Equazioni Differenziali Ordinarie	Primo appello	17 luglio 2007
Cognome	**Nome**	**Firma**
Proff. Arioli, Furioli, Rossi, Vegni	**Matricola**	**Sezione INF**

Esercizio 1. Sia data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{\cos^2(x+y) - x}{x} \ :$$

(1) Stabilire se valgono i teoremi di esistenza e unicità in piccolo e in grande.
(2) Stabilire se esistono soluzioni costanti.
(3) Stabilire se esistono soluzioni di tipo $y = ax + b$.
(4) Determinare l'integrale generale (*suggerimento:* definire $z(x) = y(x) + x$ e risolvere dapprima l'equazione differenziale verificata da $z(x)$).
(5) Risolvere il problema di Cauchy con dato iniziale $y(1) = 1$.

Soluzione.

(1) Si ha $y' = f(x, y)$ con $f \in C^\infty(\{x \neq 0\} \times \mathbb{R})$, dunque il teorema di esistenza ed unicità locale vale per ogni problema di Cauchy $y(x_0) = y_0$ con $x_0 \neq 0$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Per quanto riguarda il teorema di esistenza ed unicità globale, consideriamo $\bar{S} = [a, b] \times \mathbb{R}$ con $0 < a < b < +\infty$ oppure $-\infty < a < b < 0$; si ha per $(x, y) \in \bar{S}$:

$$|f(x,y)| = \frac{|\cos^2(x+y) - x|}{|x|} \leq \frac{1 + |x|}{|x|} \leq \max_{x \in [a,b]} \frac{1+|x|}{|x|} = M$$

dunque il teorema di esistenza ed unicità globale si applica per ogni striscia $\bar{S}$. Quindi, la soluzione di un problema di Cauchy con $y(x_0) = y_0$ con $x_0 > 0$ sarà definita su ogni intervallo chiuso $[a, b] \subset (0, +\infty)$ e quindi, per l'arbitrarietà di a e b, sull'intervallo aperto $(0, +\infty)$; analogamente la soluzione di un problema di Cauchy con $y(x_0) = y_0$ con $x_0 < 0$ sarà definita sull'intervallo aperto $(-\infty, 0)$.

(2) Non esistono soluzioni costanti, poiché $\cos^2(x + y) - x = 0$ non contiene soluzioni del tipo $y = c$, $c \in \mathbb{R}$.

(3) Per stabilire se esistono soluzioni del tipo $y = ax + b$, ricerchiamo (se possibile) a e b in $\mathbb{R}$ tali che si abbia l'identità seguente

$$a = \frac{\cos^2(x + ax + b) - x}{x}, \quad \forall x \neq 0$$

cioè

$$ax = \cos^2((a+1)x + b) - x \iff (a+1)x = \cos^2((a+1)x + b).$$

Ricerchiamo dei candidati per a e b: se l'identità deve essere vera per ogni $x \neq 0$, in particolare deve essere vera per $x = 1$, per cui

$$a + 1 = \cos((a+1) + b).$$

Una possibilità è quindi

$$\begin{cases} a + 1 = 0 \\ (a+1) + b = k\dfrac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = k\dfrac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Osserviamo ora che effettivamente $y = -x + k\frac{\pi}{2}$ è soluzione dell'equazione differenziale su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$, dunque abbiamo trovato delle soluzioni della forma richiesta (per ora non possiamo affermare che non ce ne siano altre di questa forma).

(4) Consideriamo il cambiamento di funzione incognita
$$z(x) = y(x) + x$$
da cui $z'(x) = y'(x) + 1$ e quindi l'equazione soddisfatta da z sarà
$$z' - 1 = \frac{\cos^2(z) - x}{x} \iff z' = \frac{\cos^2(z)}{x}.$$
Le soluzioni costanti (per z) sono $z(x) = k\frac{\pi}{2}$, che corrispondono alle soluzioni $y(x) = -x + k\frac{\pi}{2}$ che abbiamo già trovato al punto (3); integrando membro a membro (è un'equazione a variabili separabili) si trovano le soluzioni non costanti
$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\cos^2 z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \iff \tan(z(x)) = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R} \iff z(x) = \arctan(\ln|x| + c), \quad c \in \mathbb{R}$$
da cui le soluzioni $y(x)$ sono
$$y(x) = -x + \arctan(\ln|x| + c), \quad c \in \mathbb{R}.$$
(osserviamo ora che non esistono altre soluzioni del tipo $y(x) = ax + b$ oltre quelle che avevamo trovato al punto (3)).

