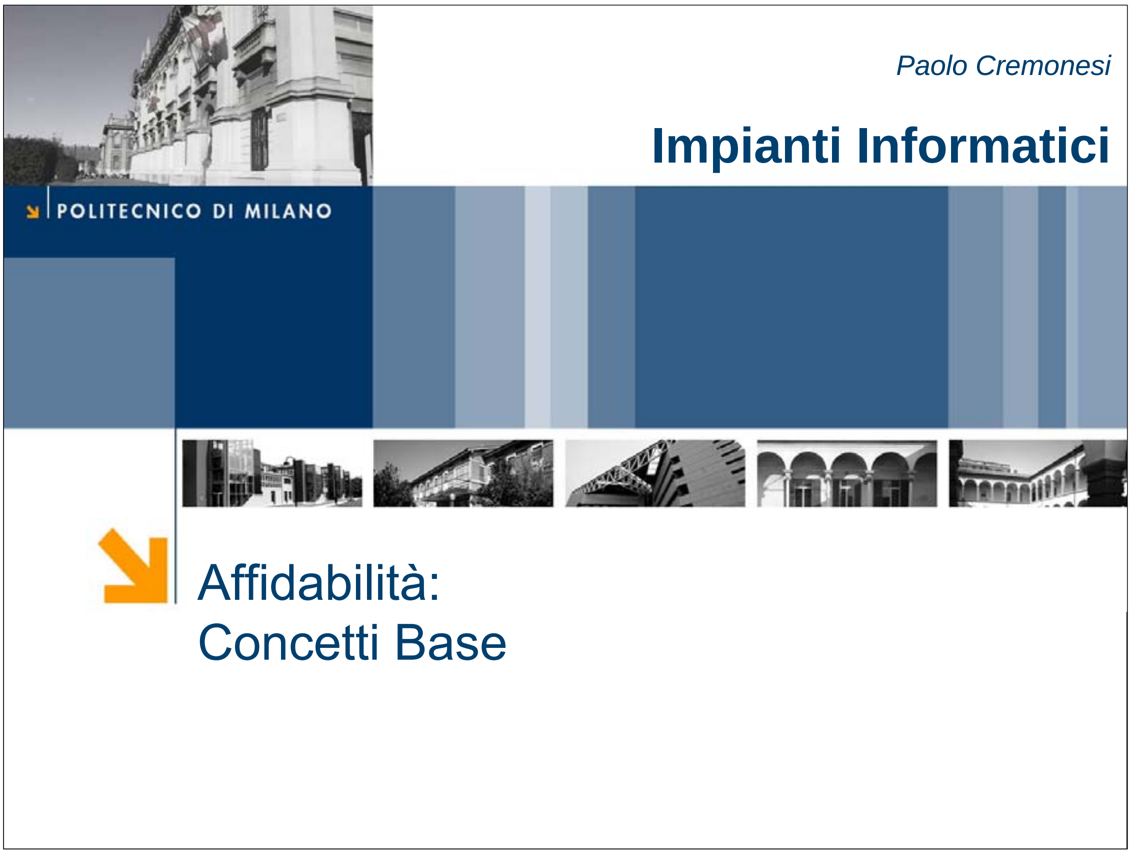
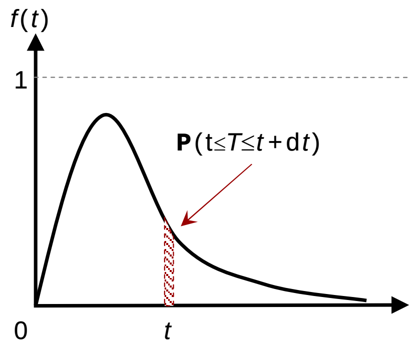


- affidabilità
- availability
- inaffidabilità
- unavailability
- failure rate
- MTTF

Probabilità di guasto

Probabilità che un componente si guasti in un certo istante

- $f(t)$ = densità di probabilità di guasto
- T = istante in cui avviene il primo guasto
- $f(t)\mathrm{d}t \equiv \mathbf{P}(t \le T \le t+\mathrm{d}t)$



