

## Capitolo 9. Trasformatori

---

### Esercizio 9.1

Un trasformatore monofase ha i seguenti dati di targa:

$$An = 30 \text{ kVA} \quad V_{1n} = 10000 \text{ V} \quad f = 50 \text{ Hz}$$

Della macchina sono noti:

$$\begin{array}{ll} \text{numero di spire dell'avvolgimento primario :} & N_1 = 2500 \\ \text{numero di spire dell'avvolgimento secondario :} & N_2 = 250 \\ \text{sezione del nucleo magnetico :} & S = 200 \text{ cm}^2 \end{array}$$

Determinare :

- 1) il valore massimo dell'induzione nel nucleo magnetico
- 2) la corrente secondaria nominale
- 3) la tensione con la quale si deve alimentare il primario del trasformatore perché lavori con il valore di induzione precedente, ma con frequenza della tensione di alimentazione di 60 Hz.

---

### Soluzione

- 1) *Trascurando le cadute di tensione dovute alla resistenza ed alla reattanza di dispersione dell'avvolgimento primario ed ammettendo la tensione  $V_{1n}$  sinusoidale, si ha:*

$$V_{1n} = E_1 = 4.44 \cdot f \cdot N_1 \cdot \varphi_{MAX}$$

*Da cui essendo  $\varphi_{MAX} = B_{MAX} \cdot S$  si può ricavare il valore massimo dell'induzione*

$$B_{MAX} = V_{1n}/(4.44 \cdot f \cdot N_1 \cdot S) = 0.9 \text{ Wb/m}^2$$

2) La corrente nominale secondaria vale:

$$I_{2n} = A_n/V_{20} = 30000/1000 = 30 \text{ A}$$

Dove  $V_{20} = V_{1n} / K_o$  essendo  $K_o$  il rapporto di trasformazione a vuoto coincidente, praticamente con il rapporto spire  $K_o = N_1/N_2 = 10$ .

3) La tensione di alimentazione a 60 Hz è data da:

$$V_{1'} = 4.44 \cdot f' \cdot N_1 \cdot B_{MAX} = 12000 \text{ V}$$

## Esercizio 9.2

Di un trasformatore monofase, alimentato alla tensione nominale primaria di 6000 V,  $f = 50 \text{ Hz}$ , si conoscono i seguenti dati:

rapporto di trasformazione a vuoto	$K_o = V_{1n}/V_{20} = 30$
resistenza dell'avvolgimento primario	$R_1 = 8 \Omega$
resistenza dell'avvolgimento secondario	$R_2 = 0.01 \Omega$
induttanza di dispersione dell'avvolgimento primario	$L_{d1} = 0.06 \text{ H}$
induttanza di dispersione dell'avvolgimento secondario	$L_{d2} = 0.13 \cdot 10^{-3} \text{ H}$

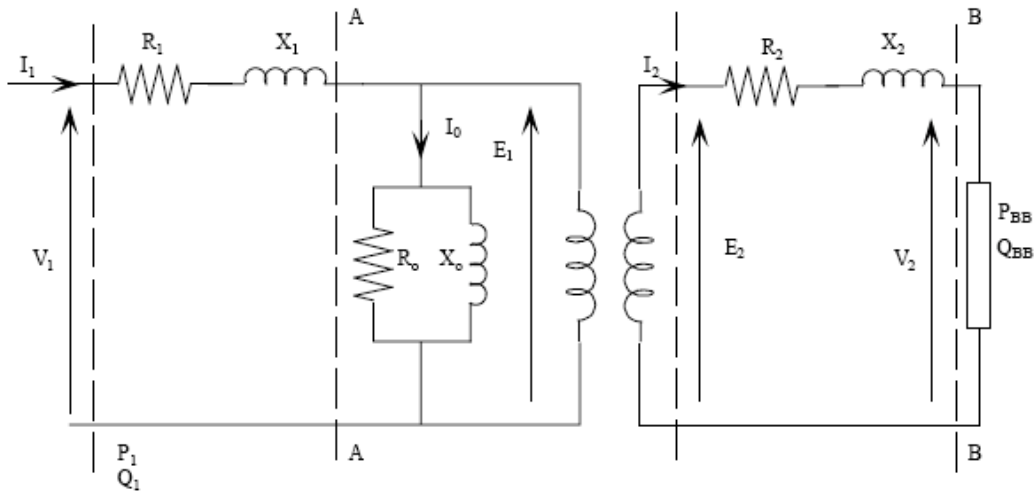
La corrente assorbita nel funzionamento a vuoto, alimentando la macchina con la tensione e frequenza nominali è  $I_o = 0.25 \text{ A}$  ed il fattore di potenza corrispondente  $\cos \varphi_o = 0.2$ .

Il trasformatore, alimentato alla tensione e frequenza nominali, alimenta al secondario un carico ohmico induttivo: in queste condizioni assorbe dalla rete una potenza  $P_1 = 24 \text{ kW}$  con  $\cos \varphi_1 = 0.8$  (lato primario).

Determinare:

- 1) tensione, corrente e fattore di potenza del carico
- 2) i valori della resistenza e della reattanza equivalenti primarie del trasformatore

## Soluzione



1) Si può risolvere il problema applicando il teorema di Boucherot alla rete equivalente di figura.

Il trasformatore assorbe la potenza attiva  $P1$  e reattiva  $Q1$ .

$$P1 = 24000 \text{ W (dal testo)}$$

$$Q1 = P1 \tan(\varphi1) = 18000 \text{ VAR}$$

$$A1 = \sqrt{P1^2 + Q1^2} = 30000 \text{ VAR}$$

La corrente  $I1$  assorbita dalla rete è quindi pari a:

$$I1 = A1/V1 = 5 \text{ A}$$

Le potenze attive e reattive dell'avvolgimento primario sono quindi pari a:

$$P_{cu1} = R1 \cdot I1^2 = 200 \text{ W}$$

$$Q_{x1} = X1 \cdot I1^2 = 471.24 \text{ VAR}$$

Le potenze attive e reattive in AA sono:

$$P_{AA} = P1 - P_{cu1} = 23800 \text{ W}$$

$$Q_{AA} = Q1 - Q_{x1} = 17528 \text{ VAR}$$

$$A_{AA} = \sqrt{P_{AA}^2 + Q_{AA}^2} = 29559 \text{ VA}$$

La f.e.m primaria  $E_1$  è quindi pari a  $E_1 = A_{AA}/I_1 = 5912 \text{ V}$  e quella secondaria  $E_2 = E_1/K_o = 197 \text{ V}$ .

Le potenze attive e reattive assorbite a vuoto sono pari a:

$$P_o = V_{1n} \cdot I_o \cdot \cos \varphi_o = 300 \text{ W}$$

$$Q_o = P_o \tan \varphi_o = 1470 \text{ VAR}$$

La resistenza  $R_o$  e la reattanza  $X_o$  sono quindi pari a  $R_o = V_{1n}^2 / P_o = 120 \text{ k}\Omega$  e  $X_o = V_{1n}^2 / Q_o = 24.5 \text{ k}\Omega$ .