(5) Poiché non esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $1 = -1 + k\frac{\pi}{2}$, la soluzione del problema di Cauchy non è una delle soluzioni trovate al punto (3) ed è invece
$$y(x) = -x + \arctan(\ln|x| + \tan 2), \quad x \in (0, +\infty).$$

Equazioni Differenziali Ordinarie	**Primo appello**	**17 luglio 2007**
Cognome	**Nome**	**Firma**
Proff. Arioli, Furioli, Rossi, Vegni	**Matricola**	**Sezione INF**

Esercizio 2. È data l'equazione alle differenze

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

con funzione generatrice $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$.

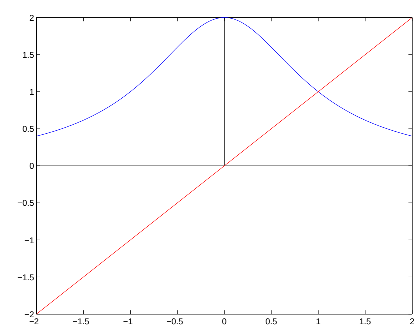
(1) Trovarne i punti di equilibrio, dopo aver disegnato il grafico di f.
(2) Disegnare con un diagramma a gradino le orbite relative ai dati iniziali $x_0 = -1$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = 2$.
(3) Sapendo che $g(x) = (f \circ f)(x) = \dfrac{2(1+x^2)^2}{x^4+2x^2+5}$, si determini se esistono orbite periodiche di periodo 2.

suggerimento: si osservi che $g(x) - x = -\dfrac{(x-1)^3(x^2+x+2)}{x^4+2x^2+5}$.

(4) Determinare la natura dei punti di equilibrio ed eventualmente il bacino di attrazione (si osservi che g è crescente su $[0,+\infty)$).

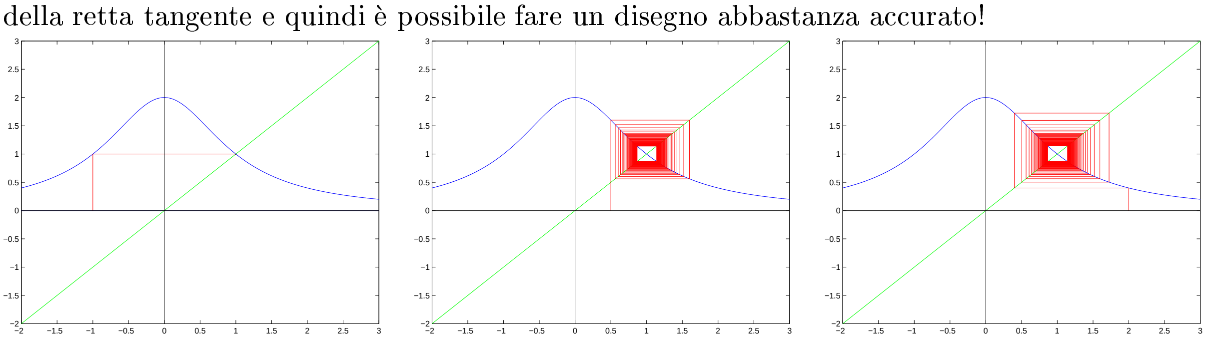
Soluzione.

(1) Il grafico della funzione $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ è riportato in figura. Gli eventuali punti di equilibrio si trovano risolvendo l'equazione $x = \frac{2}{1+x^2}$ che ha come unica soluzione $x = 1$. Si ha $f'(1) = -1$ dunque il punto critico non è iperbolico e, per ora, nulla si può dire circa la natura di tale punto critico.



(2) Le orbite uscenti dai punti $x_0 = -1$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = 2$ sono riportate in figura.

Osserviamo che l'unica orbita certa a partire da un grafico impreciso di f è quella uscente da $x_0 = -1$, poiché $f(-1) = f(1) = 1$ dunque l'orbita è stazionaria a partire da x_1. Per quanto riguarda le orbite uscenti da $x_0 = \frac{1}{2}$ e $x_0 = 2$, l'imprecisione nel disegno del grafico potrebbe portare ad orbite stabili o instabili. Se però si è calcolato $f'(1) = -1$, si sa anche la pendenza della retta tangente e quindi è possibile fare un disegno abbastanza accurato!



(3) Eventuali orbite periodiche di periodo 2 si trovano ricercando gli eventuali punti critici della funzione $g(x) = f \circ f(x)$ che non siano critici anche per f. Poiché si ha

$$g(x) - x = -\frac{(x-1)^3(x^2+x+2)}{x^4+2x^2+5},$$

l'unico punto critico per g è $x = 1$ che è critico anche per f, dunque non esistono orbite periodiche di periodo 2.
(4) Osserviamo che $f(\mathbb{R}) \subset [0,2]$, dunque è sufficiente studiare le orbite uscenti da $x_0 \in [0,2]$ (perché $[0,2]$ è un intervallo stabile).

