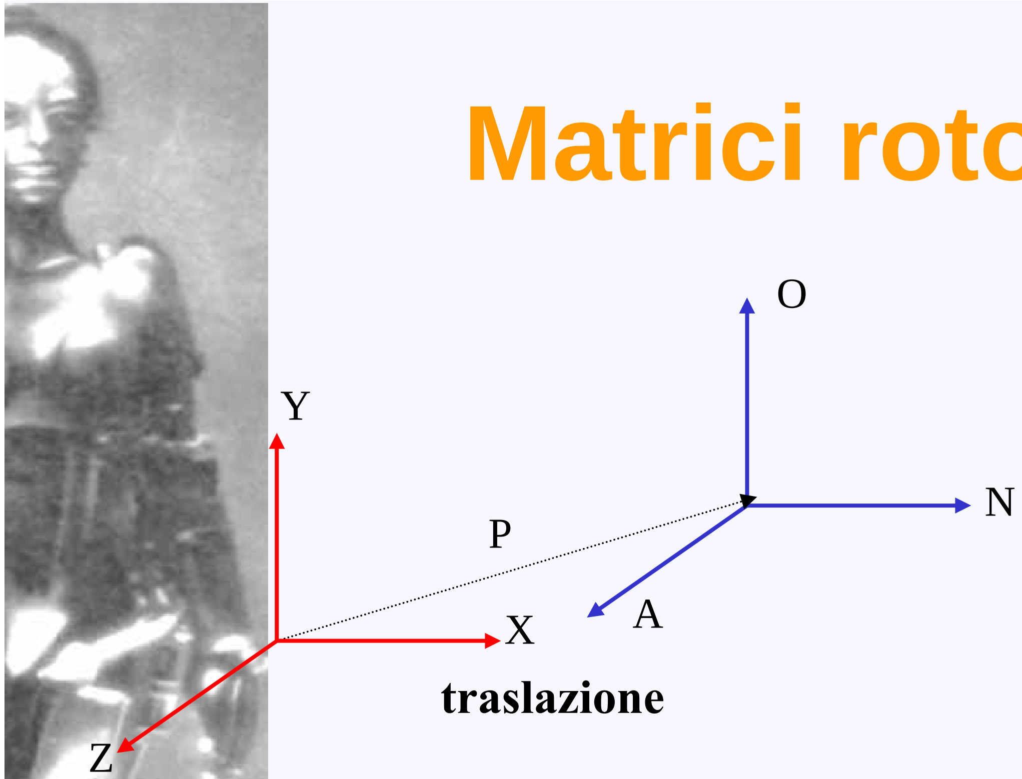
- In 3 dimensioni una base ortonormale si dice destrorsa se la rotazione attorno a z per portare x a coincidere con y è antioraria se vista dalla parte positiva di z



destrorso **sinistrorso**

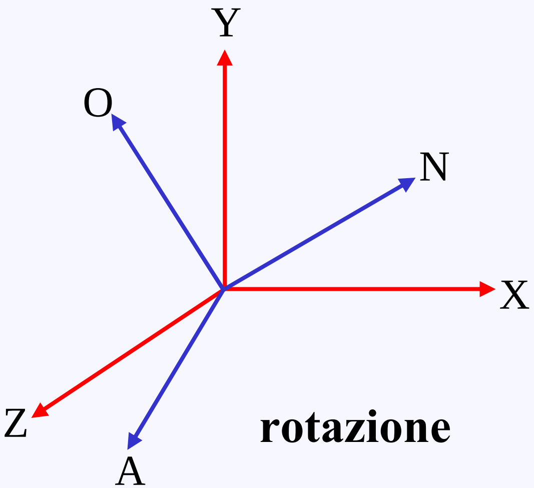


Matrici rototraslazione



traslazione

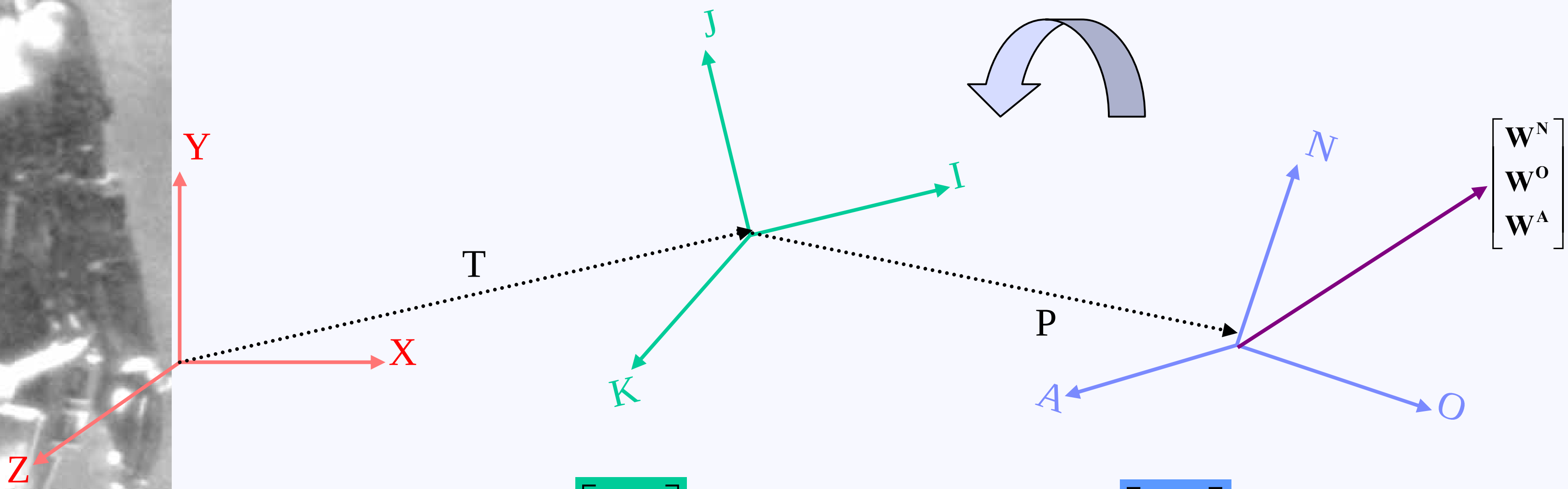
$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



rotazione

$$H = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dato un punto in NOA, esprimerlo in IJK e XYZ

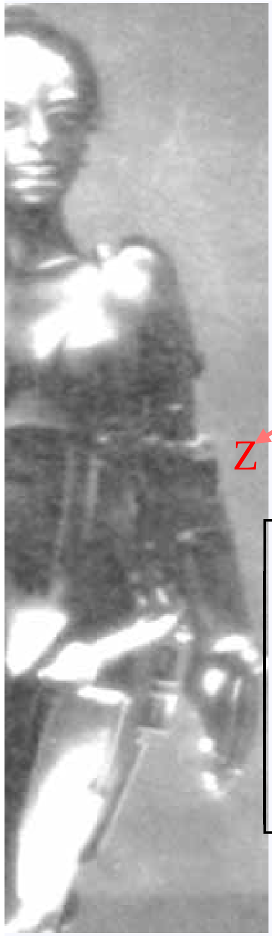


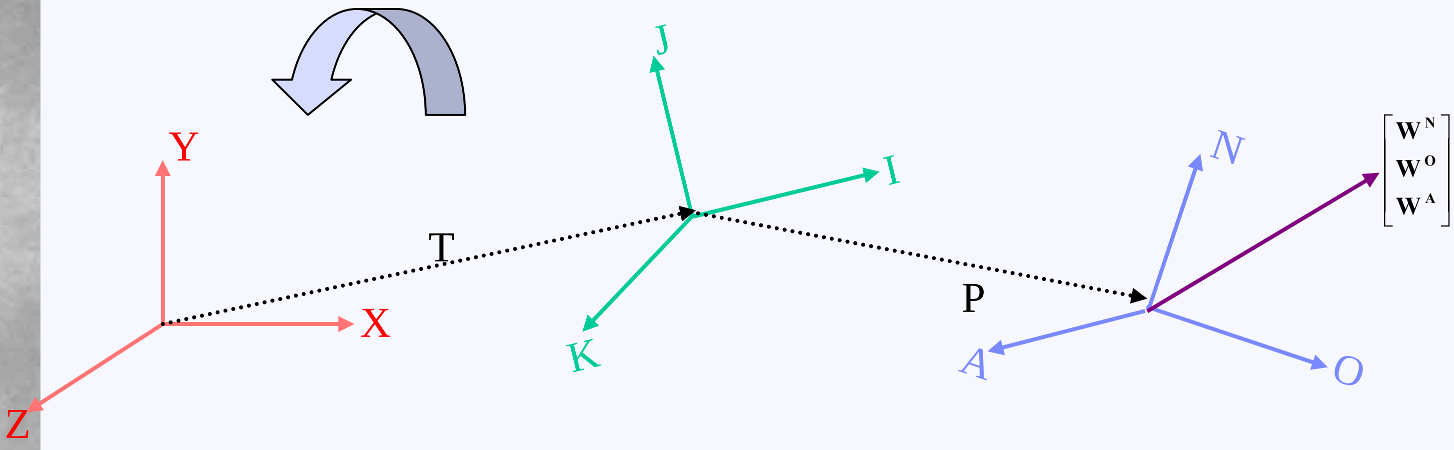
$\begin{bmatrix} W^X \\ W^Y \\ W^Z \end{bmatrix}$ Punto nel sistema X-Y-Z

