LOGICA MODALE

Introduzione e richiami

Le logiche modali vengono solitamente dette logiche della necessità e della possibilità. Infatti il linguaggio modale (proposizionale o del I ordine) è ottenuto aggiungendo i due operatori unari “necessariamente” e “possibilmente” al linguaggio della logica classica (rispettivamente proposizionale o predicativa)
La logica modale è stata introdotta da Aristotele, che aveva notato come le nozioni di possibilità e necessità fossero dipendenti e definibili una a partire dall’altra ed aveva sottolineato, tramite un paradosso, come la necessità della disgiunzione di due fatti non implicasse la disgiunzione della necessità dei due fatti stessi.
Lo studio della logica modale, dal punto di vista filosofico, era continuato fino all’epoca della filosofia scolastica e dopo un periodo di abbandono, Leibinitz ne aveva ripreso alcuni temi focalizzando sulla distinzione fra mondo attuale e mondi possibili.
Lewis aveva poi utilizzato concetti della logica modale per cercare di puntualizzare la semantica dell’implicazione ed in tale contesto aveva introdotto cinque sistemi di logica modale, due dei quali sono ancora in uso e sono anche stati utilizzati per descrivere le conoscenze di un agente.
Un primo passo avanti nella logica modale significativo anche dal punto di vista applicativo, si è avuto con la proposta di Carnap di considerare le formule modali come descrizioni di stati. La semantica di Carnap presentava tuttavia il grave problema che l’iterazione del prefisso “necessariamente “ non aveva effetto.
Il passo avanti davvero innovativo si è avuto con Kripke, che ha introdotto una relazione di accessibilità sull’insieme dei mondi (stati) possibili ed ha usato tale relazione nella definizione della “verità” di formule contenenti operatori modali. La flessibilità di questa semantica e la sua ovvia rispondenza alla descrizione di un sistema o di un programma ha reso il linguaggio modale uno strumento utile in vari settori dell’informatica.

Gli studenti che ritengano di aver bisogno di qualche richiamo di logica delle proposizioni, possono rileggere la dispensina “logica proposizionale”, a disposizione sulla mia pagina web degli studenti di algebra e logica 1

Primi elementi di logica modale

Introduciamo ora il linguaggio della logica modale (proposizionale) che è fondato su un **alfabeto** composto da:

- un insieme al più numerabile Φ di *formule atomiche* (o lettere enunciative) A_i
- i connettivi logici: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$,
- i connettivi modali: $\Box$ (box, necessariamente), $\Diamond$ (diamond, possibilmente)
- i simboli ausiliari: (,) .

Le **formule ben formate** (o per brevità fbf) sono parole sull'alfabeto appena introdotto, così definite in modo ricorsivo:

- ogni formula atomica è una formula ben formata,
- se $\mathcal{A}$ è una formula ben formata, allora $(\sim\mathcal{A})$, $(\Box\mathcal{A})$, $(\Diamond\mathcal{A})$ sono formule ben formate,
- se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono formule ben formate, allora $(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B})$ sono formule ben formate,
- niente altro è una formula ben formata.

L'insieme delle formule ben formate generate a partire da Φ viene indicato con Fma(Φ).
Per evitare l'introduzione di un numero eccessivo di parentesi si stabilisce il seguente ordine di priorità nell'applicazione dei connettivi:

$\left.\begin{array}{l}\sim\\ \Box\\ \Diamond\end{array}\right\}$ nell'ordine in cui si trovano , $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

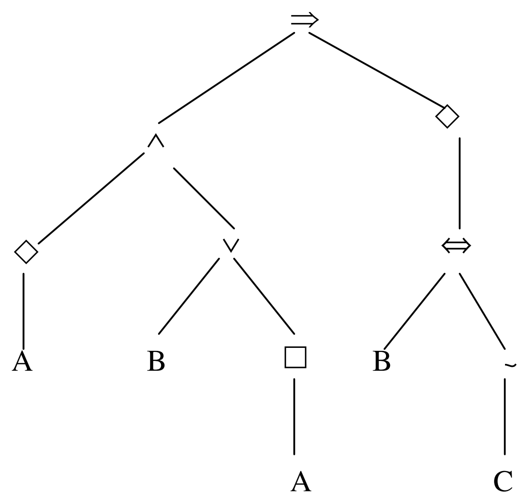
e si utilizzano le parentesi solo per indicare una priorità diversa e/o per rendere una fbf più leggibile, tenendo conto che se non diversamente indicato dalle parentesi, connettivi di ugual nome si intendono associati a sinistra.

$\Box\mathcal{A}$ si legge "*necessariamente* $\mathcal{A}$ ", ma può assumere diversi significati a seconda del contesto in cui si vuole usare il linguaggio modale, ad esempio:
- E' necessariamente vero che $\mathcal{A}$
- Sarà sempre vero che $\mathcal{A}$
- Deve essere $\mathcal{A}$
- $\mathcal{A}$ è obbligatorio
- E' noto che $\mathcal{A}$
- Si crede che $\mathcal{A}$
- Si conosce $\mathcal{A}$
- Si può dimostrare $\mathcal{A}$
- Da un certo punto in poi $\mathcal{A}$.

$\Diamond\mathcal{A}$ si legge "*possibilmente* $\mathcal{A}$", ed a sua volta può assumere diversi significati, si usa tuttavia di solito la convenzione di pensare a "possibilmente $\mathcal{A}$" come ad una abbreviazione di "non necessariamente non $\mathcal{A}$" e quindi i significati che si danno a $\Diamond\mathcal{A}$ sono strettamente legati a quelli dati a $\Box\mathcal{A}$ (come osservato questa convenzione è usuale, ma non sempre applicata, ad es., quando la logica modale viene usata per descrivere la conoscenza , $\Box\mathcal{A}$ è spesso interpretata come "si conosce $\mathcal{A}$ ", mentre $\Diamond\mathcal{A}$ può essere interpretata come "si crede $\mathcal{A}$ ").

Per ogni fbf $\mathcal{A}$ si indica con **Sfma($\mathcal{A}$)** l'insieme delle sue *sottoformule*, definito in questo modo:
Sfma(A) ={A} per ogni formula atomica A,
Sfma($\mathcal{A}$)={$\mathcal{A}$}$\cup$Sfma($\mathcal{B}$), se $\mathcal{A}$ è del tipo $\bullet\mathcal{B}$ con $\bullet\in\{\sim, \Box, \Diamond\}$
Sfm($\mathcal{A}$)= {$\mathcal{A}$ }$\cup$Sfma($\mathcal{B}$)$\cup$Sfma($\mathcal{C}$), se $\mathcal{A}$ è del tipo $\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}$ con $\otimes\in\{\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow\}$.

Utilizzando l'albero di struttura di una fbf si leggono facilmente le sue sottoformule.
Si consideri ad esempio la seguente fbf. $\Diamond A\wedge(B\vee\Box A) \Rightarrow \Diamond(B\Leftrightarrow\sim C)$, il cui albero di struttura è rappresentato di seguito.
Le sottoformule della formula data sono le foglie dell'albero (che sono le lettere enunciative, o formule atomiche, che in essa occorrono) e le formule i cui alberi di struttura sono sottoalberi completi dell'albero stesso (cioè sottoalberi che hanno come radice un qualsiasi nodo e contengono tutti i "discendenti" del nodo preso come radice)



Useremo la parola *schema* per indicare un insieme di formule che hanno la stessa struttura sintattica.

La semantica di un linguaggio logico di questo tipo non può essere data da funzioni di verità, a meno di ridurre $\Box$ e $\Diamond$ a connettivi esprimibili in termini dei connettivi logici della logica classica.
Tentando di usare una logica a tre valori 0 (falso), 1 (vero), 2 (possibile), ed utilizzando la convenzione che $\Box A$ equivalente a $\sim\Diamond\sim A$ (che equivale alla convenzione di interpretare $\Diamond A$ equivalente a $\sim\Box\sim A$) si ottiene che sono sempre vere alcune formule intuitivamente non accettabili. Inoltre in questo modo non si riesce a catturare la espressività permessa dal linguaggio modale.
La semantica più adatta a catturare tale espressività è la semantica dei mondi possibili introdotta da Kripke . Alla base di tale semantica stanno i concetti di *frame* e *modello (standard).*

Definizione 1.1: (frame e modello standard o struttura di Kripke)
Un **frame** (standard) è una coppia $F = (S,R)$ costituita da un insieme non vuoto S (detto *insieme dei mondi*) e da una relazione binaria R su S (detta *relazione di accessibilità* o raggiungibilità, se $(\alpha,\beta)\in R$ si dice infatti che β è raggiungibile o accessibile da α).

Un (Φ-)**modello** (standard) su un frame F=(S,R) è una terna M = (S,R,V) dove V è una funzione : $\Phi \rightarrow \wp(S)$, detta funzione di valutazione. Il *modello* M si dice *costruito sul frame F*.

Ovviamente, dato un frame, su di esso si possono costruire più modelli diversi (infatti ci sono varie possibili funzioni V: $\Phi \rightarrow \wp(S)$), mentre, dato un modello, è unico il frame su cui il modello è costruito.
Come vedremo più avanti ci sono altri tipi di frame e modelli, questa è la ragione per cui nella definizione precedente abbiamo parlato di frame e modelli standard, precisiamo però che ogni volta che parleremo di frame e modello, senza specificare altro, ci riferiremo a frame e modelli standard.

Definizione 1.2: (verità di una fbf in un mondo di un modello)
Una fbf $\mathcal{A}$ si dice **vera in un mondo** α del modello M e si scrive $M|\!=_\alpha \mathcal{A}$ se e solo se

- $\alpha \in V(A)$ nel caso $\mathcal{A}$ sia una formula atomica A (quindi la funzione di valutazione associa ad una formula atomica l'insieme di tutti e soli i mondi in cui la formula è vera),
- $M|\!\neq_\alpha \mathcal{B}$ (non $M|\!=_\alpha \mathcal{B}$), nel caso $\mathcal{A}$ sia una formula del tipo $\sim\mathcal{B}$,
- $M|\!=_\alpha \mathcal{B}$ e $M|\!=_\alpha \mathcal{C}$, nel caso $\mathcal{A}$ sia una formula del tipo $\mathcal{B}\wedge\mathcal{C}$,
- $M|\!=_\alpha \mathcal{B}$ o $M|\!=_\alpha \mathcal{C}$, nel caso $\mathcal{A}$ sia una formula del tipo $\mathcal{B}\vee\mathcal{C}$,
- $M|\!\neq_\alpha \mathcal{B}$ o $M|\!=_\alpha \mathcal{C}$, nel caso $\mathcal{A}$ sia una formula del tipo $\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}$,
- $M|\!=_\alpha \mathcal{B}$ e $M|\!=_\alpha \mathcal{C}$, oppure $M|\!\neq_\alpha \mathcal{B}$ e $M|\!\neq_\alpha \mathcal{C}$, nel caso $\mathcal{A}$ sia una formula del tipo $\mathcal{B}\Leftrightarrow\mathcal{C}$,
- $M|\!=_\beta \mathcal{B}$ per ogni mondo $\beta \in S$ tale che $(\alpha,\beta) \in R$ (cioè per ogni mondo raggiungibile da α) nel caso $\mathcal{A}$ sia una formula del tipo $\Box\mathcal{B}$,
- $M|\!=_\beta \mathcal{B}$ per almeno un mondo $\beta \in S$ tale che $(\alpha,\beta) \in R$ (cioè per almeno un mondo raggiungibile da α) nel caso $\mathcal{A}$ sia una formula del tipo $\Diamond\mathcal{B}$.

E' immediato notare che dato un Φ-modello M ed un fissato mondo α di quel modello, si può costruire una funzione V_α: $\Phi \rightarrow \{0,1\}$ che *valuta* le formule atomiche in quel mondo ($V_\alpha(A)=1$ se $\alpha \in V(A)$, $V_\alpha(A)=0$ altrimenti). La funzione V_α può facilmente essere estesa (usando le tavole di verità) ad assegnare un valore di verità a tutte le formule non contenenti connettivi modali e quindi valuta nel mondo α tutte le formule non contenenti connettivi modali, di conseguenza, per un dato modello, abbiamo una collezione $\{V_\alpha \mid \alpha \in S\}$ di valutazioni delle formule atomiche tramite la quale si possono valutare su tutti i mondi del modello tutte le formule non contenenti i connettivi modali. Viceversa, data una collezione $\{V_\alpha \mid \alpha \in S\}$ di valutazioni delle formule atomiche, possiamo definire un modello a partire da un frame, ponendo $V(A) = \{\alpha \in S \mid V_\alpha(A) = 1\}$.
Osserviamo poi che, dette *semiatomiche* le formule atomiche o le formule che iniziano con un connettivo modale, ogni valutazione delle formule quasi atomiche in un mondo si estende facilmente ad una valutazione di tutte le

formule in quel mondo, quindi dare la relazione R corrisponde a dare una valutazione di tutte le formule semiatomiche in tutti i mondi del modello. Il linguaggio modale può essere infatti visto come un usuale linguaggio proposizionale le cui lettere enunciative siano tutte le formule semiatomiche. Quindi una formula $\mathcal{A}$ del linguaggio modale si dice **tautologia** se, per ogni valutazione V delle formule quasi atomiche del linguaggio risulta $V(\mathcal{A}) = 1$. Si può provare che ogni tautologia è ottenuta da una tautologia del calcolo proposizionale, tramite sostituzione uniforme di sottoformule atomiche con formule (modali) .

Le regole per la valutazione in un mondo di una fbf il cui connettivo principale (cioè l'ultimo connettivo usato nel costruire la formula) non è un connettivo modale sono in realtà le solite regole date dalle tavole di verità, la relazione di accessibilità interviene solo nella valutazione di formule il cui connettivo principale è modale e, proprio attraverso una opportuna definizione della relazione d'accessibilità, si riescono a dare diversi significati ai connettivi $\Box$ e $\Diamond$.
Ad esempio se, in accordo con Leibinitz, una verità necessaria viene intesa come una affermazione che vale in tutti i mondi possibili, allora se S indica l'insieme dei mondi possibili, R è la relazione universale su S.
Se $\Box\mathcal{A}$ significa che "$\mathcal{A}$ è conseguenza delle leggi della fisica", allora S può ancora essere pensato come l'insieme dei mondi concepibili, ma R deve associare mondi regolati dalle stesse leggi fisiche.
Se $\Box\mathcal{A}$ significa che " in tutti gli istanti futuri $\mathcal{A}$", S può essere pensato come un insieme totalmente ordinato (degli istanti) ed R deve associare a un certo istante tutti gli istanti successivi ecc.

Definizione 1.3. (Verità in un modello, validità)
Una formula $\mathcal{A}$ si dice **vera in un modello** M (brevemente $M \models \mathcal{A}$) se è vera in tutti i mondi di M.
Una formula si dice **valida in un frame** F (brevemente $F \models \mathcal{A}$) se è vera in tutti i modelli costruiti su F.
Se **C** è una classe di modelli (frame), $\mathcal{A}$ è vera (valida) in **C** se è vera (valida) in tutti i membri di **C**.
Uno **schema** si dice vero in un modello (valido in un frame) se ogni istanza dello schema è vera nel modello (valida nel frame).

Le tautologie sono formule valide in ogni frame, ma ci sono altri schemi validi in ogni frame, ad esempio:
$\Box\top$ (dove $\top$ è una abbreviazione per $\mathcal{A}\vee\sim\mathcal{A}$)
$\Box(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\mathcal{B})$ (questo schema giocherà nel seguito un ruolo importante e verrà chiamato schema K)
$\Diamond(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{B})$
$\Box(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\Diamond\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{B})$
$\Diamond(\mathcal{A}\vee\mathcal{B}) \Leftrightarrow (\Diamond\mathcal{A}\vee\Diamond\mathcal{B})$
$\Box(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}) \Leftrightarrow (\Box\mathcal{A}\wedge\Box\mathcal{B})$

Dimostriamo, a titolo di esempio, che
lo schema K: $\Box(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\mathcal{B})$ *è valido in ogni frame*

(usando la stessa tecnica potete provare la validità degli altri schemi).
Supponiamo per assurdo che K non sia valido in ogni frame, esisterà allora un modello M in cui K non è vero e quindi ci sarà un mondo α del modello M tale che
$M \not\models_{\alpha} \Box(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\mathcal{B})$.
Pertanto dalla definizione 1.2 si ottiene che $M \models_{\alpha} \Box(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ e $M \not\models_{\alpha} \Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\mathcal{B}$.
Da $M \models_{\alpha} \Box(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ segue allora $M \models_{\beta} \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ per ogni mondo β tale che $(\alpha,\beta) \in R$, da
$M \not\models_{\alpha} \Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\mathcal{B}$ si ottiene invece $M \models_{\alpha} \Box\mathcal{A}$ e $M \not\models_{\alpha} \Box\mathcal{B}$, cioè $M \models_{\beta} \mathcal{A}$ per ogni mondo β tale che $(\alpha,\beta) \in R$, e $M \not\models_{\gamma} \mathcal{B}$ per almeno un mondo γ tale che $(\alpha,\gamma) \in R$. Essendo in particolare $M \models_{\gamma} \mathcal{A}$ e $M \models_{\gamma} \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, si ottiene la contraddizione $M \models_{\gamma} \mathcal{B}$, quindi K è valido in ogni frame.