Le potenze secondarie nelle condizioni di funzionamento specificato valgono quindi:

$$P_2 = P_{AA} - E_1^2 / R_o = 23509 \text{ W}$$

$$Q_2 = Q_{AA} - E_1^2 / X_o = 16102 \text{ VAR}$$

$$A_2 = 28494 \text{ VA}$$

Da cui si può ottenere la corrente secondaria:

$$I_2 = A_2/E_2 = 144.5 \text{ A}$$

Le potenze attiva e reattiva impegnate dall'avvolgimento secondario valgono:

$$P_{cu2} = R_2 \cdot I_2^2 = 209.9 \text{ W}$$

$$Q_{x2} = X_2 \cdot I_2^2 = 854 \text{ VAR}$$

Da cui la potenza attiva e reattiva del carico valgono:

$$P_{BB} = P_2 - P_{cu2} = 23299 \text{ W}$$

$$Q_{BB} = Q_2 - Q_{x2} = 15248 \text{ VAR}$$

L'angolo di sfasamento tra la tensione e la corrente del carico è:

$$\cos \varphi_{BB} = \cos(\text{atan}(Q_{BB}/P_{BB})) = 0.84$$

e la tensione ai capi del carico:

$$V_2 = P_{BB} / (I_2 \cdot \cos \varphi_{BB}) = 193 \text{ V}$$

2) Le reattanze e resistenze equivalenti primari si possono calcolare come:

$$R'_{eq} = R_1 + R_2 \cdot K_o^2 = 17 \, \Omega$$

$$X'_{eq} = X_1 + X_2 \cdot K_o^2 = 55.6 \, \Omega$$

---

### Esercizio 9.3

I dati di targa di un trasformatore monofase sono:

$$A_n = 40 \, \text{kVA} \quad V_{1n} = 12000 \, \text{V} \quad V_{20} = 260 \, \text{V} \quad f = 50 \, \text{Hz}$$

Sulla macchina si sono eseguite le seguenti prove:

a) Prova a vuoto alimentando la macchina a tensione e frequenza nominali:

$$P_o = 0.4 \, \% \quad \cos \varphi_o = 0.2$$

b) Prova di corto circuito eseguita a corrente e frequenza nominali:

$$P_c \% = 1.8 \, \% \quad V_{cc} = 4 \, \%$$

Determinare

Impedenze, resistenze, reattanze dei circuiti equivalenti semplificati riferiti agli avvolgimenti primario e secondario.

---

### Soluzione

*Si fa riferimento al circuito equivalente ridotto riportato in figura. Dalla prova di corto circuito si possono ricavare i parametri  $R_2$  e  $X_2$  e dalla prova a vuoto si possono ricavare i parametri  $R_o$  e  $X_o$ . Dalla prova di corto circuito si ricava:*

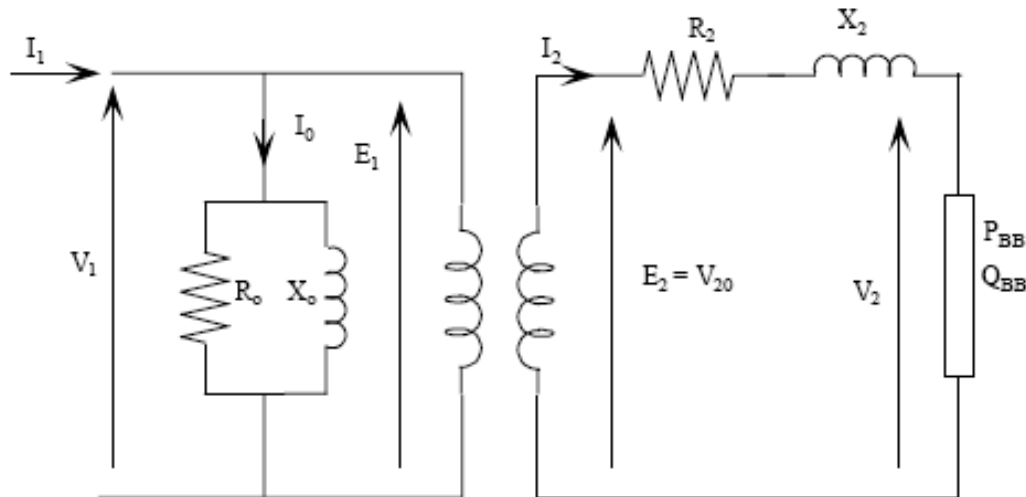
$$P_c = P_c \% \cdot A_n / 100 = 720 \, \text{W}$$

$$I_{2n} = A_n / V_{20} = 154 \, \text{A}$$

$$V_c = V_c \% \cdot V_{2n} / 100 = 10.4 \, \text{V}$$

$$\cos \varphi_{cc} = P_c / (V_c \cdot I_{2n}) = 0.45$$

*da cui:*



$$R_2 = P_c / I_2 n^2 = 3.04 \cdot 10^{-2} \, \Omega$$

$$X_2 = R_2 \tan \varphi_2 = 6 \cdot 10^{-2} \, \Omega$$

La resistenza  $R_o$  e  $X_o$  si ricavano dalla prova a vuoto:

$$P_o = P_o \% \cdot A_n / 100 = 160 \, W$$

$$Q_o = P_o \tan \varphi_o = 784 \, VAR$$

Da cui

$$R_{o1} = V_{1n}^2 / P_o = 9 \cdot 10^5 \, \Omega$$

$$X_{o1} = V_{1n}^2 / Q_o = 1.84 \cdot 10^5 \, \Omega$$

Il rapporto di trasformazione a vuoto è  $K_o = V_{1n} / V_{20} = 46.2$

Da cui

$$R_{o2} = R_{o1} / K_o^2 = 423 \, \Omega$$

$$X_{o2} = X_{o1} / K_o^2 = 86.4 \, \Omega$$

$$R_1 = R_2 \cdot K_o^2 = 64.8 \, \Omega$$

$$X_1 = X_2 \cdot K_o^2 = 128 \, \Omega$$

### Esercizio 9.4

Ad un trasformatore monofase, alimentato alla tensione e frequenza nominali, è allacciato un carico ohmico induttivo che, sotto la tensione  $V_2 = 380 \, V$ , assorbe  $I_2 = 40 \, A$  con fattore di potenza  $\cos \varphi_2 = 0.707$ .

Il rapporto di trasformazione a vuoto è  $K_0 = V_{1n}/V_{20} = 4$

Con una prova a vuoto, effettuata alla tensione e frequenza nominali ( $f_n = 50$  Hz) si è trovato che la corrente assorbita è  $I_0 = 0.3$  A ed il fattore di potenza  $\cos \varphi_0 = 0.15$

La prova di corto circuito, eseguita alla frequenza e corrente nominali alimentando la macchina dal lato bassa tensione, ha fornito i seguenti risultati:

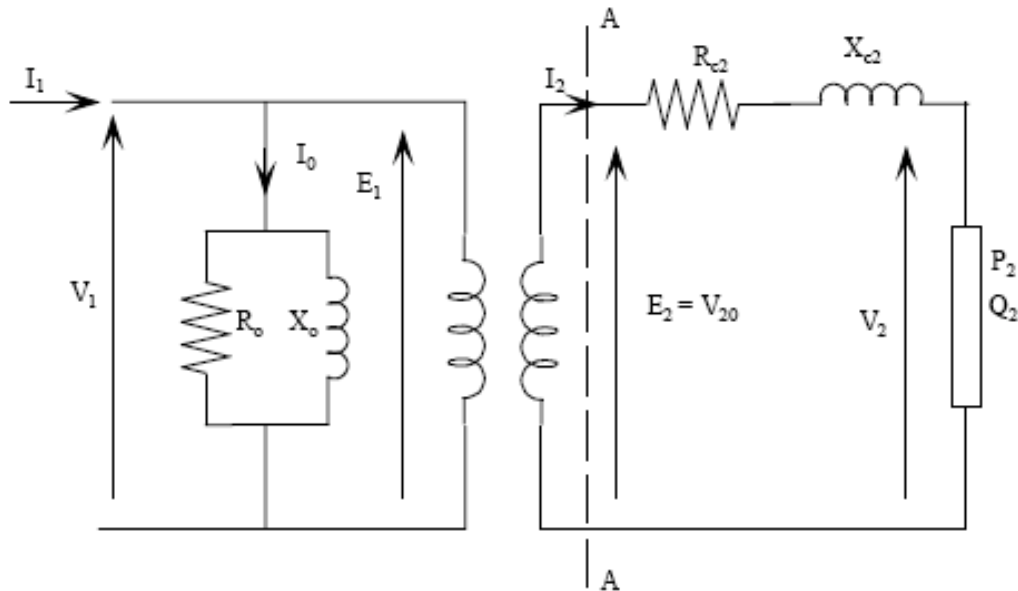
$$V_{c2} = 19 \text{ V} \quad I_{c2} = 50 \text{ A} \quad \cos \varphi_{cc} = 0.45$$