$\begin{bmatrix} W^I \\ W^J \\ W^K \end{bmatrix}$ Punto nel sistema I-J-K

$\begin{bmatrix} W^N \\ W^O \\ W^A \end{bmatrix}$ Punto nel sistema N-O-A

$$\begin{bmatrix} W^I \\ W^J \\ W^K \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_i & o_i & a_i & P_i \\ n_j & o_j & a_j & P_j \\ n_k & o_k & a_k & P_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^N \\ W^O \\ W^A \\ 1 \end{bmatrix}$$





$$\begin{bmatrix} W^X \\ W^Y \\ W^Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x & j_x & k_x & T_x \\ i_y & j_y & k_y & T_y \\ i_z & j_z & k_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^I \\ W^J \\ W^K \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sostituendo per $\begin{bmatrix} W^I \\ W^J \\ W^K \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} W^X \\ W^Y \\ W^Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x & j_x & k_x & T_x \\ i_y & j_y & k_y & T_y \\ i_z & j_z & k_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_i & o_i & a_i & P_i \\ n_j & o_j & a_j & P_j \\ n_k & o_k & a_k & P_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^N \\ W^O \\ W^A \\ 1 \end{bmatrix}$$

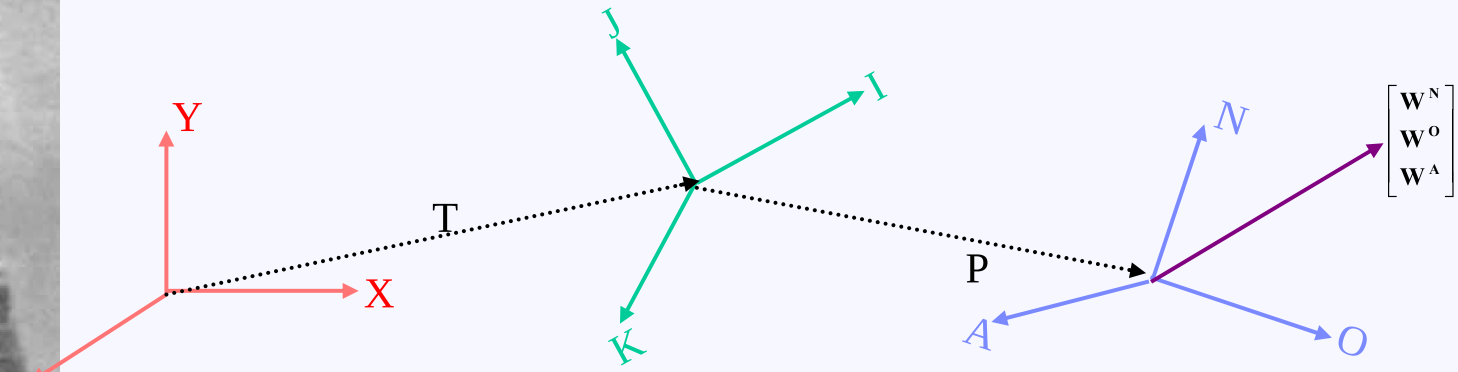
$$\begin{bmatrix} W^X \\ W^Y \\ W^Z \\ 1 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} W^N \\ W^O \\ W^A \\ 1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} i_x & j_x & k_x & T_x \\ i_y & j_y & k_y & T_y \\ i_z & j_z & k_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_i & o_i & a_i & P_i \\ n_j & o_j & a_j & P_j \\ n_k & o_k & a_k & P_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice prodotto

H può essere scritta come prodotto di 2 traslazioni e due rotazioni:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_x & j_x & k_x & 0 \\ i_y & j_y & k_y & 0 \\ i_z & j_z & k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_i \\ 0 & 1 & 0 & P_j \\ 0 & 0 & 1 & P_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_i & o_i & a_i & 0 \\ n_j & o_j & a_j & 0 \\ n_k & o_k & a_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

H = (traslazione rispetto a XYZ) * (Rotazione relativa a XYZ)
* (traslazione relativa a IJK) * (Rotazione relativa a IJK)



Altro modo per trovare H

H = (ruotare fino a che X-axis è allineato con T)

* (trasla lungo il nuovo T-axis di || T || (modulo di T))

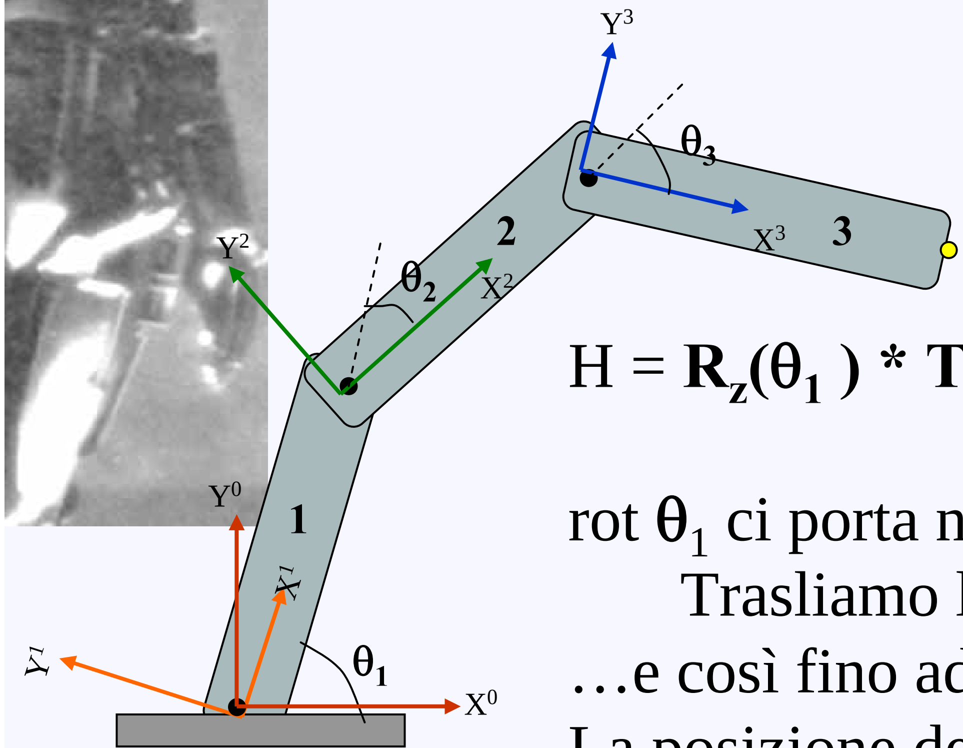
* (ruota per allineare T-axis con P)

* (trasla lungo P-axis di || P ||)

* (ruota per allineare P-axis con O-axis)

Dato un robot a 3 link planare l_1 l_2 l_3

Trovare la posizione del punto giallo in X^0Y^0



$$H = \mathbf{R_z(\theta_1\ )\ *\ T_{x1}(l_1)\ *\ R_z(\theta_2\ )}\ *\ \mathbf{T_{x2}(l_2)\ *\ R_z(\theta_3\ )}$$

rot θ_1 ci porta nel riferimento X^1Y^1

Trasliamo lungo X^1 di l_1.

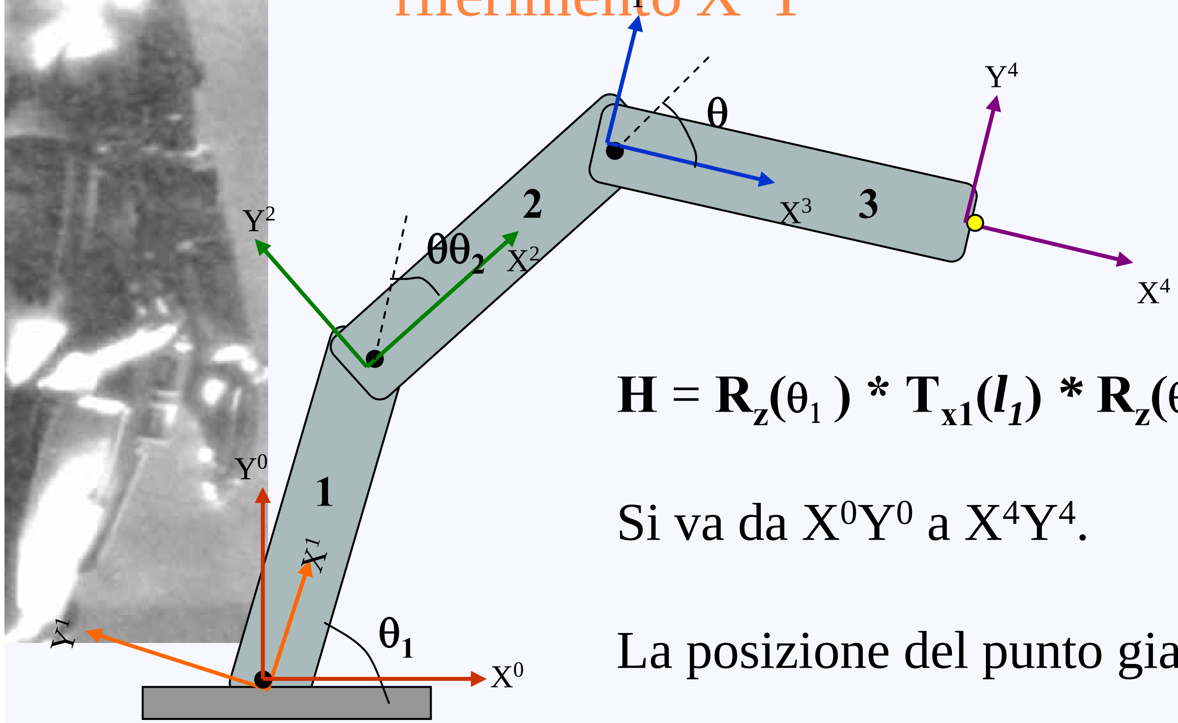
…e così fino ad arrivare a X^3Y^3.