Osserviamo che:
- se $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ sono formule vere in un mondo α di un modello M, allora $\mathcal{B}$ è vera nel mondo α di M,
- se $\mathcal{A}$ è vera in (ogni mondo di) un modello M, allora $\Box\mathcal{A}$ è vera in (ogni mondo di) M;

quindi:
- se $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ sono formule vere in modello M (valide in un frame F), allora $\mathcal{B}$ è vera in M (valida in F)
- se $\mathcal{A}$ è vera in un modello M (valida in un frame F), allora $\Box\mathcal{A}$ è vera in M (valida in F).

Analogamente a quanto visto in logica classica, diciamo che una formula $\mathcal{B}$ è una **conseguenza semantica** di $\mathcal{A}$ se la formula $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ è valida in ogni frame, ovvero se ogniqualvolta $\mathcal{A}$ è vera in un mondo di un modello, anche $\mathcal{B}$ risulta vera nello stesso mondo di quel modello.
Diciamo che $\mathcal{B}$ è **equivalente** ad $\mathcal{A}$ se $\mathcal{B}$ è una conseguenza semantica di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ è una conseguenza semantica di $\mathcal{B}$, ovvero la formula $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ è valida in ogni frame.
Ne segue quindi facilmente che, come in logica classica, i connettivi che abbiamo introdotto sono in parte superflui, si possono infatti utilizzare come connettivi (logici e modali) primitivi (insieme adeguato di connettivi logici e modali) i soli connettivi $\sim$, $\Rightarrow$ e $\Box$.
Al solito la formula $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ può essere vista come una abbreviazione della formula $\sim\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ (a cui è equivalente), analogamente $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ è una abbreviazione per $\sim(\mathcal{A} \Rightarrow \sim\mathcal{B})$ e $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ è una abbreviazione per $\sim((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \sim(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}))$; inoltre si può dimostrare facilmente che la semantica che abbiamo introdotto rispetta la convenzione usuale sul connettivo $\Diamond$, infatti la formula $\Diamond\mathcal{A}$ è equivalente alla formula $\sim\Box\sim\mathcal{A}$ e quindi può essere vista come una abbreviazione di questa ultima formula.

Dimostriamo che
le formule $\Diamond\mathcal{A}$ *e* $\sim\Box\sim\mathcal{A}$ *sono equivalenti nei frame standard.*

Sia $M\models_{\alpha}\Diamond\mathcal{A}$, allora $M\models_{\beta}\mathcal{A}$ per almeno un mondo β tale che $(\alpha,\beta)\in R$, pertanto $M\not\models_{\beta}\sim\mathcal{A}$, da cui segue $M\not\models_{\alpha}\Box\sim\mathcal{A}$, cioè $M\models_{\alpha}\sim\Box\sim\mathcal{A}$. Viceversa sia $M\models_{\alpha}\sim\Box\sim\mathcal{A}$, allora $M\not\models_{\alpha}\Box\sim\mathcal{A}$, quindi non in tutti i mondi raggiungibili da α è vera $\mathcal{A}$, esiste pertanto almeno un mondo γ tale che $(\alpha,\gamma)\in R$ e $M\not\models_{\gamma}\sim\mathcal{A}$, cioè $M\models_{\gamma}\mathcal{A}$, da cui $M\models_{\alpha}\Diamond\mathcal{A}$.

Ovviamente ci sono numerosi schemi che non sono validi in tutti i frame , ad esempio:

$\Box\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}$

$\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\Box\mathcal{A}$

$\Box(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})\Rightarrow(\Box\mathcal{A}\vee\Box\mathcal{B})$

$\Box(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{B})$

$\Diamond\top$

$\Diamond\mathcal{A}\Rightarrow\Box\mathcal{A}$

$\Box(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A})\Rightarrow\Box\mathcal{A}$

$\Box(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\vee\Box(\Box\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A})$

Per provare che questi schemi non sono validi su ogni frame basta esibire per ciascuno di essi un frame su cui un'istanza dello schema non sia valida.
A titolo d'esempio *troviamo un frame su cui un'istanza del primo schema non è valida*.
Prendiamo $S=\{\alpha,\beta\}$ ed $R=\{(\beta,\alpha)\}$. Consideriamo la formula atomica A e consideriamo il modello M costruito sul frame ponendo $V(A)=\alpha$, è immediato verificare che $M\models_{\beta}\Box A$ e che $M\not\models_{\beta}A$. Pertanto abbiamo trovato che l'istanza $\Box A\Rightarrow A$ dello schema non è vera in un mondo di un modello costruito sul frame e perciò non è valida nel frame.

Diamo ora alcuni legami tra proprietà di R e validità di schemi.

Premettiamo la seguente

Definizione 1.4.
Una relazione su un insieme S si dice
seriale se per ogni $a\in S$ esiste un $b\in S$ tale che $(a,b)\in R$,
riflessiva se per ogni $a\in S$ $(a,a)\in R$,
simmetrica se $(a,b)\in R$ implica $(b,a)\in R$,
transitiva se $(a,b)\in R$ e $(b,c)\in R$ implicano $(a,c)\in R$,
euclidea se $(a,b)\in R$ e $(a,c)\in R$ implicano $(b,c)\in R$ (e quindi ovviamente anche $(b,b)\in R$, $(c,c)\in R$, $(c,b)\in R$)
funzione parziale se $(a,b)\in R$ e $(a,c)\in R$ implicano $b=c$,
funzione se per ogni $a\in S$ esiste uno ed un solo $b\in S$ tale che $(a,b)\in R$,
debolmente densa se $(a,b)\in R$ implica che esista un $c\in S$ per cui $(a,c)\in R$ e $(c,b)\in R$,
debolmente connessa se $(a,b)\in R$ e $(a,c)\in R$ implicano che $(b,c)\in R$ o $b=c$ o $(c,b)\in R$,

diretta se $(a,b)\in R$ e $(a,c)\in R$ implicano che esista un $d\in S$ tale che $(b,d)\in R$ e $(c,d)\in R$

Teorema 1.1: Per ogni frame F=(S,R)

la relazione R è	se e solo se	è valido in F lo schema
seriale		$\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{A}$
riflessiva		$\Box\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}$
simmetrica		$\mathcal{A}\Rightarrow\Box\Diamond\mathcal{A}$
transitiva		$\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\Box\mathcal{A}$
euclidea		$\Diamond\mathcal{A}\Rightarrow\Box\Diamond\mathcal{A}$
funzione parziale		$\Diamond\mathcal{A}\Rightarrow\Box\mathcal{A}$
funzione		$\Diamond\mathcal{A}\Leftrightarrow\Box\mathcal{A}$
debolmente densa		$\Diamond\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\Diamond\mathcal{A}$
debolmente connessa		$\Box(\mathcal{A}\wedge\Box\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\vee\Box(\mathcal{B}\wedge\Box\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A})$
diretta		$\Diamond\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\Diamond\mathcal{A}$

Dim.
Sempre come esempio dimostriamo che, se R è simmetrica, lo schema $\mathcal{A}\Rightarrow\Box\Diamond\mathcal{A}$ è valido.
Consideriamo allora un frame F in cui la relazione di accessibilità R sia simmetrica, e siano M un modello costruito su F ed α un mondo di S.
Se $M\not\models_\alpha\mathcal{A}$, allora segue immediatamente che $M\models_\alpha\mathcal{A}\Rightarrow\Box\Diamond\mathcal{A}$.
Sia quindi $M\models_\alpha\mathcal{A}$, per provare che $M\models_\alpha\mathcal{A}\Rightarrow\Box\Diamond\mathcal{A}$ basta provare che $M\models_\alpha\Box\Diamond\mathcal{A}$.
Per ogni β con $(\alpha,\beta)\in R$ si ha $M\models_\beta\Diamond\mathcal{A}$, infatti si ha $M\models_\alpha A$ per ipotesi e per la simmetria di R si ha $(\beta,\alpha)\in R$, dunque dalla definizione 1.2 si deduce facilmente che $M\models_\alpha\Box\Diamond\mathcal{A}$. Dunque, essendo M ed α del tutto generici, si ha che lo schema $\mathcal{A}\Rightarrow\Box\Diamond\mathcal{A}$ è vero in ogni mondo di ogni modello costruito sul frame simmetrico F, dunque è valido in F.
Proviamo ora una affermazione nella direzione opposta, ad esempio che se lo schema $\Diamond\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\Diamond\mathcal{A}$ è valido su F=(S,R), allora R è diretta. Supponiamo che $(\alpha,\beta)\in R$ e $(\alpha,\gamma)\in R$ per qualche α, β, $\gamma\in S$. Sia A una lettera enunciativa del nostro linguaggio.
Da F costruiamo un modello ponendo $V(A)=\{\chi \mid (\gamma,\chi)\in R\}$ e V(B)= – (dove – sta per insieme qualsiasi di mondi) per ogni altra lettera enunciativa B del linguaggio. Si ha allora $M\models_\chi A$, ed anche $M\models_\gamma\Box A$, ed essendo $(\alpha,\gamma)\in R$ si ha anche $M\models_\alpha\Diamond\Box A$; dalla validità dello schema si deduce $M\models_\alpha\Box\Diamond A$ ed essendo $(\alpha,\beta)\in R$, si ottiene $M\models_\beta\Diamond A$, esiste cioè un δ tale che $(\beta,\delta)\in R$ con $M\models_\delta A$, allora $\delta\in V(A)$ e pertanto $(\gamma,\delta)\in R$. Abbiamo quindi trovato un δ tale che $(\beta,\delta)\in R$ e $(\gamma,\delta)\in R$, pertanto abbiamo provato che R è diretta.
Le altre verifiche si possono facilmente fare per esercizio seguendo la traccia delle due verifiche fatte.

Il precedente teorema mostra come il linguaggio che abbiamo introdotto possa risultare utile nelle applicazioni, il frame può essere visto come una

descrizione del contesto di cui vogliamo fornire un modello: ad esempio i mondi possono essere visti come istanti del tempo, stati di un programma, etc… la relazione di raggiungibilità può quindi essere vista come la relazione che associa ogni mondo, istante o stato che sia, ai mondi successivi e allora deve godere della proprietà transitiva e quindi la nostra logica deve contenere come assioma lo schema corrispondente alla transitività, inoltre se vogliamo interpretare i mondi come istanti di un tempo descritto in modo non discreto dovremo chiedere che nella logica che usiamo ci sia come assioma lo schema corrispondente alla debole densità, se interpretiamo i mondi come stati di un sistema che continua ad evolvere dovremo richiedere la proprietà seriale, etc..
Ognuna delle proprietà esaminate nel teorema si può scrivere in un linguaggio del primo ordine, ma usando il linguaggio modale abbiamo delle espressioni più compatte di tali proprietà, estendendo di poco la logica delle proposizioni.
(**Nota**: Nel teorema 1.1. non abbiamo elencato in modo esaustivo le proprietà che possono essere scritte in termini di formule modali, ma solo quelle che in qualche modo prenderemo nel seguito in considerazione, va notato comunque che ci sono proprietà di una relazione che non possono essere espresse nel linguaggio introdotto.)

SISTEMI DI LOGICA MODALE (NORMALE)

A questo punto vogliamo anche introdurre una ampia famiglia di logiche modali dal punto di vista puramente sintattico. Poiché non è detto che ogni logica sia assiomatizzabile in modo efficiente (ovvero con un insieme finito di schemi come assiomi) utilizzeremo la seguente

Definizione 2.1. (sistema di logica).
Dato un linguaggio basato su un insieme di formule atomiche Φ, un sottoinsieme Λ di Fma(Φ) si chiama **sistema di logica** o brevemente logica se

- Λ contiene tutte le tautologie
- Λ è chiuso rispetto al Modus Ponens (MP): $\dfrac{\mathcal{A} \quad \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$
- Λ è chiuso rispetto alle sostituzioni uniformi (cioè se $\mathcal{A} \in \Lambda$ anche ogni formula $\mathcal{A}'$ ottenuta da $\mathcal{A}$ sostituendo uniformemente con una stessa formula tutte le occorrenze di una stessa sottoformula atomica di $\mathcal{A}$ appartiene a Λ).

Osserviamo che la prima di queste condizioni può essere sostituita dalla richiesta che gli schemi di assiomi:
A1: $\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A})$
A2: $(\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C})) \Rightarrow((\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{C}))$
A3: $(\sim\mathcal{A}\Rightarrow\sim\mathcal{B})\Rightarrow((\sim\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow\mathcal{A})$
siano contenuti in Λ. (Gli schemi A1,A2,A3 sono gli schemi di assiomi della logica L come li abbiamo introdotti nel corso di Algebra e logica 1, dove $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ sono arbitrarie formule del linguaggio logico che stiamo

considerando). La presenza di questi assiomi e la chiusura rispetto al Modus Ponens implica infatti, per il teorema di correttezza e completezza di L, che tutte le tautologie stiano in Λ.

Sono esempi di logiche
- $PL(\Phi) = \{\mathcal{A} \in Fma(\Phi) | \mathcal{A}$ è tautologia$\}$
- $\Lambda_C(\Phi) = \{\mathcal{A} \in Fma(\Phi) | \mathbf{C} \models \mathcal{A}\}$ dove **C** è una qualsiasi classe di modelli o di frame
- $Fma(\Phi)$

Inoltre è facile verificare che
- l'intersezione di una qualsiasi famiglia di logiche è una logica
- quindi, dato comunque un insieme di formule $\Gamma \subseteq Fma(\Phi)$ esiste sempre la più piccola logica che contiene Γ (che è l'intersezione di tutte le logiche contenenti Γ).
- per ogni logica Λ, nel linguaggio basato su Φ, si ha $PL(\Phi) \subseteq \Lambda \subseteq Fma(\Phi)$.

Nel seguito supporremo sempre di partire da un dato insieme di formule atomiche Φ che eviteremo di esplicitare.

Definizione 2.2. (teorema, deducibilità).
Ogni elemento di una logica Λ si dice **teorema** di Λ. Scriveremo $\vdash_\Lambda \mathcal{A}$ per indicare che $\mathcal{A}$ è un teorema di Λ.
Una formula $\mathcal{A}$ si dice **Λ–deducibile** da un insieme di formule Γ (e si scrive $\Gamma \vdash_\Lambda \mathcal{A}$) se esiste un insieme finito, eventualmente vuoto, $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ..., \mathcal{A}_n\}$ di formule di Γ tale che
$\vdash_\Lambda \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge ... \wedge \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A}$
(se n = 0 la formula $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge ... \wedge \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A}$ è la formula $\mathcal{A}$).

Osserviamo che, se la logica Λ è assiomatizzabile, la definizione 2.2 diventa la solita definizione di teorema (formula Λ-deducibile da un insieme Γ di f.b.f): $\mathcal{A}$ è un teorema di Λ ($\mathcal{A}$ è Λ-deducibile da Γ) se esiste una sequenza finite di formule che finisce con $\mathcal{A}$ tale che ogni formula della sequenza è un assioma o (appartiene a Γ, o) è ottenuta da regole precedenti mediante le regole di inferenza.

Definizione 2.3. (correttezza, completezza).
Una logica Λ si dice **corretta** rispetto ad una classe di modelli (o di frame) **C** se per ogni formula $\mathcal{A}$
$\vdash_\Lambda \mathcal{A}$ implica $\mathbf{C} \models A$
Λ si dice **completa** rispetto a **C** se per ogni formula $\mathcal{A}$
$\mathbf{C} \models \mathcal{A}$ implica $\vdash_\Lambda \mathcal{A}$
Λ si dice **determinata** dalla classe **C** se è corretta e completa rispetto a **C**.

Definizione 2.4. (logica normale)
Una logica si dice **normale** se contiene lo schema
K: $\Box (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\Box \mathcal{A} \Rightarrow \Box \mathcal{B})$

ed è chiusa rispetto alla regola di necessitazione,

$$\text{RN} : \frac{\mathcal{A}}{\Box\mathcal{A}}$$

Poiché lo schema K è valido in ogni frame risulta che
$\Lambda_{C} = \{\mathcal{A}\in \mathrm{Fma}(\Phi) \mid \mathbf{C}\models\mathcal{A}\}$, *dove* **C** *è una classe di modelli o di frame, è una logica normale* (cioè ogni logica determinata da una classe di modelli è normale).
L'intersezione di logiche normali è una logica normale. Pertanto *esiste sempre una minima logica normale che è l'intersezione di tutte le logiche normali.*
Indicheremo nel seguito tale logica con *K*.

La minima logica normale *K* è una logica assiomatizzabile in questo modo:

- ha come assiomi gli schemi A1,A2,A3 e K
- ha come regole di inferenza MP ed RN.

Accanto a questa logica (modale) normale *K*, sono spesso studiate anche logiche da essa ottenute aggiungendo un sottoinsieme degli schemi:

D. $\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{A}$
T. $\Box\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}$
4. $\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\Box\mathcal{A}$
B. $\mathcal{A}\Rightarrow\Box\Diamond\mathcal{A}$
5. $\Diamond\mathcal{A}\Rightarrow\Box\Diamond\mathcal{A}$

agli assiomi di *K*. Le logiche così ottenute vengono di solito indicate facendo seguire a K il "nome" degli assiomi introdotti, ad esempio *KT4* è la logica ottenuta da *K* aggiungendo T e 4 agli assiomi di *K*.

