Capitolo 1. Reti Resistive

Esercizio 1.1

Tre resistori, collegati in serie e percorse da una corrente I di 2 A, dissipano rispettivamente le seguenti potenze:
P1 = 20 W
P2 = 32 W
P3 = 24 W
Determinate i valori delle rispettive tensioni V1,V2, V3 e delle resistenze R1, R2, R3

[V1 = 10 V, V2 = 16 V, V3 = 12 V, R1 = 5 Ω, R2 = 8 Ω, R3 = 6 Ω]

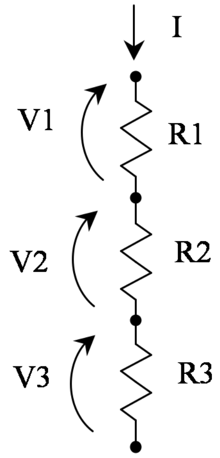

Figura 1.1

Soluzione

Le tre resistenze sono collegate come indicato in Figura 1.1. Ricordando che l'espressione della potenza dissipata in un resistore si può esprimere come:

$$P = V \cdot I = R \cdot I^2 = G \cdot V^2$$

Si ottiene V1 = P1/I = 10 V, V2 = P2/I = 16 V mentre V3 = P3/I = 12 V. Le resistenze si ottengono utilizzando l'espressione di P in funzione della resistenza e del quadrato della corrente o dall'equazione costitutiva del resistore V = R · I che fornisce R1 = V1/I = 5 Ω, R2 = V2/I = 8 Ω ed R3 = V3/I = 6 Ω.

Esercizio 1.2

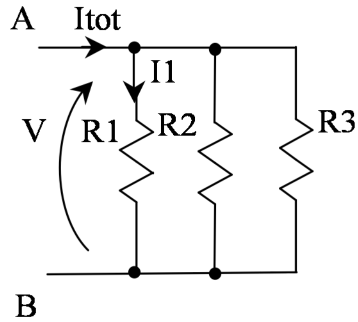

Figura 1.2

Tre resistori collegati in parallelo, dissipano rispettivamente le seguenti potenze:
$P1 = 50$ W
$P2 = 25$ W
$P3 = 20$ W

È noto inoltre che la corrente I1 che percorre la resistenza R1 è pari a 5 A.
Determinate i valori delle resistenze R1, R2, R3 e la corrente totale.

[R1 = 2 Ω, R2 = 4 Ω, R3 = 5 Ω, Itot = 9.5 A]

Soluzione

Le tre resistenze sono collegate come indicato in Figura 1.2. Per ottenere i valori delle resistenze conviene determinare i rispettivi valori delle conduttanze sfruttando la relazione $P = G \cdot V^2$*, essendo V la stessa per tutte le resistenze in parallelo.*
Conoscendo la corrente di una di esse (I1) è possibile risalire al valore della tensione applicata che è pari a $V = P1/I1 = 10$ *V.*
Da cui si può ottenere:

$G1 = P1/V2 = 0.5\ S \qquad R1 = 1/G1 = 2\ \Omega$
$G2 = P2/V2 = 0.25\ S \qquad R2 = 1/G2 = 4\ \Omega$
$G3 = P3/V2 = 0.2\ S \qquad R3 = 1/G3 = 5\ \Omega.$

Si può calcolare la corrente totale o come rapporto tra la potenza totale e la tensione ($Itot = Ptot/V = (P1+P2+P3)/V = 9.5$ *A) oppure come somma*
delle correnti di ogni resistenza (legge di Kirchhoff delle correnti)
$Itot = I1+I2+I3 = V \cdot G1+V \cdot G2+V \cdot G3 = 9.5$ *A.*

Dall'ultima espressione si nota che la corrente totale si può calcolare anche come prodotto della tensione per la conduttanza equivalente del parallelo dei tre resistori:

