Equazioni Differenziali Ordinarie	**Prima prova in itinere**	**5 maggio 2008**
Cognome	**Nome**	**Firma**
Proff. Furioli, Rossi, Vegni	**Matricola**	**Sezione INF**

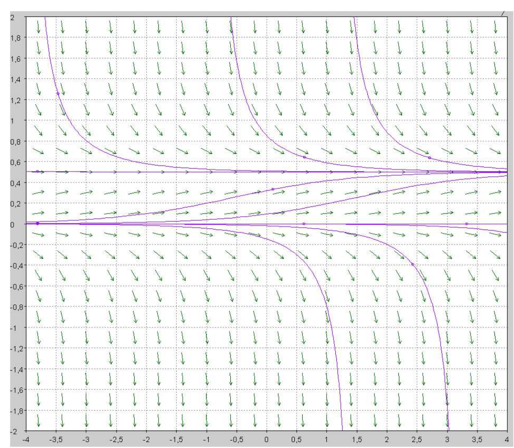
Esercizio 1. È data l'equazione autonoma $x' = rx^3 - 2x^2 + x$ dipendente dal parametro r.
a. Trovarne i punti di equilibrio, al variare del parametro r.
b. Determinarne la natura ed eventualmente il bacino di attrazione.
c. Mostrare che se $r = -1$, allora $x = \sqrt{2}-1$ è soluzione di equilibrio asintoticamente stabile; cosa si può dire sulla velocità di convergenza delle soluzioni nel suo bacino di attrazione?

Soluzione:

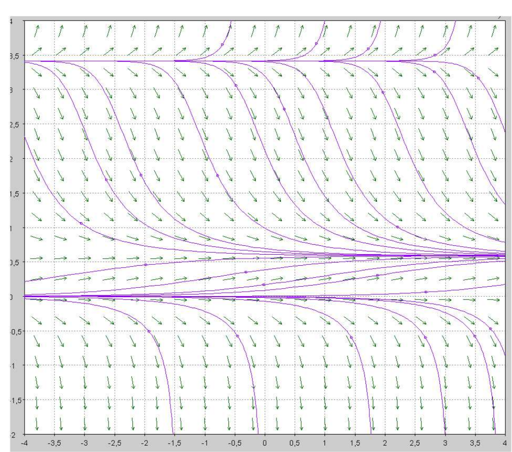
a. L'equazione è autonoma; si ha $f(x) = rx^3 - 2x^2 + x \in C^\infty(\mathbb{R})$, dunque è garantita esistenza ed unicità della soluzione di un problema di Cauchy per ogni $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ricerchiamo allora i punti di equilibrio, che risolvono $f(x) = 0$. Per ogni $r \in \mathbb{R}$ si ha 0 punto di equilibrio; gli altri punti sono $\frac{1 \pm \sqrt{1-r}}{r}$ se $r \leq 1$.

b. Analizziamo ora la stabilità dei punti di equilibrio.

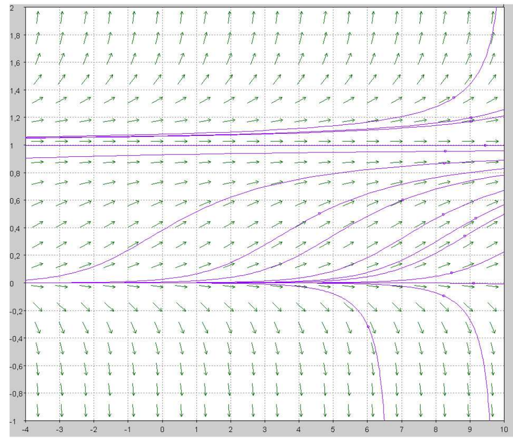
Per $r = 0$, si ha $f(x) = x(-2x + 1)$ dunque i punti di equilibrio sono 0 e $\frac{1}{2}$; inoltre il segno della funzione f determina nel grafico il crescere o decrescere delle soluzioni. Se ne deduce che 0 è di equilibrio instabile, mentre $\frac{1}{2}$ è di equilibrio asintoticamente stabile con bacino di attrazione $(0, +\infty)$.