Sia $x_0 \in (1,2]$; vogliamo mostrare che $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$ (analogamente si mostra che se $x_0 \in [0,1)$ allora $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$).

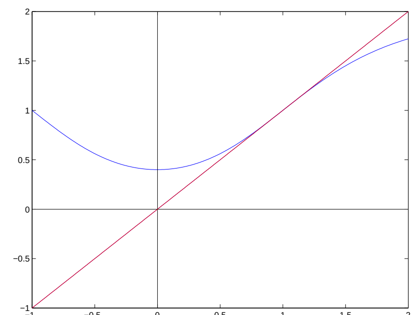
Osserviamo che $[1,2]$ non è un intervallo stabile (infatti $f([1,2]) = (0,1]$)! Tuttavia possiamo studiare le successioni x_{2n} e x_{2n+1} come orbite della funzione $g = f \circ f$. Infatti, se $x_0 \in (1,2]$ si ha

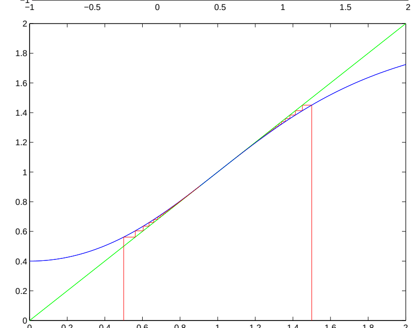
$$x_{2(n+1)} = f(f(x_{2n})) = g(x_{2n})$$
$$x_{2(n+1)+1} = f(f(x_{2n+1})) = g(x_{2n+1})$$

Studiamo allora le orbite dell'equazione alle differenze

$$y_{n+1} = g(y_n)$$

con $y_0 \in [0,2]$, $y_0 \neq 1$ che è punto critico.





La funzione $g(x) = \dfrac{2(1+x^2)^2}{x^4+2x^2+5}$ è crescente su $\mathbb{R}$, gli intervalli $[0,1]$ e $[1,+\infty]$ sono stabili e $g(x) \geq x$ per $x \in [0,1]$ e $g(x) \leq x$ per $x \in [1,+\infty]$. Il grafico di g è riportato in figura.
Dunque, se $y_0 \in (1,2]$ si ha $y_n \geq 1$ per ogni n; inoltre $y_{n+1} \leq y_n$, dunque $\lim_{n\to+\infty} y_n = 1$.
D'altra parte, se $y_0 \in [0,1)$ si ha $y_n \leq 1$ per ogni n; inoltre $y_{n+1} \geq y_n$, dunque $\lim_{n\to+\infty} y_n = 1$.
Le orbite y_n sono rappresentate in figura.

Quindi abbiamo dimostrato che $\lim_{n\to+\infty} x_{2n} = 1$ e $\lim_{n\to+\infty} x_{2n+1} = 1$. Quindi, tornando al problema di partenza, il punto critico $x = 1$ è asintoticamente stabile e il suo bacino d'attrazione è tutto $\mathbb{R}$.

Equazioni Differenziali Ordinarie	**Primo appello**	**17 luglio 2007**
Cognome	**Nome**	**Firma**
Proff. Arioli, Furioli, Rossi, Vegni	**Matricola**	**Sezione INF**

Esercizio 3. Sia dato il sistema non lineare

$$(S) \qquad \begin{cases} \dot{x} = -2y + x\sin(x^2+y^2) \\ \dot{y} = 2x + y\sin(x^2+y^2) \end{cases}$$

(1) Trovarne i punti critici.

(2) Linearizzare il sistema nell'intorno dei punti critici e determinare la natura dei punti critici del sistema linearizzato. È possibile dedurre la natura dei punti critici del sistema non lineare?

(3) Scrivere il sistema (S) in coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$.

(4) Disegnare il ritratto di fase, precisando la stabilità dei punti critici e di eventuali cicli limite.

Soluzione.

(1) Con adeguate considerazioni algebriche si vede che l'origine è il solo punto critico (soluzione del sistema :

$$\begin{cases} -2y + x\sin(x^2+y^2) = 0 \\ 2x + y\sin(x^2+y^2) = 0; \end{cases}$$

si moltiplichi la prima per y e la seconda per x e si sottragga membro a membro: si ottiene $2(x^2+y^2) = 0$).

(2) Il sistema linearizzato è

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$$

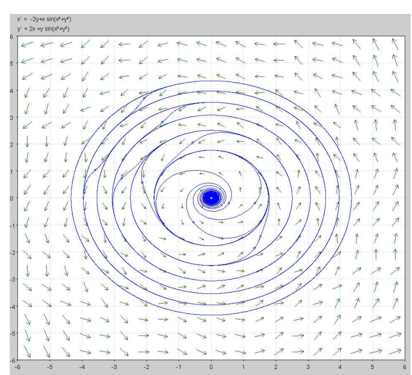
La matrice coefficienti è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

con autovalori immaginari puri $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. L'origine è quindi un centro, situazione che non permette di decidere per il non lineare.

