Algebra e logica matematica
I prova in itinere
19/11/2003

Esercizio 1.
Si consideri la relazione binaria R sull'insieme X={a,b,c,d,e} definita dalla seguente matrice di incidenza

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Di quali proprietà gode R?
2) Costruire la chiusura riflessiva e transitiva $\overline{R}$ di R e verificare che è una relazione d'ordine.
3) Dire se X rispetto ad $\overline{R}$ è un reticolo distributivo, complementato.
4) Dimostrare che se in un reticolo esiste un elemento massimale, tale elemento è un massimo
5) R è una funzione di X in X? Mostrare che R non può essere contenuta in nessuna funzione da X in X.
6) Esiste una funzione suriettiva da X in X contenuta in R? Ed una iniettiva?

Giustificare ogni risposta.

Esercizio 2.
Si considerino l'insieme X={a,b,c,d,e,f} e la relazione binaria R su X così definita

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[dr] & b \arrow[r] & c & & d \arrow[r] & e \\ & f & & & & \end{tikzcd}$$

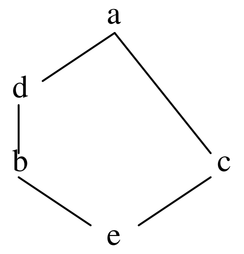
1) Si costruiscano la relazione di equivalenza ρ generata da R (cioè la chiusura di equivalenza di R) e le relative classi di equivalenza.
2) Si mostri che se T è una relazione d'equivalenza su X contenente R o coincide con ρ o è la relazione universale su X.

Esercizio 3
1) Si considerino il gruppo $<Z_{12},+>$ ed i suoi sottogruppi H={[0],[4],[8]}, H={[0],[6]}. Si provi che l'insieme X={[h]+[k] | [h]∈H, [k]∈K } è un sottogruppo di $<Z_{12},+>$.
2) Si provi che dati un gruppo abeliano <G, •> e due suoi sottogruppi H e K, l'insieme X={h • k | h∈H, k∈K } è un sottogruppo di <G, •>.
3) Si mostri che X è normale in G.
4) Si verifichi che se ogni elemento x∈X si scrive in un sol modo nella forma x= h • k , la f: X → K definita ponendo f(h • k)=k è un epimorfismo di X su K.
   Si consideri la relazione di congruenza ker f su X e si mostri che la (ker f)-classe dell'elemento neutro di G coincide col sottogruppo H e che il gruppo quoziente X/H (cioè X/ker f) è isomorfo a K.

TRACCIA DI SOLUZIONE

Esercizio 1

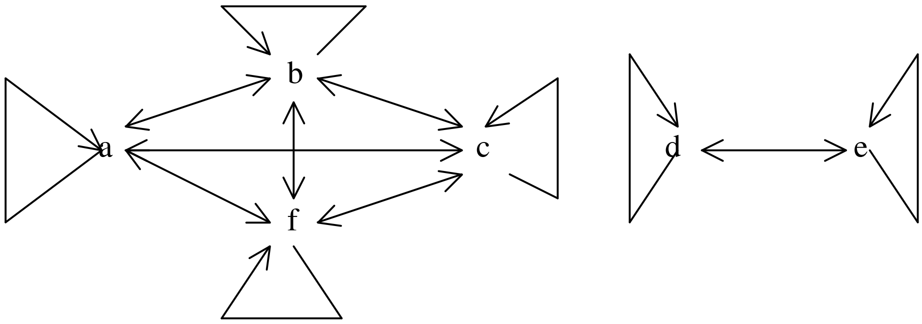
1) R è antisimmetrica (infatti $a_{ij}=a_{ji}=1$ solo per i=j=, i=j=2).
   (Poteva anche essere aggiunto che R è seriale perché in ogni riga c'è almeno un 1).
2) La chiusura riflessiva e transitiva $\overline{R}$ di R ha matrice di incidenza
   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   Questo si può verificare o partendo dal grafo di R o calcolando le potenze successive della matrice di incidenza $M_{R\cup I}$ della chiusura riflessiva della relazione R.
   Si ha
   $$(M_{R\cup I})^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ (M_{R\cup I})^3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ da cui segue il risultato.
   $\overline{R}$ è pertanto antisimmetrica ed essendo riflessiva e transitiva per costruzione è una relazione d'ordine.
3) Rispetto alla relazione $\overline{R}$ l'insieme ordinato X ha il seguente diagramma di Hasse:



   pertanto ogni coppia di elementi di X ha in X inf e sup e dunque X è un reticolo. Non è distributivo perché la struttura del diagramma di Hasse è una delle due strutture proibite per un sottoreticolo di un reticolo distributivo. Ammette a come 1 ed e come 0 e il complemento di a è a , quello di e è e, il complemento di d è c, il complemento di b è c, i complementi di c sono b e d. (Il fatto che c ammetta due complementi mi conferma che non può essere distributivo).
4) Se in un reticolo a è un elemento massimale preso comunque un altro elemento b, esiste sup{a,b} ed è a≤ sup{a,b}, da cui, per la massimalità di a, si ha a= sup{a,b}, cioè b≤a. Dunque a è un massimo per il reticolo.
5) R non è una funzione perché sia (b,b), sia (b,d) appartengono ad Re ad ogni relazione contenente R. dunque non può esistere una relazione contenente R che sia una funzione.
6) Non può esistere una funzione suriettiva contenuta in R poiché non esiste in X alcun elemento x tale che $(x,b)\in R$. Non esiste quindi neppure alcuna funzione iniettiva contenuta in R poiché ogni funzione da X ad X , con X finito, è iniettiva se e solo se è suriettiva.