Indichiamo con il termine **probabilità di guasto** la probabilità che un componente si guasti in un certo istante di tempo t

•Più formalmente, se la funzione $f(t)$ rappresenta la densità di probabilità di guasto

•e se indichiamo con T l’istante in cui avviene il primo guasto del nostro componente

•la probabilità **incondizionata** che il guasto avvenga nell’intervallo compreso tra t e $t+\mathrm{d}t$ è data dal prodotto di $f(t)$ per $\mathrm{d}t$

Inaffidabilità (Unreliability)

Inaffidabilità *F(t)* : probabilità che il componente si guasti nell'intervallo 0...*t*, sapendo che per *t*=0 il componente stava funzionando correttamente

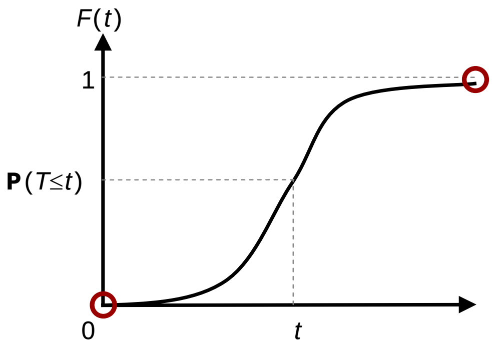
- $F(t) \equiv \mathbf{P}(T \leq t)$
- T = istante in cui avviene il primo guasto

Proprietà della $F(t)$

- funzione di distribuzione cumulativa

$$F(t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x$$

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}$$



L'inaffidabilità in (inglese *unrealiability*) rappresenta la probabilità che un componente si guasti in un qualsiasi momento nell'intervallo di tempo compreso tra 0 e *t,* sapendo che all'istante iniziale il componente stava funzionando correttamente

•Più formalmente, se indichiamo con T l'istante in cui avviene il primo guasto, abbiamo che $F(t)=\mathbf{P}(T \leq t)$

•Guardiamo ora alle proprietà di $F(t)$. Innanzitutto, l'inaffidabilità è la funzione di distribuzione cumulativa della probabilità di guasto definita in precedenza. Questo fa si che l'inaffidabilità goda di tutte le proprietà delle funzioni di distribuzione cumulative.

•In particolare, quelle che ci interessano di più sono che per t=0, l'inaffidabilità vale 0 (in altre parole, il componente all'inizio non è guasto)

•e per t che tende a infinito l'inaffidabilità tende ad 1 (ossia, prima o poi il componente si guasta)

Affidabilità (Reliability)

Affidabilità *R(t)* : probabilità che il componente **non** si guasti nell’intervallo 0...*t*, sapendo che all’istante *t*=0 il componente stava funzionando correttamente

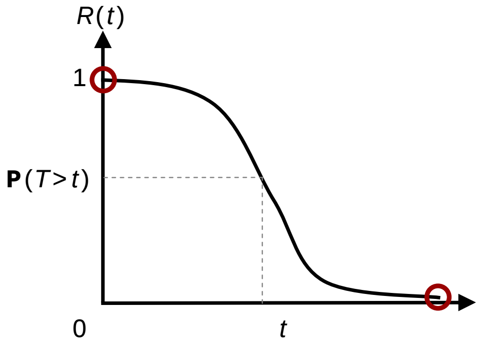
- $R(t) \equiv 1-F(t) = \mathbf{P}(T>t)$
- T = istante in cui avviene il primo guasto

Proprietà della $R(t)$

$$R(0)=1$$

$$\lim_{t\to+\infty} R(t)=0$$

$$f(x)=-\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}$$



L’affidabilità in (inglese *realiability*) è la proprietà complementare dell’inaffidabilità. L’affidabilità rappresenta la probabilità che un componente non si guasti **mai** nell’intervallo di tempo compreso tra 0 e *t,* sapendo che all’istante iniziale il componente stava funzionando correttamente

•Si noti che l’affidabilità **non** è una funzione di distribuzione. Formalmente l’affidabilità è la funzione di distribuzione complementare dell’inaffidabilità (ossia, è pari ad uno meno l’inaffidabilità).