Le logiche normali possono essere introdotte in tanti modi equivalenti. In particolare segnaliamo il seguente teorema.

Teorema 2.1.
Sono equivalenti
(i) Λ è normale
(ii) per ogni intero $n\geq 0$, $\vdash_{\Lambda}\mathcal{A}_1\wedge\mathcal{A}_2\wedge\ldots\wedge\mathcal{A}_n\Rightarrow\mathcal{A}$ implica $\vdash_{\Lambda}\Box\mathcal{A}_1\wedge\Box\mathcal{A}_2\wedge\ldots\wedge\Box\mathcal{A}_n\Rightarrow\Box\mathcal{A}$.
(iii) valgono (1) $\vdash_{\Lambda}\Box\top$
(2) $\vdash_{\Lambda}\Box\mathcal{A}\wedge\Box\mathcal{B}\Rightarrow\Box(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})$
(3) $\vdash_{\Lambda}\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ implica $\vdash_{\Lambda}\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\mathcal{B}$.

Dim.
(i) implica (ii): per induzione su n. Se n=0, la (ii) segue da RN.
Supponiamo allora che (ii) valga per n-1, e sia $\vdash_{\Lambda}\mathcal{A}_1\wedge\mathcal{A}_2\wedge\ldots\wedge\mathcal{A}_n\Rightarrow\mathcal{A}$.
Poiché $\mathcal{A}_1\wedge\mathcal{A}_2\wedge\ldots\wedge\mathcal{A}_n\Rightarrow\mathcal{A}$ è equivalente a $(\mathcal{A}_1\wedge\mathcal{A}_2\wedge\ldots\wedge\mathcal{A}_{n-1})\Rightarrow(\mathcal{A}_n\Rightarrow\mathcal{A})$, da $\vdash_{\Lambda}\mathcal{A}_1\wedge\mathcal{A}_2\wedge\ldots\wedge\mathcal{A}_n\Rightarrow\mathcal{A}$ si ha anche $\vdash_{\Lambda}(\mathcal{A}_1\wedge\mathcal{A}_2\wedge\ldots\wedge\mathcal{A}_{n-1})\Rightarrow(\mathcal{A}_n\Rightarrow\mathcal{A})$, da cui per ipotesi di induzione si ottiene $\vdash_{\Lambda}(\Box\mathcal{A}_1\wedge\Box\mathcal{A}_2\wedge\ldots\wedge\Box\mathcal{A}_{n-1})\Rightarrow\Box(\mathcal{A}_n\Rightarrow\mathcal{A})$.
Dallo schema K: $\Box(\mathcal{A}_n\Rightarrow\mathcal{A})\Rightarrow(\Box\mathcal{A}_n\Rightarrow\Box\mathcal{A})$, segue allora che

$\vdash_\Lambda \Box\mathcal{A}_1 \wedge \Box\mathcal{A}_2 \wedge ... \wedge \Box\mathcal{A}_{n-1} \Rightarrow (\Box\mathcal{A}_n \Rightarrow \Box\mathcal{A})$ che è equivalente a
$\vdash_\Lambda \Box\mathcal{A}_1 \wedge \Box\mathcal{A}_2 \wedge ... \wedge \Box\mathcal{A}_n \Rightarrow \Box\mathcal{A}$.
(ii) implica (i): Il caso n=0 di (ii) fornisce RN. Lo schema K si ottiene dalla osservazione che dalla tautologia $((\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\wedge\mathcal{A})\Rightarrow\mathcal{B}$ per la (1) con n=2 si ottiene
$\vdash_\Lambda \Box(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\wedge \Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\mathcal{B}$, che è equivalente allo schema K.
(i) implica (iii): la (1) segue immediatamente dal fatto che $\vdash_\Lambda \top$ perché $\top$ è una tautologia e da RN. La (2) segue da (ii) (implicata da (i)) applicata alla tautologia $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$. La (3) si ottiene applicando a $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ (che è supposto teorema di Λ) la RN e poi usando MP fra la formula così ottenuta e lo schema K.
(iii) implica (i): dimostriamo dapprima che Λ è chiusa rispetto ad RN. Dobbiamo cioè dimostrare che se $\vdash_\Lambda \mathcal{A}$ allora $\vdash_\Lambda \Box\mathcal{A}$, infatti se $\vdash_\Lambda \mathcal{A}$ dalla tautologia $\mathcal{A}\Rightarrow(\top\Rightarrow\mathcal{A})$ otteniamo per Modus Ponens $\vdash_\Lambda \top\Rightarrow\mathcal{A}$ e quindi da (3) $\vdash_\Lambda \Box\top\Rightarrow\Box\mathcal{A}$, e dalla (1), per MP, $\vdash_\Lambda \Box\mathcal{A}$.
Proviamo ora che lo schema K appartiene a Λ. Dimostriamo dapprima che $\vdash_\Lambda \mathcal{A}\wedge\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}$ implica $\vdash_\Lambda \Box\mathcal{A}\wedge\Box\mathcal{B}\Rightarrow\Box\mathcal{C}$. Da $\vdash_\Lambda \mathcal{A}\wedge\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}$ per la (3) otteniamo $\vdash_\Lambda \Box(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})\Rightarrow\Box\mathcal{C}$, e quindi per la (2), $\vdash_\Lambda \Box\mathcal{A}\wedge\Box\mathcal{B}\Rightarrow\Box\mathcal{C}$. Ciò posto, consideriamo la tautologia $((\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\wedge\mathcal{A})\Rightarrow\mathcal{B}$, si deduce $\vdash_\Lambda \Box(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\wedge\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\mathcal{B}$ e quindi $\vdash_\Lambda \Box(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}) \Rightarrow (\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\mathcal{B})$.

Corollario 2.2.
In una logica normale $\Gamma\vdash_\Lambda \mathcal{A}$ implica $\{\Box\mathcal{B} \mid \mathcal{B}\in\Gamma\}\vdash_\Lambda \Box\mathcal{A}$.

Lemma 2.1.
In ogni logica modale Λ si ha $\vdash_\Lambda \Diamond(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})\Rightarrow \Diamond\mathcal{A}\wedge\Diamond\mathcal{B}$.
Dim
Infatti sono tautologie $\sim\mathcal{A}\Rightarrow\sim\mathcal{A}\vee\sim\mathcal{B}$ e $\sim\mathcal{B}\Rightarrow\sim\mathcal{A}\vee\sim\mathcal{B}$ quindi $\vdash_\Lambda \Box\sim\mathcal{A}\Rightarrow\Box(\sim\mathcal{A}\vee\sim\mathcal{B})$ e $\vdash_\Lambda \Box\sim\mathcal{B}\Rightarrow\Box(\sim\mathcal{A}\vee\sim\mathcal{B})$ da cui $\vdash_\Lambda \Box\sim\mathcal{A}\vee\Box\sim\mathcal{B}\Rightarrow\Box(\sim\mathcal{A}\vee\sim\mathcal{B})$ e quindi $\vdash_\Lambda \sim\Box(\sim\mathcal{A}\vee\sim\mathcal{B})$ $\Rightarrow\sim(\Box\sim\mathcal{A}\vee\Box\sim\mathcal{B})$ da cui anche
$\vdash_\Lambda \sim\Box\sim(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}) \Rightarrow (\sim\Box\sim\mathcal{A}\wedge\sim\Box\sim\mathcal{B}))$

MODELLI CANONICI DI LOGICHE NORMALI

Nel seguito vogliamo trovare *un risultato di correttezza e completezza* per vaste classi di logiche normali, cioè teoremi del tipo: *una formula $\mathcal{A}$ è un teorema della logica normale Λ se e solo se è valido su una classe di frame F_Λ.*
A tal scopo andiamo ad introdurre una famiglia di modelli delle logiche normali.
Sia Λ una logica normale, poiché gli unici oggetti che abbiamo “a disposizione” sono le fbf e i teoremi di Λ, è solo a partire da questi che possiamo definire i mondi e la relazione di raggiungibilità, introduciamo quindi le seguenti

Definizione. 3.1. (consistenza).
Un insieme di formule Γ si dice **Λ–consistente** se non $\Gamma\vdash_\Lambda\bot$, dove $\bot$ è una abbreviazione di $\mathcal{A}\wedge\sim\mathcal{A}$, ($\bot$ indica quindi una formula sempre falsa). Una logica Λ si dice consistente se $\bot$ non è un teorema di Λ.

La consistenza di un insieme di formule dipende dalla logica Λ in cui si lavora, infatti se consideriamo la logica PL l'insieme $\Gamma=\{\Box(A\Rightarrow B), \Box A, \sim\Box B\}$è consistente, ma lo stesso insieme Γ non è consistente nella logica *K*, in quanto abbiamo in *K* la seguente deduzione di $\Box B$ da Γ:

1) $\Box(A\Rightarrow B)$ (perché appartiene a Γ)
2) $\Box(A\Rightarrow B)\Rightarrow(\Box A\Rightarrow\Box B)$ (schema K)
3) $\Box A\Rightarrow\Box B$ (M.P. fra 1 e 2)
4) $\Box A$ (perché appartiene a Γ)
5) $\Box B$ (M.P. fra 4 e 3)

che con $\sim\Box B$ porta alla non consistenza di Γ.

Sia Γ un insieme Λ-consistente di formule, le seguenti proprietà sono di facile verifica:

- Se $\vdash_\Lambda \mathcal{A}$, allora $\Gamma\vdash_\Lambda \mathcal{A}$.
- Se Λ' è una logica estensione di Λ e se $\Gamma\vdash_\Lambda \mathcal{A}$, allora $\Gamma\vdash_{\Lambda'} \mathcal{A}$.
- Se $\mathcal{A}\in\Gamma$, allora $\Gamma\vdash_\Lambda \mathcal{A}$.
- Se $\Gamma\subseteq\Delta$ e $\Gamma\vdash_\Lambda \mathcal{A}$, allora $\Delta\vdash_\Lambda \mathcal{A}$.
- Se $\Gamma\vdash_\Lambda \mathcal{A}$ e $\{\mathcal{A}\}\vdash_\Lambda \mathcal{B}$, allora $\Gamma\vdash_\Lambda \mathcal{B}$.
- Se $\Gamma\vdash_\Lambda \mathcal{A}$ e $\Gamma\vdash_\Lambda \mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$, allora $\Gamma\vdash_\Lambda \mathcal{B}$.
- $\Gamma\cup\{\mathcal{A}\}\vdash_\Lambda \mathcal{B}$ se e solo se $\Gamma\vdash_\Lambda \mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$.
- $\{\mathcal{A}|\ \Gamma\vdash_\Lambda \mathcal{A}\}$ è la minima logica contenente $\Gamma\cup\Lambda$.
- PL è Λ–consistente, Fma (Φ) non è Λ–consistente.
- Γ è Λ–consistente se e solo se esiste una formula $\mathcal{A}$ tale che non $\Gamma\vdash_\Lambda \mathcal{A}$.
- $\Gamma\vdash_\Lambda \mathcal{A}$ se e solo se $\Gamma\cup\{\sim\mathcal{A}\}$ non è Λ–consistente.
- Se Γ è Λ–consistente , allora per ogni $\mathcal{A}$ o $\Gamma\cup\{\mathcal{A}\}$ o $\Gamma\cup\{\sim\mathcal{A}\}$ è Λ–consistente.

Per far questo risulta utile la seguente
Definizione 3.2 (insieme massimale).
Un insieme Δ di formule si dice **Λ–(consistente) massimale** se è Λ–consistente e, per ogni formula $\mathcal{A}$, o $\mathcal{A}$ o $\sim\mathcal{A}$ (ed una sola di loro) appartiene a Δ. In altre parole qualunque forma si aggiunga a Δ si perde la consistenza di Δ.

Un insieme Δ, Λ–massimale, gode delle proprietà:

- Se $\Delta\vdash_\Lambda \mathcal{A}$ allora $\mathcal{A}\in\Delta$.
  Infatti se $\mathcal{A}\notin\Delta$, allora $\sim A\in\Delta$ e quindi $\Delta\vdash_\Lambda\sim A$, cioè $\Delta\vdash_\Lambda\bot$, contro l'ipotesi della consistenza.
- $\Lambda\subseteq\Delta$.
  Sia infatti $\mathcal{A}\in\Lambda$, allora $\vdash_\Lambda \mathcal{A}$ e a maggior ragione $\Delta\vdash_\Lambda \mathcal{A}$, perciò $\mathcal{A}\in\Delta$.
- $\bot\notin\Delta$.
- Se $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\in\Delta$, allora $\mathcal{A}\in\Delta$ implica $\mathcal{B}\in\Delta$.

Dato un modello di Λ ed un suo mondo α, l'insieme

$\Gamma_S = \{\mathcal{A} \mid M \models_\alpha \mathcal{A}\}$
è un insieme Λ–massimale di formule.

Gli insiemi Λ-massimali sono pertanto buoni candidati a essere mondi del modello che vogliamo costruire, a questo punto però nasce spontanea la domanda se per ogni logica Λ (consistente) esistano insiemi Λ-massimali. A questo risponde il

Lemma di Lindenbaum:
Ogni insieme Λ–consistente di formule è contenuto in un insieme Λ-massimale.
Traccia della dimostrazione.
Sia $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n, \ldots$ una enumerazione delle formule del linguaggio su cui è costruita Λ. Per ogni insieme Λ-consistente Γ poniamo:
$\Delta_0 = \Gamma$,
$\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\mathcal{A}_n\}$ se $\Delta_n \not\vdash_\Lambda \sim\mathcal{A}_n$
$\quad = \Delta_n \cup \{\sim\mathcal{A}_n\}$ nell'altro caso.
Sia Δ l'unione insiemistica dei Δ_n. Per provare che Δ è Λ-massimale, basta provare che è Λ-consistente, infatti per costruzione data una qualsiasi formula $\mathcal{A}$, o $\mathcal{A}$ o $\sim\mathcal{A}$ appartiene a Δ.
Se Δ non fosse consistente, $\perp$ si dedurrebbe da un insieme finito di formule di Δ e quindi tali formule starebbero tutte in un qualche Δ_m, dunque Δ_m sarebbe non consistente, ma la costruzione dei Δ_n è stata fatta in modo da conservare la consistenza.

Nel seguito risulta importante il seguente
Corollario 3.1:
$\Gamma \vdash_\Lambda \mathcal{A}$ se e solo se $\mathcal{A}$ appartiene ad ogni insieme Λ–massimale che contiene Γ. In particolare $\vdash_\Lambda \mathcal{A}$ se e solo se $\mathcal{A}$ appartiene ad ogni insieme Λ–massimale.
Dim.
Dimostriamo per assurdo che se $\mathcal{A}$ appartiene ad ogni insieme Λ–massimale che contiene Γ allora $\Gamma \vdash_\Lambda \mathcal{A}$. Infatti se fosse non $\Gamma \vdash_\Lambda \mathcal{A}$ allora $\Gamma \cup \{\sim\mathcal{A}\}$ sarebbe Λ–consistente e quindi esisterebbe un insieme massimale Δ tale che $\Gamma \cup \{\sim\mathcal{A}\} \subseteq \Delta$. In particolare si avrebbe $\sim\mathcal{A} \in \Delta$ e quindi $\mathcal{A} \notin \Delta$.
Viceversa, se $\Gamma \vdash_\Lambda \mathcal{A}$ allora per ogni insieme Λ-massimale Δ contenente Γ si ha: $\Delta \vdash_\Lambda \mathcal{A}$ e quindi $\mathcal{A} \in \Delta$.
Il secondo asserto segue subito dalla osservazione che $\vdash_\Lambda \mathcal{A}$ sta per $\emptyset \vdash_\Lambda \mathcal{A}$.

Definizione 3.3. (modello e frame canonico)
Sia Λ una logica normale (consistente). Diciamo **modello canonico** di Λ un modello M^Λ così costruito:
$M^\Lambda = (S^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda)$
dove

- $S^\Lambda = \{\alpha \subseteq Fma(\Phi) \mid \alpha$ è Λ-massimale$\}$,
- $(\alpha, \beta) \in R^\Lambda$ se e solo se $\{\mathcal{A} \in Fma(\Phi) \mid \Box\mathcal{A} \in \alpha\} \subseteq \beta$,
- $V^\Lambda(A) = \{\alpha \in S^\Lambda \mid A \in \alpha\}$ per ogni formula atomica A.

$F^\Lambda = (S^\Lambda, R^\Lambda)$ si dice **frame canonico**.

In altre parole un mondo β è in relazione con α (o raggiungibile da α) nel modello (frame) canonico se in esso sono realizzate tutte le possibili verità di α.

Osservazione 3.1

La relazione R^{Λ} può essere definita nel seguente modo equivalente a quello dato nella definizione 3.3:

$(\alpha, \beta) \in R^{\Lambda}$ se e solo se $\{\Diamond \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \beta\} \subseteq \alpha$.