La posizione del punto giallo in X^3Y^3 è $(l_3, 0)$.

H moltiplicato per $(l_3, 0)$ ci dà le coordinate del punto giallo in X^0Y^0

variazione:

usare il punto giallo come origine di un nuovo riferimento X^4Y^4



$$H = R_z(\theta_1) * T_{x1}(l_1) * R_z(\theta_2) * T_{x2}(l_2) * R_z(\theta_3) * T_{x3}(l_3)$$

Si va da X^0Y^0 a X^4Y^4.

La posizione del punto giallo in X^4Y^4 è (0,0).

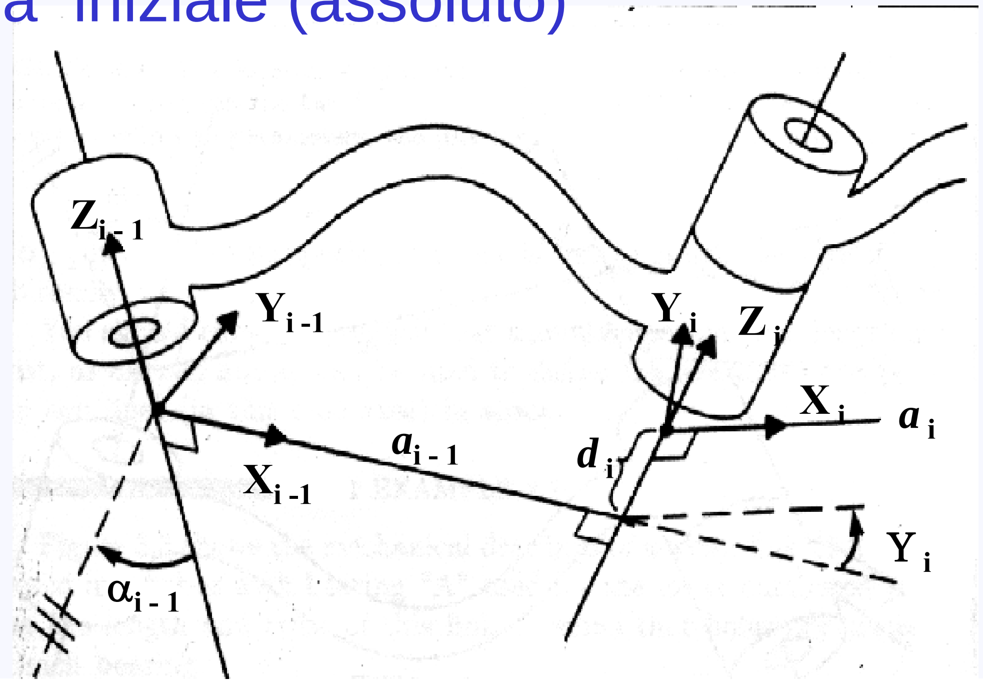
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Denavit – Hartenberg

Uso di matrici per catene sequenziali aperte

Matrice D-H

- La matrice di Denavit-Hartenberg esprime il passaggio da un sistema di coordinate al successivo.
- Combinando tutte le matrici e una tabella dei parametri D-H si ottiene una matrice che trasforma un punto espresso nel sistema finale (mano) nel sistema iniziale (assoluto)



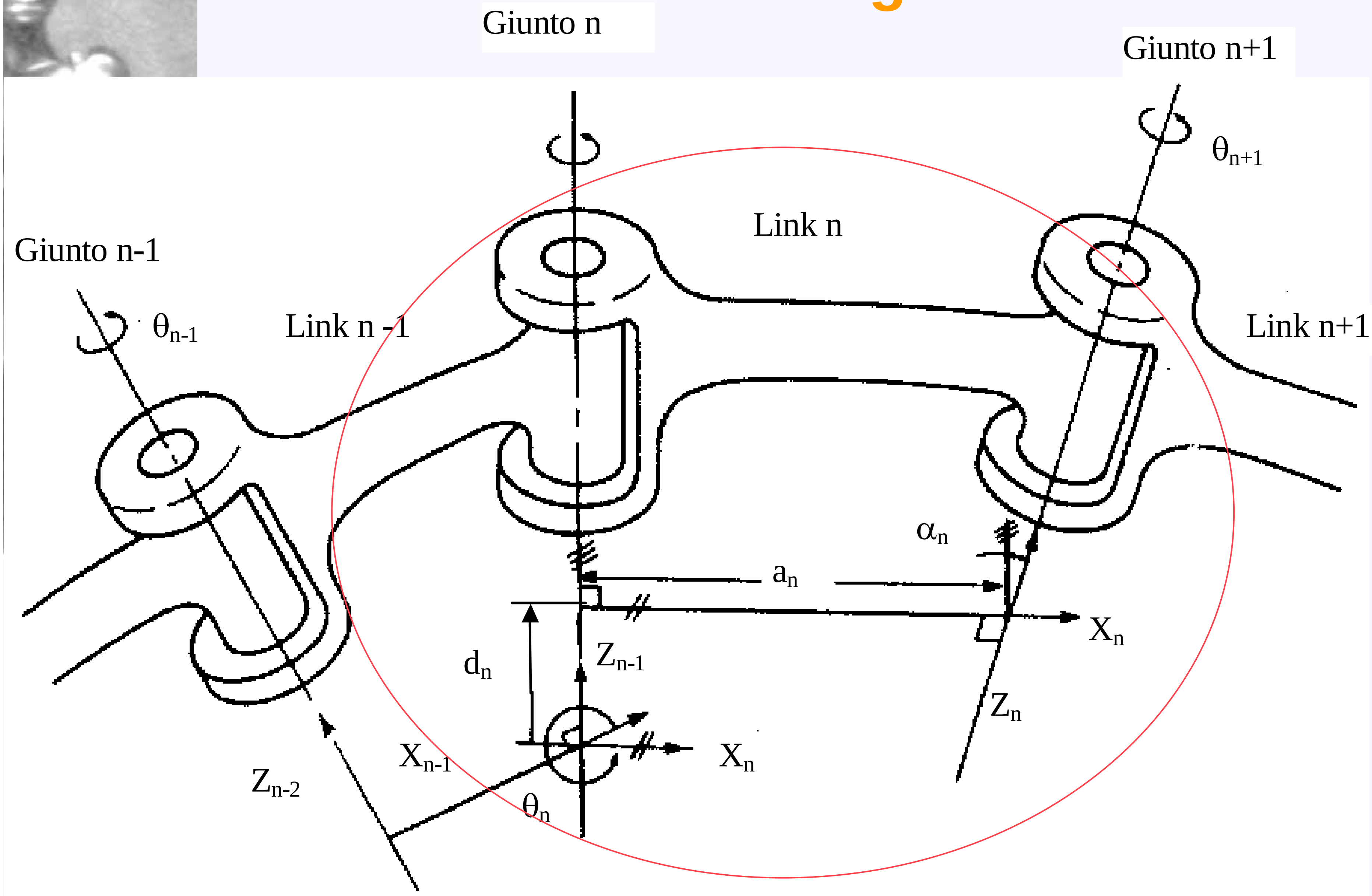
Denavit-Hartenberg

IDEA: ad ogni giunto assegnare in modo sistematico un sistema di coordinate.