$Itot = Gtot \cdot V = (G1+G2+G3) \cdot V = 9.5\ A$

Esercizio 1.3

Tre resistori collegati in serie presentano i seguenti valori di resistenza

R1 =
R2 =
R3 =

Conoscendo la corrente I che li attraversa, determinate le tensioni V1, V2, V3, V4 con le convenzioni di misura indicate in Figura 1.3

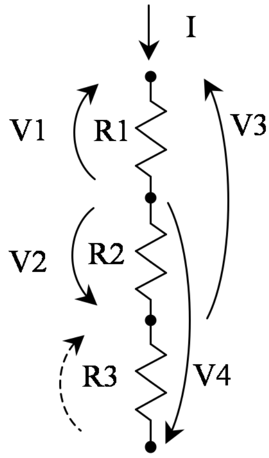

Figura 1.3

Soluzione

La tensione V1 si può trovare sfruttando il legame $V1 = R1 \cdot I =$ V (convenzione degli utilizzatori) ed analogamente $V2 = -R2 \cdot I =$ V (convenzione dei generatori). La tensione V3 si trova sfruttando la legge di Kirchhoff delle tensioni $V1 - V2 - V3 = 0$ da cui $V3 = V1 - V2 =$ V. Per trovare la tensione V4 è necessario determinare preliminarmente la tensione su R3. Se si sceglie il verso indicato con la freccia tratteggiata indicata in Figura 1.3 si ha $VR3 = R3 \cdot I =$ V (convenzione degli utilizzatori) e $V4 + VR3 - V2 = 0$ da cui $V4 = V2 - V3 =$ V

Esercizio 1.4

Tre resistori collegati in parallelo presentano i seguenti valori di resistenza:

R1 = 10
R2 = 20
R3 = 25

Conoscendo la tensione V=100 applicata ai capi del parallelo, determinate le correnti I1, I2, I3 e I4 con le convenzioni di misura indicate in Figura.

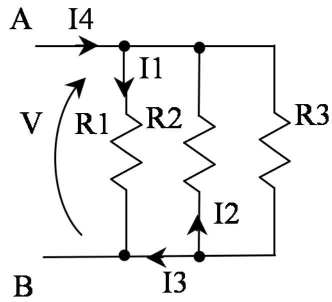

Figura 1.4

Soluzione

La corrente I1 si può trovare utilizzando il legame I1 = V/R1 =10 A (convenzione degli utilizzatori). La corrente I2 si può trovare utilizzando il legame I2 = -V/R2 = -5 A (convenzione dei generatori).

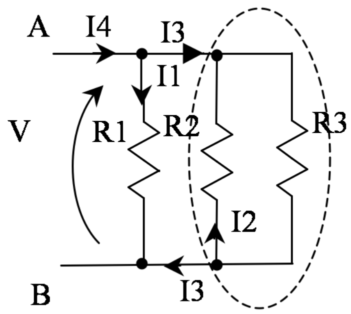

Figura 1.5

La corrente I3 si può trovare determinando il valore della corrente IR3 (da A a B) = V/R3 = 4 e sfruttando la LKC al nodo:
I3 = IR3 – I2 = 9 A
La corrente I4 si può ottenere osservando che la superficie tratteggiata di figura 1.5 rappresenta un nodo generalizzato e quindi la corrente I3 entra ed esce dal nodo.

La LKC consente di scrivere:
I4 = I1+I3 =19 A

Esercizio 1.5

Dato il circuito in figura 1.6, sono note le potenze dissipate dalle quattro resistenze e la corrente I:
P1 = 40 W
P2 = 30 W
P3 = 25 W
P4 = 35 W
I = 4 A.