Per provare l'equivalenza tra le due definizioni dobbiamo provare che $\Box\mathcal{A} \in \alpha$ implica $\mathcal{A} \in \beta$, se e solo se $\mathcal{A} \in \beta$ implica $\Diamond\mathcal{A} \in \alpha$.

Supponiamo che $\Box\mathcal{A} \in \alpha$ implichi $\mathcal{A} \in \beta$ per ogni formula $\mathcal{A}$. Sia $\mathcal{A} \in \beta$ allora $\sim\mathcal{A} \notin \beta$ (perché β è Λ-consistente) e quindi $\Box\sim\mathcal{A} \notin \alpha$ e dunque $\sim\Box\sim\mathcal{A} \in \alpha$ cioè $\Diamond\mathcal{A} \in \alpha$.

Viceversa supponiamo che $\mathcal{A} \in \beta$ implichi $\Diamond\mathcal{A} \in \alpha$ per ogni formula $\mathcal{A}$. Sia $\Box\mathcal{A} \in \alpha$ allora $\sim\Box\mathcal{A} \notin \alpha$ e quindi $\sim\Box\sim\sim\mathcal{A} \notin \alpha$ cioè $\Diamond\sim\mathcal{A} \notin \alpha$ e $\sim\mathcal{A} \notin \beta$, da cui $\mathcal{A} \in \beta$.

Teorema 3.1.(di verità).

Per ogni mondo α di S^{Λ} e per ogni formula $\mathcal{A}$, $M^{\Lambda} \models_{\alpha} \mathcal{A}$ se e solo se $\mathcal{A} \in \alpha$.

Dim

Procediamo per induzione sul numero n di connettivi (logici e modali) di $\mathcal{A}$.

Caso base: Se $\mathcal{A}$ è una formula atomica A (cioè n=0) il teorema segue dalla definizione di V^{Λ}.

Ipotesi di induzione: Il teorema vale per ogni fbf con un numero di connettivi minore di n.

Passo induttivo: $\mathcal{A}$ sia una fbf con n connettivi.

1) Sia $\mathcal{A}$ della forma $\sim\mathcal{B}$. Allora $M^{\Lambda} \models_{\alpha}\mathcal{A}$ se e solo se $M^{\Lambda} \not\models_{\alpha}\mathcal{B}$ e per ipotesi di induzione se e solo se $\mathcal{B} \notin \alpha$ il che equivale ad $\mathcal{A} \in \alpha$.

2) Sia $\mathcal{A}$ della forma $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$. Allora $M^{\Lambda} \models_{\alpha}\mathcal{A}$ se e solo se $M^{\Lambda} \not\models_{\alpha}\mathcal{B}$ oppure $M^{\Lambda} \models_{\alpha}\mathcal{C}$, ovvero per ipotesi di induzione se e solo se $\mathcal{B} \notin \alpha$ (e quindi $\sim\mathcal{B} \in \alpha$) oppure $\mathcal{C} \in \alpha$. Essendo $\sim\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}.)$ una tautologia, appartiene ad α quindi se $\sim\mathcal{B} \in \alpha$ si ottiene $\alpha \vdash_{\Lambda} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$, cioè $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \in \alpha$, analogamente se $\mathcal{C} \in \alpha$ dall'assioma A1 deduciamo $\alpha \vdash_{\Lambda} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$, cioè $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \in \alpha$.

Viceversa se sappiamo che $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \in \alpha$, se fosse $\mathcal{B} \in \alpha$, avremmo $\alpha \vdash_{\Lambda} \mathcal{C}$, cioè $\mathcal{C} \in \alpha$; quindi se $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \in \alpha$ o $\mathcal{B} \notin \alpha$ oppure $\mathcal{C} \in \alpha$ che, per ipotesi di induzione danno rispettivamente $M^{\Lambda} \not\models_{\alpha}\mathcal{B}$ oppure $M^{\Lambda} \models_{\alpha}\mathcal{C}$ che,come abbiamo visto equivalgono a $M^{\Lambda} \models_{\alpha}\mathcal{A}$.

3) Sia $\mathcal{A}$ della forma $\Box\mathcal{B}$. Allora se $M^{\Lambda} \models_{\alpha}\mathcal{A}$ per ogni mondo β di S^{Λ} con $(\alpha, \beta) \in R^{\Lambda}$ si ha $M^{\Lambda} \models_{\beta}\mathcal{B}$ e per ipotesi di induzione $\mathcal{B} \in \beta$. Poiché β è un generico insieme massimale contenente $\{\mathcal{D} \mid \Box\mathcal{D} \in \alpha\}$ si ha $\{\mathcal{D} \mid \Box\mathcal{D} \in \alpha\} \vdash_{\Lambda} \mathcal{B}$ (Corollario 3.1) e allora per il Corollario 2.2 $\{\Box\mathcal{D} \mid \Box\mathcal{D} \in \alpha\} \vdash_{\Lambda} \Box\mathcal{B}$ cioè $\alpha \vdash_{\Lambda} \Box\mathcal{B}$ ovvero $\Box\mathcal{B} \in \alpha$, per la massimalità di α. Viceversa se $\Box\mathcal{B} \in \alpha$, per definizione di R^{Λ}, per ogni mondo β di S^{Λ} con $(\alpha, \beta) \in R^{\Lambda}$ si ha $\mathcal{B} \in \beta$ e quindi, per ipotesi induttiva $M^{\Lambda} \models_{\beta}\mathcal{B}$, da cui si ottiene subito $M^{\Lambda} \models_{\alpha}\mathcal{A}$.

Notate che possiamo limitarci a considerare solo questi 3 connettivi perché bastano ad esprimere una qualsiasi formula della logica in esame.

Corollario 3.2.

Il modello canonico M^{Λ} determina Λ. Cioè per ogni formula $\mathcal{A}$, $M^{\Lambda} \models \mathcal{A}$ se e solo se $\vdash_{\Lambda} \mathcal{A}$.

Dim.

Segue dal teorema precedente, tenendo conto del fatto che $\mathcal{A}$ appartiene ad ogni insieme massimale se e solo se $\vdash_{\Lambda} \mathcal{A}$.

Osservazione 3.2. Λ è completa rispetto a F^{Λ} ma non è detto che sia determinata da F^{Λ}, infatti il modo in cui è stata scelta V^{Λ} è fondamentale per il caso base della dimostrazione del Teorema di verità.
Caratteristiche della relazione di raggiungibilità nel modello (frame) canonico ci permetteranno di avere spesso risultati di correttezza e completezza per logiche normali rispetto ad opportune classi di frame.

Teorema 3.2.

K è determinata da tutti i frame, ovvero *K* è corretta e completa rispetto alla classe di tutti i frame.

Dim.

Iniziamo col dimostrare la correttezza di *K*. Supponiamo $\vdash_{K} \mathcal{A}$. Gli schemi di assiomi A1, A2, A3 sono tautologie e quindi sono validi su un qualsiasi frame, lo schema K è valido su ogni frame e sia MP, sia la Regola di Necessitazione (RN) fanno passare da formule valide su un frame a formule valide su quello stesso frame, quindi $\mathcal{A}$, essendo l'ultima formula di una sequenza finita di fbf che o sono istanze degli assiomi A1, A2, A3, K o sono ottenute da fbf precedenti tramite MP o RN, è una fbf valida su ogni frame.

Proviamo ora la completezza di *K*. Sia $F \models \mathcal{A}$ per ogni frame *F*. Supponiamo per assurdo che non $\vdash_{K} \mathcal{A}$, allora esiste il modello canonico M^{K} in cui $\mathcal{A}$ non è vera e dunque $\mathcal{A}$ non è valida nel frame su cui M^{K} è costruito, contro l'ipotesi.

A questo punto diventa interessante il seguente

Lemma 3.1.

Se una logica normale Λ contiene gli schemi elencati nel Teorema 1.1, R^{Λ} gode della corrispondente proprietà.

Dim.

Daremo la dimostrazione solo per alcuni casi.

Proviamo dapprima che se Λ contiene lo schema $\Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\Box\mathcal{A}$, R^{Λ} è transitiva.

Poiché S^{Λ} è formato da insiemi Λ-massimali $\Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\Box\mathcal{A}$ appartiene ad ognuno di essi. Supponiamo ora che sia $(\alpha, \beta) \in R^{\Lambda}$ e $(\beta, \gamma) \in R^{\Lambda}$; se $\Box\mathcal{A}$

$\in \alpha$, per MP $\Box\Box\mathcal{A}\in\alpha$ e allora, per definizione di R^{Λ}, $\Box\mathcal{A}\in\beta$ ed anche $\mathcal{A}\in\gamma$. Dunque $\{\mathcal{A} \mid \Box\mathcal{A}\in\alpha\} \subseteq \gamma$, cioè $\alpha R^{\Lambda}\gamma$.

Proviamo poi che se Λ contiene lo schema $\Diamond\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\Diamond\mathcal{A}$, R^{Λ} è debolmente densa. Supponiamo che sia $(\alpha, \beta)\in R^{\Lambda}$ vogliamo trovare un γ tale che $(\alpha, \gamma)\in R^{\Lambda}$ e $(\gamma, \beta)\in R^{\Lambda}$ cioè un γ tale che $\{\mathcal{A} | \Box\mathcal{A}\in\alpha\}\subseteq\gamma$ e $\{\Diamond\mathcal{B} | \mathcal{B}\in\beta\}\subseteq\gamma$. Poniamo allora

$\gamma_0=\{\mathcal{A} \mid \Box\mathcal{A}\in\alpha\}\cup\{\Diamond\mathcal{B} \mid \mathcal{B}\in\beta\}$. Supponiamo quindi che γ_0 non sia consistente, allora esistono $\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_n$ in $\{\mathcal{A} \mid \Box\mathcal{A}\in\alpha\}$ e $\Diamond\mathcal{B}_1,\ldots, \Diamond\mathcal{B}_m$ in $\{\Diamond\mathcal{B} \mid \mathcal{B}\in\beta\}$ tali che $\vdash_{\Lambda} \mathcal{A}_1\wedge\ldots\wedge\mathcal{A}_n\wedge\Diamond\mathcal{B}_1\wedge\ldots\wedge\Diamond\mathcal{B}_m \Rightarrow\bot$, cioè $\vdash_{\Lambda} \mathcal{A}_1\wedge\ldots\wedge\mathcal{A}_n\Rightarrow\sim(\Diamond\mathcal{B}_1\wedge\ldots\wedge\Diamond\mathcal{B}_m)$. Indichiamo per brevità con $\mathcal{B}$ la fbf $\mathcal{B}_1\wedge\ldots\wedge\mathcal{B}_m$, allora $\vdash_{\Lambda}\Diamond\mathcal{B}\Rightarrow (\Diamond\mathcal{B}_1\wedge\ldots\wedge\Diamond\mathcal{B}_m)$ (per il lemma 2.1) e quindi anche $\vdash_{\Lambda}\sim(\Diamond\mathcal{B}_1\wedge\ldots\wedge\Diamond\mathcal{B}_m)\Rightarrow\sim\Diamond\mathcal{B}$, cioè $\vdash_{\Lambda} \mathcal{A}_1\wedge\ldots\wedge\mathcal{A}_n\Rightarrow\sim\Diamond\mathcal{B}$ da cui $\vdash_{\Lambda}\Box\mathcal{A}_1\wedge\ldots\wedge\Box\mathcal{A}_n\Rightarrow\Box\sim\Diamond\mathcal{B}$ dunque per la massimalità di α, $(\Box\mathcal{A}_1\wedge\ldots\wedge\Box\mathcal{A}_n\Rightarrow\Box\sim\Diamond\mathcal{B}) \in\alpha$ e da $(\Box\mathcal{A}_1\wedge\ldots\wedge\Box\mathcal{A}_n)\in\alpha$ segue per MP $\Box\sim\Diamond\mathcal{B}\in\alpha$, cioè $\sim\Diamond\Diamond\mathcal{B}\in\alpha$, ma anche $\sim\Diamond\Diamond\mathcal{B}\Rightarrow\sim\Diamond\mathcal{B}\in\alpha$, essendo equivalente all'istanza $\Diamond\mathcal{B}\Rightarrow\Diamond\Diamond\mathcal{B}$ dello schema che stiamo considerando, e pertanto $\sim\Diamond\mathcal{B}\in\alpha$. Ma,essendo $(\alpha ,\beta)\in R^{\Lambda}$, poiché $\mathcal{B}= \mathcal{B}_1\wedge\ldots\wedge\mathcal{B}_m$ sta in β si ricava $\Diamond\mathcal{B}\in\alpha$, assurdo.

Pertanto γ_0 è consistente ed è dunque contenuto in un insieme massimale che è il γ cercato.

Queste due dimostrazioni illustrano le tecniche tipo utilizzate anche per tutti gli altri casi, che potreste provare a fare per esercizio (tra l'altro a lezione ne farò anche altre).

Dal Lemma precedente si possono ottenere risultati di correttezza e completezza rispetto ad opportune classi di frame per ogni logica ottenuta estendendo la logica *K* con un sottoinsieme qualunque dell'insieme degli schemi elencati nel Teorema 1.1.

A titolo d'esempio dimostriamo

Teorema 3.3.

K4 è determinata da tutti i frame transitivi, ovvero *K4* è corretta e completa rispetto alla classe di tutti i frame transitivi.

Dim.

Supponiamo $\vdash_{K4} \mathcal{A}$. Gli schemi di assiomi A1,A2,A3 sono tautologie e quindi sono validi su un qualsiasi frame, lo schema K è valido su ogni frame, lo schema 4 è valido su ogni frame transitivo e, sia MP, sia RN fanno passare da formule valide su un frame a formule valide su quel frame, quindi $\mathcal{A}$, essendo l'ultima formula di una sequenza finita di fbf che o sono istanze degli assiomi A1, A2, A3, K e 4 o sono ottenute da fbf precedenti tramite MP o RN, è una fbf valida su ogni frame transitivo.

Viceversa sia $F\models \mathcal{A}$ per ogni frame transitivo F. Supponiamo per assurdo che non $\vdash_{K4}\mathcal{A}$, allora esiste un modello M^{K4} in cui $\mathcal{A}$ non è vera e dunque $\mathcal{A}$

non è valida nel frame su cui M^{K4} è costruito, ma, essendo M^{K4} transitivo, $\mathcal{A}$ non è valida su un frame transitivo, contro l'ipotesi.

Allo stesso modo si procede con gli altri schemi e le relative proprietà.

FILTRAZIONI E DECIDIBILITA'

Se una logica è completa rispetto ad una classe **C** di frame o modelli, noi dovremmo trovare per ogni fbf che non sia teorema della logica in esame un elemento della classe **C** che la falsifica. Teoricamente basterebbe trovare il modello canonico o il suo frame. Ma il modello canonico è definito in modo non costruttivo ed inoltre è "troppo grande" per le nostre necessità, infatti per conoscere il valore di verità di una formula $\mathcal{A}$ in un mondo di un modello ci basta conoscere i valori di verità delle sue sottoformule in quello stesso mondo di quello stesso modello. Possiamo allora identificare i mondi in cui le sottoformule di $\mathcal{A}$ assumono lo stesso valore di verità, questo procedimento si chiama filtrazione.

Definizione 4.1.
Dato un insieme Φ di formule atomiche, un insieme $\Gamma\subseteq Fma(\Phi)$ di fbf si dice **chiuso rispetto alle sottoformule** se $\mathcal{A}\in\Gamma$ implica $Sfma(\mathcal{A})\subseteq\Gamma$.

Dato un modello $M=(S,R,V)$ e un mondo α di S poniamo $\Gamma_\alpha=\{\mathcal{B}\in\Gamma \mid M \models_\alpha B\}$ e introduciamo la seguente relazione $\alpha\sim_\Gamma\beta$ se e solo se $\Gamma_\alpha=\Gamma_\beta$. Si verifica immediatamente che $\sim_\Gamma$ è una relazione di equivalenza su S. Chiamiamo quindi S_Γ l'insieme quoziente di S rispetto a $\sim_\Gamma$ e indichiamo con $[\alpha]$ i suoi elementi.

E' immediato verificare il seguente
Lemma 4.1.
Se $|\Gamma|=n$ allora $|S_\Gamma|\leq 2^n$.
Dim.
Se si considera la corrispondenza f: $S\rightarrow\wp(\Gamma)$ definita da $f(\alpha)=\Gamma_\alpha$, ker f è proprio la relazione $\sim_\Gamma$ e quindi, per il teorema di fattorizzazione delle applicazioni, $S_\Gamma=S/\sim_\Gamma$ è in corrispondenza biunivoca con $f(S)\subseteq\wp(\Gamma)$.

Sia poi $\Phi_\Gamma=\Phi\cap\Gamma$, indichiamo con V_Γ l'applicazione da Φ_Γ all'insieme delle parti di S_Γ definita da: $[\alpha]\in V_\Gamma(P)$ se e solo se $\alpha\in V(P)$ con $P\in\Phi_\Gamma$.

Definizione 4.2. (Γ-filtrazione)
Dati un modello $M=(S,R,V)$ e un insieme Γ di formule chiuso rispetto alle sottoformule, si chiama **Γ-filtrazione di** R una qualunque relazione R' definita su S_Γ che soddisfi alle proprietà:
(F1) Se $(\alpha,\beta)\in R$ allora $([\alpha],[\beta])\in R'$
(F2) Se $([\alpha],[\beta])\in R'$ allora per ogni $\mathcal{B}\in\Gamma$ se $\Box\mathcal{B}\in\Gamma$ e $M\models_\alpha\Box\mathcal{B}$, allora $M \models_\beta\mathcal{B}$.

