Equazioni Differenziali Ordinarie	Primo appello	17 luglio 2008
Cognome	**Nome**	**Firma**
Proff. Furioli, Rossi, Vegni	**Matricola**	**Sezione INF**

Esercizio 1.

A) Data una generica equazione alle differenze $x_{n+1} = f(x_n)$, dimostrare, **precisando le ipotesi sulla funzione generatrice** f, che se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è l'orbita uscente da un generico punto x_0 e $\lim_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$, allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio.

B) È data l'equazione alle differenze

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n(1+x_n^2)}{1+x_n^4}, & n \geq 0 \\ x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(1) Trovarne i punti di equilibrio, dopo aver disegnato il grafico di f.[1]

(2) Disegnare con un diagramma a gradino le orbite relative ai dati iniziali $x_0 = -2$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = 2$.

(3) Determinare la natura dei punti di equilibrio ed il loro eventuale bacino di attrazione.

Soluzione.

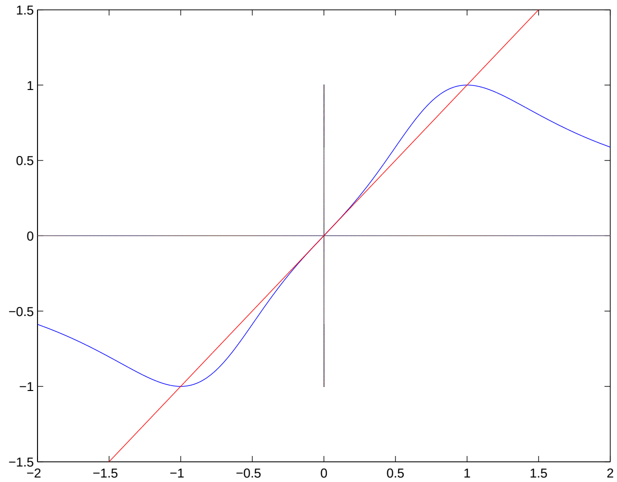
A) Supponiamo che $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow I$ sia continua su I e che $x_0, \bar{x} \in I$. Se $\lim_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$, allora anche $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \bar{x}$ e grazie alla continuità di f si ha $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\bar{x})$. Dunque:

$$\bar{x} = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\bar{x}),$$

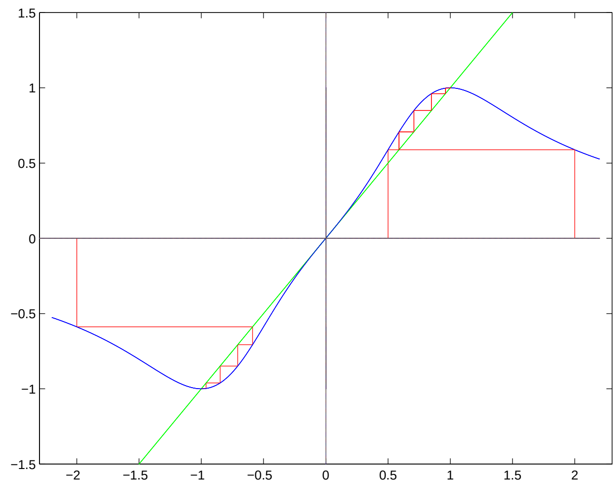
cioè $\bar{x}$ è un punto di equilibrio.

B) (1) La funzione generatrice $f(x) = \frac{x(1+x^2)}{1+x^4}$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$, dunque per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste una sola orbita $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uscente da x_0. Si osservi che f è dispari; inoltre $f \geq 0 \iff x \geq 0$ e $f'(x) = \frac{-x^6-3x^4+3x^2+1}{(1+x^4)^2} = \frac{(x^2-1)(-x^4-4x^2-1)}{(1+x^4)^2}$. Si ha $-x^4-4x^2-1 < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque $f'(x) \geq 0 \iff x \in [-1, 1]$. I punti di equilibrio, che verificano $f(x) = x$, sono -1 e 0 e 1. Inoltre $f'(-1) = f'(1) = 0$ mentre $f'(0) = 1$, dunque la retta $y = x$ è tangente al grafico di f in $(0, 0)$, il punto -1 è punto di minimo assoluto e il punto 1 è punto di massimo assoluto. Non è necessario studiare la derivata seconda per disegnare un grafico approssimativo di f, che è riportato in figura.