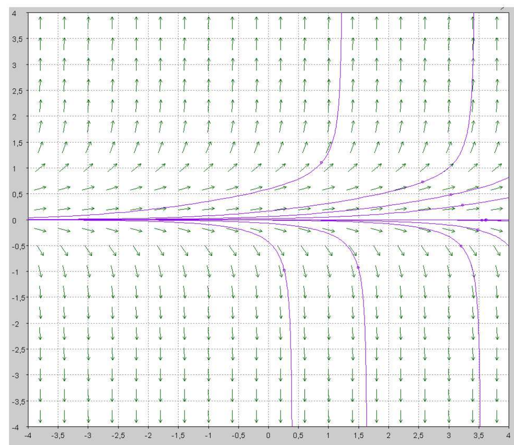
Per $0 < r < 1$ i punti di equilibrio sono 0, $\frac{1-\sqrt{1-r}}{r}$, $\frac{1+\sqrt{1-r}}{r}$ e poiché $\sqrt{1-r} < 1$ si ha $0 < \frac{1-\sqrt{1-r}}{r} < \frac{1+\sqrt{1-r}}{r}$. Il segno della funzione f determina nel grafico il crescere o decrescere delle soluzioni. Se ne deduce che 0 e $\frac{1+\sqrt{1-r}}{r}$ sono di equilibrio instabile, mentre $\frac{1-\sqrt{1-r}}{r}$ è di equilibrio asintoticamente stabile con bacino di attrazione $(0, \frac{1+\sqrt{1-r}}{r})$.



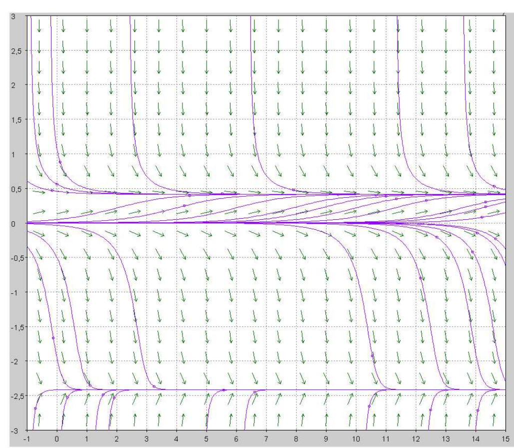
Per $r = 1$, si ha $f(x) = x(x-1)^2$ per cui i punti di equilibrio sono 0 e 1. Il segno della funzione f determina nel grafico il crescere o decrescere delle soluzioni. Se ne deduce che 0 è instabile, mentre 1 è asintoticamente semistabile da sotto, con bacino di attrazione $(0, 1]$.



Per $r > 1$ si ha $rx^2 - 2x + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque l'unico punto critico è 0, che è instabile.



Infine, per $r < 0$ i punti di equilibrio sono ancora 0, $\frac{1-\sqrt{1-r}}{r}$, $\frac{1+\sqrt{1-r}}{r}$ e poiché $\sqrt{1-r} > 1$ si ha $\frac{1+\sqrt{1-r}}{r} < 0 < \frac{1-\sqrt{1-r}}{r}$. Per determinare il segno della funzione f, bisogna prestare attenzione al termine di secondo grado $rx^2 - 2x + 1$ che ha coefficiente direttore **negativo**, dunque il trinomio è positivo all'**interno** dell'intervallo delle radici! Il segno di f nel grafico determina il crescere o decrescere delle soluzioni. Se ne deduce che 0 è di equilibrio instabile, mentre $\frac{1+\sqrt{1-r}}{r}$ e $\frac{1-\sqrt{1-r}}{r}$ sono di equilibrio asintoticamente stabile con bacino di attrazione rispettivamente $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$.



c. Per $r = -1$, i punti di equilibrio (come visto sopra) sono 0, $-(1+\sqrt{2})$ e $\sqrt{2} - 1$. Inoltre $f'(x) = -3x^2 - 4x + 1$, dunque $f'(\sqrt{2} - 1) = -4 + 2\sqrt{2} < 0$; per il teorema sulla stabilità asintotica e velocità di convergenza (cfr. Salsa-Squellati, Teorema 4.1, pag. 60), si ha che $\sqrt{2} - 1$ è asintoticamente stabile ed esiste un intorno U del punto $\sqrt{2} - 1$ tale che per ogni $x_0 \in U$, la velocità di convergenza di $\phi(t; x_0)$ a $\sqrt{2} - 1$ è esponenziale.