Inoltre ogni modello $M'=(S_\Gamma,R',V_\Gamma)$ in cui R' è una Γ-filtrazione di R si dice **Γ-filtrazione di *M*.**
Dato un frame $F=(S,R)$ il frame $F'=(S_\Gamma,R')$ si dice Γ-filtrazione di *F*.

E' facile verificare che,

data una relazione R *sull'insieme* S *dei mondi di un modello M e considerato un insieme* Γ *chiuso rispetto alle sottoformule, la relazione* R^σ *su* S^Γ *definita da* $([\alpha],[\beta])\in R^\sigma$ *se e solo se esistono* $\gamma\in[\alpha]$ *e* $\delta\in[\beta]$ *con* $(\gamma,\delta)\in R$ *è una* Γ-*filtrazione di* R.

Infatti è immediatamente verificare che R^σ soddisfa la condizione (F1), inoltre da $([\alpha],[\beta])\in R^\sigma$ segue che esistono $\gamma\in[\alpha]$ e $\delta\in[\beta]$ con $(\gamma,\delta)\in R$, ora se $\Box\mathcal{B}\in\Gamma$ e $M\models_\alpha\Box\mathcal{B}$ si ha anche $M\models_\gamma\Box\mathcal{B}$ (perché $\Gamma_\alpha=\Gamma_\gamma$) da cui $M\models_\delta\mathcal{B}$, ma $\Gamma_\beta=\Gamma_\delta$ e $\mathcal{B}\in\Gamma$ implicano che $M\models_\delta\mathcal{B}$, quindi R^σ soddisfa anche (F2).

Ne segue che se Γ è un insieme chiuso rispetto alle sottoformule, ogni relazione R ammette almeno una Γ-filtrazione, quindi ogni modello (frame) ammette almeno una Γ-filtrazione (ma poiché R può ammettere, come vedremo, altre Γ-filtrazioni, le Γ-filtrazioni di un modello o di un frame possono essere più di una)

E' fondamentale il seguente
Lemma 4.2 (Lemma di filtrazione).
Se $\mathcal{B}\in\Gamma$, allora per ogni $\alpha\in S$, si ha $M\models_\alpha\mathcal{B}$ se e solo se $M'\models_{[\alpha]}\mathcal{B}$ (dove *M'* è una arbitraria Γ-filtrazione di *M*)
Dim.
La dimostrazione è per induzione sul numero di connettivi di $\mathcal{B}$ (che è una formula in Γ).
Caso base: $\mathcal{B}$ non ha connettivi, quindi è una formula atomica e la proprietà segue dalla definizione di V_Γ.
Ipotesi induttiva: il teorema vale per ogni formula con meno di n connettivi
Passo induttivo: Se $\mathcal{B}$ ha n connettivi allora distinguiamo i casi
1. $\mathcal{B}$ è $\sim\mathcal{A}$. Allora $M\models_\alpha\mathcal{B}$ se e solo se $M\not\models_\alpha\mathcal{A}$ e quindi per ipotesi induttiva se e solo se $M'\not\models_{[\alpha]}\mathcal{A}$ e cioè se e solo se $M'\models_{[\alpha]}\mathcal{B}$.
2. $\mathcal{B}$ è $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{C}$. Allora $M\models_\alpha\mathcal{B}$ se e solo se $M\not\models_\alpha\mathcal{A}$ oppure $M\models_\alpha\mathcal{C}$ e quindi per ipotesi induttiva se e solo se $M'\not\models_{[\alpha]}\mathcal{A}$ oppure $M'\models_{[\alpha]}\mathcal{C}$ e cioè se e solo se $M'\models_{[\alpha]}\mathcal{B}$.
3. $\mathcal{B}$ è $\Box\mathcal{A}$. Sia $M\models_\alpha\mathcal{B}$ allora in ogni mondo $[\beta]$ tale che $([\alpha],[\beta])\in R'$ si ha $M\models_\beta\mathcal{A}$ per la proprietà (F2) delle Γ-filtrazioni di R (ricordare che $\mathcal{B}$ sta in Γ), quindi per ipotesi di induzione si ha $M'\models_{[\beta]}\mathcal{A}$ da cui si ricava subito $M'\models_{[\alpha]}\mathcal{B}$. Viceversa, se $M'\models_{[\alpha]}\mathcal{B}$ allora per ogni β con $(\alpha,\beta)\in R$ si ha per la (F1) $([\alpha],[\beta])\in R'$ e quindi $M'\models_{[\beta]}\mathcal{A}$ da cui per ipotesi di induzione $M\models_\beta\mathcal{A}$, cioè $M\models_\alpha\mathcal{B}$.

Corollario 4.1.
$M\models\mathcal{B}$ se e solo se $M'\models\mathcal{B}$.

$\mathbf{C} \models \mathcal{B}$ se e solo se $\Gamma(\mathbf{C}) \models \mathcal{B}$ (dove $\Gamma(\mathbf{C})$ indica la classe dei frame che sono Γ-filtrazioni di frame in **C**).

Possiamo ora dimostrare il seguente
Teorema 4.1.
La minima logica normale *K* è determinata dalla classe di tutti i frame finiti. Inoltre se $\mathcal{A}$ ha n sottoformule $\mathcal{A}$ è un teorema di *K* se e solo se $\mathcal{A}$ è valida in tutti i frame con meno di 2^n mondi.
Dim.
Se $\mathcal{A}$ è un teorema di *K* allora $\mathcal{A}$ è valido in tutti i frame e a maggior ragione è valido in tutti i frame finiti ed in tutti i frame con meno di 2^n mondi.
Se $\mathcal{A}$ non è un teorema di *K*, c'è almeno un mondo α del modello canonico *M* di *K* in cui $\mathcal{A}$ non è vera, considerato allora l'insieme Γ di tutte le sottoformule di $\mathcal{A}$, per il lemma di filtrazione $\mathcal{A}$ è falsa nel mondo $[\alpha]$ di una qualsiasi Γ-filtrazione di *M* e quindi non è valido nel corrispondente frame. Tale frame per il Lemma 4.1 ha cardinalità minore o uguale di 2^n con $n=|\mathrm{Sfma}(\mathcal{A})|$.

Il teorema 4.1 ci dice quindi che la logica *K* è **decidibile**: per decidere se una fbf $\mathcal{A}$ è un teorema di *K* basta verificare in modo esaustivo se $\mathcal{A}$ è vera in tutti i modelli con un insieme di mondi di cardinalità minore o uguale di 2^n con $n=|\mathrm{Sfma}(\mathcal{A})|$. Questi modelli sono in numero finito funzione di n, infatti il numero di relazioni binarie su un insieme di dimensione m è 2^m ed inoltre anche le funzioni da Φ_Γ a $\wp(S_\Gamma)$ sono in numero finito limitato da una funzione di n. Quindi con un numero di passi finito e dipendente da n, riusciamo a decidere se $\mathcal{A}$ è o non è un teorema di *K*. Osservate comunque che la complessità dell'algoritmo che si potrebbe ricavare dai precedenti ragionamenti lo rende assolutamente inutilizzabile.
Il ragionamento precedente ci dà tuttavia un valido strumento per *provare teoricamente la decidibilità* di *K* e, come vedremo, di varie altre classi di logiche modali, che ampliano la logica preposizionale dandole una espressività simile a quella della logica del I ordine (che invece, come sappiamo, è indecidibile).

Se volessimo discutere la decidibilità delle logiche ottenute aggiungendo come assiomi a *K* schemi elencati nel Teorema 1.1, per utilizzare una procedura simile a quella introdotta nella dimostrazione del teorema 4.1 dobbiamo vedere se possiamo trovare una Γ-filtrazione del modello canonico in cui la relazione continui a conservare le proprietà della relazione del modello canonico.
Ad esempio consideriamo la logica *KD*, sappiamo che la relazione del modello canonico di *KD* è seriale.
E' facile osservare che la relazione R^σ che abbiamo definito prima è seriale (riflessiva, simmetrica) se R è seriale (riflessiva, simmetrica)

A questo punto siamo in grado di dimostrare il
Teorema 4.2.
La logica normale *KD* è determinata dalla classe di tutti i frame seriali finiti.

Inoltre se $\mathcal{A}$ ha n sottoformule, $\mathcal{A}$ è un teorema di *KD* se e solo se $\mathcal{A}$ è valida in tutti i frame seriali con meno di 2^n elementi, dunque *KD* è decidibile.

Dim.

Se $\mathcal{A}$ è un teorema di *KD* allora $\mathcal{A}$ è valido in tutti i frame seriali e a maggior ragione è valido in tutti i frame seriali finiti.

Se $\mathcal{A}$ non è un teorema di *KD*, c'è almeno un mondo α del modello *M* canonico di *KD* in cui $\mathcal{A}$ non è vera, considerato allora l'insieme Γ di tutte le sottoformule di $\mathcal{A}$, per il lemma di filtrazione $\mathcal{A}$ è falsa nel mondo $[\alpha]$ di una qualsiasi Γ-filtrazione di *M*. In particolare è falsa in quella Γ-filtrazione del modello canonico in cui la Γ-filtrazione di R^{KD} è proprio $(R^{KD})^\sigma$, ma allora essendo R^{KD} seriale è facile verificare che $(R^{KD})^\sigma$ è seriale e quindi $\mathcal{A}$ non è valida nel corrispondente frame che è seriale e per il Lemma 4.1 ha cardinalità minore o uguale di 2^n con $n=|\mathrm{Sfma}(\mathcal{A})|$.

Analogamente si prova la decidibilità delle logiche *KT, KB, KBD,KBT.*

Osserviamo inoltre che per ogni relazione R , considerata una qualsiasi Γ-filtrazione R' di R, si ha $R^\sigma \subseteq R'$, dunque se R è seriale (riflessiva) una qualsiasi sua Γ-filtrazione è seriale (riflessiva), quindi nella dimostrazione precedente non era necessario considerare proprio la filtrazione avente come Γ-filtrazione di R^{KD} proprio $(R^{KD})^\sigma$. Abbiamo tuttavia preferito fare questo passaggio per avere una tecnica di dimostrazione che si applicasse anche alle logiche *KB, KBD, KBT.*

Va però notato che alcune proprietà di R non sono conservate da R^σ, ad esempio se R è transitiva non è detto che R^σ sia transitiva. Per provare la decidibilità di *K4* usando il procedimento che abbiamo appena indicato bisogna trovare una relazione che sia una Γ-filtrazione della relazione del modello canonico e sia transitiva.

A tal proposito si può osservare che,

data una relazione R transitiva sull'insieme S *dei mondi di un modello M e considerato un insieme* Γ *chiuso rispetto alle sottoformule, la relazione* R^τ *su* S^Γ *definita da*

$([\alpha],[\beta])\in R^\tau$ *se e solo se per ogni fbf* $\mathcal{B}$, $\Box\mathcal{B}\in\Gamma$ *e* $M \models_\alpha \Box\mathcal{B}$ *implicano* $M \models_\beta \Box\mathcal{B}\wedge\mathcal{B}$

è una Γ*-filtrazione transitiva*

Verifichiamo dapprima che R^τ è una Γ-filtrazione: R^τ soddisfa immediatamente la condizione (F2), supponiamo ora $(\alpha,\beta)\in R$ e sia $\Box\mathcal{B}\in\Gamma$ e $M \models_\alpha \Box\mathcal{B}$, poiché R è transitiva e lo schema 4 è valido su ogni frame transitivo, si ha anche $M \models_\alpha \Box\mathcal{B}\Rightarrow\Box\Box\mathcal{B}$, da cui $M \models_\alpha \Box\Box\mathcal{B}$. Ora da $M \models_\alpha \Box\mathcal{B}$ e da $(\alpha,\beta)\in R$ segue $M\models\mathcal{B}$, da $M \models_\alpha \Box\Box\mathcal{B}$ e da $(\alpha,\beta)\in R$ segue $M \models_\alpha \Box\mathcal{B}$ quindi se $(\alpha,\beta)\in R$, $M \models_\alpha \Box\mathcal{B}$ implica $M \models_\beta \Box\mathcal{B}\wedge\mathcal{B}$, ovvero $([\alpha],[\beta])\in R^\tau$, pertanto le relazione R^τ soddisfa anche (F1). Verifichiamo ora che R^τ è transitiva: siano $([\alpha],[\beta])\in R^\tau$, $([\beta],[\gamma])\in R^\tau$, ora la prima implica che per ogni fbf $\mathcal{B}$, da $\Box\mathcal{B}\in\Gamma$ e da $M \models_\alpha \Box\mathcal{B}$ segue $M \models_\beta \Box\mathcal{B}\wedge\mathcal{B}$, e da questa essendo $([\beta],[\gamma])\in R^\tau$, segue anche $M \models_\beta \Box\mathcal{B}\wedge\mathcal{B}$, cioè $([\alpha],[\gamma])\in R^\tau$.

Quindi si può dimostrare in modo del tutto analogo al precedente il

Teorema 4.3.

La minima logica normale *K4* è determinata dalla classe di tutti i frame transitivi finiti. Inoltre se $\mathcal{A}$ ha n sottoformule $\mathcal{A}$ è un teorema di *K4* se e solo se $\mathcal{A}$ è valido in tutti i frame transitivi con meno di 2^n mondi, dunque *K4* è decidibile.

A questo punto possiamo notare che se $R^{\sigma} \subseteq R^{\tau}$, e poiché ogni relazione che contiene una relazione seriale (riflessiva) è pure seriale (riflessiva), utilizzando come Γ-filtrazione R^{τ}, si può provare anche la decidibilità di *KD4, KT4.*

Una logica Λ ha la **proprietà di frame (modello) finito** se è determinata da tutti i frame finiti su cui è corretta, cioè se $\mathcal{A}$ non è un teorema di Λ c'è un frame finito *F* su cui Λ è corretta e su cui $\mathcal{A}$ non è valida.
Una logica Λ ha la **proprietà forte di frame (modello) finito** se ha la proprietà di frame (modello) finito ed inoltre quando $\mathcal{A}$ non è un teorema di Λ esiste una funzione computabile g tale che la cardinalità del frame (modello) su cui Λ è corretta ed $\mathcal{A}$ non è valida è limitata superiormente da g(n), dove n=|Stma($\mathcal{A}$)|.
K e le altre logiche prima considerate sono esempi di logiche che hanno la proprietà forte di frame finito.
La tecnica usata per provare la loro decidibilità può essere utilizzata per provare la decidibilità di una qualsiasi logica Λ che abbia la proprietà forte di frame finito e sia inoltre finitamente assiomatizzabile, in tal caso infatti è decidibile anche se Λ è corretta su un dato frame *F* poiché basta decidere se ogni schema di assiomi è valido in *F*.

LE PIU' COMUNI LOGICHE NORMALI

Le logiche normali più comuni sono quelle che si ottengono da *K* per estensione tramite un sottoinsieme degli schemi di assiomi D,T,4,B,5. Queste logiche sono tutte decidibili (e la loro decidibilità si prova con la tecnica che abbiamo illustrato nel paragrafo precedente). Vogliamo ora veder come queste logiche sono fra loro collegate.

Definizione 5.1: (modalità, modalità duale, formula duale)
Si dice **modalità** ogni parola sull'alfabeto{$\Diamond$,$\Box$}, ovvero ogni sequenza finita (anche vuota) di tali simboli. I due simboli $\Diamond$,$\Box$ si dicono uno duale dell'altro. Data una modalità $M=s_1s_2\ldots s_r$ con $s_i \in \{\Diamond,\Box\}$, si chiama **modalità duale** di M la modalità $M' = s_r' \ldots s_2' s_1'$ dove s_i' è il simbolo duale di s_i.
Date due modalità M ed N ed una f.bf. $\mathcal{A}$ del tipo $M\mathcal{C} \Rightarrow N\mathcal{B}$ allora la formula $N'\mathcal{B} \Rightarrow M'\mathcal{C}$ ove M' ed N' sono le modalità duali di M ed N, si dice formula **duale** di $\mathcal{A}$.

La prima cosa che è opportuno osservare è che
in una logica Λ vale uno schema di assiomi se e solo se vale il suo duale.
Proviamo l'asserto per lo schema 4 (lo stesso procedimento si utilizza per gli altri schemi). Si consideri lo schema $\Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\Box\mathcal{A}$, poiché $\mathcal{A}$ è una fbf generica possiamo sostituirla con $\sim\mathcal{A}$ ed abbiamo $\Box\sim\mathcal{A} \Rightarrow \Box\Box\sim\mathcal{A}$, che è

equivalente a $\sim\Box\Box\sim\mathcal{A}\Rightarrow\sim\Box\sim\mathcal{A}$, a sua volta equivalente a $\Diamond\Diamond\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{A}$, questo schema viene indicato con $4\Diamond$.

E' immediato notare che
$D\Diamond$ è D,
$T\Diamond$ è $\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{A}$,
$4\Diamond$ è $\Diamond\Diamond\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{A}$,
$B\Diamond$ è $\Diamond\Box\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}$,
$5\Diamond$ è $\Diamond\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\mathcal{A}$,
è ovvio che ogni schema può essere rimpiazzato dal suo duale e viceversa.

