PRIMA ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 1

Siano $A = \{2,3,4\}$, $B = \{6,7,9\}$ e sia $\tau \subseteq A \times B$ la relazione così definita:

$\forall\, a \in A, b \in B \qquad a\,\tau\, b \quad :\Leftrightarrow \quad b - a \in P,$

dove P è l'insieme dei numeri primi.

1. Rappresentare la relazione τ tramite la sua matrice di incidenza e il suo grafo di incidenza.
2. Sia $\rho \subseteq A \times B$ un'altra relazione definita nel seguente modo:

   $\forall\, a \in A, b \in B \qquad a\,\rho\, b \quad :\Leftrightarrow \quad mcd(a,b) = 1$

   dove *mcd(a,b)* è il massimo comun divisore di *a* e *b*.

   Determinare le matrici di incidenza di $\tau \cap \rho$ e di $\tau \cup \rho$.
3. Siano $C = \{12,18\}$ e $\sigma \subseteq B \times C$ la relazione così definita:

   $\forall\, b \in B, c \in C \qquad b\,\sigma\, c \quad :\Leftrightarrow \quad b \mid c,$

   dove "|" significa "divide".

   Determinare la relazione $\tau \cdot \sigma$, il suo grafo di incidenza e la sua matrice di incidenza.
4. Determinare τ^{-1} e $\tau \cdot \tau^{-1}$.

ESERCIZIO 2

Siano $X = \{a,b,c,d\}$ e $\rho \subseteq X \times X$ la relazione definita dalla seguente matrice di incidenza:

$$M_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Di che proprietà gode ρ?
2. Costruire la chiusura riflessiva e la chiusura simmetrica di ρ.
3. Costruire la chiusura di equivalenza di ρ e determinare le classi d'equivalenza.

ESERCIZIO 3

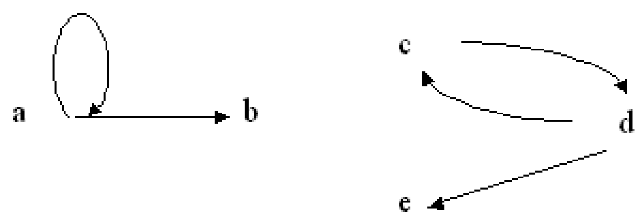
Siano $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ e $\rho \subseteq X \times X$ così definita:

$\rho = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,d),(c,d),(d,e),(e,f)\}$

1. Determinare la chiusura transitiva di ρ.
2. Costruire la chiusura simmetrica della chiusura riflessiva e transitiva di ρ.

ESERCIZIO 4

Siano $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ e $\rho \subseteq X \times X$ una relazione rappresentata dal seguente grafo di incidenza:



1. Di che proprietà gode ρ ?
2. Costruire la relazione d'equivalenza $\overline{\rho}$ generata da ρ.
3. Determinare l'insieme quoziente $X / \overline{\rho}$.

ESERCIZIO 6

Sia $R[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x e sia $\rho \subseteq R[x] \times R[x]$ la relazione definita nel seguente modo:

$\forall\, f, g \in R[x] \qquad f \;\rho\; g \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, b \in R \quad f(b) = g(b) = 0$

1. Di che proprietà gode ρ ?
2. Sia $\overline{\rho}$ la chiusura di equivalenza di ρ. Dimostrare che due polinomi che ammettono una radice reale sono sempre associati rispetto a $\overline{\rho}$.