•Questo fa si che l’affidabilità goda di alcune proprietà interessanti. Evidenziamone alcune.

•Innanzitutto, per *t*=0, l’affidabilità vale 1 (in altre parole, il componente all’inizio è funzionante)

•Osserviamo poi che per *t* che tende a infinito l’affidabilità tende a zero (ossia, prima o poi il componente si guasterà)

Failure Rate

Failure rate $\lambda(t)$: frequenza dei guasti

- $\lambda(t)dt \equiv$ probabilità che il componente si guasti nell'intervallo (t, t+dt) sapendo che all'istante t il componente funziona correttamente
- $\lambda(t)dt \equiv \mathbf{P}(t<T\leq t+dt \mid T>t)$
- T = istante in cui avviene il primo guasto

Il *failure rate* misura la frequenza con cui un componente si guasta.

•Più formalmente, se indichiamo con T l'istante in cui avviene il primo guasto, il prodotto λ per dt rappresenta la probabilità che il componente si guasti nell'intervallo (t, t+dt), sapendo che all'istante t il componente stava funzionando correttamente.

Failure Rate e Affidabilità

$$\boxed{\lambda(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=-\frac{1}{R(t)}\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}}$$

$$\lambda(t)\mathrm{d}t \equiv \mathrm{P}(t<T\le t+\mathrm{d}t\,|\,T>t)=\frac{\mathrm{P}(t<T\le t+\mathrm{d}t \cap T>t)}{\mathrm{P}(T>t)}=\frac{\mathrm{P}(t<T\le t+\mathrm{d}t)}{\mathrm{P}(T>t)}$$

$$=\frac{f(t)\mathrm{d}t}{R(t)}=\frac{\mathrm{d}F(t)}{R(t)}=-\frac{\mathrm{d}R(t)}{R(t)}$$

Si può dimostrare che *failure rate* e affidabilità sono legati tra loro da una relazione di tipo differenziale.

•Partiamo dalla definizione di failure rate, per cui il prodotto λ per dt rappresenta la probabilità che il componente si guasti nell'intervallo (t, t+dt), sapendo che all'istante t il componente stava funzionando correttamente. Indichiamo con T l'istante in cui avviene il primo guasto di un sistema.

•Applichiamo la proprietà delle probabilità condizionate e troviamo l'intersezione tra i due insiemi evidenziati in figura: il primo insieme è l'intervallo compreso tra t e t+dt, il secondo insieme è l'intervallo maggiore di t

•Arriviamo ad ottenere il rapporto tra la probabilità che il componente si guasti nell'intervallo compreso tra t e t+dt, e la probabilità che il componente si guasti in un qualsiasi momento successivo a t

•Possiamo vedere come il numeratore probabilità coincida con la definizione di probabilità di guasto mentre il denominatore coincide con la definizione di affidabilità. I passaggi finali risultano dall'applicazione delle proprietà dell'affidabilità.

Failure Rate e Affidabilità (2)

Il failure rate può essere calcolato come la derivata rispetto al tempo del logaritmo dell'affidabilità

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{1}{R(t)}\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\ln[R(t)]}{\mathrm{d}t}$$

Imponendo la condizione $R(0)=1$ e integrando si ottiene l'espressione fondamentale

$$R(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda(x)\mathrm{d}x}$$

Se $\lambda \equiv$ costante l'affidabilità ha distribuzione esponenziale

$$R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

E' interessante ricavare l'affidabilità di un componente in funzione del suo failure rate.