Possiamo ora provare che:

- *Ogni logica KT è KD.*

Per quanto osservato sopra in KT vale lo schema $T\Diamond$: $\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{A}$, ma vale anche lo schema T: $\Box\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}$, da questi si deduce subito lo schema $\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{A}$, che è proprio lo schema D.

Osservazione 5.1:
Se in un sistema di logica normale abbiamo lo schema B e se $\Diamond\mathcal{C}\Rightarrow\mathcal{B}$ appartiene alla nostra logica, anche $\mathcal{C}\Rightarrow\Box\mathcal{B}$ appartiene alla logica che stiamo considerando. Infatti da $\Diamond\mathcal{C}\Rightarrow\mathcal{B}$ si deduce $\Box\Diamond\mathcal{C}\Rightarrow\Box\mathcal{B}$ che con l'istanza: $\mathcal{C}\Rightarrow\Box\Diamond\mathcal{C}$ dello schema B implica $\mathcal{C}\Rightarrow\Box\mathcal{B}$.

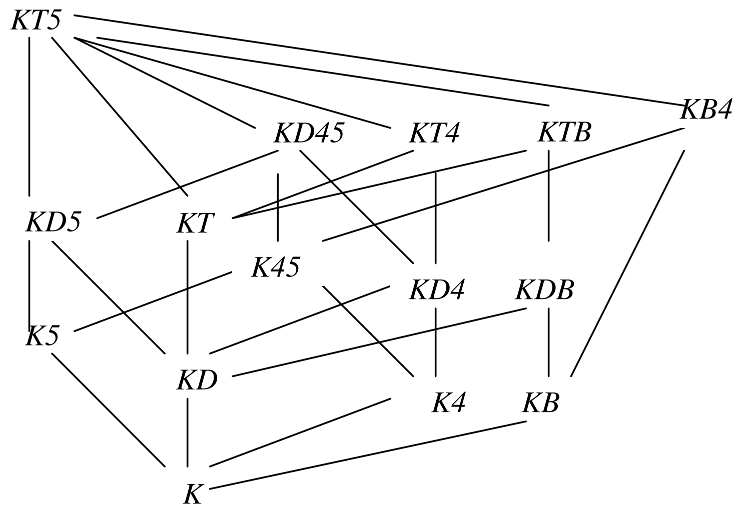
- *KB4 coincide con KB5*

Valendo 4 vale anche $4\Diamond$: $\Diamond\Diamond\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{A}$, e tenendo conto della precedente osservazione 5.1 (dove $\mathcal{C}$ è $\Diamond\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ è $\Diamond\mathcal{A}$), abbiamo $\Diamond\mathcal{A}\Rightarrow\Box\Diamond\mathcal{A}$ cioè lo schema 5.
Viceversa se in un sistema di logica normale abbiamo B e 5 allora abbiamo anche 4.
Da 5 infatti deduciamo $5\Diamond$: $\Diamond\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\mathcal{A}$, e tenuto conto della prima osservazione (con $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$ uguali a $\Box\mathcal{A}$), abbiamo $\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\Box\mathcal{A}$.

- *KT4B=KDB4=KDB5=KT5*

Dalle due proprietà precedenti si ha immediatamente che *KDB4=KDB5*, *KT4B*$\supseteq$*KDB4* e *KT4B*$\supseteq$*KT5*.
Consideriamo la logica *KT5*. Contenendo T, contiene anche $T\Diamond$: $\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{A}$
Da $T\Diamond$ e da 5 si deduce allora immediatamente che contiene B e pertanto 4 , dunque *KT4B=KT5*.
Consideriamo allora la logica *KDB4*. Da D (scritto a partire dalla formula $\Diamond\mathcal{A}$) si ottiene $\Box\Diamond\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\Diamond\mathcal{A}$ che insieme a B dà $\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\Diamond\mathcal{A}$, inoltre *KDB4* contenendo 4, contiene $4\Diamond$: $\Diamond\Diamond\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{A}$ e dunque $\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{A}$ che è $T\Diamond$, dunque contiene T.
Si ha pertanto anche l' uguaglianza KDB4=KT5.

I sistemi normali, che contengono un qualunque sottoinsieme degli schemi di cui sopra sono pertanto al più quelli rappresentati nel seguente grafico.



Si può dimostrare facilmente che le logiche rappresentate nel precedente reticolo sono tutte distinte.

Per far questo troveremo modelli che verificano una delle logiche e falsificano alcune delle altre.

Basta considerare i sei modelli standard M=(S,R,V),

(1) $S=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $R=\{<\alpha,\alpha>, <\beta,\beta>, <\gamma,\gamma>, <\alpha,\beta>, <\beta,\alpha>, <\beta,\gamma>, <\gamma,\beta>\}$, $V(A)=\{\alpha,\beta\}$, $V(C)=\{\alpha\}$ per ogni formula atomica C diversa da A.

(2) $S=\{\alpha,\beta\}$, $R=\{<\alpha,\alpha>, <\beta,\beta>, <\alpha,\beta>\}$, $V(A)=\{\alpha\}$ per ogni formula atomica A.

(3) $S=\{\alpha,\beta\}$, $R=\{<\alpha,\beta>, <\beta,\beta>\}$, $V(A)=\{\beta\}$ per ogni formula atomica A.

(4) $S=\{\alpha\}$, $R=\varnothing$, $V(A)=\varnothing$ per ogni formula atomica A.

(5) $S=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $R=\{<\alpha,\beta>, <\beta,\beta>, <\beta,\gamma>, <\gamma,\gamma>\}$, $V(A)=\{\alpha,\beta\}$, $V(C)=\{\beta\}$ per ogni formula atomica C diversa da A.

(6) $S=\{\alpha,\beta\}$, $R=\{<\alpha,\beta>, <\beta,\alpha>\}$, $V(A)=\{\beta\}$ per ogni formula atomica A.

Il modello (1) è riflessivo e simmetrico e pertanto è un modello in cui sono valide *KT,KB,KD,KDB,KTB,* ma falsifica nel mondo α la seguente istanza di 4: $\Box A\Rightarrow\Box\Box A$ e in β la seguente istanza di 5: $\Diamond C\Rightarrow\Box\Diamond C$. Pertanto le logiche che contengono 4 e 5 sono distinte dalle precedenti.

Il modello (2) è riflessivo e transitivo e pertanto è un modello in cui sono valide *KT,K4,KD,KD4,KT4,* ma falsifica nel mondo α la seguente istanza di B: $A\Rightarrow\Box\Diamond A$ e la seguente istanza di 5: $\Diamond A\Rightarrow\Box\Diamond A$. Pertanto le logiche che contengono B e 5 sono distinte dalle precedenti.

Il modello (3) è seriale e transitivo ed euclideo e pertanto è un modello in cui sono valide *KD, K4, K5, KD4, KD5, K45, KD45*, ma falsifica nel mondo α la seguente istanza di T: $\Box A\Rightarrow A$ e la seguente istanza di B: $\sim A\Rightarrow\Box\Diamond\sim A$. Pertanto le logiche che contengono B e T sono distinte dalle precedenti.

Il modello (4) è simmetrico e transitivo e pertanto euclideo, è un modello in cui sono valide *KB,K4,K5,KB4,K45,* ma falsifica nel mondo α la seguente istanza di D: $\Box A\Rightarrow\Diamond A$. Pertanto le logiche che contengono D sono distinte dalle precedenti.

Il modello (5) è seriale ed euclideo e pertanto è un modello in cui sono valide *KD, K5, KD5,* ma falsifica nel mondo α la seguente istanza di 4: $\Box A\Rightarrow\Box\Box A$. Pertanto le logiche che contengono 4 sono distinte dalle precedenti.

Il modello (6) è seriale e simmetrico e pertanto è un modello in cui sono valide *KD, KB, KDB*, ma falsifica nel mondo α la seguente istanza di T: $\Box A\Rightarrow A$. Pertanto le logiche che contengono T sono distinte dalle precedenti.

Le logiche normali KT4 e KT5 (che erano state introdotte da Lewis) vengono usualmente chiamate S4 ed S5 rispettivamente.
S5 è la logica modale più nota, è detta la *logica della necessità logica* in quanto descrive il fatto che un mondo diverso dall'attuale dovrebbe soddisfare tutte le nostre leggi logiche ed ha trovato recentemente applicazioni per rappresentare le conoscenze e le informazioni in possesso di un agente.
Tra gli schemi di S5 ci sono infatti
$\Box A \Rightarrow \Box\Box A$ e $\sim\Box A \Rightarrow \Box\sim\Box A$.
Interpretando $\Box A$ come l'agente conosce A , gli schemi dicono che se l'agente conosce qualcosa sa di conoscerla, se non la conosce sa di non conoscerla.

Queste logiche sono determinate dai seguenti frame (mettete insieme le proprietà precedenti):
- *S4 è determinata dalla classe dei frame riflessivi e transitivi*
- *S5 è determinata dalla classe dei frame d' equivalenza (*cioè frame in cui la relazione di accessibilità è una relazione di equivalenza).
Ma si può anche provare facilmente che
- *S5 è determinata dalla classe dei frame universali* (cioè frame in cui la relazione di accessibilità è la relazione universale).

Osserviamo che data una collezione di frame con insiemi di mondi a due a due disgiunti, si dice *somma diretta di* questi *frame* il frame che ha come insieme dei mondi l'unione dell'insieme dei mondi dei frame della collezione e come relazione la unione delle relazioni dei frame della collezione.
Si può provare (facendo uso della nozione di sottoframe generato da un mondo che presenteremo nel paragrafo successivo) che *una formula $\mathcal{A}$ è valida nella somma diretta di una collezione di frame se e solo se è valida in ognuno dei frame della collezione*.
Poiché ogni relazione di equivalenza, ridotta alle proprie classi, è una relazione universale e dà luogo ad una partizione dell'insieme, si ha immediatamente lo stretto collegamento fra le due classi di frame che determinano S5.

ALCUNI COMPLEMENTI.

Vogliamo qui introdurre due nozioni che possono tornare utili nella riduzione delle dimensioni di modelli o frame di una logica e che utilizzeremo nel capitolo sulla logica temporale.

Definizione 6.1. (sottomodello e sottoframe generati da α)
Siano M=(S,R,V) un modello ed $\alpha \in S$, indichiamo con R* la chiusura riflessiva e transitiva di R e poniamo $S^\alpha=\{\beta \in S \mid \alpha R^* \beta\}$, $R^\alpha = R \cap (S^\alpha \times S^\alpha)$, $V^\alpha(P) = V(P) \cap S^\alpha$, il modello $M^\alpha=(S^\alpha,R^\alpha,V^\alpha)$ si dice **sottomodello di** M **generato da** α. (S^α,R^α) si dice **sottoframe del frame** (S,R) **generato da** α.

Il seguente lemma motiva la definizione

Lemma 6.1.

Siano M un modello ed M^{α} il suo sottomodello generato da α, $\mathcal{A}$ una fbf, allora, per ogni mondo $\beta \in S^{\alpha}$, $M \models_{\beta} \mathcal{A}$ se e solo se $M^{\alpha} \models_{\beta} \mathcal{A}$.

Dim.

La dimostrazione è per induzione sul numero di connettivi.

Caso base: Se la formula $\mathcal{A}$ non ha connettivi, è una formula atomica A e dunque $M^{\alpha} \models_{\beta} A$ se e solo se $\beta \in V^{\alpha}(A) = V(A) \cap S^{\alpha}$, cioè se e solo se $\beta \in V(A)$ pertanto se e solo se $M \models_{\beta} A$.

Ipotesi di induzione: Supponiamo che l'asserto sia vero per ogni formula contenente m<n connettivi .

Passo induttivo: Sia $\mathcal{A}$ una formula con n connettivi.

distinguiamo i casi:

- L'ultimo connettivo usato sia ~, cioè $\mathcal{A}$ sia del tipo $\sim\mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ contiene n-1 connettivi.

Per definizione $M^{\alpha} \models_{\beta} \mathcal{A}$ se e solo se $M^{\alpha} \not\models_{\beta} \mathcal{B}$ e per ipotesi di induzione se e solo se $M \not\models_{\beta} \mathcal{B}$ cioè se e solo se $M \models_{\beta} \mathcal{A}$.

- L'ultimo connettivo usato sia $\Rightarrow$, cioè $\mathcal{A}$ sia del tipo $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$. $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ contengono m<n connettivi. Per definizione $M^{\alpha} \models_{\beta} \mathcal{A}$ se e solo se $M^{\alpha} \not\models_{\beta} \mathcal{B}$ o $M^{\alpha} \models_{\beta} \mathcal{C}$ e per ipotesi di induzione se e solo se $M \not\models_{\beta} \mathcal{B}$ o $M \models_{\beta} \mathcal{C}$ cioè se e solo se $M \models_{\beta} \mathcal{A}$.

- L'ultimo connettivo usato sia $\Box$, cioè $\mathcal{A}$ sia del tipo $\Box\mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ contiene n-1 connettivi. Per definizione $M^{\alpha} \models_{\beta} \mathcal{A}$ se e solo se $M^{\alpha} \models_{\gamma} \mathcal{B}$ per ogni $\beta R^{\alpha} \gamma$ e per ipotesi di induzione se e solo se $M \models_{\gamma} \mathcal{B}$ per ogni $\beta R^{\alpha} \gamma$. Sia ora δ un mondo tale che $\beta R \delta$, $\beta \in S^{\alpha}$ implica per definizione $\alpha R^* \beta$ e allora $\alpha R^* \delta$, pertanto $\delta \in S^{\alpha}$ e allora $\beta R^{\alpha} \delta$, ovviamente poi se μ è un mondo tale che $\beta R^{\alpha} \mu$ si ha anche $\beta R \mu$. In conclusione $M \models_{\gamma} \mathcal{B}$ per ogni $\beta R^{\alpha} \gamma$ se e solo se $M \models_{\gamma} \mathcal{B}$ per ogni $\beta R \gamma$ e cioè se e solo se $M \models_{\beta} \mathcal{A}$.

Osservate che il significato del lemma è il seguente. Dato un modello M, se il grafo della relazione di accessibilità non è connesso, per valutare una formula in un mondo α di M basta considerare l'insieme dei mondi che appartengono alla componente connessa di α.

Corollario 6.1:

Se una formula $\mathcal{A}$ è vera in M allora $\mathcal{A}$ è vera in M^{α}.

$\mathcal{A}$ è vera in M se e solo se $\mathcal{A}$ è vera in tutti i sottomodelli generati di M.

$\mathcal{A}$ è valida in F se e solo se $\mathcal{A}$ è valida in tutti i sottoframe generati di F.

Definizione 6.2. (pseudo-morfismo)

Siano $F_1=(S_1,R_1)$ e $F_2=(S_2,R_2)$ due frame, una applicazione f di S_1 in S_2 si dice **p(seudo)-morfismo** di F_1 in F_2 se

- $\alpha R_1 \beta$ implica $f(\alpha) R_2 f(\beta)$
- $f(\alpha) R_2 \eta$ implica che esiste un β in S_1 tale che $\alpha R_1 \beta$ e che $\eta = f(\beta)$

Considerati poi due modelli $M_1=(S_1,R_1,V_1)$ e $M_2=(S_2,R_2,V_2)$, f si dice p-morfismo di M_1 in M_2 se soddisfa anche la condizione

- $\alpha \in V_1(A)$ se e solo se $f(\alpha) \in V_2(A)$

Se f è suriettiva, il p-morfismo (fra frame o fra modelli) si dice suriettivo.

Lemma 6.2:
Siano M_1=(S_1,R_1,V_1) e M_2=(S_2,R_2,V_2) due modelli ed f un p-morfismo di M_1 in M_2 . Allora per ogni α in S_1 risulta $M_1 \models_\alpha \mathcal{A}$ se e solo se $M_2 \models_{f(\alpha)} \mathcal{A}$.
La dimostrazione, lasciata per esercizio, si fa ancora per induzione sul numero di connettivi di $\mathcal{A}$.

Lemma 6.3: Siano F_1=(S_1,R_1) e F_2=(S_2,R_2) due frame ed f un p-morfismo suriettivo di F_1 su F_2 . Allora $F_1 \models \mathcal{A}$ implica $F_2 \models \mathcal{A}$.
Dim:
Supponiamo per assurdo che esista un modello M_2=(S_2,R_2,V_2) costruito sul frame F_2 tale che $M_2 \not\models_\eta \mathcal{A}$ per qualche η in S_2. Costruiamo allora M_1=(S_1,R_1,V_1) ponendo per ogni formula atomica A $\alpha \in V_1(A)$ se e solo se $f(\alpha) \in V_2(A)$. f risulta così un p-morfismo di M_1 in M_2. Poiché f è suriettiva esiste un mondo β in S_1 tale che $f(\beta)=\eta$, ed allora per il lemma 6.2 si ha $M_1 \not\models_\beta \mathcal{A}$ da cui risulta che $\mathcal{A}$ non è valida nel frame F_1, assurdo.

I TABLEAUX .