[1] Per lo studio di f, può essere utile osservare che $-x^6 - 3x^4 + 3x^2 + 1 = (x^2-1)(-x^4-4x^2-1)$. Inoltre non è necessario studiare la derivata seconda.



(2) I diagrammi a gradino sono riportati in figura.



(3) Come già visto,

$$f'(0) = 1, \quad f'(-1) = f'(1) = 0.$$

Dunque, i punti -1 e 1 sono iperbolici mentre 0 non è iperbolico. In base al teorema sui punti iperbolici, si ha che -1 e 1 sono di equilibrio asintoticamente stabile, mentre non possiamo dire nulla sulla stabilità di 0.
Per determinare la natura di 0 e il bacino di attrazione di -1 e 1, determiniamo i sottointervalli $J \subset \mathbb{R}$ stabili tramite f, cioè tali che $f(J) \subset J$. Per la disparità della funzione, possiamo limitarci a studiare $x \geq 0$. Si ha

$$f((0,1)) \subset ((0,1)$$
$$f((1,+\infty)) \subset ((0,1))$$

dunque $(0,1)$ è stabile, mentre $(1,+\infty)$ non lo è, ma se $x_0 \in (1,+\infty)$, si ha $x_1 = f(x_0) \in (0,1)$, dunque è sufficiente studiare il comportamento delle orbite uscenti da $(0,1)$. In $(0,1)$ si ha $f(x) \geq x$, dunque se $x_0 \in (0,1)$, si ha $x_{n+1} = f(x_n) \geq x_n$, dunque $\{x_n\}$ è crescente, inoltre $x_n < 1$ per ogni n, dunque è superiormente limitata; quindi, esiste

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \in (x_0, 1]$$

ma poiché f è continua, il limite deve essere un punto fisso e quindi per forza $l = 1$ (non ci sono altri punti fissi di f in $(x_0, 1]$). Dunque il bacino di attrazione di 1 è $(0,+\infty)$ e per simmetria il bacino di attrazione di -1 è $(-\infty, 0)$ e 0 è di equilibrio instabile.

Equazioni Differenziali Ordinarie	Primo appello	17 luglio 2008
Cognome	**Nome**	**Firma**
Proff. Furioli, Rossi, Vegni	**Matricola**	**Sezione INF**

Esercizio 2. Sia data l'equazione differenziale

$$y' + xy + x\sqrt{y} = 0.$$

(1) Si dica, in base alla teoria, dove è possibile garantire esistenza ed unicità della soluzione locale.
(2) Si precisi se è possibile applicare un teorema di prolungamento (esistenza ed unicità globale). Possono esistere soluzioni definite su $\mathbb{R}$?
(3) Determinare esplicitamente l'integrale generale dell'equazione, **precisando** l'insieme di definizione delle soluzioni.
(4) Risolvere il problema di Cauchy $y(0) = 1$ associato all'equazione assegnata, precisando l'insieme di definizione della soluzione.
(5) Discutere il problema di Cauchy $y(0) = 0$.
(6) Disegnare il grafico di alcune soluzioni.

Soluzione.

(1) Scrivendo l'equazione in forma normale

$$y' = -xy - x\sqrt{y}$$

si ha che $y' = f(x, y)$ ove $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}$. Dunque il dominio della funzione f non è un insieme aperto. Si ha $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, dunque per il teorema di Cauchy–Lipschitz per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ esiste un'unica soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale (x_0, y_0) definita in un opportuno intorno di x_0. Non possiamo per ora garantire nulla (né esistenza, né unicità) per un problema di Cauchy con dato iniziale $(x_0, 0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (cioè sul bordo dell'insieme di definizione di f).