Esercizio 2.

1) La relazione di equivalenza ρ generata da R ha il seguente grafo di incidenza:



Le relative classi di equivalenza sono quindi $\rho_a = \rho_b = \rho_c = \rho_f = \{a,b,c,f\}$, $\rho_d = \rho_e = \{d,e\}$.

2) Essendo ρ la chiusura di equivalenza di R, una qualsiasi relazione di equivalenza T che contenga R contiene anche ρ, dunque $T \supseteq \rho$. Supponiamo che $T \supset \rho$, in tal caso un elemento $x \in \{a,b,c,f\} = \rho_a$ deve essere associato in T ad un elemento $y \in \{d,e\} = \rho_d$. Pertanto presi comunque due elementi z,v in X se $z,v \in \rho_a$ (o analogamente se $z,v \in \rho_d$) si ha $(x,y) \in T$, se $z \in \rho_a$ e $v \in \rho_d$, si ha $(z,x) \in \rho \subset T$, $(y,v) \in \rho \subset T$, da cui essendo $(x,y) \in T$, per la transitività di T si ricava $(z,v) \in T$. Quindi T è la relazione universale su X.

Esercizio 3

1) Si ha facilmente che X={[0], [4], [8], [6], [10], [2]}, inoltre dalla tavola additiva di $<Z_{12},+>$ si verifica subito che X è chiuso rispetto alla somma, quindi essendo finito, è un sottogruppo di $<Z_{12},+>$.
2) Se $<G, \bullet>$ è un gruppo abeliano e H e K sono due suoi sottogruppi, consideriamo $h_1 \bullet k_1, h_2 \bullet k_2 \in X$, si ha allora
$(h_1 \bullet k_1) \bullet (h_2 \bullet k_2) = h_1 \bullet (k_1 \bullet h_2) \bullet k_2 =$ (per l'associatività di $\bullet$)
$= h_1 \bullet (h_2 \bullet k_1) \bullet k_2 =$ (per la commutatività di $\bullet$)
$= (h_1 \bullet h_2) \bullet (k_1 \bullet k_2)$ (per l'associatività di $\bullet$)
ora $h_1 \bullet h_2 \in H$, $k_1 \bullet k_2 \in K$, perché H e K sono sottogruppi da cui $(h_1 \bullet k_1) \bullet (h_2 \bullet k_2) = (h_1 \bullet h_2) \bullet (k_1 \bullet k_2) \in X$;
$(h_1 \bullet k_1)^{-1} = k_1^{-1} \bullet h_1^{-1} = h_1^{-1} \bullet k_1^{-1}$ (per la commutatività di $\bullet$)
ora $h_1^{-1} \in H$, $k_1^{-1} \in K$, perché H e K sono sottogruppi da cui $(h_1 \bullet k_1)^{-1} = h_1^{-1} \bullet k_1^{-1} \in X$, dunque X è un sottogruppo di $<G, \bullet>$
(a questo punto si può evitare di svolgere il punto 1 ed osservare semplicemente che il punto 1 è un caso particolare del punto 2 essendo $<Z_{12},+>$ un gruppo abeliano, H e K due suoi sottogruppi ed X ottenuto componendo in tutti i modi possibili con l'operazione di somma, che è l'operazione del nostro gruppo un elemento di H con un elemento di K).
3) X è normale poiché $<G, \bullet>$ è un gruppo abeliano ed ogni sottogruppo di un gruppo abeliano è normale.
4) Per costruzione ogni elemento $x \in X$ si scrive nella forma $x = h \bullet k$, con $h \in H$, $k \in K$, inoltre per ipotesi tale scrittura è unica dunque la f definita ponendo $f(h \bullet k) = k$ è una funzione di X in K. E' suriettiva in quanto per ogni $k \in K$, esiste $h \bullet k$ in X con $f(h \bullet k) = k$ E' un omomorfismo perché essendo $(h_1 \bullet k_1) \bullet (h_2 \bullet k_2) = (h_1 \bullet h_2) \bullet (k_1 \bullet k_2)$, si ha
$f((h_1 \bullet k_1) \bullet (h_2 \bullet k_2)) = f((h_1 \bullet h_2) \bullet (k_1 \bullet k_2)) = (k_1 \bullet k_2) = f(h_1 \bullet k_1) \bullet f(h_2 \bullet k_2)$.
Detto e l'elemento neutro di $<G, \bullet>$, si ha ovviamente che $e = e \bullet e$, sia $x = h \bullet k$ un elemento della (ker f)-classe di e, si ha $f(h \bullet k) = f(e \bullet e) = e$, da cui essendo $f(h \bullet k) = k$ si ottiene subito che $k = e$, dunque $x = h \bullet e = h \in H$. Se consideriamo un qualunque h in H, essendo $h = h \bullet e$, si ottiene che $f(h) = e = f(e)$, dunque h appartiene alla (ker f)-classe di e.
Ora per il teorema di fattorizzazione degli omomorfismi esiste un monomorfismo g del gruppo quoziente X/ker f (che è come dire il gruppo X/H perché sappiamo che le due notazioni sono equivalenti) in H. Ma essendo f suriettivo anche g è suriettivo e quindi è un isomorfismo.