Determinare:

- 1) tensione, corrente e fattore di potenza primari nelle condizioni di carico specificate
- 2) la potenza e la tensione di corto circuito percentuali

---

### Soluzione



*La tensione, corrente e il fattore di potenza primari possono essere calcolati applicando il teorema di Boucherot.*

*La potenza attiva e reattiva assorbita dal carico sono pari a :*

$$P_2 = V_2 \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 = 10746 \text{ W}$$

$$Q_2 = P_2 \tan \varphi_2 = 10750 \text{ VAR}$$

*Le potenze attiva e reattiva impegnate dalla resistenza e reattanza equivalenti sono pari a:*

$$P_{cu} = R_{c2} \cdot I_2^2 = 274 \text{ W}$$

$$Q_{cu} = X_{c2} \cdot I_2^2 = 543 \text{ VAR}$$

*La potenza trasmessa al secondario (AA) è quindi pari a:*

$$P_{AA} = P_2 + P_{cu} = 11020 \text{ W}$$

$$Q_{AA} = Q_2 + Q_{cu} = 11292 \text{ VAR}$$

*Da cui  $\cos \varphi_{AA} = 0.695$ . La f.e.m. secondaria è pari a :*

$$E_2 = P_{AA} / (I_2 \cdot \cos \varphi_{AA}) = 394.5 \text{ V}$$

*Dal rapporto di trasformazione ricaviamo la tensione di alimentazione:*

$$V_{1n} = E_2 \cdot K_o = 1578 \text{ V}$$

*Le potenze attiva  $P_o$  e reattiva  $Q_o$  sono pari a:*

$$P_o = V_{1n} \cdot I_o \cdot \cos \varphi_o = 71 \text{ W}$$

$$Q_o = P_o \cdot \tan \varphi_o = 468 \text{ VAR}$$

*Il trasformatore assorbe quindi:*

$$P_1 = P_{AA} + P_o = 11091 \text{ W}$$

$$Q_1 = Q_{AA} + Q_o = 11760 \text{ VAR}$$

*Da cui (essendo  $\tan \varphi_1 = Q_1/P_1$ )  $\cos \varphi_1 = 0.815$*

*La corrente assorbita vale:*

$$I_1 = P_1 / V_{1n} \cdot \cos \varphi_1 = 10.25 \text{ A}$$



La potenza nominale del trasformatore è quindi  $An = V_{20} \cdot I_{2n} = 19725 \text{ VA}$ , da cui:

$$P_c = R_{c2} \cdot I_{c2}^2 = 427 \text{ W}$$

$$P_c\% = 100 \cdot (P_c / An) = 2.16 \%$$

$$V_c\% = 100 \cdot (V_{c2} / V_{20}) = 4.8\%$$

### Esercizio 9.5

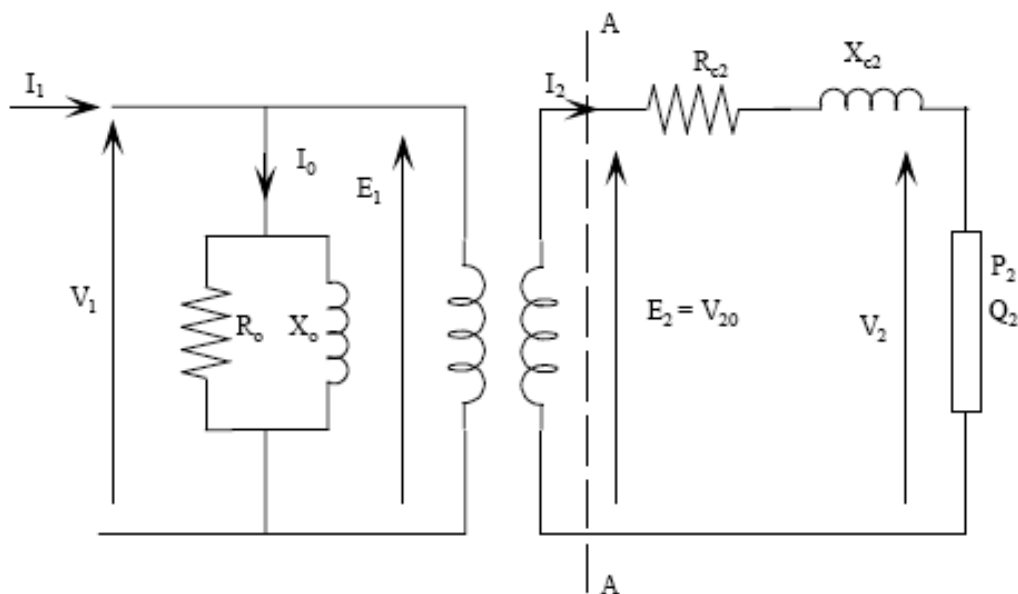
Ad un trasformatore monofase di potenza nominale  $An = 70 \text{ kVA}$  e rapporto di trasformazione  $K = V_{1n} / V_{20} = 500 \text{ V} / 10000 \text{ V}$ ,  $f_n = 50 \text{ Hz}$  è connesso un carico che assorbe a  $V_2 = 8000 \text{ V}$ , una corrente  $I_2 = 5 \text{ A}$  a  $\cos \varphi_2 = 0.8$ . La prova di corto circuito e la prova a vuoto hanno fornito i seguenti risultati:

Prova di corto circuito:  $P_{cc}\% = 5\%$ ,  $\cos \varphi_{cc} = 0.5$

Prova a vuoto:  $P_o\% = 0.4\%$ ,  $\cos \varphi_o = 0.2$

Si determinino la tensione di alimentazione  $V_1$  e la corrente  $I_1$  del trasformatore e il  $\cos \varphi_1$ .

### Soluzione



*Si procede utilizzando il metodo di Boucherot partendo dal carico e risalendo fino lato primario.*

*La potenza attiva e reattiva assorbite dal carico sono pari a*

$$P_2 = V_2 \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 = 320 \text{ kW}$$

$$Q_2 = P_2 \cdot \tan \varphi_2 = 24 \text{ kVar.}$$

*I parametri serie si calcolano a partire dai risultati della prova in corto circuito:*

$$P_{cc} = P_{cc\%} \cdot A_n / 100 = 3.5 \text{ kW},$$

*da cui si ricava*

$$R_c = P_{cc} / I_2^2 = 71.429 \, \Omega,$$

$$X_c = R_c \cdot \tan \varphi_c = 35.714 \, \Omega.$$

$$\text{dove } I_2 = A_n / V_{20} = 7 \text{ A},$$

*Chiamando sezione A la sezione che comprende l'impedenza serie  $R_c$ - $X_c$ , si ottiene*

$$P_{AA} = P_2 + R_c \cdot I_2^2 = 33.79 \text{ kW}$$

$$Q_{AA} = Q_2 + X_c \cdot I_2^2 = 24.89 \text{ kVAR.}$$

*La tensione al secondario è pari a*

$$V_b = (\sqrt{P_{AA}^2 + Q_{AA}^2}) / I_2 = 8.393 \text{ kV.}$$

*Chiamando  $K$  il rapporto di trasformazione  $(V_{1n} / V_{20}) = 0.05$ , si ha che la tensione  $V_b$  riportata al primario del trasformatore è pari a  $V_b' = V_b \cdot K = 419.658 \text{ V}$ .*