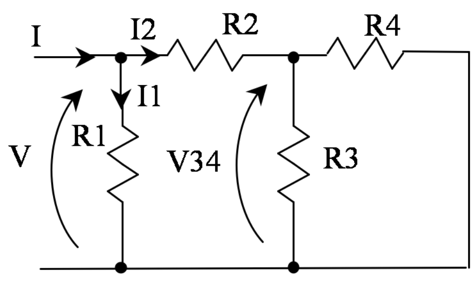

Figura 1.6

Determinare i valori delle quattro resistenze e della tensione V

Soluzione

Conoscendo la potenza dissipata in ogni resistore è possibile risalire al valore della totale potenza dissipata dall'oggetto a sinistra dei morsetti $P = P1+P2+P3+P4 = 130W$. Tale valore corrisponde anche al prodotto della tensione per la corrente; quindi $V = P/I = 32.5$ V. Sfruttando ora le equazioni costitutive, le leggi ai nodi e le leggi alle maglie è possibile percorrere il circuito da sinistra a destra in modo da ottenere i valori delle quattro resistenze. Di R1 si conosce potenza dissipata e tensione: $G1 = P1/V2 = 0.03787$ S da cui $R1 = 1/G1 = 26.41\ \Omega$. Sfruttando la legge ai nodi e l'equazione costituiva è possibile conoscere la corrente circolante in R2: $I2 = I-G1*V = 2.769$ A. Quindi $R2 = P2/I2 = 3.912\ \Omega$. Ora è possibile conoscere la tensione sull'oggetto costituito dal parallelo di R3 con R4 sfruttando una legge alle maglie ed una equazione costitutiva: $V34$ ($= V3 = V4$) $= V-R2*I2 = 21.67$ V. Quindi $G3 = P3/V34 = 0.05324$ S da cui $R3 = 1/G3 = 18.78\ \Omega$ e $G4 = P4/V34 = 0.07453$ S da cui $R4 = 1/G4 = 13.42\ \Omega$.

Esercizio 1.6

Sia dato il circuito rappresentato in figura 1.7, con i seguenti dati:
$R1 = 5\ \Omega$, $R2 = 10\ \Omega$, $R3 = 20\ \Omega$, $R4 = 30\ \Omega$, $V1 = 10$ V.
Determinare la tensione V e la corrente I4

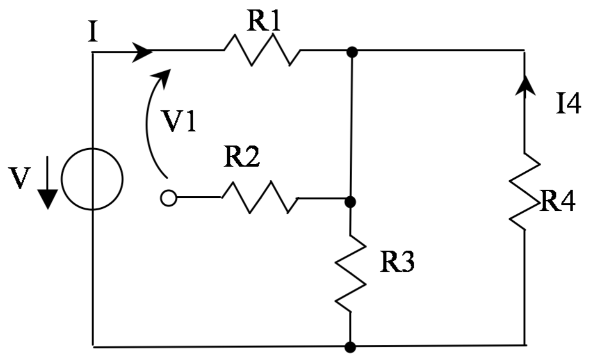

Figura 1.7

Soluzione

Poichè R2 non è percorso da corrente in quanto risulta in serie ad un circuito aperto, per la equazione cositutiva del resistore la tensione su R2 è nulla e quindi, per la legge alle maglie, la tensione V1 insiste

*sulla sola R1 ed R2 è ininfluente al problema. Di conseguenza si può facilmente calcolare la corrente I = V1/R1 = 2 A che è la stessa corrente che circola nell'oggetto ottenuto dal parallelo di R3 con R4. La sua conduttanza vale G34 = G3+G4 = 0.08333 S mentre la sua resistenza è l'inverso R34 = 1/G34 = 12 Ω. Per la legge alle maglie risulta, quindi, V = -R34*I-V1*
= -34 V. E' possibile calcolare la corrente I4 dalla formula del partitore di corrente facendo attenzione ai segni:
*I4 = -I*G4/(G3+G4) = -0.8 A.*
Un altro approccio potrebbe essere quello di considerare che V insiste sulla serie di R1 con un oggetto, costituito dal parallelo di R3 con R4, di resistenza R34 = 12 Ω. Per la formula del partitore di tensione si ha che V = -V1(R1+R34)/R1 = -34 V. La corrente I4 è facilmente calcolabile conoscendo la tensione V4 che insiste su R4: I4 = V4/R4. Ma, per la legge alle maglie, V4-V1-V = 0 da cui V4 = -24V e quindi I4 = V4/R4 = -0.8 A.*

Esercizio 1.7

Dato il circuito in figura 1.8 sono noti:
R1 = 60 Ω, R2 = 60 Ω, R3 = 32 Ω, R4 = 80 Ω, I = 120 A.