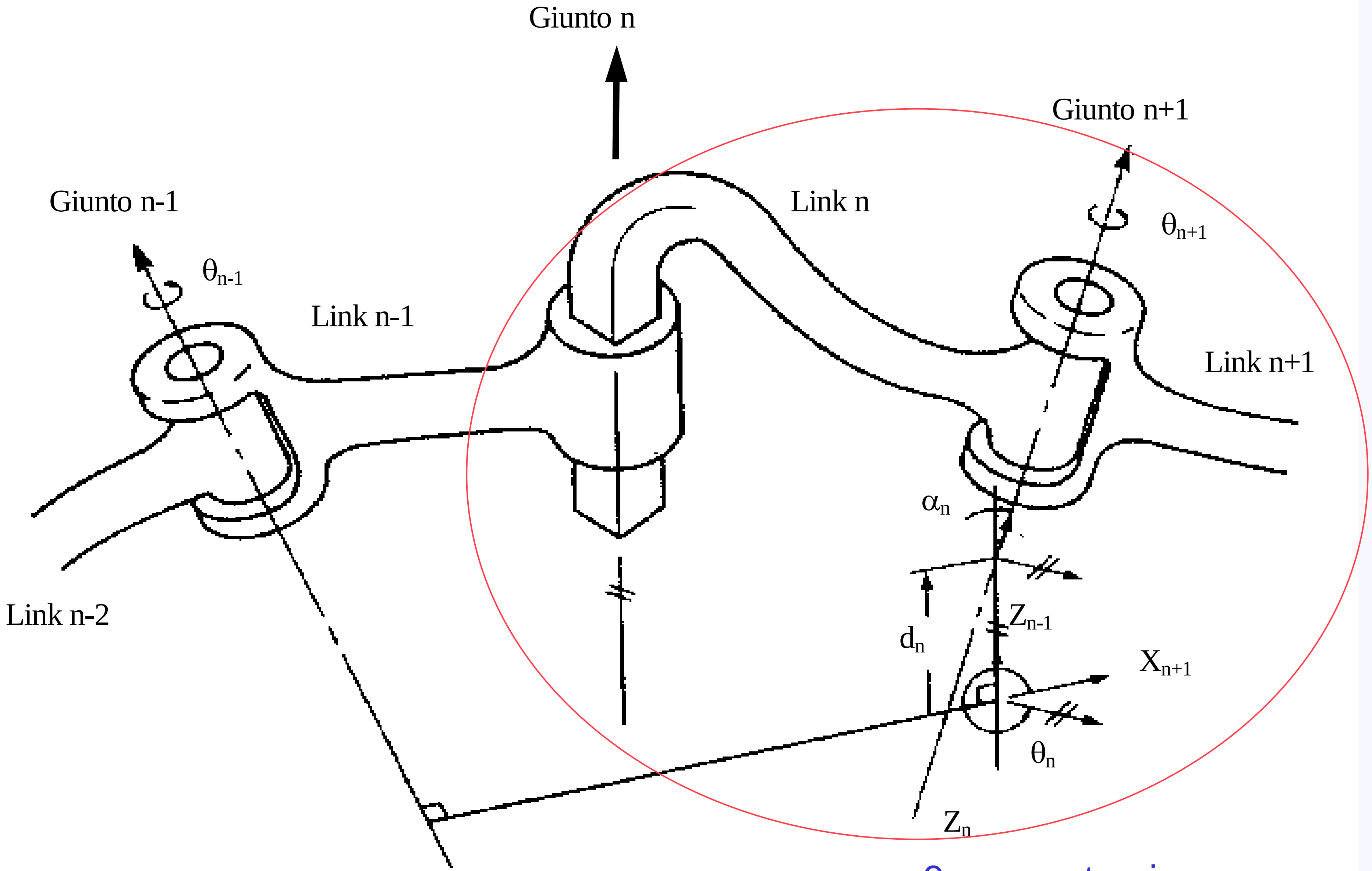
4 parametri descrivono come un riferimento (*i*) è legato al precedente (*i -1*):

α, ***a*** , ***d***, θ

Metodo DH – giunto R



MetodoDH – giunto prismatico



- an = 0 per costruzione

Parametri di D-H

- $\theta_{\mathbf{n}}$ angolo fra l'asse x_{n-1} e x_n attorno a z_{n-1} (*variabile per giunto di rotazione*).
- **d** $_{\mathbf{n}}$ distanza fra x_{n-1} e x_n misurata lungo la direzione di z_{n-1} (*variabile per giunto di traslazione*).
- **a** $_{\mathbf{n}}$ "**lunghezza**" del link, distanza fra z_{n-1} e z_n lungo l'asse x_n .
- α_n angolo fra gli assi z_{n-1} e z_n intorno a x_n (dipende dalla geometria del link - angolo di "**twist**").

stabilire i sistemi di coordinate

Detto link 0 la terra, si definiscono :

- Un sistema di coordinate fondamentale $\mathbf{x_0}$ $\mathbf{y_0}$ $\mathbf{z_0}$ in corrispondenza del piede della catena
- Un sistema di coordinate $\mathbf{x_i}$ $\mathbf{y_i}$ $\mathbf{z_i}$ di ogni link **i** in corrispondenza del giunto **i+1** successivo
  - $\mathbf{z_i}$ giaccia sull'asse di movimento del giunto **i+1**.
  - $\mathbf{x_i}$ sia perpendicolare a $\mathbf{z_{i-1}}$ e se ne allontani.
  - $\mathbf{y_i}$ sia destroso rispetto a $\mathbf{x_i}$ e $\mathbf{z_i}$.
    - $\mathbf{x_i}$ è perpendicolare a $\mathbf{z_{i-1}}$ oltre che a $\mathbf{z_i}$. Questa perpendicolare esiste ed è unica (è il prodotto vettoriale) , tranne nel caso di parallele.

Algoritmo D-H

1. robot in posizione di riposo. Si fissa x_0 y_0 z_0

2. Per i=1, .. ,n-1 eseguire i passi 3 – 6

3. Si stabilisce l'asse del giunto **i+1** su $\mathbf{z}_i$.
4. Si posiziona l'origine i nel punto di intersezione fra $\mathbf{z_i}$ e $\mathbf{z_{i-1}}$ o nel punto di intersezione del segmento di minima distanza fra gli assi stessi, con $\mathbf{z_i}$
5. Si determina $\mathbf{x_i}$ sul segmento di minima distanza oppure nella direzione del link orientato verso la mano del robot.

$$X_i = \pm(Z_{i-1} \times Z_i)/\|Z_{i-1} \times Z_i\|$$

6. Si determina l'asse $\mathbf{y_i}$ con la regola della mano destra.

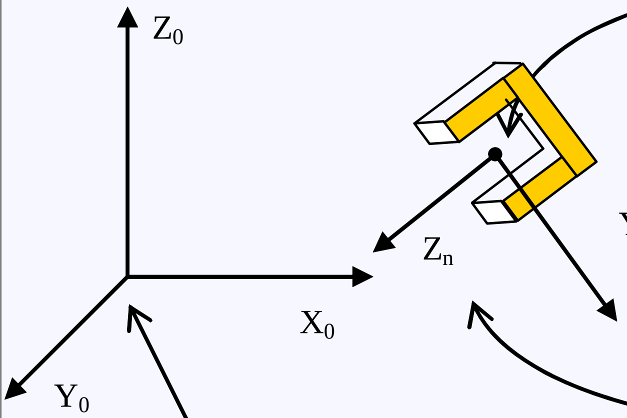
$$Y_i = +(Z_i \times X_i)/\|Z_i \times X_i\|$$

7. Si stabilisce il sistema di riferimento n-esimo nella mano

8. Si trovano i parametri DH iterando per i=1, .. ,n i passi da 9 a 12

9. $\mathbf{d_i}$: distanza dall'origine di i-1 all'intersezione del segmento di minima distanza fra z_i e z_{i-1}, con l'asse z_{i-1}.
10. $\mathbf{a_i}$: segmento di minima distanza fra z_i e z_{i-1}.
11. θ_i angolo di rotazione fra x_{i-1} e x_i, attorno all'asse z_{i-1}
12. α_i angolo di rotazione fra z_{i-1} e z_i, attorno all'asse x_i.

Convenzione per mano e presa

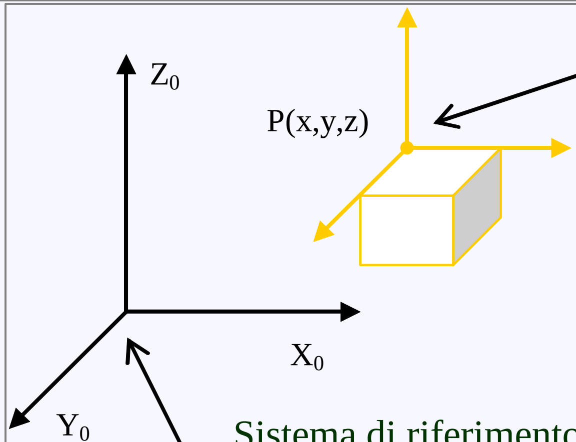


Si pone l'origine del sistema di riferimento fra le dita della

Si pone l'asse Y lungo la direzione di scorrimento

Si pone l'asse Z lungo la direzione di approccio cioè nel verso dell'apertura delle dita.