(2) Poiché la funzione f non è definita in alcuna striscia vericale $[a, b] \times \mathbb{R}$, non possiamo applicare il teorema di esistenza ed unicità globale e quindi non possiamo prevedere nulla circa l'intervallo massimale di prolungabilità delle soluzioni. Possono quindi esistere soluzioni definite su $\mathbb{R}$ oppure non esistere, non si può dire nulla.

(3) Si tratta di un'equazione a variabili separabili e di Bernoulli. Scriviamola come

$$y' = -x\sqrt{y}\ (\sqrt{y} + 1);$$

la funzione $y = 0$ è soluzione costante. Supponendo ora $y \neq 0$ dividiamo ed otteniamo

$$\frac{y'}{\sqrt{y}\ (1 + \sqrt{y})} = -x$$

da cui

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}\ (\sqrt{y} + 1)} = -\frac{1}{2}x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ponendo $t = \sqrt{y}$ si ha

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}\ (\sqrt{y} + 1)} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t + 1} = 2\ln|1 + t| = \ln(1 + \sqrt{y})^2$$

dunque l'integrale generale (esclusa la soluzione costante $y = 0$) è, in forma implicita

$$\ln(1 + \sqrt{y})^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

cioè

$$(1+\sqrt{y})^2 = Ke^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Per esplicitare le soluzioni, osserviamo dalla relazione precedente che esistono soluzioni solo per $K \geq 1$ (infatti per $K < 1$ si ha $\sqrt{K}e^{-\frac{1}{4}x^2} < 1$ mentre $(1+\sqrt{y})^2 \geq 1$) e per tali valori di K si ha

(SOL) $$\sqrt{y} = \sqrt{K}e^{-\frac{1}{4}x^2} - 1.$$

Per trovare il dominio delle soluzioni ci chiediamo per quali $x \in \mathbb{R}$ ha senso l'espressione precedente, al variare di $K \geq 1$: si ha

$$\begin{aligned}
&\sqrt{y} = \sqrt{K}e^{-\frac{1}{4}x^2} - 1 \iff \sqrt{K}e^{-\frac{1}{4}x^2} - 1 \geq 0 \iff \sqrt{K}e^{-\frac{1}{4}x^2} \geq 1 \\
&\iff e^{-\frac{1}{4}x^2} \geq \frac{1}{\sqrt{K}} \iff -\frac{1}{4}x^2 \geq \ln\frac{1}{\sqrt{K}} \\
&\iff \frac{1}{4}x^2 \leq \ln\sqrt{K} \iff x \in \left[-2(\ln\sqrt{K})^{\frac{1}{2}}, 2(\ln\sqrt{K})^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}$$

(si osservi che, poiché abbiamo già detto che $K \geq 1$, l'espressione trovata ha senso poiché $\ln\sqrt{K} \geq 0$). A questo punto (e solo a questo punto!) si può esplicitare l'integrale generale trovando:

$$y(x) = (\sqrt{K}e^{-\frac{1}{4}x^2} - 1)^2, \quad x \in \left[-2(\ln\sqrt{K})^{\frac{1}{2}}, 2(\ln\sqrt{K})^{\frac{1}{2}}\right].$$

(4) Ponendo $y(0) = 1$ in (SOL) otteniamo

$$1 = \sqrt{K} - 1 \iff K = 4$$

da cui la soluzione del problema di Cauchy proposto è

$$y(x) = (2e^{-\frac{1}{4}x^2} - 1)^2, \quad x \in \left[-2(\ln 2)^{\frac{1}{2}}, 2(\ln 2)^{\frac{1}{2}}\right].$$

(5) Abbiamo già trovato la soluzione costante $y(x) = 0$; vediamo se esistono altre soluzioni della forma trovata nell'integrale generale. Sostituendo $y(0) = 0$ in (SOL), si ha

