Equazioni Differenziali Ordinarie	Prima prova in itinere	5 maggio 2008
Cognome	Nome	Firma
Proff. Furioli, Rossi, Vegni	Matricola	Sezione INF

Esercizio 1.A. È data l'equazione autonoma

$$x' = x^3 - 2x^2 + mx$$

dipendente dal parametro m.

a. Trovarne i punti di equilibrio, al variare del parametro m.

b. Determinarne la natura ed eventualmente il bacino di attrazione.

Esercizio 1.B. Dimostrare il criterio si stabilità per le equazioni autonome $x' = f(x)$.

Soluzione 1.A.

a. I punti di equilibrio di un'equazione autonoma $x' = f(x)$ coincidono con gli zeri della funzione generatrice f. L'equazione $f(u) = 0$ da soluzioni

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 1 - \sqrt{1-m} \\ u_3 = 1 + \sqrt{1-m}. \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{cases} \text{se } m > 1 & \text{c'è un solo punto di equilibrio } u_1 \\ & \text{ovvero la funzione generatrice ha una sola intersezione con l'asse } x \\ \text{se } m = 1 & \text{ci sono due punti distinti di equilibrio } u_1 \text{ e } u_2 = u_3 = 1 \\ \text{se } m < 1 \text{ e } \neq 0 & \text{ci sono tre punti di equilibrio distinti } u_1, u_2, u_3 \\ \text{se } m = 0 & \text{ci sono due punti distinti di equilibrio } u_1 = u_2 = 0 \text{ e } u_3. \end{cases}$$

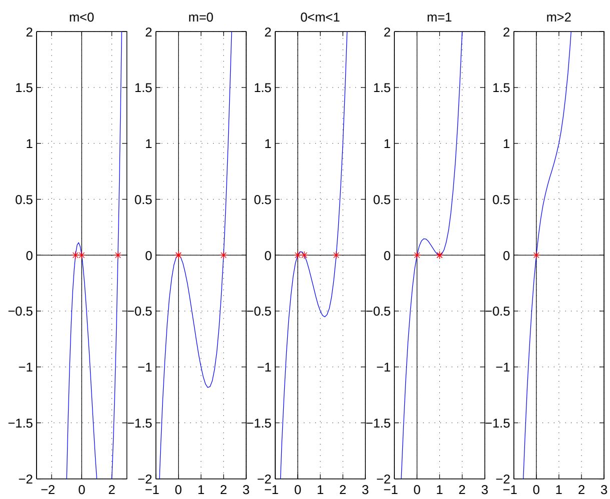

FIGURA 1. La funzione generatrice assegnata nell'Esercizio 1, con i punti critici evidenti in rosso, in relazione al parametro m. Lo studio della loro stabilità si effettua immediatamente per via qualitativa, osservando il segno della funzione generatrice.

b. Per studiare la stabilità dei punti di equilibrio possiamo applicare il criterio (pagina 60 del testo) oppure equivalentemente disegnare il grafico della funzione generatrice e studiarne il segno. Il criterio qualitativo è in questo caso di facile applicazione poiché la funzione generatrice è una cubica. f è asintotica a mu per $u \to 0$ e a u^3 per $u \to \pm\infty$. Il grafico della funzione generatrice è riportato in Figura 1.

Soluzione 1.B. Vedi il testo a pagina 60.

Esercizio 2. È assegnato il sistema lineare a coefficienti costanti:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + by \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

a. Classificare il tipo di orbite al variare del parametro b.

b. Per quali valori del parametro b esistono traiettorie rettilinee nel piano delle fasi?

c. Nel caso $b = 1$, disegnare le orbite del sistema nel piano delle fasi, specificandone il verso di percorrenza.

d. Sempre nel caso $b = 1$, utilizzare il ritratto di fase per determinare il limite della soluzione che ha come dato iniziale il punto $(0, 1)$.

e. Scrivere un'equazione del secondo ordine equivalente al sistema *(facoltativo)*.

Soluzione. Sia

$$A = \begin{bmatrix} -1 & b \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a. Abbiamo i seguenti casi:

- se $b > 1$, $\det A < 0$ e l'origine è una sella (instabile);
- se $b = 1$, uno dei due autovalori si annulla. L'origine è un punto critico non isolato. Le traiettorie sono rette che convergono al punto critico o divergono dal punto critico a seconda del segno dell'altro autovalore.
- se $0 < b < 1$, l'origine è un nodo proprio che è stabile poichè entrambi gli autovalori sono negativi
- se $b = 0$, l'origine è un nodo improprio stabile
- se $b < 0$, l'origine è un fuoco stabile.

b. Le traiettorie rettilinee corrispondono agli autovettori reali (eccetto quello dll'autovalore nullo che è un insieme di punti di equilibrio). Abbiamo $\det A = 1 - b$; $\mathrm{tr} A = -1$, e il delta dell'equazione caratteristica è pari a b. Quindi ci sono traiettorie rettilinee se $b > 0$.

c. Nel caso $b = 1$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

che ha autovalori 0 (con autovettore $y = x$, retta di punti di equilibrio) e -2 (con autovettore $y = -x$). Il grafico delle traiettorie è riportato in Figura 2.

d. Come si osserva dalla Figura 2 il limite della traiettoria che parte da $(0, 1)$ è $(1/2, 1/2)$.

e. Derivo la prima equazione $\ddot{x} = -\dot{x} + b\dot{y}$, uso la seconda equazione per ottenere $\ddot{x} = -\dot{x} + b(x - y) = \ddot{x} + \dot{x} - bx + by = 0$; utilizzando la prima equazione nella forma $by = \dot{x} + x$ si ottiene infine

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + (1 - b)x = 0$$

che corrisponde all'equazione caratteristica che discende dalla matrice A.