Sistema di riferimento assoluto



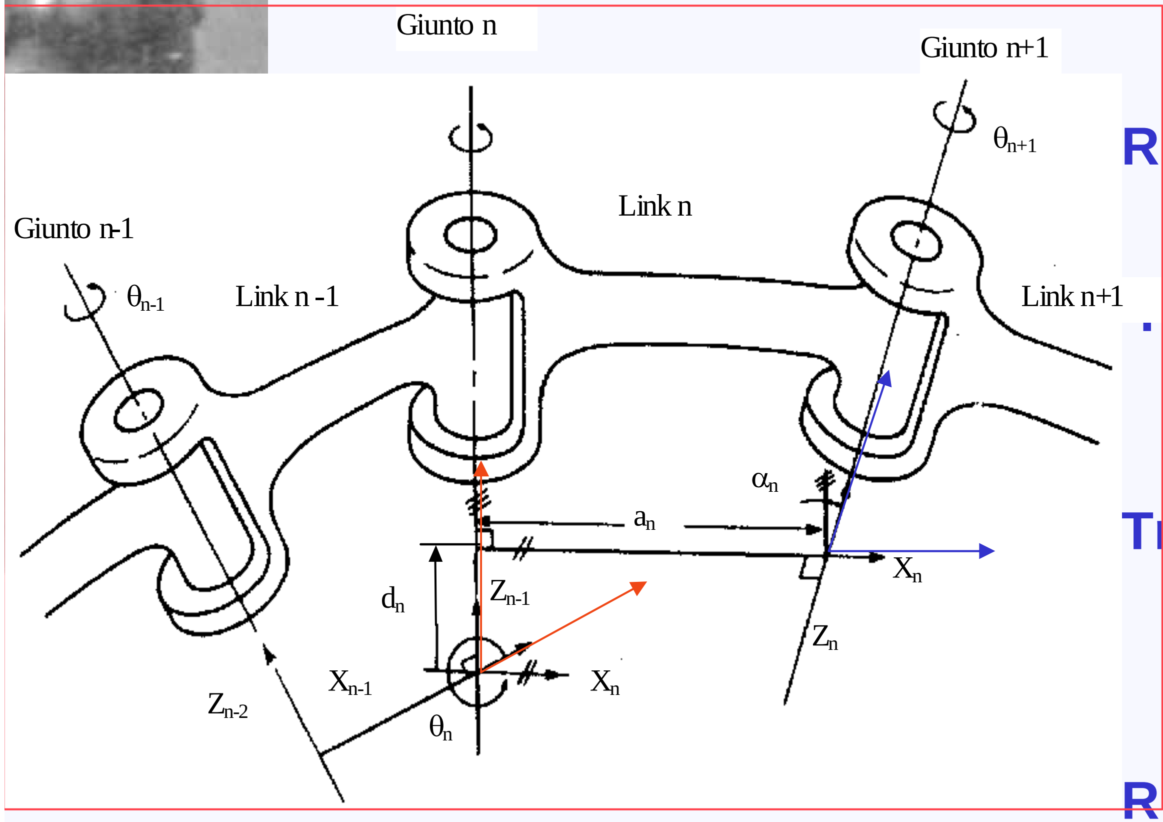
Si considera un punto dell'oggetto su cui si pone l'origine del sistema di riferimento. Si orientano gli assi come il sistema assoluto

Sistema di riferimento assoluto

Cinematica Diretta

- 1 Mettere il manipolatore in posizione zero
- 2 Assegnare i sistemi di riferimento ai giunti
- 3 Calcolare i parametri DH
- 4 Calcolare le matrici di rototraslazione **Ai** per passare dal sistema i-esimo a quello i+1-esimo (**Ai** contengono i parametri DH diversi da zero)
- 5 Moltiplicare le matrici **Ai** per trovare la matrice **T** (passare dal sistema x_0 y_0 z_0.al sistema x_n y_n z_n).
- 6 Dalla matrice **T** estrarre la *posizione*.
- 7 Esaminare la sottomatrice di rotazione ed estrarre le componenti dell'*orientamento*.

Calcolo matrice A



trasformazione dal sistema *i-1* a *i* rispetto a i-1.

- **Ruotare** x_{i-1} di θ_i attorno a z_{i-1}, in modo da allinearlo con x_i
- **Traslare** l'origine del sistema i-1 di una quantità d_i lungo z_{i-1}, fino a sovrapporre x_{i-1} ad x_i
- **Traslare** l'origine del sistema i-1 di una quantità a_i lungo x_i, fino a portarla nell'origine del sistema i
- **Ruotare** z_{i-1} attorno ad x_i di un angolo α_i, fino a far coincidere i due sistemi

Matrice A

$$\mathbf{A}_{\text{i-1,i}}^{\text{i-1}} = \mathbf{Trasl}(0,0,\mathbf{d}_{\text{i}}) \cdot \mathbf{Rot}(\mathbf{z}_{\text{i-1}},\theta_{\text{i}}) \cdot \mathbf{Trasl}(\mathbf{a}_{\text{i}},0,0) \cdot \mathbf{Rot}(\mathbf{x}_{\text{i}},\alpha_{\text{i}})$$

$$\mathbf{A}_{\text{i-1,i}}^{\text{i-1}} = \begin{pmatrix} C\theta_{\text{i}} & -C\alpha_{\text{i}}S\theta_{\text{i}} & S\alpha_{\text{i}}S\theta_{i} & a_{\text{i}}C\theta_{\text{i}} \\ S\theta_{\text{i}} & C\alpha_{\text{i}}C\theta_{\text{i}} & -S\alpha_{\text{i}}C\theta_{\text{i}} & a_{\text{i}}S\theta_{\text{i}} \\ 0 & S\alpha_{\text{i}} & C\alpha_{\text{i}} & d_{\text{i}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Giunto rotazione

$$\mathbf{A}_{\text{i-1,i}}^{\text{i-1}} = \begin{pmatrix} C\theta_{\text{i}} & -C\alpha_{\text{i}}S\theta_{\text{i}} & S\alpha_{\text{i}}S\theta_{i} & 0_{\text{i}} \\ S\theta_{\text{i}} & C\alpha_{\text{i}}C\theta_{\text{i}} & -S\alpha_{\text{i}}C\theta_{\text{i}} & 0 \\ 0 & S\alpha_{\text{i}} & C\alpha_{\text{i}} & d_{\text{i}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Giunto traslazione (a_i=0)

Matrice T

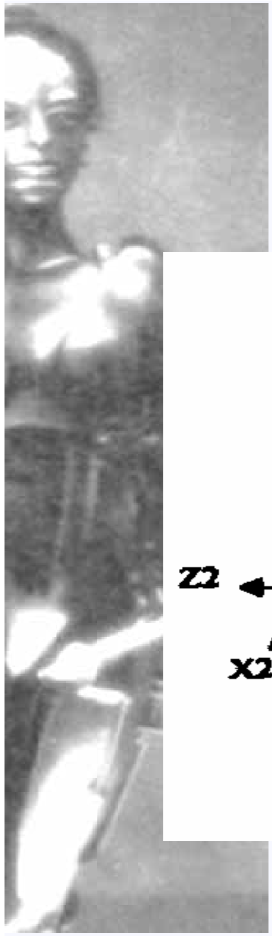
$$\mathbf{T} = \mathbf{A}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{0,6}} = \mathbf{A}^{0}_{0,1} \cdot \mathbf{A}^{1}_{1,2} \cdot \mathbf{A}^{2}_{2,3} \cdot \mathbf{A}^{3}_{3,4} \cdot \mathbf{A}^{4}_{4,5} \cdot \mathbf{A}^{5}_{5,6}$$

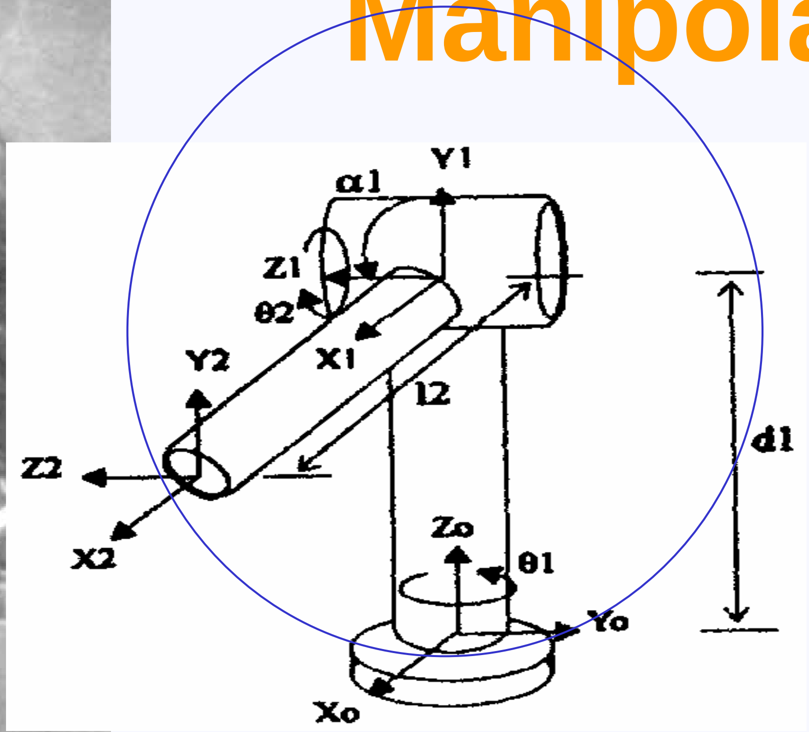
$$P_{i-1} = \mathbf{A}^{i-1}_{i-1,i} \cdot P_i$$

- Scopo: Dato un punto nel sistema mobile (mano), ottenerlo nel sistema fisso
- Interpretazione geometrica

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & p_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & p_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore RR