Equazioni Differenziali Ordinarie	**Prima prova in itinere**	**5 maggio 2008**
Cognome	**Nome**	**Firma**
Proff. Furioli, Rossi, Vegni	**Matricola**	**Sezione INF**

Esercizio 2. È assegnato il sistema lineare a coefficienti costanti:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = ax - y. \end{cases}$$

a. Classificare il tipo di orbite al variare del parametro a.

b. Per quali valori del parametro a esistono traiettorie rettilinee nel piano delle fasi?

c. Nel caso $a = 1$, disegnare le orbite del sistema nel piano delle fasi, specificandone il verso di percorrenza.

d. Sempre nel caso $a = 1$, utilizzare il ritratto di fase per determinare il limite della soluzione che ha come dato iniziale il punto $(2, 0)$.

e. Scrivere un'equazione del secondo ordine equivalente al sistema *(facoltativo)*.

Soluzione:

a. Denotando con $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ a & -1 \end{bmatrix}$ la matrice dei coefficienti, osserviamo che $\det A = 0$ se e solo se $a = 1$. Dunque, se $a \neq 1$ il sistema ha l'origine come unico punto critico, mentre se $a = 1$ il sistema ha una retta di punti critici che corrispondono all'autospazio dell'autovalore nullo. Ricerchiamo ora gli autovalori di A. Si ha $\det(A - \lambda I) = 0 \iff (-1-\lambda)^2 - a = 0 \iff \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{a}$.

1. Se $a > 1$, allora $\lambda_1 = -1 - \sqrt{a} < 0$ mentre $\lambda_2 = -1 + \sqrt{a} > 0$, dunque l'origine è un punto di sella, dunque instabile.
2. Se $a = 1$ abbiamo già detto che l'origine non è critico isolato e si ha una retta di punti critici. Poiché l'altro autovalore è $\lambda_2 = -2 < 0$, i punti critici sono tutti stabili, non asintoticamente.
3. Se $0 < a < 1$, gli autovalori sono reali, concordi, negativi, dunque l'origine è un nodo a due tangenti, asintoticamente stabile.
4. Se $a = 0$, gli autovalori sono reali, negativi e coincidenti a $\lambda = -1$. Poiché la matrice non è diagonale (dunque non è diagonalizzabile essendo una 2×2), l'origine è un nodo a una tangente, asintoticamente stabile.
5. Se $a < 0$, allora gli autovalori sono complessi coniugati con parte reale regativa $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{-a}$, dunque l'origine è un vortice asintoticamente stabile.

b. Esistono orbite rettilinee ogni volta che esiste un autovalore reale, cioè per $a \geq 0$.

c. Per $a = 1$, il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

Gli autovalori della matrice A sono $\lambda = 0$ e $\lambda = -2$. La retta di punti critici è data da

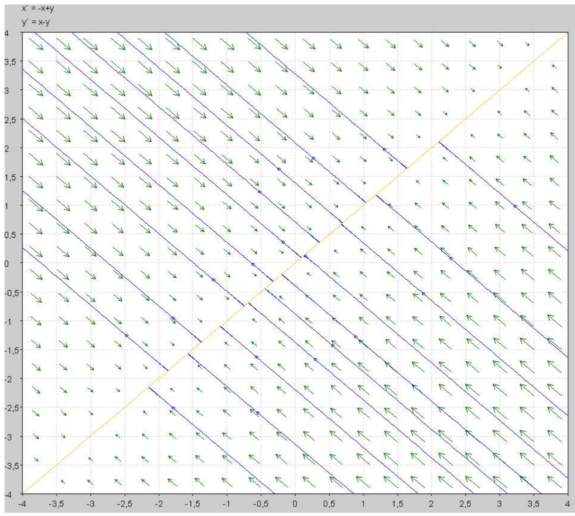
$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

cioè $y = x$, generata ad esempio dall'autovettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = -2$ è $y = -x$, generato ad esempio dall'autovettore $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. L'integrale generale del sistema è