Vogliamo di seguito presentare (velocemente) un metodo che permette di valutare in modo algoritmico se una formula è un teorema di una logica Λ (corretta e completa rispetto ad una classe di modelli), in altre parole un sistema formale per Λ.
A suo tempo avevamo presentato per la logica proposizionale un metodo formale di tipo assiomatico (la teoria L) di cui però avevamo sottolineato la difficoltà di applicazione e un metodo di più semplice applicazione che agisce per refutazione (la risoluzione). Ora vogliamo presentare un altro metodo formale di facile applicazione che ancora agisce per refutazione: i tableaux.
(Notate che i tableaux sono un metodo formale, sostanzialmente sono un sistema di riscrittura, ma sono così fortemente basati sulla semantica che spesso vengono chiamati tableaux semantici o alberi semantici di deduzione).
I tableaux sono stati introdotti per diversi tipi di logiche, nel seguito cercheremo di dare le principali caratteristiche comuni dei tableaux, pur usando come filo conduttore il caso dei tableaux della logica proposizionale
Caratteristiche principali dei tableaux sono:
- I tableaux agiscono per refutazione su fbf. del linguaggio che stiamo considerando (in altre parole se vogliamo decidere se $\mathcal{A}$ è un teorema di Λ verifichiamo che $\sim\mathcal{A}$ non può essere vera su un modello di Λ)
- I tableaux agiscono costruendo degli alberi di prova i cui nodi sono etichettati con formule, per successive espansioni di nodi dell'albero
- Un tableau iniziale per una formula $\mathcal{A}$ è un albero T_0 con un solo nodo etichettato $\sim\mathcal{A}$
- Le espansioni degli alberi avvengono utilizzando regole di espansione costruite opportunamente per la logica che si sta considerando. Ad esempio i *tableaux per la logica proposizionale* utilizzano queste regole di espansione:

regola ~: $\dfrac{\sim\sim\mathcal{A}}{\mathcal{A}}$

regole α: $\dfrac{\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}}{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ $\quad\dfrac{\sim(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})}{\sim\mathcal{A},\sim\mathcal{B}}$ $\quad\dfrac{\sim(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})}{\mathcal{A},\sim\mathcal{B}}$

regole β: $\dfrac{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}}{\mathcal{A}\mid\mathcal{B}}$ $\quad\dfrac{\sim(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})}{\sim\mathcal{A}\mid\sim\mathcal{B}}$ $\quad\dfrac{\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}}{\sim\mathcal{A}\mid\mathcal{B}}$

regole ⇔: $\dfrac{\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B}}{\mathcal{A},\mathcal{B}\mid\sim\mathcal{A},\sim\mathcal{B}}$ $\quad\dfrac{\sim(\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B})}{\mathcal{A},\sim\mathcal{B}\mid\sim\mathcal{A},\mathcal{B}}$

- Dati un tableau T, un suo ramo δ e il nodo foglia f di δ, sia n un nodo di δ etichettato da una formula $\mathcal{C}$.. Fra le regole di espansione sopraelencate ce ne sarà una in cui la formula che figura sopra la riga della regola ha la struttura di $\mathcal{C}$.. Un albero T' ottenuto da T attaccando ad f uno o due rami (a seconda che sotto la riga della regola non figuri o figuri il simbolo |) contenenti nuovi nodi etichettati con le formule che compaiono separate da una virgola (e dalla stessa parte dell'eventuale |) sotto la riga della regola di espansione usata si dice ottenuto da T con un passo di espansione.
- Un tableau T' è un'espansione coerente di T se esiste un nodo n di T tale che T' è stato ottenuto da T tramite un numero finito di passi di espansione ciascuno dei quali ha espanso la formula che etichetta n su tutte le foglie del sottoalbero di T che ha radice n.
- Un tableau T è ben costruito se è stato ottenuto per espansioni coerenti dal tableau radice e nessun nodo è stato oggetto di più di un'espansione coerente.
- Un tableau è completo se è ben costruito e non può più essere oggetto di espansioni coerenti
- Un ramo di un tableau T è chiuso se ci sono due nodi sul ramo etichettati rispettivamente con $\mathcal{D}$ e $\sim\mathcal{D}$, per qualche formula $\mathcal{D}$. T è chiuso se tutti i suoi rami sono chiusi.
- Una formula $\mathcal{A}$ è vera sulla classe dei modelli che determinano Λ (quindi è un teorema di Λ) se e solo se esiste un tableau chiuso espansione del suo tableau iniziale (che , ricordo, è costituito da un solo nodo etichettato $\sim\mathcal{A}$).

Più in generale dato un insieme di fbf Γ , $\Gamma\vdash_{\Lambda}\mathcal{A}$ se e solo se esiste un tableau chiuso espansione del tableau costituito da un solo nodo etichettato $(\wedge_{\mathcal{C}\in\Gamma}\mathcal{C})\wedge\sim\mathcal{A}$.

Esempio:
Utilizzando i tableaux dimostrare che è un teorema della logica preposizionale $\sim(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\vee\sim(\mathcal{A}\wedge\sim\mathcal{B})$.

Il tableau iniziale è $\sim(\sim(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\vee\sim(\mathcal{A}\wedge\sim\mathcal{B}))$
L'unico nodo di questo tableau può essere espanso solo usando la seconda regola α, si ottiene

✓ $\sim(\sim(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\vee\sim(\mathcal{A}\wedge\sim\mathcal{B}))$

$\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$

$\mathcal{A}\wedge\sim\mathcal{B}$

Dove abbiamo segnato il primo nodo per dire che l'abbiamo già espanso. Ora potremmo decidere se espandere il secondo o il terzo nodo, un buon modo di procedere è quello di applicare, se possibile, per prime le regole $\sim$ e α perché non generano nuovi rami, quindi partiamo con l'espansione del terzo nodo, otteniamo

✓ $\sim(\sim(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\vee\sim(\mathcal{A}\wedge\sim\mathcal{B}))$

$\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$

✓ $\mathcal{A}\wedge\sim\mathcal{B}$

$\mathcal{A}$

$\sim\mathcal{B}$

Ora l'unico nodo da espandere è il secondo da cui otteniamo

$\sim(\sim(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\vee\sim(\mathcal{A}\wedge\sim\mathcal{B}))$

✓ $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$

✓ $\mathcal{A}\wedge\sim\mathcal{B}$

$\mathcal{A}$

$\sim\mathcal{B}$

$\sim\mathcal{A} \qquad \mathcal{B}$

Ora entrambi i rami si chiudono infatti nel ramo che ha come foglia $\sim\mathcal{A}$ c'è un nodo etichettato $\mathcal{A}$
e nel ramo che ha come foglia $\mathcal{B}$ c'è un nodo etichettato $\sim\mathcal{B}$.

Se vogliamo presentare un calcolo di tableaux per logiche modali dobbiamo dare regole di espansioni per formule con connettivi modali ed inoltre dobbiamo in qualche modo tener conto che nella semantica modale sono presenti un insieme di mondi e la relazione di accessibilità, che devono quindi essere codificati nelle regole di espansione.
I nomi dei vari mondi sono codificati anteponendo prefissi alle formule, ovvero scrivendo $\sigma\mathcal{A}$ per esprimere che $\mathcal{A}$ è vera nel mondo σ.

Di seguito presentiamo le caratteristiche dei *tableaux di K*. In generale i prefissi sono sequenze di interi positivi e se da un mondo α, codificato con la sequenza σ, è raggiungibile il mondo β, β sarà codificato da una sequenza σn (ottenuta concatenando alla sequenza s un intero positivo n).

- Il prefisso della radice è 1, quindi un tableau iniziale per una formula $\mathcal{A}$ è un albero T_0 con un solo nodo etichettato $1{\sim}\mathcal{A}$
- Si continuano ad avere le regole di espansione presentate per la logica preposizionale con la convenzione che in tali regole i prefissi sono ereditati dalle formule che si ottengono per espansione di una formula.
- Un prefisso σ si dice *non ristretto* su un ramo se σ non è il segmento iniziale di prefissi che occorrono su quel ramo, si dice invece *disponibile* se è presente sul ramo.
- Alle regole di espansione precedentemente introdotte per la logica preposizionale vanno aggiunte le seguenti:

regole $\Box$: $\dfrac{\sigma\Box\mathcal{A}}{\sigma n\mathcal{A}}$ $\quad\dfrac{\sigma{\sim}\Diamond\mathcal{A}}{\sigma n{\sim}\mathcal{A}}$ per ogni σn disponibile

regole $\Diamond$: $\dfrac{\sigma\Diamond\mathcal{A}}{\sigma n\mathcal{A}}$ $\quad\dfrac{\sigma{\sim}\Box\mathcal{A}}{\sigma n{\sim}\mathcal{A}}$ per ogni σn non ristretto

- Tutto il resto funziona come nel caso nei tableaux della logica preposizionale tenendo conto che un ramo si chiude se in esso ci sono due nodi etichettati con $\sigma\mathcal{D}$ ed $\sigma{\sim}\mathcal{D}$, per qualche formula $\mathcal{D}$ e qualche prefisso σ

Esempio

Proviamo che $\Diamond(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{B})$ è un teorema di K.

L'albero iniziale è $\quad 1{\sim}(\Diamond(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{B}))$

Espandendo con la terza regola di tipo α, si ha

✓ $1{\sim}(\Diamond(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{B}))$

|

$1\Diamond(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$

|

$1{\sim}(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{B})$

da cui espandendo con la prima regola $\Diamond$ il secondo nodo si ha:

✓ $1{\sim}(\Diamond(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{B}))$

|

✓ $1\Diamond(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$

|

$1{\sim}(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{B})$

|

$11\ \mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$

ed ancora espandendo il terzo nodo con la terza regola di tipo α, si ottiene

$\checkmark \quad 1\sim(\Diamond(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{B}))$

$\checkmark \quad 1\Diamond(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$

$\checkmark \quad 1\sim(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{B})$

$11\ \mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$

$1\Box\mathcal{A}$

$1\sim\Diamond\mathcal{B}$

da cui espandendo con la prima regola □ il penultimo nodo si ha

$\checkmark \quad 1\sim(\Diamond(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{B}))$

$\checkmark \quad 1\Diamond(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$

$\checkmark \quad 1\sim(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{B})$

$11\ \mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$

$\checkmark \quad 1\Box\mathcal{A}$

$1\sim\Diamond\mathcal{B}$

$11\circ$

ed ancora espandendo con la seconda regola □ il penultimo nodo si ha

$\checkmark \quad 1\sim(\Diamond(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{B}))$

$\checkmark \quad 1\Diamond(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$

$\checkmark \quad 1\sim(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{B})$

$11\ \mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$

$\checkmark \quad 1\Box\mathcal{A}$

$\checkmark \quad 11\sim\Diamond\mathcal{B}$

$11\mathcal{A}$

$11\sim\mathcal{B}$

ed espandendo il quarto nodo si ottiene

$$\checkmark \quad 1\sim(\Diamond(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{B}))$$
$$|$$
$$\checkmark \quad 1\Diamond(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$$
$$|$$
$$\checkmark \quad 1\sim(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{B})$$
$$|$$
$$\checkmark \quad 11\ \mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$$
$$|$$
$$\checkmark \quad 1\Box\mathcal{A}$$
$$|$$
$$\checkmark \quad 11\sim\Diamond\mathcal{B}$$
$$|$$
$$11\mathcal{A}$$
$$|$$
$$11\sim\mathcal{B}$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$11\sim\mathcal{A} \qquad\qquad 11\mathcal{B}$$

ed entrambi questi rami si chiudono.
Si possono dare regole di espansione anche per le altre logiche normali che abbiamo considerato nel paragrafo 5 pur di cambiare opportunamente la parte che riguarda i prefissi e la raggiungibilità nelle regole di tipo $\Box$ e $\Diamond$.
Potete esercitarvi sul calcolo dei tableaux utilizzando il tool Molle disponibile sulla pagina web.

CONCLUDENDO…..

- Abbiamo introdotto il concetto di logiche modali normali ,
- abbiamo dato un teorema di correttezza e completezza per tali logiche basato sul concetto di modello canonico,
- per molti tipi di logiche canoniche siamo passati a teoremi di correttezza e completezza basati su classi di frame,
- abbiamo introdotto il concetto di filtrazione e là dove si poteva trovare una filtrazione che facesse rimanere nella stessa classe di frame abbiamo ridotto correttezza e completezza a classi di frame finiti,
- la cardinalità di tali frame (su cui dobbiamo testare se una formula è valida) è limitata superiormente in funzione del numero di sottoformule della formula, quindi abbiamo risultati di decidibilità per numerose famiglie di logiche modali normali,
- l' algoritmo di decidibilità è intrattabile dal punto di vista computazionale,
- per ridurre la complessità si possono usare i tableaux,

MA ….

- questo modo di procedere NON è utilizzabile per tutte le logiche normali modali.
- La logica KGL dove

  $$GL: \Box (\Box \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \Box \mathcal{A}$$

  è una logica corretta e completa, ma nessuna classe di frame che la determina è la classe cui appartiene il suo frame canonico.
- Esistono logiche normali non complete, es KH, dove

  $$H: \Box(\Box \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \Box \mathcal{A}$$

LE LOGICHE MODALI CLASSICHE E I MODELLI MINIMALI
(Complementi di logica per chi non fa campi finiti)

Sui frame (standard) che abbiamo introdotto in 1, sono validi i seguenti schemi:

- $\Box\top$ schema N
- $\Box(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})\Rightarrow(\Box\mathcal{A}\wedge\Box\mathcal{B})$ schema M
- $(\Box\mathcal{A}\wedge\Box\mathcal{B})\Rightarrow\Box(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})$ schema C

Non in tutti i contesti i suddetti schemi sono ragionevoli (basta pensare al primo di questi schemi in cui $\Box$ venga letto come "si conosce" o come "è dimostrabile", al secondo schema in cui $\Box$ venga letto come "non conosco" e al terzo in cui $\Box$ venga letto come "vedo"). E' quindi importante in certi ambiti di ingegneria della conoscenza introdurre un nuovo tipo di modello in cui gli schemi N, M, C non siano sempre validi. Chiamiamo allora **modello minimale** una terna (S,N,V), dove come nei modelli standard S è un insieme di mondi e V è una funzione che va dall'insieme Φ delle formule atomiche all' insieme $\wp(S)$ delle parti di S, mentre N: $S\rightarrow\wp(\wp(S))$ è ciò che distingue questo tipo di modelli dai modelli standard. Al solito la coppia (S,N) si chiama **frame minimale**.
Vediamo ora come valutare una formula in un modello minimale. Poiché nei modelli standard la relazione di raggiungibilità veniva utilizzata solo nella valutazione di formule del tipo $\Box\mathcal{A}$ o $\Diamond\mathcal{A}$, per formule che non hanno questa struttura possiamo utilizzare le definizioni già introdotte per la verità di una formula in un mondo α di un modello standard e per definire la verità di una formula in un mondo di un modello minimale M dobbiamo quindi solo precisare il significato delle scritture $M\models_\alpha\Box\mathcal{A}$ e $M\models_\alpha\Diamond\mathcal{A}$.
Per far questo, dato un modello minimale M, introduciamo per ogni fbf $\mathcal{A}$ il suo insieme di verità $||\mathcal{A}||^M=\{\alpha\in S| M\models_\alpha\mathcal{A}\}$ e diciamo

- $M\models_\alpha\Box\mathcal{A}$ se e solo se $||\mathcal{A}||^M\in N(\alpha)$.
- $M\models_\alpha\Diamond\mathcal{A}$ se e solo se $S-||\mathcal{A}||^M\notin N(\alpha)$ (questo equivale al fatto che vogliamo continuare ad adottare la convenzione secondo cui $\Diamond$ è una abbreviazione di $\sim\Box\sim$).