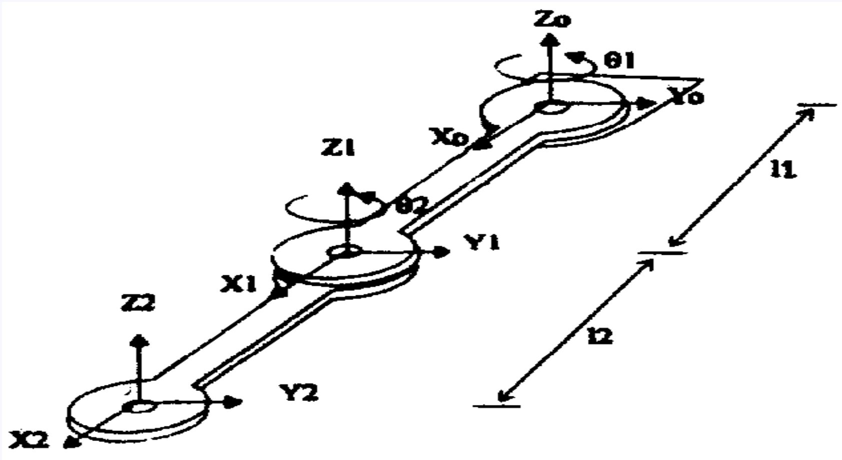
- spazio di lavoro: la superficie interna di una sfera
- possibile parte iniziale di robot sferico o articolato

Link	θ	α	a	d
1	θ_1	90°	0	d_1
2	θ_2	0	l_2	0

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}^{0}_{0,1} \cdot \mathbf{A}^{1}_{12} = \begin{bmatrix} C1 & 0 & S1 & 0 \\ S1 & 0 & -C1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & l_2 \cdot C2 \\ S2 & C2 & 0 & l_2 \cdot S2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore RR planare

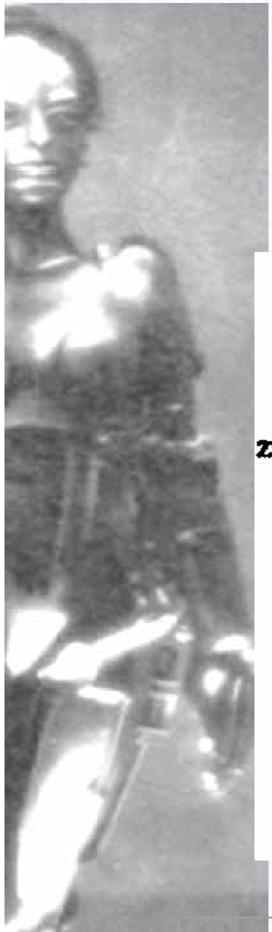
Possibile parte di robot SCARA

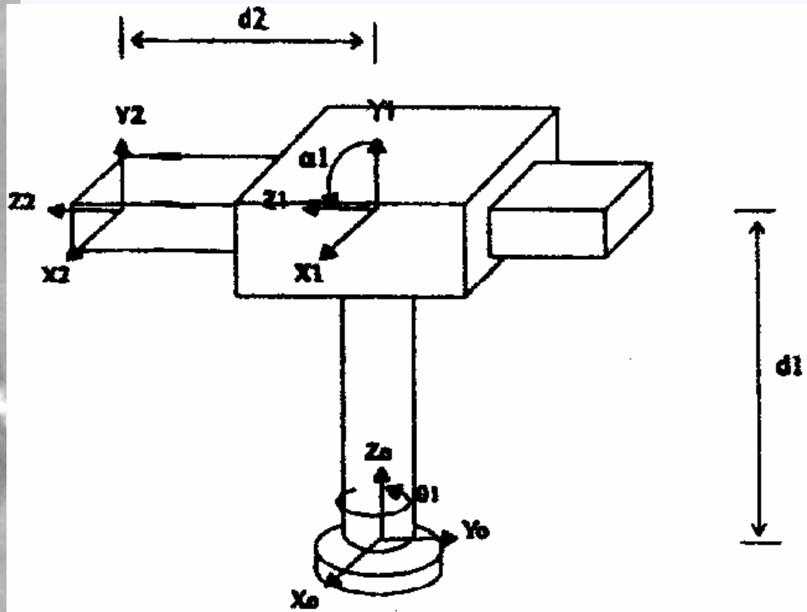


Link	θ	α	**a**	**d**
1	θ_1	0	l_1	0
2	θ_2	0	l_2	0

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}^{0}_{0,1} \cdot \mathbf{A}^{1}_{12} = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & l_1 \cdot C1 \\ S1 & C1 & 0 & l_1 \cdot S1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & l_2 \cdot C2 \\ S2 & C2 & 0 & l_2 \cdot S2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore RT



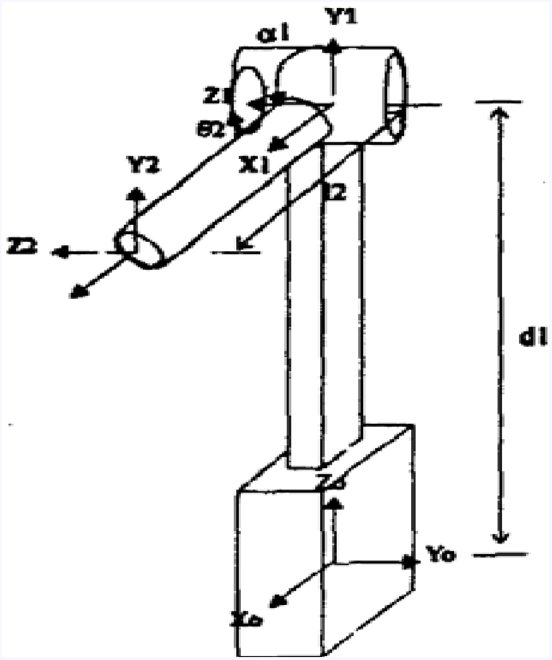


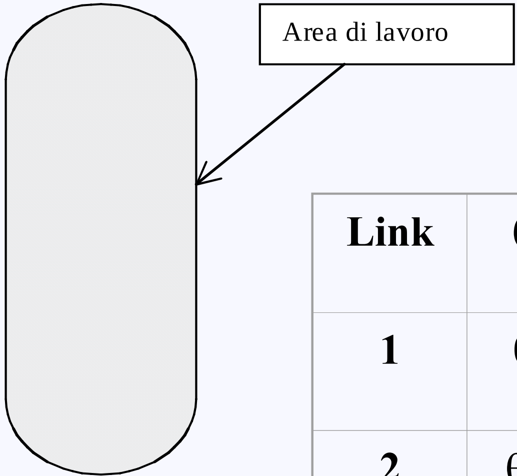
- Spazio di lavoro: un cerchio nel piano x1 z1

Link	θ	α	a	d
1	θ_1	90°	0	d_1
2	0	0	0	d_2

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}^{0}_{0,1} \cdot \mathbf{A}^{1}_{12} = \begin{bmatrix} C1 & 0 & S1 & 0 \\ S1 & 0 & -C1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore TR

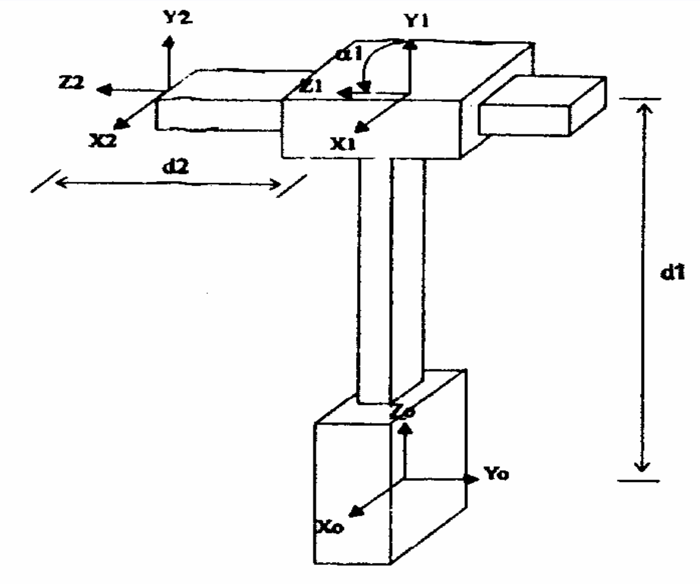




Link	θ	α	a	d
1	0	90°	0	d_1
2	θ_2	0	l_2	0

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}^{0}_{0,1} \cdot \mathbf{A}^{1}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & l_2 \cdot C2 \\ S2 & C2 & 0 & l_2 \cdot S2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore TT