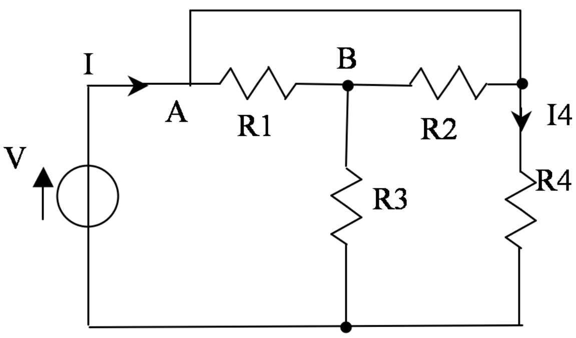

Figura 1.8

Soluzione

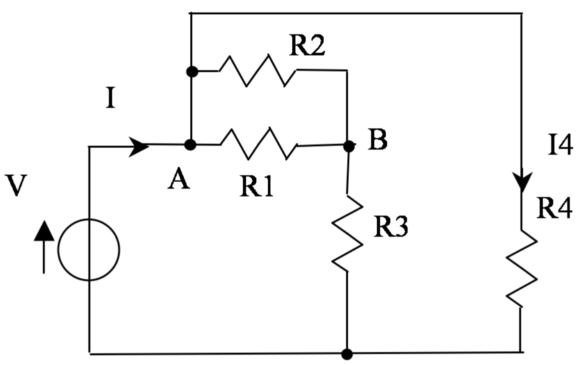

Figura 1.9

*R1 ed R2 sono in parallelo attraverso il cortocircuito superiore (figura 1.9); il circuito si riduce al parallelo di R4 con un la serie di R3 con il parallelo tra R1 ed R2 di resistenza totale R123 = R3+1/G12 dove G12 = G1+G2 = 0.03333 S. Quindi R123 = 62 Ω da cui G123 = 0.01613 S. Applicando la formula del partitore di corrente si ottiene: I4 = I * G4 /(G123+G4) = 52.39 A*

Capitolo 2. Thevenin e Norton in regime stazionario

Esercizio 2.1

Sia data la rete di figura 2.1 si determini il cirucito equivalente di Thevenin rispetto ai morsetti AB e quello rispetto ai morsetti BC
Sono noti:
R1 = 5 Ω, R2 = 10 Ω, R3 = 20 Ω, R4 = 30 Ω, V1 = 10 V.

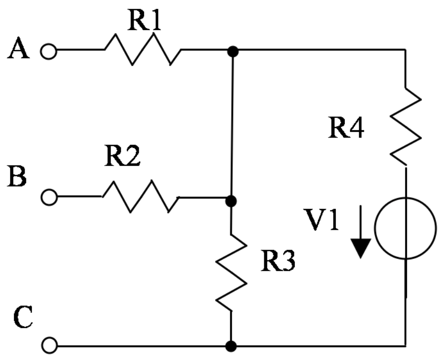

Figura 2.1

Soluzione

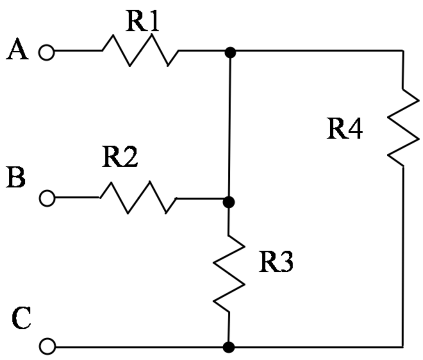

Figura 2.2

Thevenin AB
1. Calcolo della tensione a vuoto tra AB.
Poichè sia R1 che R2 non sono percorse da corrente la tensione VAB = 0
2. Calcolo della resistenza evivalente.
Spegnendo i generatori si ottiene la rete di figura 2.2. La serie R3 e R4 è in parallelo ad un corto circuito e quindi la resistenza vista da AB è la serie R1 + R2 = 15 Ω