In altre parole N(α) deve contenere l'insieme degli insiemi di verità delle formule che sono necessariamente vere in α.
E' facile provare che i tre schemi N, M, C hanno contro-modelli nella classe dei modelli minimali, ad esempio lo schema N non è vero nel mondo α di un modello minimale in cui $S=\{\alpha\}$ e $N(\alpha)=\emptyset$, infatti $||\top||^M=\{\alpha\}\notin N(\alpha)$; l'istanza $\Box(A\wedge B)\Rightarrow(\Box A\wedge\Box B)$ dello schema M non è vera nel mondo α di un modello minimale M in cui $S=\{\alpha,\beta\}$, $N(\alpha)=\{\emptyset\}$, $V(A)=\{\alpha\}$, $V(B)=\{\beta\}$, infatti $||A\wedge B||^M=\emptyset\in N(\alpha)$ e dunque $M\models_\alpha\Box(A\wedge B)$, mentre $||A||^M=\{\alpha\}\notin N(\alpha)$ e dunque $M\not\models_\alpha\Box A$ e a maggior ragione $M\not\models_\alpha\Box A\wedge\Box B$; l'istanza $(\Box A\wedge\Box B)\Rightarrow\Box(A\wedge B)$ dello schema C non è vera nel mondo α di un modello minimale M in cui $S=\{\alpha,\beta\}$, $N(\alpha)=\{\{\alpha\},\{b\}\}$, $V(A)=\{\alpha\}$, $V(B)=\{\beta\}$, infatti $||A||^M=\{\alpha\}\in N(\alpha)$ e dunque $M\models_\alpha\Box A$, $||B||^M=\{\beta\}\in N(\alpha)$ e dunque $M\models_\alpha\Box B$, quindi $M\models_\alpha\Box A\wedge\Box B$, invece $||A\wedge B||^M=\emptyset\notin N(\alpha)$, pertanto $M\not\models_\alpha\Box(A\wedge B)$
Si può inoltre provare che

- lo schema N è vero in un modello minimale M se e solo se $S\in N(\alpha)$ per ogni $\alpha\in S$;

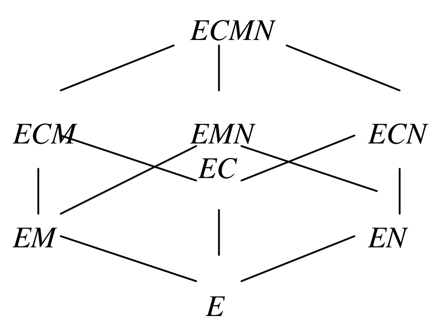
- lo schema M è vero in un modello minimale *M* se e solo se per ogni $\alpha\in S$ e per ogni $X,Y\subseteq S$ se $X\cap Y\in N(\alpha)$ allora $X,Y\in N(\alpha)$
- lo schema C è vero in un modello minimale *M* se e solo se per ogni $\alpha\in S$ e per ogni $X,Y\subseteq S$ se $X,Y\in N(\alpha)$ allora $X\cap Y\in N(\alpha)$.

Un modello minimale *M*=(S,N,V), in cui $S\in N(\alpha)$ per ogni $\alpha\in S$ si dice *modello minimale con unità*.
Un modello minimale *M*=(S,N,V), in cui per ogni $\alpha\in S$ e per ogni $X,Y\subseteq S$ da $X\cap Y\in N(\alpha)$ segue $X,Y\in N(\alpha)$ si dice *modello minimale supplementato*.
Un modello minimale *M*=(S,N,V), in cui per ogni $\alpha\in S$ e per ogni $X,Y\subseteq S$ da $X,Y\in N(\alpha)$ segue $X\cap Y\in N(\alpha)$ si dice *modello minimale chiuso rispetto all'intersezione*.
Un modello minimale chiuso rispetto all'intersezione e supplementato si dice *quasi filtro*, un quasi filtro con unità si dice *filtro*.
(Attenzione, potrebbe venire i dubbio che se un modello è supplementato allora sia un modello con unità, ma questo non è sempre vero ad esempio ogni modello con $N(\alpha)=\varnothing$ per ogni α, è supplementato, ma non è con unità. Attenzione la cosa è diversa se $N(\alpha)=\{\varnothing\}$!).

A questo punto è naturale chiedersi se esistano e come siano fatte logiche determinate dai modelli minimali.
Si chiama **logica (modale) classica** una logica chiusa rispetto alla seguente regola RE:

$$\frac{\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B}}{\Box\mathcal{A}\Leftrightarrow\Box\mathcal{B}}$$

Si può dimostrare che esiste una minima logica modale classica (precisamente la logica che ammette come assiomi A1, A2, A3 ed ha come regole di inferenza MP ed RE), tale logica è indicata con *E* ed è determinata dalla classe dei frame minimali (la dimostrazione utilizza la nozione di modello canonico minimale).
Aggiungendo alla logica *E* uno o più degli schemi N,M,C, si ottiene il seguente reticolo di logiche distinte:



dove *ECMN=K*.

Una logica si dice **monotona** se è chiusa rispetto alla regola RM:

$$\frac{\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}}{\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\mathcal{B}}$$

si dice **regolare** se è chiusa rispetto alla regola RR:

$$\frac{\mathcal{A}\wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}}{\Box\mathcal{A}\wedge\Box\mathcal{B} \Rightarrow\Box\mathcal{C}}$$

Ovviamente *ogni logica normale è regolare, ogni logica regolare è monotona ed ogni logica monotona è classica.*

La logica *EM* , cioè la logica assiomatizzabile da A1, A2, A3, M e chiusa rispetto ad MP ed RE è la minima logica monotona (ovvero è chiusa rispetto ad RM ed ogni logica chiusa rispetto ad RM la contiene), *ECM* è la minima logica regolare.

Per le logiche del reticolo sopra descritto si possono ottenere teoremi di correttezza e completezza rispetto a opportune classi di frame minimali (via la definizione di modelli canonici) e anche risultati di decidibilità (tramite riadattamento della tecnica di Γ-filtrazione).
Ad esempio si prova che *EM* è determinata dai modelli supplementati, *ECM* è determinata rispetto dai quasi filtri ed *ECMN* è determinata dai filtri.

Quali sono i legami fra modelli minimali e standard?
Diciamo *modello minimale aumentato* un modello supplementato M=(S,N,V), in cui per ogni $\alpha\in S$ $Z=(\cap_{Y\in N(\alpha)}Y) \in N(\alpha)$ (è facile osservare che un modello aumentato è un filtro), sussiste allora il seguente

Teorema 7.1.
Per ogni modello standard M^s=(S,R,V) esiste un modello minimale aumentato M^m=(S,N,V) equivalente ad M^s mondo per mondo e viceversa per ogni modello minimale aumantato M^m=(S,N,V) esiste un modello standard M^s=(S,R,V) equivalente ad M^m mondo per mondo
Traccia della dimostrazione:
Sia M^s=(S,R,V), allora costruiamo $N:S\rightarrow\wp(\wp(S))$ ponendo $X\in N(\alpha)$ se e solo se $\{\beta|(\alpha,\beta)\in R\}\subseteq X$.
Il modello M^m=(S,N,V) è un modello minimale aumentato e si dimostra per induzione sulla complessità della formula che $M^s|=_\alpha\mathcal{A}$ se e solo se $M^m|=_\alpha\mathcal{A}$.
Viceversa sia M^m=(S,N,V) un modello minimale aumentato e costruiamo una relazione di raggiungibilità fra i mondi di S ponendo $(\alpha,\beta)\in R$ se e solo se $\beta\in\cap_{Y\in N(\alpha)}Y$. Si consideri il modello standard M^s=(S,R,V), ancora per induzione sulla complessità della formula si prova che $M^m|=_\alpha\mathcal{A}$ se e solo se $M^s|=_\alpha\mathcal{A}$.

LOGICA MODALE DEL I ORDINE
(Complementi di logica per chi non fa campi finiti)

Anche nel contesto della logica modale si può arricchire l'espressività della logica aggiungendo al linguaggio della logica modale quello della logica del I ordine e quindi combinando, dal punto di vista semantico, i concetti di frame e modelli quello di struttura di interpretazione.

Sintassi
Dal punto di vista sintattico quindi avremo il seguente

- **Alfabeto**:
  - $c_1,c_2,\ldots,c_n,\ldots$ costanti individuali (al più una infinità numerabile)
  - $x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$ variabili individuali (al più una infinità numerabile)
  - A_i^j (i=1,2,…, j>0) lettere predicative (al più una infinità numerabile)
  - $\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ connettivi logici
  - $\Box, \Diamond$ operatori modali
  - (,) simboli ausiliari
  - $\forall, \exists$ quantificatori (che quantificano solo variabili)

  che è sostanzialmente ottenuto aggiungendo i due operatori modali a un generico linguaggio del I ordine. Va osservato che nel nostro linguaggio abbiamo omesso le lettere funzionali, ma questa omissione non è una vera restrizione in quanto non diminuisce la potenza del linguaggio, infatti ogni lettera funzionale può essere "rimpiazzata" in una teoria del I ordine con identità da una nuova lettera predicativa e da un opportuno assioma proprio che forza l'interpretazione di tale lettera ad essere una funzione.

  A questo punto vanno introdotte come per la logica del I ordine le solite nozioni di
- **Termini**: Costanti e variabili individuali (più leggera di quella della logica del I ordine classica per mancanza delle lettere funzionali)
- **Formule atomiche**: $A_i^j(t_1,t_2,\ldots,t_j)$ dove A_i^j è una lettera predicativa e $t_1,t_2,\ldots, t_j$ sono termini
- **fbf** :
  - una formula atomica è una fbf
  - se $\mathcal{A}$ è una fbf. allora $\sim\mathcal{A}$, $\Box\mathcal{A}$, $\Diamond\mathcal{A}$, $\forall x\mathcal{A}$, $\exists x\mathcal{A}$ sono fbf.
  - se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono fbf. allora $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B}$ sono fbf.niente altro è una fbf.

Semantica

La semantica che presenteremo è sostanzialmente basata su una generalizzazione della semantica di Kripke delle logica modale proposizionale, alla quale viene associata per ogni mondo una interpretazione che permetta di valutare le fbf non modali in quel mondo.
Ci sono diverse scelte possibili sulle caratteristiche delle interpretazioni da associare ad ogni mondo, la prima riguarda il dominio che l'interpretazione associa ad ogni mondo, ovviamente si possono considerare questi due casi:

- a tutti mondi viene associato uno stesso dominio (semantica a dominio costante, cioè nulla si crea e nulla si distrugge)mondi diversi possono avere domini diversi (semantica a domini variabili)
  - caso particolare: per ogni mondo α,β tale che $(\alpha,\beta)\in R$, il dominio associato

ad α è contenuto nel dominio associato a β (monotonia, cioè nulla si distrugge).

Analogamente ci sono scelte anche nel modo di interpretare in ogni mondo un nome di costante, cioè ogni simbolo c_i del nostro alfabeto:

- in mondi diversi uno stesso nome di costante può avere diversa interpretazione (designatori non rigidi)
- in ogni mondo un nome di costante mantiene la stessa interpretazione (designatori rigidi)

Un **frame del I ordine** è una terna <S,R,D>, con S insieme dei mondi, R relazione binaria su S, D applicazione da S ad un insieme di domini (insiemi non vuoti):

- un frame è *monotono* se $(\alpha,\beta)\in R$ implica $D(\alpha)\subseteq D(\beta)$
- un frame è a *dominio costante* se per ogni α, $\beta\in S$ si ha $D(\alpha)=D(\beta)$.

Ora dobbiamo almeno interpretare le formule non modali in ogni singolo mondo, per interpretare una formula del primo ordine mi serve un dominio che mi è già dato dalla funzione D del frame che per ogni mondo α restituisce il dominio $D(\alpha)$, poi una funzione di interpretazione che associ ad ogni simbolo che rappresenta una costante un elemento del dominio e ad ogni simbolo che rappresenta una lettera predicativa di arità n una relazione di arità n sul dominio cioè un sottoinsieme del prodotto cartesiano del dominio per se stesso n volte.

Più formalmente:

Una **interpretazione** nel frame <S,R,D> è una coppia (I_C,I_P) tale che

- $I_C : C\times S \to D(S)$, dove C indica l'insieme delle costanti del linguaggio, è una funzione che associa ad ogni coppia $(c,\alpha)\in C\times S$ un elemento di $D(\alpha)$. Se l'interpretazione è rigida il $I_C(c,\alpha)$ non dipende da α, perché le costanti non possono avere interpretazioni diverse, quindi in tal caso, $I_C : C\to D(S)$ e può dunque capitare che ad un nome di costante in un certo mondo sia associato un elemento che non appartiene al dominio di quel mondo (se non siamo in una semantica a domini costanti), e che quindi una costante non sia definita in un mondo.
- I_P è un'applicazione che associa ad ogni lettera predicativa n-aria A_i^n e ad ogni mondo α una relazione ad n posti $I_P(A_i^n,\alpha)$ su $D(\alpha)$, cioè un sottoinsieme di $D(\alpha)\times D(\alpha)\times\ldots\times D(\alpha)$ (n volte).
-

Un **modello** è una struttura $M=<S,R,D,I_C,I_P>$, dove <S,R,D> è un frame del I ordine e $<I_C,I_P>$ è un'interpretazione su quel frame.

Un **assegnamento** nel modello $M=<S,R,D,I_C,I_P>$ è un'applicazione s:VAR$\to$D(S) che associa ad ogni variabile x un oggetto $s(x)$ in qualche dominio dei mondi possibili (con VAR indichiamo l'insieme delle variabili del linguaggio).

Per compattezza estendiamo s ad una funzione s^*:TER$\times$S$\to$D(S), dove TER è l'insieme dei termini, in questo modo $s^*(t,\alpha)=s(t,\alpha)$ se t è una variabile, $s^*(t,\alpha)=I_C(t,\alpha)$ se t è una costante.

Per dire se una formula è vera o falsa in un mondo α del modello si usa per valutare la parte non modale la solita tecnica usata nella logica del I ordine e per valutare la parte modale si sfrutta al solito la relazione di raggiungibilità.

In modo un po' più formale e limitandoci ai connettivi ~, ⇒, □, e al solo quantificatore ∀, tramite i quali tutti gli altri connettivi/quantificatori possono essere espressi, possiamo definire iterativamente il fatto che l'assegnamento s soddisfa la fbf $\mathcal{A}$ nel mondo α del modello M (e scriveremo per brevità $M,s|=_\alpha\mathcal{A}$, in questo modo:

- se $\mathcal{A}$ è una formula atomica $A_i^n(t_1,t_2,\ldots,t_n)$, diciamo che $M,s|=_\alpha\mathcal{A}$ se e solo se $(s^*(t_1), s^*(t_2),\ldots, s^*(t_n))\in I_P(A_i^n,\alpha)$
- se $\mathcal{A}$ è una formula $\sim\mathcal{B}$, diciamo che $M,s|=_\alpha\mathcal{A}$ se e solo se $M,s|\neq_\alpha\mathcal{B}$
- se $\mathcal{A}$ è una formula $\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}$, diciamo che $M,s|=_\alpha\mathcal{A}$ se e solo se $M,s|\neq_\alpha\mathcal{B}$ o $M,s|=_\alpha\mathcal{C}$
- se $\mathcal{A}$ è una formula $\forall x\mathcal{B}$, diciamo che $M,s|=_\alpha\mathcal{A}$ se e solo se per ogni assegnamento s' che differisce da s al più per il valore attribuito ad x si ha $M,s'|=_\alpha\mathcal{B}$
- se $\mathcal{A}$ è una formula $\Box\mathcal{B}$, diciamo che $M,s|=_\alpha\mathcal{A}$ se e $M,s'|=_\beta\mathcal{B}$ per ogni mondo β tale che $(\alpha,\beta)\in R$.

ma bisogna fare attenzione al fatto che ci possono essere formule non valutabili (perché nel mondo in cui stiamo lavorando non sono definiti i termini in gioco) e quindi bisogna o dire che una formula è non valutabile se una sua sottoformula qualsiasi non è valutabile (quasi come ad avere una logica a tre valori) o stabilire a priori se una formula non valutabile è da considerare soddisfacibile o no.

Diciamo poi che una formula $\mathcal{A}$ è *vera* in un mondo α di un modello M, e scriviamo $M|=_\alpha\mathcal{A}$, se ogni assegnamento la soddisfa, diciamo che è *insoddisfacibile* o falsa in un mondo α di un modello M se nessun assegnamento la soddisfa.

Diciamo che una formula è *vera in un modello* se è vera in tutti i mondi del modello, diciamo che è *valida in un frame* se è vera in tutti i modelli costruiti su quel frame. (N.B. A volte la validità su un frame è data in funzione dei modelli a designatori rigidi costruiti su quel frame , per cui si dice che una fbf è valida in un frame se è vera in ogni modello a designatori rigidi costruito su quel frame F)

Come vedete, ci sono molte "semantiche" per la logica modale del primo ordine anche se ci limitiamo ad una semantica alla Kripke. Le semantiche più studiate sono quelle a domini costanti o monotoni e con designatori rigidi.

Due schemi di formule sono importanti in questo contesto:

- $\forall x\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\,\forall x\mathcal{A}$ (formula di Barcan)
- $\Box\forall x\mathcal{A}\Rightarrow\forall x\,\Box\mathcal{A}$ (formula inversa di Barcan)

La formula inversa di Barcan è vera in ogni modello a designatori rigidi costruito su un frame F se e solo se F è a domini monotoni (gli oggetti non possono essere distrutti nel passaggio ad un mondo alternativo).
La formula di Barcan è vera in ogni modello a designatori rigidi costruito su un frame F se e solo se F è a dominio costante (gli oggetti non possono essere né distrutti né generati nel passaggio ad un mondo alternativo).

Da ultimo va notato che si potrebbero definire sistemi formali per le logiche modali del I ordine prendendo gli assiomi del calcolo dei predicati del I ordine, alcuni schemi propri come potrebbero essere lo schema K o la formula di Barcan, usando come regole di inferenza MP, Gen ed RN e cercare di stabilire per tali logiche risultati di correttezza e completezza rispetto ad opportune classi di frame. Va notato che anche in presenza di risultati di completezza e correttezza non possiamo "sperare" in risultati di decidibilità che non includano solo qualche frammento della logica in quanto la logica modale del I sottende una logica del I ordine non modale, che come sappiamo è indecidibile se ha l'espressività sufficiente ad esprimere l'aritmetica, si possono invece ottenere risultati di semidecidibilità che giustificano la messa a punto di regole di espansioni per tableaux per certe logiche modali del I ordine e soprattutto di euristiche per utilizzarli.