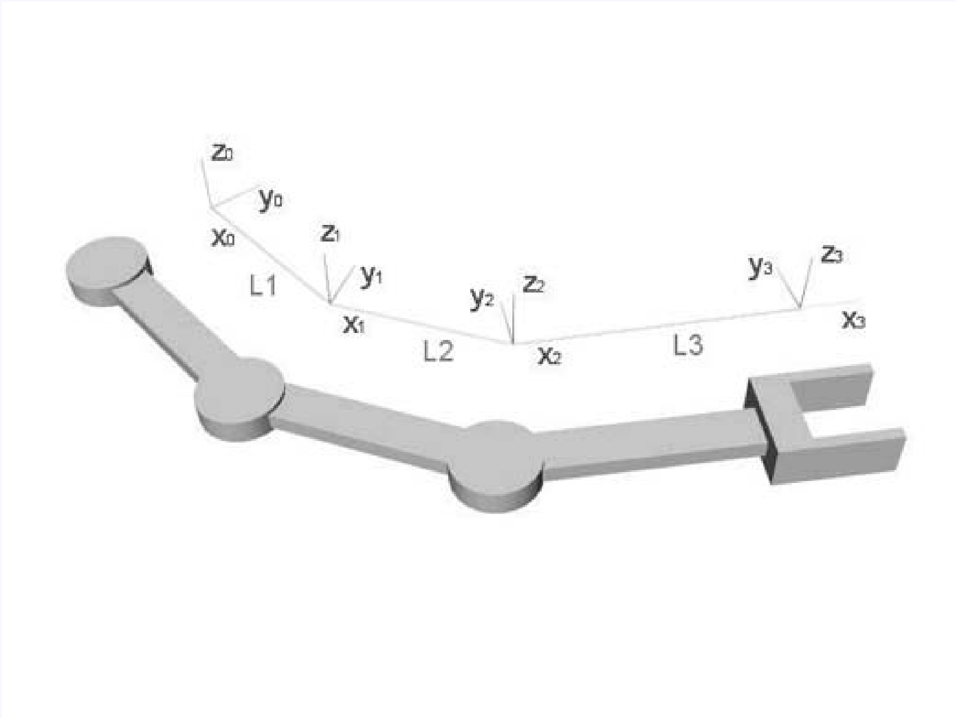


Link	θ	α	a	d
1	0	90°	0	d_1
2	0	0	0	d_2

Spazio di lavoro: un rettangolo
Possibile parte di robot cartesiano

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}_{0,1}^{0} \cdot \mathbf{A}_{12}^{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

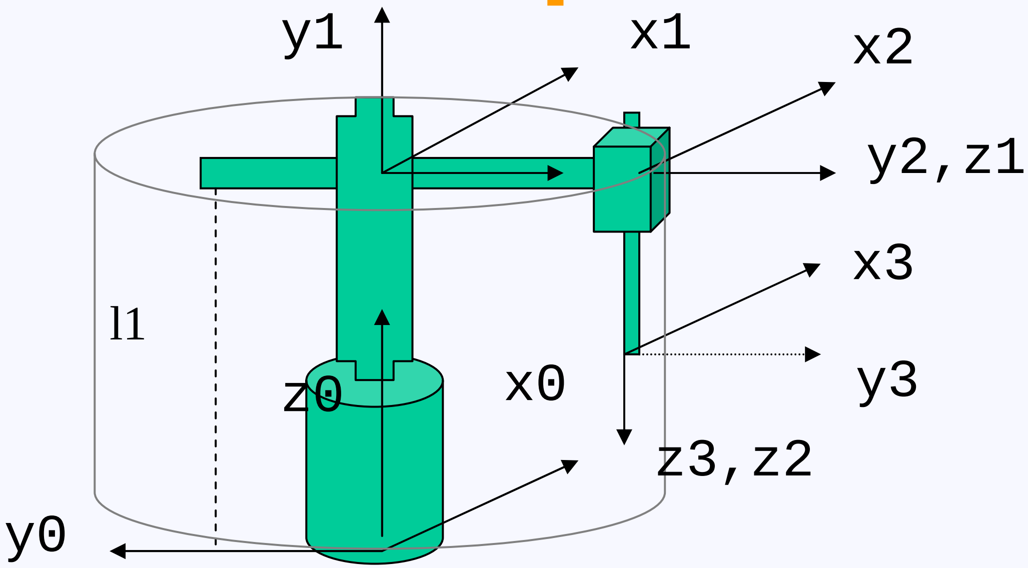
Manipolatore RRR planare



•Raggiunge x, y nello spazio cartesiano (è ridondante)

•Raggiunge x, y, theta nello spazio cartesiano (come robot SCARA con roll)

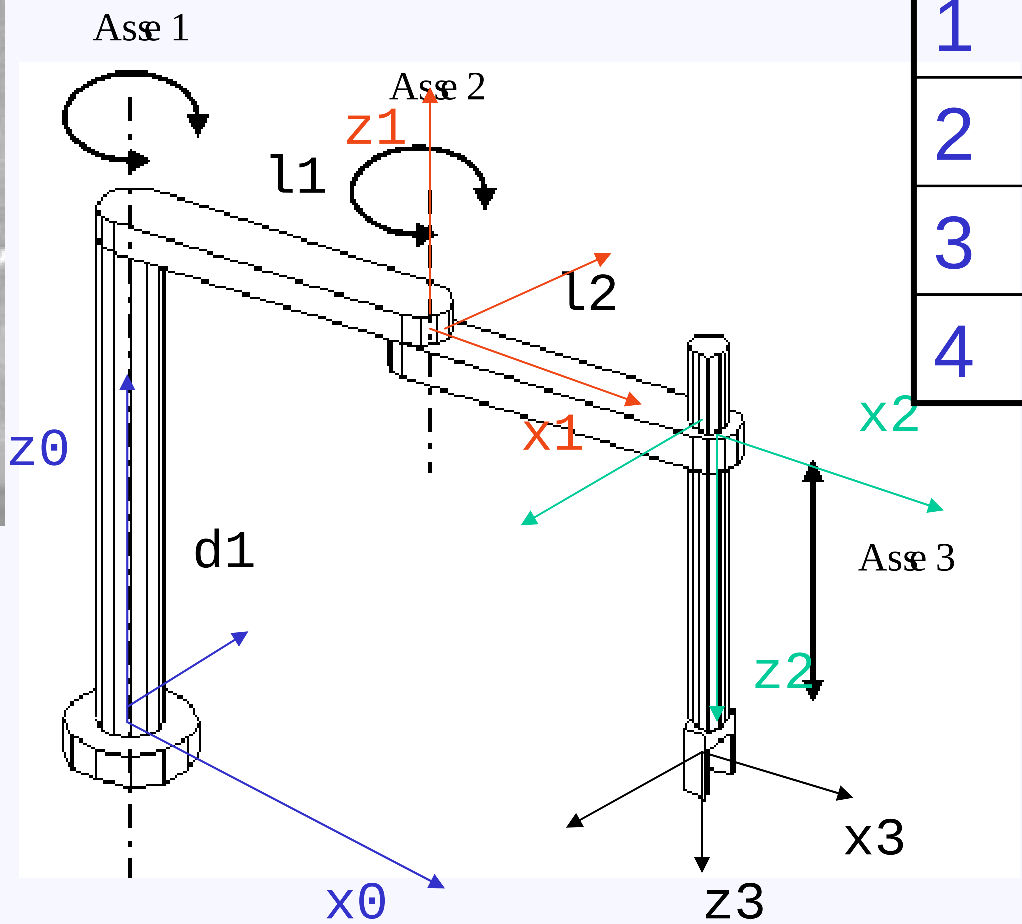
Manipolatore RTT



- Spazio di lavoro: un cilindro
- Fatto per lavorare verso il basso

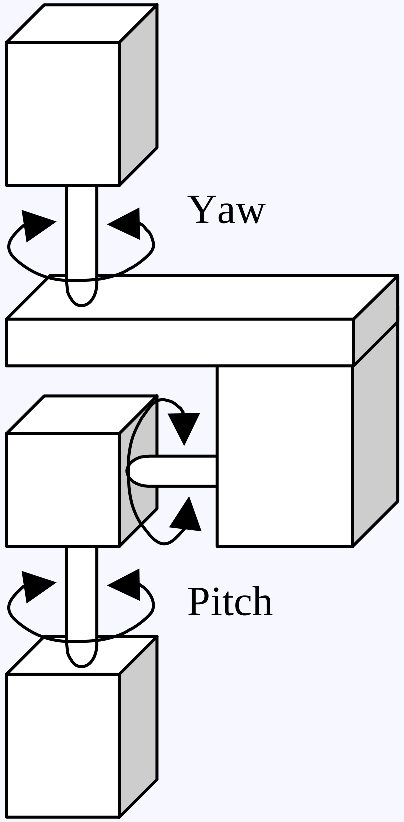
link	**θ**	**α**	**a**	**d**
1	$\theta 1$	90°	0	l1
2	0	90°	0	*d2*
3	0	0°	0	*d3*

SCARA



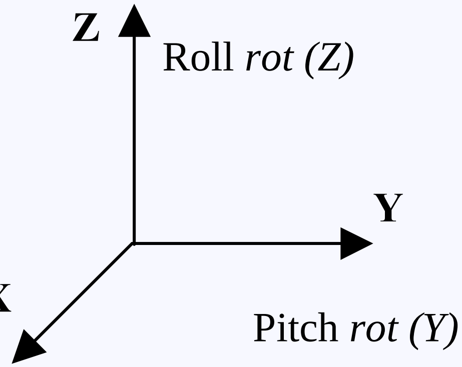
	θ	α	a	d
1	-	0	l1	d1
2	-	π	l2	0
3	0	0	0	-
4	-	0	0	0

Polso di robot industriale



Roll, Pitch e **Yaw** (rollio beccheggio e imbardata).

- 3 rotazioni con assi che si intersecano in un punto



Angoli di Eulero

Ogni orientamento nello spazio cartesiano è espresso attraverso 3 rotazioni che avvengono attorno agli assi del sistema R1 R2 R3 con

R1≠R2 e R2≠R3

Abbiamo quindi **12 sequenze possibili di rotazioni**.