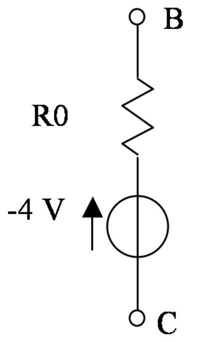

Figura 2.3

Thevenin BC
1. Calcolo della tensione a vuoto tra BC.
Poichè R2 non è percorsa da corrente la tensione tra BC coincide con quella sulla resistenza R3 che si può trovare con la formula del partitore tra R3 e R4 cambiata di segno (perchè V1 è diretto verso C).
VBC = - V1· R3/(R3+R4)=-4 V.
2. Calcolo della resistenza evivalente
La resistenza R1 essendo a sbalzo non interviene nel calcolo. La resistenza vista dai morsetti BC è la serie di R2 con il parallelo tra R3 e R4.
R0 = R2 + R3·R4/(R3+R4) =22 Ω.
Il bipolo equivalente è rappresentato in figura 2.3

Esercizio 2.2

Sia data sempre la rete di figura 2.1 si determini il cirucito equivalente di Norton rispetto ai morsetti BC.
Sono noti:
R1 = 5 Ω, R2 = 10 Ω,
R3 = 20 Ω, R4 = 30 Ω,
V1 = 10 V.

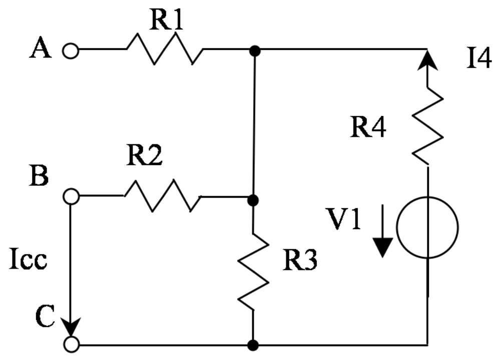

Figura 2.4

Soluzione

1. Calcolo della corrente di corto circuito tra BC.
La corrente Icc è quella che circola in R2. La Icc può essere calcolata con la formula del partitore nota la I4.

R23 = R2·R3/(R2+R3)=6.67 Ω
I4 = -V1/(R4+R23)=-0.273 A
Icc = I4·R3/(R2+R3) =-0.182 A
2. Calcolo della resistenza evivalente
La resistenza R1 essendo a sbalzo non interviene nel calcolo. La resistenza vista dai morsetti BC è la serie di R2 con il parallelo tra R3 e R4.

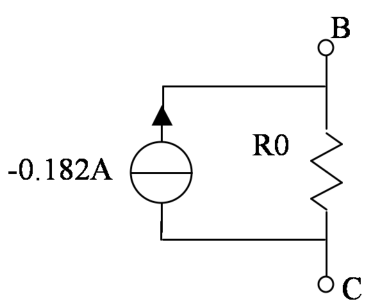

Figura 2.5

R0 = R2 + R3·R4/(R3+R4) =22 Ω.
Il bipolo equivalente è rappresentato in figura 2.5

Esercizio 2.3

Dato il circuito
in figura 2.6,
sono noti:
R1 = 40 Ω,
R2 = 60 Ω,
R3 = 12 Ω
R4 = 80 Ω,
R5 = 70 Ω
V1 = 120 V,
I4 = 50 A,
I5 = 40 A.