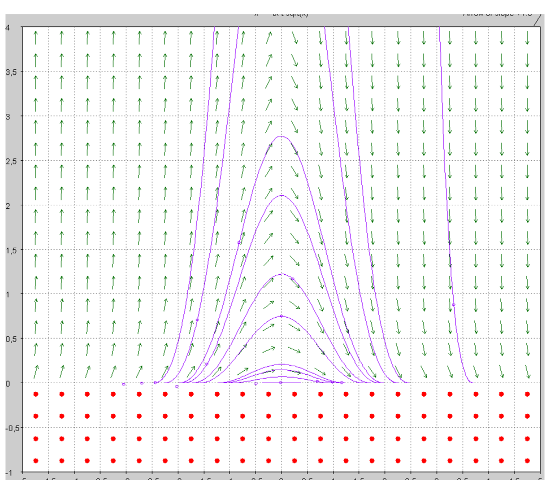
$$0 = \sqrt{K} - 1, \iff K = 1$$

da cui un'altra soluzione sarebbe

$$y(x) = (e^{-\frac{1}{4}x^2} - 1)^2, \quad x \in [0, 0]$$

ma in questo caso il dominio di definizione è il solo punto $x = 0$ e quindi non abbiamo trovato una funzione! L'unica soluzione del problema di Cauchy è quindi quella costante $y(x) = 0$.

(6) Alcune soluzioni sono riportate in figura.



Equazioni Differenziali Ordinarie	Primo appello	17 luglio 2008
Cognome	**Nome**	**Firma**
Proff. Furioli, Rossi, Vegni	**Matricola**	**Sezione INF**

Esercizio 3. Sia dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-1) \\ \dot{y} = xy(2-y) \end{cases}$$

(1) Trovarne i punti critici.
(2) Linearizzare il sistema nell'intorno dei punti critici, dove possibile, e determinare la natura dei punti critici del sistema linearizzato.
(3) Dedurre, se possibile, la natura dei punti critici del sistema non lineare.
(4) Determinare le isocline orizzontali, verticali ed il verso di percorrenza delle orbite.
(5) Determinare un integrale primo del sistema.
(6) Disegnare qualche orbita significativa.

Soluzione. Osserviamo innanzi tutto che $f(x,y) = x(x-1) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $g(x,y) = xy(2-y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, dunque per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ e per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esiste un'unica soluzione $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ definita in un intorno di t_0 tale che $\phi(t_0) = x_0$ e $\psi(t_0) = y_0$.

(1) I punti critici si trovano risolvendo

$$\begin{cases} x(x-1) = 0 \\ xy(2-y) = 0 \end{cases}$$

e sono tutti i punti della retta $x = 0$ e i punti $A = (1,0)$ e $B(1,2)$.

(2) Poiché i punti della retta $x = 0$ non sono isolati, non è possibile linearizzare nell'intorno di questi punti. Consideriamo allora i punti A e B. Si ha

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 2x-1 & 0 \\ y(2-y) & x(2-y)-xy \end{bmatrix}$$

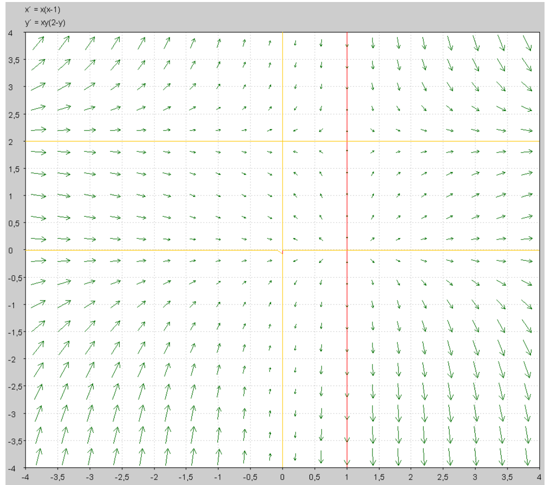
dunque

$$J(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad J(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dallo studio della matrice jacobiana (che è diagonale), si deduce immediatamente che il punto A è un nodo a due tangenti instabile per il sistema linearizzato, e quindi resta tale anche per il sistema non lineare e il punto B è un punto di sella per il sistema linearizzato e quindi resta tale anche per il sistema non lineare.