Se le rotazioni avvengono nel sistema fisso o mobile premoltiplichiamo o postmoltiplichiamo, arrivando quindi a **24 sequenze**.

Usate in seguito solo le 3 sequenze:

- **nel sistema mobile: RzRyRz - RzRxRz**
- **nel sistema fisso: RxRyRz**

Esempio ZYZ

$$
\begin{aligned}
Rzyz(\varphi,\vartheta,\psi) &= R_{z,\varphi}R_{y,\vartheta}R_{z,\psi} \\
&= \begin{bmatrix} C_\varphi C_\vartheta C_\psi - S_\varphi S_\psi & -C_\varphi C_\vartheta S_\psi - S_\varphi C_\psi & C_\varphi S_\vartheta \\ S_\varphi C_\vartheta C_\psi - C_\varphi S_\psi & -S_\varphi C_\vartheta S_\psi - C_\varphi C_\psi & S_\varphi S_\vartheta \\ -S_\vartheta C_\psi & S_\vartheta S_\psi & C_\vartheta \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Problema diretto:
Data una terna di valori angolari $\phi\ \theta\ \psi$ possiamo costruire la matrice di trasformazione

Problema inverso

- Data la matrice di orientamento della mano, trovare i tre angoli di Eulero corrispondenti.
  - Serve per calcolare orientamento cartesiano della mano data la matrice T del braccio, che contiene la sottomatrice di rotazione

$$\mathbf{R}\mathrm{i} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{\mathbf{z},\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{u},\vartheta} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}}$$

$$\begin{bmatrix} C\phi C\psi - S\phi C\theta S\psi & -C\phi S\psi - S\phi C\theta C\psi & S\phi S\theta \\ S\phi C\psi + C\phi C\theta S\psi & -S\phi S\psi + C\phi C\theta C\psi & -C\phi S\theta \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta \end{bmatrix}$$

soluzione

Uguagliare la matrice di orientamento nota in T con il prodotto dei 3 angoli di Eulero voluti

- 9 equazioni in 3 incognite

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & p_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{R}_i} & p_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$

Ri = Rot(z, ϕ)Rot(u, θ)Rot(w,ψ)= ZXZ

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} C\phi C\psi - S\phi C\theta S\psi & -C\phi S\psi - S\phi C\theta C\psi & S\phi S\theta \\ S\phi C\psi + C\phi C\theta S\psi & -S\phi S\psi + C\phi C\theta C\psi & -C\phi S\theta \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta \end{bmatrix}$$

$$n_x = C\phi C\psi - S\phi C\theta S\psi$$
$$n_y = S\phi C\psi + C\phi C\theta S\psi$$
$$n_z = S\theta S\psi$$
$$o_x = -C\phi S\psi - S\phi C\theta C\psi$$
$$o_y = -S\phi S\psi + C\phi C\theta C\psi$$
$$o_z = S\theta C\psi$$
$$a_x = S\phi S\theta$$
$$a_y = -C\phi S\theta$$
$$a_z = C\theta$$

SOLUZIONE banale

$$\theta = \cos^{-1}\left[a_z\right]$$

$$\psi = \cos^{-1}\left[\frac{o_z}{S\theta}\right]$$

$$\phi = \cos^{-1}\left[\frac{-a_y}{S\theta}\right]$$

E' INUTILE, INFATTI

- L'accuratezza della funzione arcos dipende dall'angolo stesso

  $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$.
- Quando sen(θ) si avvicina a 0, cioè per $\theta \approx 0°$ o $\theta \approx \pm 180°$, le ultime due equazioni danno soluzioni imprecise o indefinite.

RICERCA DI SOLUZIONE ROBUSTA = *ARCOTANGENTE NEL QUADRANTE CORRETTO*

atan2

$$\theta = \mathrm{atan2}(x,y) = \begin{cases} 0^\circ \le \theta \le 90^\circ & \text{per} +x \text{ e } +y \\ 90^\circ \le \theta \le 180^\circ & \text{per} -x \text{ e } +y \\ -180^\circ \le \theta \le -90^\circ & \text{per} -x \text{ e } -y \\ -90^\circ \le \theta \le 0^\circ & \text{per} +x \text{ e } -y \end{cases}$$

associa ad ogni coppia di ingressi x e y l'angolo θ tale che

$$\sin(\theta) = x/(x^2+y^2)$$
$$\cos(\theta) = y/(x^2+y^2)$$

È la arcotangente situata nel quadrante appropriato senza la inderminatezza fra 1 e 3, 2 e 4 di atan

È inderminata in 0,0

Soluzione con atan2

- Trovare una soluzione in termini di atan2 è meno banale.
- Vedremo il metodo di Paul come strumento per ottenerla

MATLAB

atan2(Y,X)
contrasts with atan(Y/X), whose results are limited to the interval $-\pi/2, \pi/2$

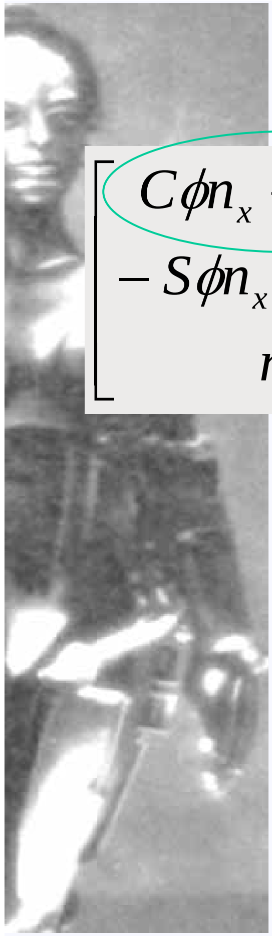
Metodo di Paul- premoltiplicazione

$$\mathbf{R}i = Rot(z, \phi)Rot(u, \theta)Rot(w,\psi)$$

$$Rot^{-1}(z, \phi)\, \mathbf{R}i = Rot(u, \theta)Rot(w,\psi)$$

- ottenere una soluzione in atan2: premoltiplicare per l'inversa della prima rotazione

$$\begin{bmatrix} C\phi & S\phi & 0 \\ -S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\psi & S\psi & 0 \\ -S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} C\phi n_x + S\phi n_y & C\phi o_x + S\phi o_y & C\phi a_x + S\phi a_y \\ -S\phi n_x + C\phi n_y & -S\phi o_x + C\phi o_y & -S\phi a_x + C\phi a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\psi & +S\psi & 0 \\ -C\theta S\psi & C\theta C\psi & -S\theta \\ -S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta \end{bmatrix}$$

$$C\phi a_x + S\phi a_y = 0$$

- Si è portato ϕ a sinistra
- Si uguagliano termini

$$\boxed{\phi = \tan^{-1}\left(\frac{a_x}{-a_y}\right) = \mathrm{atan2}(a_x, -a_y)}$$

$$C\psi = C\phi n_x + S\phi n_y$$

$$S\psi = -C\phi o_x - S\phi o_y$$

$$\boxed{\psi = \tan^{-1}\left(\frac{S\psi}{C\psi}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-C\phi o_x - S\phi o_y}{C\phi n_x + S\phi n_y}\right) = \mathrm{atan2}(-C\phi o_x - S\phi o_y, C\phi n_x + S\phi n_y)}$$

$$S\theta = S\phi a_x - C\phi a_y$$

$$C\theta = a_z$$

$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{S\theta}{C\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{S\phi a_x - C\phi a_y}{a_z}\right) = \mathrm{atan2}(S\phi a_x - C\phi a_y, a_z)}$$

Metodo di Paul - postmoltiplicazione

Ri = Rot(z, ϕ)Rot(u, θ)Rot(w,ψ)

Ri Rot^{-1}(w,ψ) = Rot(z, ϕ) Rot(u, θ)

- Non è ovvio quando pre o post moltiplicare

$$\cdot\begin{bmatrix} n_x C\psi + o_x S\psi & n_x S\psi + o_x C\psi & a_x \\ n_y C\psi + o_y S\psi & n_y S\psi + o_y C\psi & a_y \\ n_z C\psi + o_z S\psi & n_z S\psi + o_z C\psi & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi C\theta & S\phi S\theta \\ S\phi & C\phi C\theta & -C\phi S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{n_z}{o_z}\right) = \mathrm{atan2}(\mathrm{n}_z, o_z)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{n_z S\psi + o_z C\psi}{a_z}\right) = \mathrm{atan2}(n_z S\psi + o_z C\psi, a_z)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{n_y C\psi + o_y S\psi}{n_x C\psi + o_x S\psi}\right) = \mathrm{atan2}(n_y C\psi + o_y S\psi, n_x C\psi + o_x S\psi)$$

Cinematica diretta: conclusioni

- il problema cinematico diretto ammette sempre *una e una sola soluzione* che viene ottenuta mediante il calcolo della matrice T.
- Per il calcolo della cinematica diretta sono necessarie 6 matrici da moltiplicare. Si sceglie di memorizzare solo due matrici:
- Una per i primi 3 gradi di libertà (braccio)
- Una per gli ultimi 3 (polso)
- problemi di real-time.

Per studiare

- Il Robotics toolbox di Matlab

http://home.elet.polimi.it/gini/robot/link.htm