*E' ora necessario ricavare i parametri derivati:*

$$P_o = P_o\% \cdot A_n / 100 = 280 \text{ W},$$

$$Q_o = P_o \cdot \tan \varphi_0 = 1.372 \text{ kVAR},$$

*da cui si ricava*

$$X_o = V_{1n}^2 / Q_o = 182.254 \, \Omega$$

$$R_o = V_{1n}^2 / P_o = 892.85 \, \Omega.$$

*Dalla rete si assorbono quindi*

$$P_l = P_{AA} + V_b'^2 / R_o = 33.98 \, kW$$

$$Q_l = Q_{AA} + V_b'^2 / X_o = 25.86 \, kVAR$$

*E si ottiene*

$$V_a = V_b',$$

$$I_a = (\sqrt{P_l^2 + Q_l^2}) / V_b' = 101.756 \, A$$

$$\cos \varphi_a = P_a / (V_b' \cdot I_a) = 0.796$$

### **Esercizio 9.6**

Un trasformatore monofase di potenza nominale  $A_n = 240 \, kVA$  e rapporto di trasformazione  $K = V_{1n} / V_{20} = 2000 \, V / 5000 \, V$ ,  $f_n = 50 \, Hz$  è connesso un carico sul secondario che assorbe una corrente pari alla nominale e ha una tensione  $V_2 = 3000 \, V$  a  $\cos \varphi_2 = 0,8$  in ritardo (carico ohmico-induttivo). La prova di corto circuito e la prova a vuoto hanno fornito i seguenti risultati:

Prova di corto circuito:	$v_{cc}\% = 3 \, \%$ ,	$p_{cc}\% = 1,8 \, \%$
Prova a vuoto:	$I_o\% = 1\%$ ,	$\cos \varphi_o = 0,2$

Si determinino la tensione primaria  $V_1$ , la corrente  $I_1$  assorbita e il  $\cos \varphi_1$ .

### **Soluzione**

*Si procede utilizzando il metodo di Boucherot partendo dal carico e risalendo fino lato primario.*

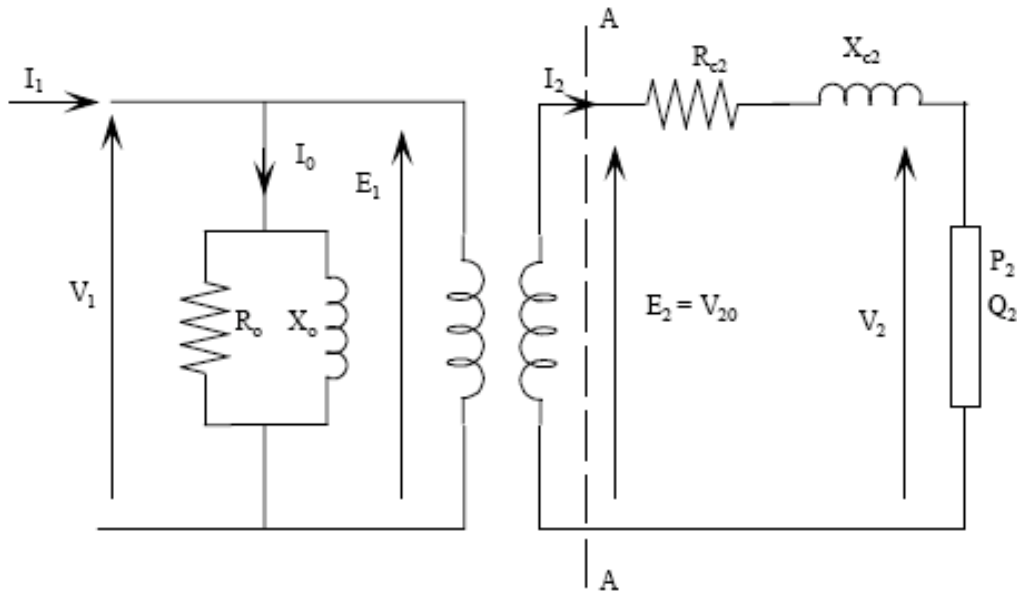
*La potenza attiva e reattiva assorbite dal carico sono pari a*

$$P_2 = V_2 \cdot I_{2n} \cdot \cos \varphi_2 = 11.52 \, kW$$

$$Q_2 = P_2 \cdot \tan \varphi_2 = 86.4 \, kVar$$

dove  $I_{2n} = A_n / V_{20} = 48 \, A$ .

Poiché il trasformatore lavora a corrente nominale non è necessario calcolare i parametri serie ma è sufficiente calcolare la potenza attiva e reattiva di corto circuito.



Dai risultati della prova in corto circuito:

$$P_{cc} = (p_{cc}\%/100) \cdot A_n = 4.32 \text{ kW},$$

$$Q_{cc} = P_{cc} \cdot \tan \varphi_c = 5.76 \text{ kVar},$$

dove per calcolare  $\tan \varphi_c$  si calcola  $V_{c2} = v_c\% \cdot V_{20}/100 = 150 \text{ V}$  e  $\cos \varphi_c = P_{cc}/(V_{c2} \cdot I_{2n}) = 0.6$ .

Chiamando sezione A la sezione che comprende l'impedenza serie  $R_c - X_c$ , si ottiene

$$P_A = P_2 + P_c = 119.5 \text{ kW}$$

$$Q_A = Q_2 + Q_c = 92.16 \text{ kVar}.$$

La tensione secondaria  $V_b$  è pari a  $V_b = (\sqrt{P_A^2 + Q_A^2})/I_{2n}$  e la tensione  $V_b$  riportata al primario è pari a  $V_b' = V_b \cdot K = 1.258 \text{ kV}$ .

E' ora necessario ricavare i parametri derivati:

$$I_0 = (I_0\%/100) \cdot I_{1n} = 1.2 \text{ A}$$

$$\text{dove } I_{1n} = A_n \cdot V_{1n} = 120 \text{ A},$$

$$P_0 = V_{1n} \cdot I_0 \cdot \cos \varphi_0 = 480 \text{ W e } Q_0 = P_0 \cdot \tan \varphi_0 = 2.352 \text{ kVAR},$$

da cui si ricava

$$X_o = V_{1n}^2 / Q_o = 1.701 \text{ k}\Omega \text{ e } R_o = V_{1n}^2 / P_o = 8.33 \text{ k}\Omega.$$

La potenza assorbita al primario è quindi:

$$P_1 = P_A + V_b'^2 / R_o = 119.7 \text{ kW e } Q_1 = Q_A + V_b'^2 / X_o = 93.09 \text{ kVAR}$$
$$V_1 = V_b',$$

$$I_1 = (\sqrt{P_1^2 + Q_1^2}) / V_b' = 120.572 \text{ A e } \cos \varphi_1 = P_1 / (V_b' \cdot I_1) = 0.789$$

---

### Esercizio 9.7

Un trasformatore monofase di potenza nominale  $A_n = 80 \text{ kVA}$  e rapporto di trasformazione  $K = V_{1n} / V_{20} = 2000 \text{ V} / 500 \text{ V}$ ,  $f_n = 50 \text{ Hz}$  alimentato a tensione e a frequenza nominali assorbe  $I_1 = 10 \text{ A}$  a  $\cos \varphi_1 = 0,5$  in ritardo. La prova di corto circuito e la prova a vuoto hanno fornito i seguenti risultati:

Prova di corto circuito:  $v_{cc}\% = 10 \%$ ,  $\cos \varphi_{cc} = 0,6$

Prova a vuoto:  $I_o\% = 10\%$ ,  $\cos \varphi_o = 0,2$

Si determinino la tensione  $V_2$ , la corrente  $I_2$  e il  $\cos \varphi_2$  del carico

---

### Soluzione

Si fa sempre riferimento al circuito equivalente ridotto del trasformatore riportato negli esercizi precedenti.

