

SECONDA ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 1

Denotati con \mathbf{C} , \mathbf{Z} e \mathbf{N} rispettivamente l'insieme dei numeri complessi, l'insieme dei numeri interi e l'insieme dei numeri naturali, si consideri in \mathbf{C} il sottoinsieme degli *interi di Gauss*:

$$\mathbf{Z}[i] = \{ a + i b \mid a, b \in \mathbf{Z} \}$$

e sia ρ la relazione su $\mathbf{Z}[i]$ definita nel seguente modo:

$$\forall a, b, c, d \in \mathbf{Z} \quad (a + i b, c + i d) \in \rho : \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbf{N} \quad c = ma, d = nb.$$

Provare che ρ è una relazione d'ordine e dire se è una relazione d'ordine totale.

ESERCIZIO 2

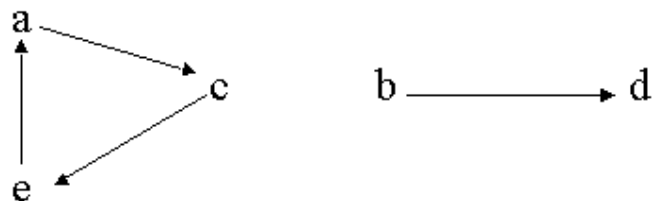
Sia $X = \{a, b, c, d, e\}$ e si consideri su X la relazione binaria R avente la seguente matrice di incidenza:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Provare che esiste la minima relazione d'ordine \leq contenente R .
2. Determinare elementi minimali e massimali di X rispetto alla relazione \leq e dire se sono minimi o massimi.
3. Dimostrare che (X, \leq) non è un reticolo.
4. Determinare una relazione ρ contenente \leq tale che (X, ρ) sia un reticolo.
5. Dire se la chiusura simmetrica di \leq è una relazione d'equivalenza.
6. Provare che R è una funzione da X in X .
7. Dire se R ammette inversa destra e/o sinistra.
8. Verificare che \leq non è una funzione da X in X .

ESERCIZIO 3

Siano $X = \{a, b, c, d, e\}$ e $\rho \subseteq X \times X$ la relazione definita dal seguente grafo di incidenza:



1. Dimostrare che la chiusura riflessiva e transitiva $\bar{\rho}$ di ρ non è una relazione d'ordine e costruire una relazione d'ordine \leq contenuta in $\bar{\rho}$ e in nessun'altra relazione d'ordine contenuta in $\bar{\rho}$.
2. Trovare gli elementi minimali e massimali di X rispetto a \leq .
3. Verificare che X non è un reticolo rispetto a \leq e determinare una relazione T contenente \leq tale che (X, T) sia un reticolo.
4. ρ è una funzione?

ESERCIZIO 4

Siano $X = \{a, b, c\}$ e R la relazione su X avente la seguente matrice di incidenza:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dimostrare che R non è una funzione e calcolare il numero di funzioni contenute in R . Quante di queste sono iniettive?