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

e il ritratto di fase è riportato in figura. Tutti i punti critici $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$ sono stabili, non asintoticamente.

d. Si osserva che per $\underline{\mathrm{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, si ha $\lim_{t \to +\infty} \underline{\phi}(t; \underline{\mathrm{x}}_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.



e. Da $y = \dot{x} + x$ si ha $\dot{y} = \ddot{x} + \dot{x} = ax - (\dot{x} + x)$ cioè $\ddot{x} + 2\dot{x} + (1 - a)x = 0$.

Equazioni Differenziali Ordinarie	**Prima prova in itinere**	**5 maggio 2008**
Cognome	**Nome**	**Firma**
Proff. Furioli, Rossi, Vegni	**Matricola**	**Sezione INF**

Esercizio 3. Si consideri l'equazione

$$y' = (e^{y^2-t^2} - 1)t^2 y.$$

a. Discutere l'applicabilità dei risultati di esistenza ed unicità locale e globale ad un generico problema di Cauchy $y(t_0) = y_0$.

b. Determinare le eventuali soluzioni costanti e il luogo dei punti a tangente orizzontale.

c. Determinare le regioni del piano in cui le soluzioni sono crescenti oppure decrescenti.

d. È possibile stabilire se esiste e quanto vale $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t)$, per una generica soluzione $\varphi(t)$?

e. Disegnare il grafico di alcune soluzioni significative.

Soluzione:

a. Si ha $y' = f(t,y)$ con $f(t,y) = (e^{y^2-t^2}-1)t^2 y \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, dunque si può applicare il teorema di esistenza ed unicità locale in $\mathbb{R}^2$ e quindi per ogni $(t_0,y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ ed esiste un'unica soluzione $\varphi(t) : [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy con dato iniziale (t_0,y_0). Poiché poi per $t \neq 0$ fissato si ha $f(t,y) \sim ye^{y^2}$ e quindi f non può essere sublineare su alcuna striscia $[a,b]\times\mathbb{R}$ del piano, non si può applicare il teorema di prolungamento (esistenza ed unicità globale) e quindi non si può prevedere a priori il dominio delle soluzioni.

Si può osservare che, visto che $f(t,y)$ è dispari rispetto a y, l'insieme delle soluzioni sarà simmetrico rispetto all'asse t, cioè se $\varphi(t)$ è soluzione, anche $-\varphi(t)$ è soluzione.

b. L'unica soluzione costante è $y(t) = 0$; il luogo dei punti a tangente orizzontale è l'unione di $y = 0$, $t = 0$ e $y^2 = t^2$ cioè le due bisettrici $y = t$ e $y = -t$.

c. Le soluzioni sono crescenti se e solo se $y'(t) \geq 0$; studiamo dunque il segno di f. Si ha

$$(e^{y^2-t^2}-1)t^2 y \geq 0 \iff \begin{cases} t = 0 \\ y \geq 0 \\ y^2 \geq t^2 \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} t = 0 \\ y \leq 0 \\ y^2 \leq t^2 \end{cases}$$

Importante: Si osservi che $y^2 \geq t^2$ equivale a $|y| \geq |t|$, cioè $(y-t)(y+t) \geq 0$ o ancora

$$\begin{cases} y \geq t \\ y \geq -t \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} y \leq t \\ y \leq -t \end{cases}$$