(3) Abbiamo già analizzato A e B, mentre nulla si può dire per i punti critici non isolati.

(4) Le isocline orizzontali si ottengono ponendo $\dot{y} = 0 \iff xy(2-y) = 0$, quelle verticali ponendo $\dot{x} = 0 \iff x(x-1) = 0$ ed il verso di percorrenza delle orbite è riportato in figura.



(5) Consideriamo $f(x,y) \neq 0$ cioè $x \neq 0$ e $x \neq 1$: le traiettorie $y = y(x)$ soddisfano l'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y(2-y)}{x-1}.$$

Le soluzioni costanti sono $y = 0$ e $y = 2$; per $y \neq 0$ e $y \neq 2$ si ha

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(2-y)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$$

da cui

$$\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2-y} + \frac{1}{y}\right) \mathrm{d}y = \ln|x-1| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

cioè

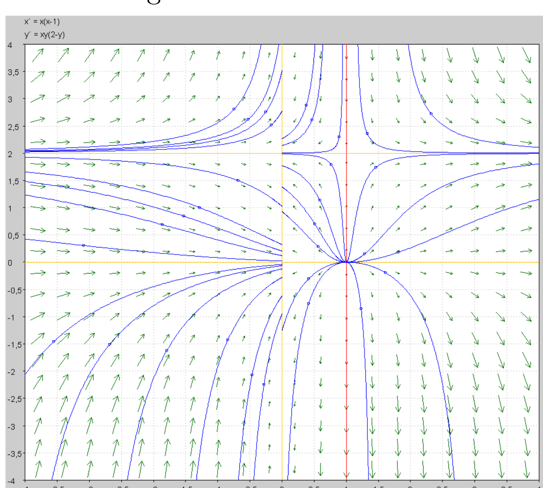
$$\frac{1}{2} \ln \frac{|y|}{|2-y|} = \ln|x-1| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Un integrale primo è quindi

$$H(x,y) = \frac{1}{2} \ln \frac{|y|}{|2-y|} - \ln|x-1|$$

e le sue linee di livello sono unioni di orbite.

(6) Il ritratto di fase è riportato in figura.



Equazioni Differenziali Ordinarie	Primo appello	17 luglio 2008
Cognome	Nome	Firma
Proff. Furioli, Rossi, Vegni	Matricola	Sezione INF

Esercizio 4. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(1) Trovare gli autovalori di A e gli autovettori relativi.
(2) Determinare la matrice e^A.
(3) Scrivere l'integrale generale del sistema autonomo $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$.
(4) Determinare la soluzione del sistema $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ che risolve il problema di Cauchy $\mathbf{y}(1) = (0, -1, -2)^T$.

Soluzione.

(1) Si ha

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff -\lambda^3 = 0$$

dunque l'unico autovalore è $\lambda = 0$ con molteplicità 3. La matrice è quindi nilpotente. Gli auovettori relativi a $\lambda = 0$ si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -y + 3z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

dunque l'autospazio relativo a $\lambda = 0$ ha dimensione 1 e la matrice non è (ovviamente) diagonalizzabile.

(2) Per determinare la matrice esponenziale, ricorriamo alla definizione:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Poiché

$$A^0 = I, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = 0$$

si ha

$$e^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(3) L'integrale generale ha la forma

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$$

dunque calcoliamo e^{tA}:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\, A^k}{k!} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -t & 3t \\ 0 & -2t & 2t \\ 0 & -2t & 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2t^2 & 2t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -t-2t^2 & 3t+2t^2 \\ 0 & 1-2t & 2t \\ 0 & -2t & 1+2t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(4) La soluzione del problema di Cauchy ha la forma

$$\mathbf{y}(t) = e^{(t-1)A} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

cioè

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -(t-1) - 2(t-1)^2 & 3(t-1) + 2(t-1)^2 \\ 0 & 1 - 2(t-1) & 2(t-1) \\ 0 & -2(t-1) & 1 + 2(t-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$