Esercizio 3. Studiare qualitativamente le soluzioni dell'equazione

$$y' = (e^{t^2 - y^2} - 1)t^2 y.$$

a. Discutere l'applicabilità dei risultati di esistenza ed unicità locale e globale ad un generico problema di Cauchy $y(t_0) = y_0$.

b. Determinare le eventuali soluzioni costanti e il luogo dei punti a tangente orizzontale.

c. Determinare le regioni del piano in cui le soluzioni sono crescenti oppure decrescenti.

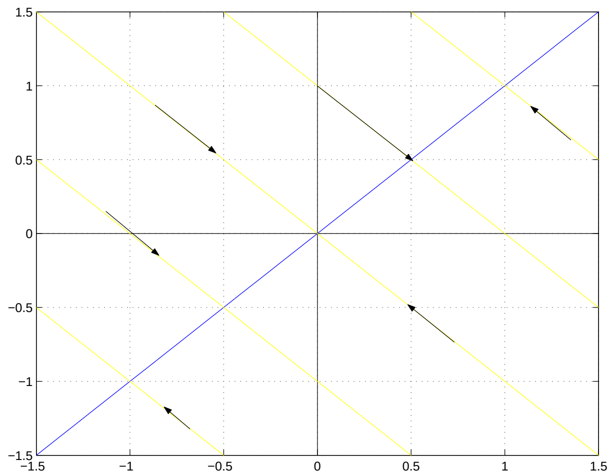

FIGURA 2. Grafico delle traiettorie nel caso $b = 1$ analizzato nell'Esercizio 2.

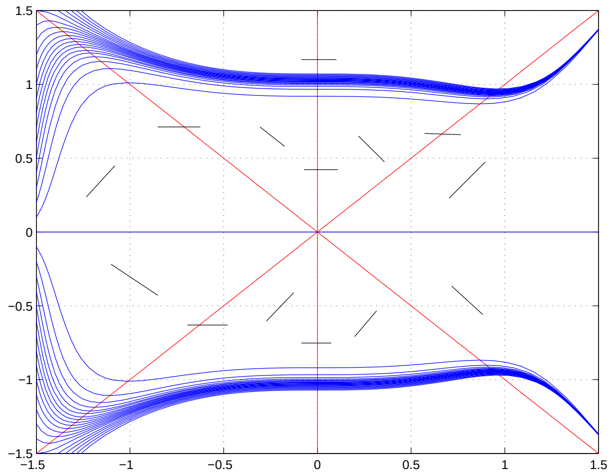

FIGURA 3. Andamento qualitativo delle soluzioni dell'Esercizio 3.

d. È possibile stabilire se esiste e quanto vale $\lim_{t\to-\infty} \varphi(t)$, per una generica soluzione $\varphi(t)$?
e. Disegnare il grafico di alcune soluzioni significative.

Soluzione 3.
a. (vedi il libro di testo. Sinteticamente: c'è esistenza ed unicità locale in tutto $\mathbb{R}^2$; inoltre è garantita prolungabilità di ogni soluzione in tutto $\mathbb{R}$.)
b. Soluzione costante $y = 0$; luogo di punti a tangente orizzontale le rette $t = 0$, $y = t$, $y = -t$.
c. Utilizzando la regola dei segni interpretata in $\mathbb{R}^2$ per risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} e^{t^2-y^2} > 1 \text{ ovvero } t^2 > y^2 \text{ ovvero } -t < y < t \\ y > 0 \end{cases}$$

troviamo il luogo dove le soluzioni sono crescenti. Il risultato è in Figura 3.
d. Il limite esiste poiché la soluzione risulta prolungabile. Dalla inferiore limitatezza e dalla monotonia ricaviamo subito che $\lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = l$, con $l \geq 0$, allora siccome esiste il limite della derivata prima si deve avere dall'equazione

$$0 = \lim_{t\to-\infty}(e^{t^2-y^2} - 1)t^2 y = \lim_{t\to-\infty}(e^{t^2-l} - 1)t^2 l$$

da cui necessariamente $l = 0$.
e. Alcune soluzioni significative sono in Figura 3.

Esercizio 4. Dato
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y - z \\ \dot{y} = y + z \\ \dot{z} = -y + z \end{cases}$$
a. scrivere la matrice esponenziale associata al sistema.
b. Determinare esplicitamente la soluzione del problema di cauchy $(x(0), y(0), z(0)) = (1, -2, 4)$.

Soluzione 4.
a. Sia
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Un autovalore è -1; gli altri $\lambda_{2,3} = 1 + \pm i$ coicidono con quelli del blocco $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Un autovettore relativo a -1 è $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Un autovettore relativo a $-1 + i$ risolve il sistema
$$\begin{cases} -x + y - z = (1 + i)x \\ y + z = (1 + i)y \\ -y + z = (1 + i)z \end{cases}$$
ovvero (le ultime due righe sono dipendenti)
$$\begin{cases} x(2 + i) = y - z \\ z = iy. \end{cases}$$
Troviamo
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$
Introduciamo la matrice
$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{tale che} \quad S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Dunque
$$e^{At} = S \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t \cos t & e^t \sin t \\ 0 & -e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix} S^{-1}.$$
b.
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} &= S \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t \cos t & e^t \sin t \\ 0 & -e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} + e^t(-14 \cos t - 2 \sin t) \\ e^t(-10 \cos t + 20 \sin t) \\ e^t(20 \cos t + 10 \sin t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$