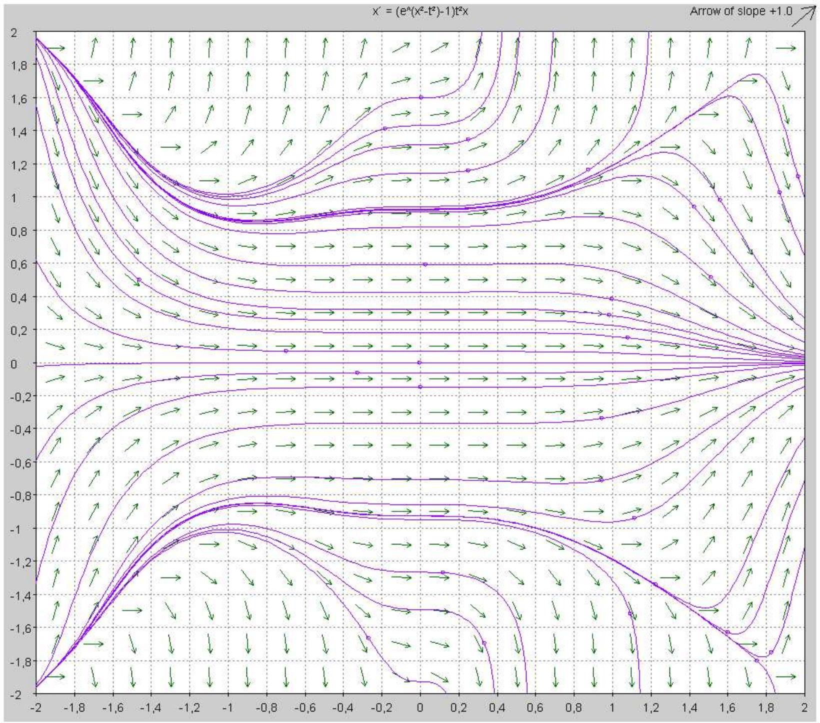
d. Data la simmetria delle soluzioni, studiamo solo il caso di soluzioni positive per $t > 0$. Ci sono due possibilità: o le soluzioni restano nella parte di piano $y > t$ oppure si trovano nella parte di piano $0 < y < t$. Nel primo caso, non sappiamo neanche se sono definite per ogni $t > 0$ (potrebbero a priori avere un asintoto verticale!) ma se lo sono, restano crescenti e non possono attraversare la retta $y = t$ e quindi per forza $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$. Nel secondo caso, consideriamo il caso di una soluzione che in $t_0 > 0$ è tale che $y(t_0) = y_0 < t_0$. Questa è decrescente e poiché per l'unicità non può attraversare la soluzione costante $y = 0$ e non può neanche interrompersi, è per forza prolungabile su $[t_0, +\infty)$ ed inoltre esiste $\lim_{t\to+\infty} y(t) = l \in [0, y_0)$. Ci sono due possibilità: o la sua derivata $y'(t)$ ammette limite e in tal caso $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = 0$, oppure non lo ammette. Se fosse $l > 0$, allora si avrebbe

$$\lim_{t\to+\infty} y'(t) = \lim_{t\to+\infty} f(t,y(t)) = \lim_{t\to+\infty} (e^{y(t)^2-t^2}-1)t^2 y(t) = (e^{l^2-\infty}-1)\infty^2 l = -\infty$$

dunque in questo caso la derivata ammetterebbe limite e tale limite sarebbe $-\infty$ e ciò è assurdo. Dunque, per forza $l = 0$. Osserviamo che non siamo in grado di dire in questo caso se la derivata ammette limite oppure no, poiché troviamo una forma di indecisione:

$$\lim_{t \to +\infty} (e^{y(t)^2 - t^2} - 1) t^2 y(t) = (e^{-\infty} - 1)\infty^2 0$$

e. Il grafico di alcune soluzioni significative è riportato in figura.



Equazioni Differenziali Ordinarie	**Prima prova in itinere**	**5 maggio 2008**
Cognome	**Nome**	**Firma**
Proff. Furioli, Rossi, Vegni	**Matricola**	**Sezione INF**

Domanda 4.

a. Fornire la definizione di funzione $f(t,x)$ localmente Lipschitziana rispetto a x, uniformemente rispetto a t, in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$.

b. Enunciare **con precisione** il teorema di Cauchy–Lipschitz (esistenza ed unicità locale) e il teorema di esistenza ed unicità globale.

c. Dimostrare il lemma di unicità per il teorema di Cauchy–Lipschitz.