La potenza assorbita è:

$$A_1 = V_1 \cdot I_1 = 20 \text{ kVA},$$

$$P_1 = A_1 \cdot \cos(\varphi_1) = 10 \text{ kW},$$

$$Q_1 = A_1 \cdot \sin(\varphi_1) = 17.32 \text{ kVAR}.$$

Dalla prova a vuoto si ricava

$$I_o = (I_o\% / 100) \cdot I_{1n} = 4 \text{ A, dove } I_{1n} = A_n / V_{1n} = 40 \text{ A},$$

$$P_o = V_{1n} \cdot I_o \cdot \cos(\varphi_o) = 1.6 \text{ kW e}$$

$$Q_o = V_{1n} \cdot I_o \cdot \sin(\varphi_o) = 8 \text{ kVAR}.$$

*La potenza attiva e reattiva a valle del ramo derivato ( $R_o-X_o$ ) è pari a*

$$\begin{aligned}P_A &= P_1 - P_o = 8.4 \text{ kW}, \\Q_A &= Q_1 - Q_o = 9.48 \text{ kVAR}, \\A_A &= 12.67 \text{ kVA}.\end{aligned}$$

*Al secondario si avrà una tensione pari a  $V_{20}$  (visto che il primario è alimentato a tensione nominale), di conseguenza:*

$$I_2 = A_A / V_{20} = 25.34 \text{ A}.$$

*Dalla prova in cto cto si ricava:*

$$\begin{aligned}V_c &= (v_c\% / 100) \cdot V = 50 \text{ V}, \\P_c &= V_c \cdot I_{2n} \cdot \cos(\varphi_1) = 4.8 \text{ kW} \\Q_c &= V_c \cdot I_{2n} \cdot \sin(\varphi_1) = 6.4 \text{ kVAR}\end{aligned}$$

$$\text{dove } I_{2n} = A_n / V_{20} = 160 \text{ A}.$$

*Si ricava quindi*

$$\begin{aligned}R_c &= P_c / (I_{2n}^2) = 0.1875 \Omega, \\X_c &= Q_c / (I_{2n}^2) = 0.25 \Omega.\end{aligned}$$

*Lato carico si trova*

$$\begin{aligned}P_{\text{carico}} &= P_A - (R_c \cdot I_2^2) = 8279.6 \text{ W}, \\Q_{\text{carico}} &= Q_A - (X_c \cdot I_2^2) = 9319.5 \text{ VAR}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{da cui } \cos \varphi_{cr} &= \text{atan}(Q_{\text{carico}} / P_{\text{carico}}) = 0.66, \\V_{\text{carico}} &= \sqrt{P_{\text{carico}}^2 + Q_{\text{carico}}^2} / I_2 = 491.9 \text{ V e} \\I_{\text{carico}} &= I_2\end{aligned}$$

---

### **Esercizio 9.8**

Un trasformatore monofase di potenza nominale  $A_n = 240 \text{ kVA}$  e rapporto di trasformazione  $K = V_{1n} / V_{20} = 2000 \text{ V} / 5000 \text{ V}$ ,  $f_n = 50 \text{ Hz}$  è connesso un carico sul secondario che assorbe una corrente

pari alla nominale e ha una tensione  $V_2 = 3000 \text{ V}$  a  $\cos \varphi_2 = 0,5$  in ritardo (carico ohmico-induttivo). La prova di corto circuito e la prova a vuoto hanno fornito i seguenti risultati:

Prova di corto circuito:  $v_{cc}\% = 3 \%$ ,  $p_{cc}\% = 1,8$

Prova a vuoto:  $I_o\% = 1\%$ ,  $\cos \varphi_o = 0,2$

Si determinino la tensione primaria  $V_1$ , la corrente  $I_1$  assorbita e il  $\cos \varphi_1$ .

---

### Soluzione

*La potenza assorbita dal carico è pari a*

$$P_1 = V_2 \cdot I_{2n} \cdot \cos(\varphi_2) = 72 \text{ kW},$$

$$Q_1 = P_1 \cdot \tan(\varphi_2) = 124.7 \text{ kVAR},$$

$$\text{dove } I_{2n} = A_n / V_{2n} = 48 \text{ A}.$$

*Dalla prova a vuoto si ricava*

$$I_o = (I_o\% / 100) \cdot I_{1n} = 1.2 \text{ A},$$

$$P_o = V_{1n} \cdot I_o \cdot \cos(\varphi_o) = 480 \text{ W}$$

$$Q_o = V_{1n} \cdot I_o \cdot \sin(\varphi_o) = 2.352 \text{ kVAR}$$

$$\text{dove } I_{1n} = A_n / V_{1n} = 120 \text{ A}.$$

*La resistenza  $R_o$  è quindi pari a*

$$R_o = V_{1n}^2 / P_o = 8.33 \text{ k}\Omega$$

*e la reattanza  $X_o$  è data da  $X_o = V_{1n}^2 / Q_o = 1.7 \text{ k}\Omega$ .*

*La potenza assorbita dall'impedenza serie è pari a*

$$P_c = (p_{cc}\% / 100) \cdot A_n = 4.32 \text{ kW}$$

$$Q_c = P_c \cdot \tan(\varphi_c) = 5.76 \text{ kVAR},$$

$$\text{dove } V_{c1} = (v_{cc}\% / 100) \cdot V_{1n} = 60 \text{ V e } \cos(\varphi_c) = P_c / (V_{c1} \cdot I_{1n}) = 0.6.$$

La potenza attiva e reattiva a valle del ramo derivato sono pari a

$$P_{AA} = P_2 + P_c = 76.32 \text{ kW}$$

$$Q_{AA} = Q_2 + Q_c = 130.5 \text{ kVAR.}$$

La tensione  $V_{AA}$  e' pari a  $V_{AA} = \sqrt{P_{AA}^2 + Q_{AA}^2} / I_{ln} = 1.26 \text{ kV.}$

Lato rete si trova

$$P_{rete} = P_A + (V_{AA}^2 / R_o) = 76.51 \text{ kW,}$$

$$Q_{rete} = Q_A + (V_{AA}^2 / X_o) = 131.4 \text{ kVAR.}$$

Si ricava quindi  $\cos \varphi_{rete} = \tan^{-1} (Q_{rete} / P_{rete}) = 0.503,$

$$I_{rete} = 120.72 \text{ A}$$

$$V_{rete} = V_{AA}$$

---

### Esercizio 9.9

Due trasformatori monofasi A e B sono collegati in parallelo ed alimentano un carico che assorbe una corrente di  $I_2 = 150 \text{ A}$  con fattore di potenza  $\cos \varphi_2 = 0.8$  in ritardo. Dei due trasformatori alimentati alla tensione nominale di  $1000 \text{ V}$  e alla frequenza nominale  $f = 50 \text{ Hz}$  si conoscono i seguenti dati:

Trasformatore A:

$$A_n = 30 \text{ kVA} \quad K_0 = 4 \quad P_{fe} = \frac{1}{2} P_c$$

$$V_c \% = 5 \% \quad \cos \varphi_c = 0.5$$

Trasformatore B:

$$A_n = 15 \text{ kVA} \quad K_0 = 4 \quad P_{fe} = \frac{2}{3} P_c$$

$$V_c \% = 5 \% \quad \cos \varphi_c = 0.5$$

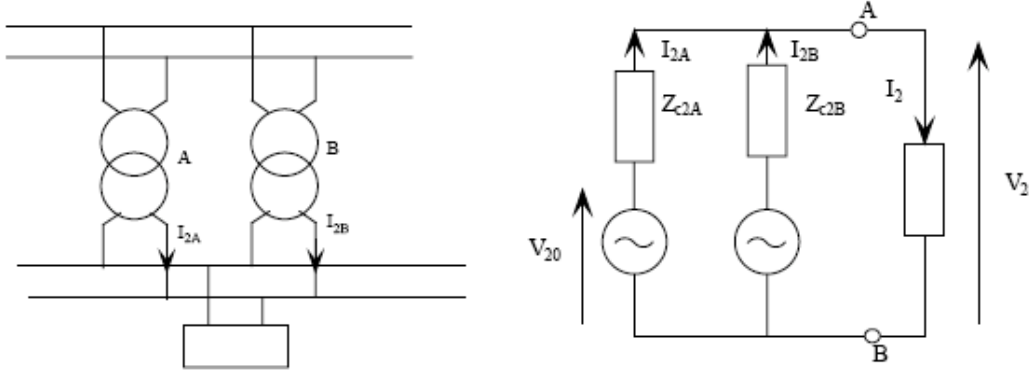
Determinare per le condizioni di carico considerate:

- 1) la tensione  $V_2$  ai capi del carico
- 2) il carico percentuale di ciascun trasformatore
- 3) il rendimento di ciascun trasformatore e quello complessivo
- 4) la massima corrente che possono erogare i due trasformatori senza sovraccaricarsi



---

## Soluzione



*I due trasformatori avendo lo stesso rapporto di trasformazione a vuoto  $K_o$  hanno identica tensione a vuoto che vale:*

$$V_{20} = V_{1n} / K_o = 250 \text{ V}$$

*La corrente nominale di ciascun trasformatore vale:*

$$I_{2nA} = A_{nA} / V_{20A} = 120 \text{ A}$$

$$I_{2nB} = A_{nB} / V_{20B} = 60 \text{ A}$$

*Si possono quindi determinare le resistenze e reattanze equivalenti secondarie:*

$$V_{c2A} = V_c\% \cdot V_{20} / 100 = 12.5 \text{ V}$$

$$V_{c2B} = V_c\% \cdot V_{20} / 100 = 12.5 \text{ V}$$

*Da cui:*

$$Z_{c2A} = V_{c2A} / I_{2nA} = 0.104 \text{ } \Omega$$

$$Z_{c2B} = V_{c2B} / I_{2nB} = 0.208 \text{ } \Omega$$

$$R_{c2A} = Z_{c2A} \cdot \cos \varphi_{cA} = 5.2 \cdot 10^{-2} \text{ } \Omega$$

$$X_{c2A} = Z_{c2A} \cdot \sin \varphi_{cA} = 9 \cdot 10^{-2} \text{ } \Omega$$

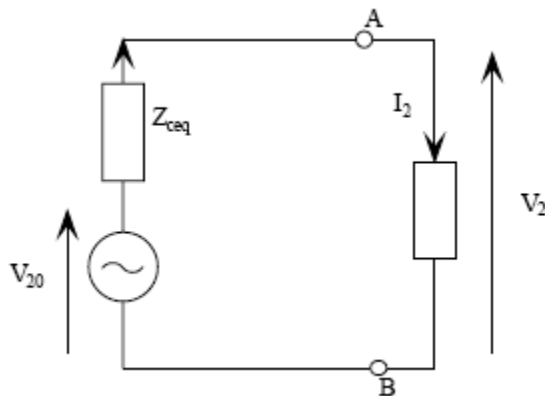
$$R_{c2B} = Z_{c2B} \cdot \cos \varphi_{cB} = 10.4 \cdot 10^{-2} \text{ } \Omega$$

$$X_{c2B} = Z_{c2B} \cdot \sin \varphi_{cB} = 18 \cdot 10^{-2} \text{ } \Omega$$

Considerando il circuito equivalente secondario e applicando Thevenin ai nodi AB

$$Z_{eq} = Z_{cA} // Z_{cB} = 3.46 \cdot 10^{-2} + j 6 \cdot 10^{-2}$$

$$E_{eq} = V_{20}$$



Si può ricavare la tensione  $V_2$  utilizzando la formula per la caduta di tensione approssimata:

$$\Delta V = R_{c2} \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 + X_{c2} \cdot I_2 \cdot \sin \varphi_2 = 9.55 \text{ V}$$

da cui

$$V_2 = V_{20} - \Delta V = 240.45 \text{ V}$$

Applicando le LKT al circuito equivalente secondario si ha:

$$V_2 = V_{20} - Z_{c2A} \cdot I_{2A}$$

$$V_2 = V_{20} - Z_{c2B} \cdot I_{2B}$$

E considerando l'equivalente di Thevenin

$$V_2 = V_{20} - Z_{ceq2} \cdot I_2$$

Dalle tre equazioni precedenti si ricava la seguente uguaglianza:

$$Z_{ceq2} \cdot I_2 = Z_{c2A} \cdot I_{2A} = Z_{c2B} \cdot I_{2B}$$

*Ed è possibile ricavare le due correnti  $I_{2A}$  e  $I_{2B}$*

$$I_{2A} = Z_{ceq} \cdot I_2 / Z_{c2A} = 100 \text{ A}$$

$$I_{2B} = Z_{ceq} \cdot I_2 / Z_{c2B} = 50 \text{ A}$$

*Il carico percentuale di ogni trasformatore si calcola come  $\text{carico}\% = 100 \cdot I_2 / I_{2n}$  da cui*

$$\text{Carico}\% A = 83.4 \%$$

$$\text{Carico}\% B = 83.4 \%$$

*Le potenze erogate da ciascun trasformatore valgono*

$$P_{2A} = V_2 \cdot I_{2A} \cdot \cos \varphi_{2A} = 19250 \text{ W}$$

$$P_{2B} = V_2 \cdot I_{2B} \cdot \cos \varphi_{2B} = 9625 \text{ W}$$

*Le perdite nel rame sono:*

$$P_{cuA} = R_{c2A} \cdot I_{2A}^2 = 520 \text{ W}$$

$$P_{cuB} = R_{c2B} \cdot I_{2B}^2 = 260 \text{ W}$$

*Le perdite nel ferro, dal legame espresso nei dati:*

$$P_{feA} = 375 \text{ W}$$

$$P_{feB} = 250 \text{ W}$$

*Da cui il rendimento:*

$$\eta_A = P_{2A} / (P_{2A} + P_{cuA} + P_{feA}) = 0.965$$

$$\eta_B = P_{2B} / (P_{2B} + P_{cuB} + P_{feB}) = 0.96$$

*Avendo le due macchine il medesimo carico percentuale possono lavorare contemporaneamente a pieno carico e perciò la massima corrente erogabile è pari alla somma delle correnti nominali:*

$$I_{MAX} = I_{2nA} + I_{2nB} = 180 \text{ A}$$

---

### Esercizio 9.10

I dati di targa di un trasformatore trifase sono:

$$An = 50 \text{ kVA} \quad Ko = V_{1n}/V_{20} = 30000/500 \quad f = 50 \text{ Hz}$$

La prova di corto circuito, eseguita a corrente e frequenza nominali, ha fornito i seguenti valori:

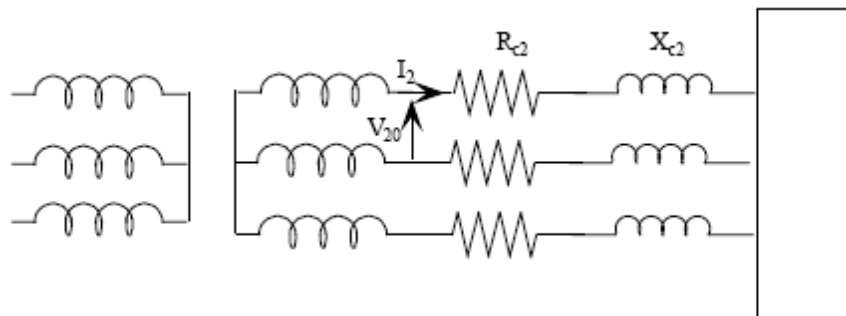
$$V_c \% = 5 \% \quad \cos \varphi_c = 0.5$$

Determinare la resistenza, reattanza e impedenza di corto circuito equivalenti secondarie

---

### Soluzione

*Non essendo specificato altrimenti si possono ipotizzare i collegamenti primari e secondari a stella.*



*La corrente nominale vale*

$$I_{2n} = An/(\sqrt{3} V_{20}) = 57.8 \text{ A}$$

*La tensione di corto circuito secondaria concatenata vale*

$$V_{c2} = V_c \% \cdot V_{20} / 100 = 25 \text{ V}$$

*Da cui:*

$$Z_{c2} = V_{c2} / (\sqrt{3} I_{2n}) = 0.25 \Omega$$

$$R_{c2} = Z_{c2} \cos \varphi_c = 0.125 \Omega$$

$$X_{c2} = Z_{c2} \sin \varphi_c = 0.216 \Omega$$

---

### Esercizio 9.11

I dati di targa di un trasformatore trifase sono:

$$\begin{array}{lll} A_n = 5 \text{ kVA} & V_{1n} = 260 \text{ V} & f = 50 \text{ Hz} \\ K_s = N_1/N_2 = 17.3 & \text{collegamento } \Delta/Y & \end{array}$$

La prova di corto circuito, eseguita alla corrente e frequenza nominali, ha fornito i seguenti risultati:

$$V_{c1} = 20 \text{ V} \quad \cos \varphi_c = 0.5$$

Determinare:

- 1) La resistenza ( $R_{c2}$ ), la reattanza ( $X_{c2}$ ) e l'impedenza di corto circuito secondarie.
- 2) Sapendo che  $R_2 = \frac{1}{2} R_{c2}$  e che  $X_2 = \frac{3}{5} X_{c2}$  determinare la resistenza e reattanza dell'avvolgimento primario

---

### Soluzione

*Sostituiamo al trasformatore con collegamento D/Y un trasformatore equivalente con collegamento Y/Y. I due trasformatori devono avere il medesimo rapporto di trasformazione  $K_o$ . Per il trasformatore D/Y si ha:*

$$K_o = K_s / \sqrt{3} = 10 \text{ che coinciderà con il rapporto spire del trasformatore Y/Y}$$

*La tensione di corto circuito secondaria vale:*

$$V_{c2} = V_{c1} / K_o = 2 \text{ V}$$

*La corrente nominale è*

$$I_{2n} = A_n / (\sqrt{3} V_{20}) = 111 \text{ A} \text{ dove } V_{20} = V_{1n} / K_o = 26 \text{ V}$$

*I parametri di corto circuito risultano:*

$$Z_{c2} = V_{c2} / (\sqrt{3} I_{2n}) = 1.04 \cdot 10^{-2} \Omega$$

$$R_{c2} = Z_{c2} \cdot \cos \varphi_c = 0.52 \cdot 10^{-2} \, \Omega$$

$$X_{c2} = Z_{c2} \cdot \sin \varphi_c = 0.89 \cdot 10^{-2} \, \Omega$$

*Dai dati si ricava*

$$R_2 = 0.26 \cdot 10^{-2} \, \Omega$$

$$X_2 = 0.54 \cdot 10^{-2} \, \Omega$$

*Noto che:*

$$R_{c2} = R_2 + R_{ly}/K_o^2$$

$$X_{c2} = X_2 + X_{ly}/K_o^2$$

*Si ricava*

$$R_{ly} = 0.26 \, \Omega$$

$$X_{ly} = 0.355 \, \Omega$$

*Per trovare la resistenza e la reattanza di ogni avvolgimento primario collegato a triangolo basta moltiplicare per 3 i precedenti risultati*

$$R_1 = 3 \cdot R_{ly} = 0.78 \, \Omega$$

$$X_1 = 3 \cdot X_{ly} = 1.065 \, \Omega$$

---

### **Esercizio 9.12**

Ad un trasformatore trifase, alimentato alla tensione nominale e alla frequenza di 50 Hz, è allacciato un carico trifase equilibrato ohmico induttivo che alla tensione  $V_2 = 960 \, \text{V}$  assorbe la corrente  $I_2 = 100 \, \text{A}$  con un fattore di potenza  $\cos \varphi_2 = 0.8$ .

Il rapporto di trasformazione a vuoto è  $K_o = V_{1n}/V_{20} = 15$

Con una prova a vuoto effettuata alla tensione nominale e alla frequenza di 50 Hz, si è trovato che la corrente assorbita è  $I_o = 0.4 \, \text{A}$  ed il fattore di potenza a vuoto è  $\cos \varphi_o = 0.15$ . La prova di corto circuito eseguita a corrente nominale alimentando la macchina dal lato basso tensione, ha fornito i seguenti dati:

$$V_{c2} = 46 \, \text{V} \qquad \cos \varphi_c = 0.45 \qquad I_{c2} = 115.8 \, \text{A}$$

Determinare :

- 1) tensione, corrente, fattore di potenza primari nelle condizioni di carico riportate
- 2) la potenza e la tensione di corto circuito percentuali

---

### **Soluzione**

*La potenza attiva e reattiva del carico sono :*

$$P_2 = \sqrt{3} \cdot V_2 \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 = 132840 \text{ W}$$

$$Q_2 = P_2 \tan \varphi_2 = 99650 \text{ VAR}$$

*La potenza attiva e reattiva impegnate dagli avvolgimenti sono:*

$$P_c = 3 \cdot R_{c2} \cdot I_2^2 = 3090 \text{ W}$$

$$Q_c = 3 \cdot X_{c2} \cdot I_2^2 = 6150 \text{ VAR}$$

*La potenza attiva e reattiva trasmessa al secondario del circuito equivalente sono :*

$$P' = P_2 + P_c = 135930 \text{ W}$$

$$Q' = Q_2 + Q_c = 105800 \text{ VAR}$$

*Da cui*

$$\cos \varphi' = 0.789$$

*La tensione secondaria a vuoto vale :*

$$V_{20} = P' / (\sqrt{3} \cdot I_2 \cdot \cos \varphi') = 1000 \text{ V}$$

*Dal rapporto di trasformazione è possibile ricavare la tensione di alimentazione  $V_{1n}$*

$$V_{1n} = V_{20} \cdot K_o = 15000 \text{ V}$$

*La potenza attiva  $P_o$  e reattiva  $Q_o$  a vuoto sono:*

$$P_o = \sqrt{3} V_{1n} \cdot I_o \cdot \cos \varphi_o = 1560 \text{ W}$$

$$Q_0 = P_0 \tan \varphi_0 = 10230 \text{ VAR}$$

*La potenza assorbita del trasformatore vale*

$$P_1 = P' + P_0 = 137490 \text{ W}$$

$$Q_1 = Q' + Q_0 = 116030 \text{ VAR}$$

$$\cos \varphi_1 = 0.765$$

*La corrente assorbita dal trasformatore vale*

$$I_1 = P_1 / (\sqrt{3} \cdot V_{1n} \cdot \cos \varphi_1) = 6.91 \text{ A}$$

*La potenza nominale del trasformatore vale*

$$A_n = \sqrt{3} V_{20} \cdot I_{2n} = 200 \text{ kVA}$$

*Da cui*

$$P_c \% = 100 \cdot P_c / A_n = 2.07 \%$$

$$\text{Dove } P_c = \sqrt{3} V_{c2} \cdot I_{c2} \cdot \cos \varphi_c = 4140 \text{ W}$$

$$V_c \% = 100 \cdot V_{c2} / V_{20} = 4.6\%$$

---

### **Esercizio 9.13**

Due trasformatori A e B sono collegati in parallelo ed alimentano un carico che assorbe una corrente  $I_2 = 300 \text{ A}$  con fattore di potenza  $\cos \varphi_2 = 0.8$  in ritardo. Dei due trasformatori alimentati alla tensione nominale di  $10000 \text{ V}$  e alla frequenza nominale si conoscono i seguenti dati:

Trasformatore A:

$A_n = 200 \text{ kVA}$	$I_0 \% = 2 \%$	$P_{fe} = 1/5 P_c$
$K_0 = 20$	$V_c \% = 4 \%$	$P_c \% = 1.25 \%$

Trasformatore B:

$A_n = 60 \text{ kVA}$	$I_0 \% = 2.4 \%$	$P_{fe} = 1/4 P_c$
$K_0 = 20$	$V_c \% = 4 \%$	$P_c = 1.25 \%$



Determinare:

- 1) la tensione  $V_2$  ai capi del carico
- 2) il carico percentuale di ciascun trasformatore
- 3) il rendimento di ciascun trasformatore e quello complessivo

### Soluzione

*I due trasformatori avendo lo stesso rapporto di trasformazione a vuoto hanno identica tensione a vuoto  $V_{20}$  che vale*

$$V_{20} = V_{1n}/K_o = 500 \text{ V}$$

*La corrente nominale di ciascun trasformatore può essere trovata come  $I_{2n} = An/(\sqrt{3} V_{20})$  da cui:*

$$I_{2nA} = 231 \text{ A}$$

$$I_{2nB} = 69.4 \text{ A}$$

*Nell'ipotesi di considerare i trasformatori collegati a stella si possono determinare la resistenza e la reattanza di corto circuito.*

$$\cos \varphi_{cc} = \cos \varphi_{ccA} = \cos \varphi_{ccB} = P_{cc}\% / V_{cc}\% = 0.313$$

$$P_c = P_{cc}\% \cdot An / 100 \rightarrow P_{cA} = 2.5 \text{ kW}$$

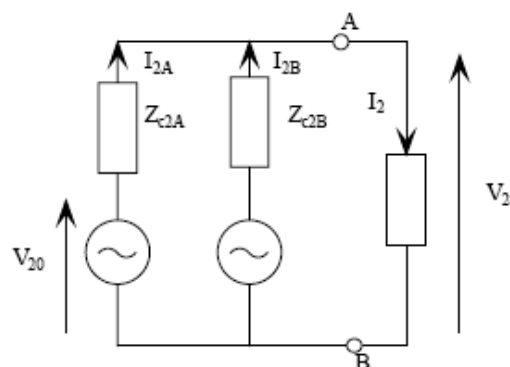
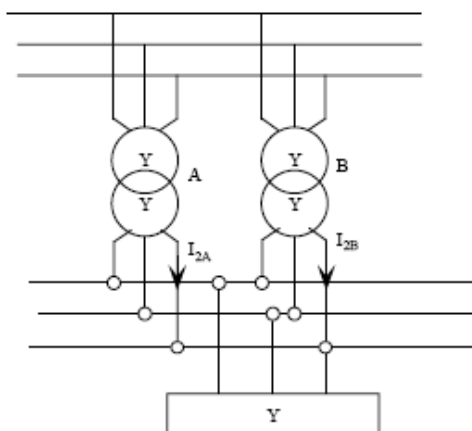
$$P_{cB} = 0.75 \text{ kW}$$

$$R_{c2} = P_c / (3 \cdot I_{2n}^2) \rightarrow R_{c2A} = 1.56 \cdot 10^{-2} \Omega$$

$$R_{c2B} = 1.56 \cdot 10^{-2} \Omega$$

$$X_{c2} = R_{c2} \cdot \tan \varphi_{cc} \rightarrow X_{c2A} = 4.73 \cdot 10^{-2} \Omega$$

$$X_{c2B} = 15.8 \cdot 10^{-2} \Omega$$



*Poiché il sistema è simmetrico ed equilibrato si può passare al monofase equivalente e poi risolvere con Thevenin.*

$$Z_{c2eq} = Z_{c2A} // Z_{c2B} = 1.2 \cdot 10^{-2} + j 3.65 \cdot 10^{-2} \Omega$$

*Utilizzando la caduta di tensione approssimata si ottiene*

$$DV = R_{c2eq} \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 + X_{c2eq} \cdot I_2 \cdot \sin \varphi_2 = 16.35 \text{ V}$$

*Da cui :*

$$V_2 = V_{20} - DV = 483.65 \text{ V}$$

*Applicando le LKT al circuito equivalente secondario si ha:*

$$V_2 = V_{20} - Z_{c2A} \cdot I_{2A}$$

$$V_2 = V_{20} - Z_{c2B} \cdot I_{2B}$$

*E considerando l'equivalente di Thevenin*

$$V_2 = V_{20} - Z_{ceq2} \cdot I_2$$

*Dalle tre equazioni precedenti si ricava la seguente uguaglianza:*

$$Z_{ceq2} \cdot I_2 = Z_{c2A} \cdot I_{2A} = Z_{c2B} \cdot I_{2B}$$

*Ed è possibile ricavare le due correnti  $I_{2A}$  e  $I_{2B}$*

$$I_{2A} = Z_{ceq2} \cdot I_2 / Z_{c2A} = 231 \text{ A}$$

$$I_{2B} = Z_{ceq2} \cdot I_2 / Z_{c2B} = 69 \text{ A}$$

*Il carico percentuale di ogni trasformatore si calcola come carico% =  $100 \cdot I_2 / I_{2n}$  da cui*

$$\text{Carico\% A} = 100 \%$$

$$\text{Carico\% B} = 100 \%$$

*Le potenze erogate da ciascun trasformatore valgono*

$$P_{2A} = V_2 \cdot I_{2A} \cdot \cos \varphi_{2A} = 154.5 \text{ kW}$$

$$P_{2B} = V_2 \cdot I_{2B} \cdot \cos \varphi_{2B} = 46.2 \text{ kW}$$

*Le perdite nel rame sono:*

$$P_{cuA} = 2.5 \text{ kW}$$

$$P_{cuB} = 0.75 \text{ kW}$$

*Le perdite nel ferro, dal legame espresso nei dati:*

$$P_{feA} = 0.5 \text{ kW}$$

$$P_{feB} = 0.19 \text{ kW}$$

*Da cui il rendimento:*

$$\eta_A = P_{2A} / (P_{2A} + P_{cuA} + P_{feA}) = 0.982$$

$$\eta_B = P_{2B} / (P_{2B} + P_{cuB} + P_{feB}) = 0.98$$

*la potenza assorbita dal carico vale  $P_2 = P_{2A} + P_{2B} = 200.7 \text{ kW}$  e il rendimento complessivo*

$$\eta_A = P_2 / (P_2 + P_{cuA} + P_{feA} + P_{cuB} + P_{feB}) = 0.98$$