(3)–(4) Applicate le adeguate formule di passaggio, il sistema in coordinate polari diventa:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho\sin\rho^2 \\ \dot{\theta} = 2; \end{cases}$$



si notano subito cicli limite per $\rho^2 = k\pi \quad (k = 1, 2, ...)$. Le orbite sono tutte percorse in senso antiorario ($\theta = 2t + t_0$). L'origine diventa un fuoco instabile ($\dot{\rho} > 0$ per $\sqrt{k\pi} < \rho < \sqrt{(k+1)\pi}$ per $k = 0, 1, 2\dots$). Il primo ciclo limite è attrattivo e altrettanto lo sono gli altri del tipo $\rho = \sqrt{(2k+1)\pi}$; sono instabili i cicli limite $\rho = \sqrt{2k\pi}$. Il diagramma di fase è riportato in figura, ottenuto tramite il programma pplane.

Equazioni Differenziali Ordinarie	Primo appello	17 luglio 2007
Cognome	**Nome**	**Firma**
Proff. Arioli, Furioli, Rossi, Vegni	**Matricola**	**Sezione INF**

Esercizio 4. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) Trovare gli autovalori di A e gli autovettori relativi.
(2) Determinare la matrice e^A.
(3) Scrivere l'integrale generale del sistema autonomo $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$.
(4) Determinare la soluzione del sistema $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ che risolve il problema di Cauchy $\mathbf{y}(1) = (-1, 1, 2)^T$.

Soluzione.

(1) Gli autovalori di A sono $\{1, 3, 6\}$. L'autospazio relativo a $\lambda = 1$ è generato (ad esempio) da $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; l'autospazio relativo a $\lambda = 3$ è generato (ad esempio) da $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ mentre l'autospazio relativo a $\lambda = 6$ è generato (ad esempio) da $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(2) La matrice e^A si ottiene tramite la relazione $e^A = Se^\Lambda S^{-1}$ ove Λ è la matrice diagonale con gli autovalori sulla diagonale principale e S è la matrice invertibile ottenuta accostando (nell'ordine giusto) gli autovettori relativi agli autovalori di A. Si ha

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

quindi

$$e^\Lambda = \begin{bmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} e^A = Se^\Lambda S^{-1} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^3 & -2e^6 & 0 \\ e^3 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}e^3 + \frac{4}{3}e^6 & -\frac{2}{3}e^3 + \frac{2}{3}e^6 & 0 \\ \frac{2}{3}e^3 - \frac{2}{3}e^6 & \frac{4}{3}e^3 - \frac{1}{3}e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3) L'integrale generale del sistema è quindi

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= e^{At}\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}e^{3t} + \frac{4}{3}e^{6t} & -\frac{2}{3}e^{3t} + \frac{2}{3}e^{6t} & 0 \\ \frac{2}{3}e^{3t} - \frac{2}{3}e^{6t} & \frac{4}{3}e^{3t} - \frac{1}{3}e^{6t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_1\left(-\frac{1}{3}e^{3t} + \frac{4}{3}e^{6t}\right) + c_2\left(-\frac{2}{3}e^{3t} + \frac{2}{3}e^{6t}\right) \\ c_1\left(\frac{2}{3}e^{3t} - \frac{2}{3}e^{6t}\right) + c_2\left(\frac{4}{3}e^{3t} - \frac{1}{3}e^{6t}\right) \\ e^t c_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

o anche (data l'arbitrarietà del vettore di costanti $c_i \in \mathbb{R}$):

$$\mathbf{y}(t) = Se^{\Lambda t}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{6t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}c_1e^{3t} - 2c_2e^{6t} \\ c_1e^{3t} + c_2e^{6t} \\ e^t c_3 \end{bmatrix}.$$

(4) La soluzione problema di Cauchy è quindi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) = e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}e^{3(t-1)} + \frac{4}{3}e^{6(t-1)} & -\frac{2}{3}e^{3(t-1)} + \frac{2}{3}e^{6(t-1)} & 0 \\ \frac{2}{3}e^{3(t-1)} - \frac{2}{3}e^{6(t-1)} & \frac{4}{3}e^{3(t-1)} - \frac{1}{3}e^{6(t-1)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(t-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}e^{3t-3} - \frac{2}{3}e^{6t-6} \\ \frac{2}{3}e^{3t-3} + \frac{1}{3}e^{6t-6} \\ 2e^{t-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$