•A tale proposito riscriviamo la relazione differenziale tra failure rate e affidabilità. In base a questa relazione, il failure rate può essere calcolato come la derivata rispetto al tempo del logaritmo dell'affidabilità

•Se integriamo rispetto al tempo e ricordiamo che R(0) è pari a uno, otteniamo l'affidabilità in funzione del failure rate

•Si noti che, nel caso di failure rate costante, l'affidabilità ha distribuzione esponenziale

Failure Rate e Probabilità di guasto

f(*t*)d*t* è la probabilità incondizionata che il componente si guasti nell'intervallo (*t*, *t*+d*t*)

$\lambda(t)$d*t* è la probabilità condizionata che il componente si guasti nell'intervallo (*t*, *t*+d*t*), sapendo che all'istante t il componente funziona correttamente

Si noti che il failure rate

- è sempre maggiore o uguale a *p*(*t*)
- **non** è una densità di probabilità
- può essere maggiore di uno

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\underbrace{R(t)}_{\text{minore o uguale a uno}}}$$

E' importante sottolineare la differenza tra failure rate e probabilità di guasto. Mettiamo in risalto la differenza tra le due grandezze con un esempio:

•*f*(*t*)d*t* è la probabilità che una persona muoia tra i 90 ed i 91 anni

•$\lambda(t)$d*t* è la probabilità che una persona muoia tra i 90 ed i 91 anni, sapendo che la persona a 90 anni e viva

•Si noti che il failure rate è sempre maggiore o uguale a *f*(*t*), perché al denominatore troviamo l'affidabilità, che è sempre minore o uguale a uno

•il failure rate **non** è una densità di probabilità

•per questo motivo il failure rate può anche essere maggiore di uno

MTTF

Mean Time To Failure (MTTF) : tempo medio che trascorre prima che un componente si guasti

Dimostriamo che

$$\mathrm{MTTF} = \int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{MTTF} \equiv E[t] \equiv \int_0^{+\infty} tf\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t\mathrm{d}F =$$

$$= -\int_0^{+\infty} t\mathrm{d}R = -\left\{ [tR]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} R\mathrm{d}t \right\} = \int_0^{+\infty} R\mathrm{d}t$$

Nel caso di λ(t) = λ (costante) si ottiene:

$$\mathrm{MTTF} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$

Con il termine di Mean Time To Failure (MTTF) si indica il tempo medio che trascorre prima che un componente si guasti.

•Si può dimostrare che il Mean Time To Failure è dato dall'integrale sul tempo dell'affidabilità.

•Per dimostrarlo, basta applicare la definizione di valor medio di una variabile casuale come integrale della variabile per la sua densità di probabilità (una sorta di media pesata).

•Successivamente si sostituisce la densità di guasto con l'inaffidabilità e poi con l'affidabilità.

•L'integrale ottenuto si integra per parti.

•Il primo termine dell'integrazione per parti (per *t* che tende a +∞) contiene un prodotto del tipo zero per infinito. Per la maggior parte delle distribuzioni l'affidabilità tende a zero come un'esponenziale, quindi più velocemente di come *t* tenda a infinito, per cui il prodotto vale zero.

•Nel caso in cui il failure rate sia costante (ossia, nel caso di affidabilità esponenziale) il Mean Time To Failure è pari al reciproco del failure rate

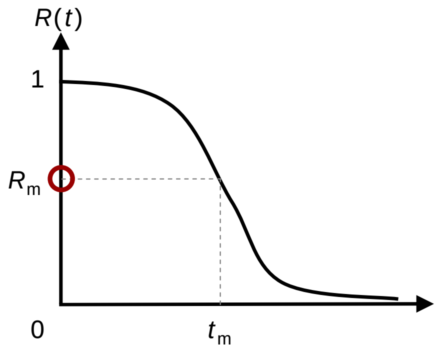
Tempo di missione

Tempo di missione t_m : tempo massimo di funzionamento di un componente

- il componente originale viene sostituito con un componente nuovo

L'affidabilità del componente deve essere sempre maggiore di una soglia R_m

$$R(t_m) = R_m$$



Il tempo di missione è il tempo massimo di funzionamento di un componente trascorso il quale il componente originale viene sostituito con un componente nuovo, anche se il componente originale non si era guastato.

Il componente originale viene sostituito quando la sua affidabilità scende al di sotto di una soglia prefissata.

Il tempo di missione si calcola come percentile dell'affidabilità, ossia come quel valore del tempo di vita del componente per cui l'affidabilità risulta essere uguale alla soglia prefissata.