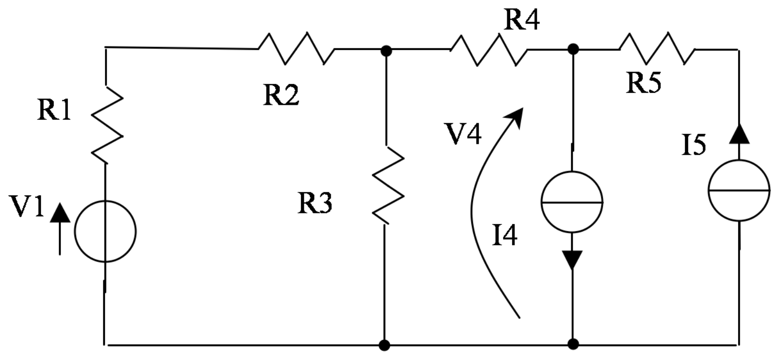

Figura 2.6

Determinare la potenza elettrica generata dalla sorgente di corrente I4

Soluzione

La potenza elettrica generata da I4 può essere calcolata in due modi: come il prodotto della tensione V4 per I4 o come bilancio delle potenze: potenze generate da V1 e da I5 meno le potenze dissipate nei resistori. Conviene il primo approccio.
Si operano, inizialmente, tutte le semplificazioni possibili al di fuori di I4. Il circuito di destra è costituito dalla serie di un generatore di corrente con un resistore. E' equivalente ad un generatore di corrente pari a I5 (basta applicare Norton e notare che la Geq è nulla, mentre la corrente di corto circuito e' proprio I5). Si nota anche che la tensione V4 risulta anche la tensione sul parallelo dei due generatori di corrente I4 e I5, che equivalgono ad un generatore di corrente equivalente I45=I4-I5 (verso il basso). La parte del circuito di sinistra e' equivalente ad un bipolo serie. Per la legge di Thevenin la resistenza equivalente R1234 è ottenuta dalla serie di R4 con il parallelo tra R3 e la serie di R1 con R2: R1234=90.71 W. La tensione del generatore equivalente è pari alla tensione a vuoto ai morsetti di I45, che coincide con la tensione su R3, che, a sua volta, e'
una quota parte della totale tensione V1. Applicando la formula del partitore di tensione si ha che Veq = R3·V1/(R1+R2+R3) = 12.86 V.
Si ottiene quindi V4 = -Veq+Req·I45 = 894.2 V. La potenza generata da I4 vale quindi P4 = I4·V4 = 45.6 kW

Esercizio 2.4

Dato il circuito in figura 2.7, sono noti:
R1 = 10 Ω,
R2 = 5 Ω,
R3 = 3 Ω
R4 = 4 Ω,
V1 = 30 V,
I4 = 18 A, I3 = 6 A.
Determinare il valore della tensionemisurata Vx

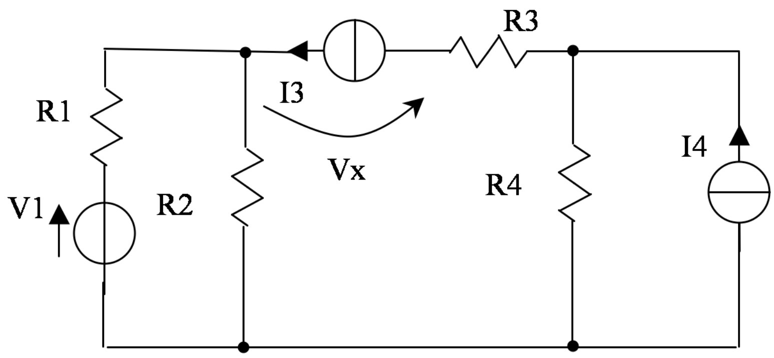

Figura 2.7

Soluzione

Per conoscere Vx basta semplificare il circuito intorno a I3. La parte sinistra equivale ad un bipolo serie con generatore di tensione Veq1 = V1·R2/(R1+R2)} = 10 V e resistenza equivalente Req1 = 1/(G1+G2) = 3.333 Ω. La parte di destra equivale ad un bipolo serie con generatore di tensione Veq2 = I4/G4 = 72 V e resistenza equivalente Req2 = R3+R4 = 7 Ω. Vx si ottiene, allora, con una legge all'unica maglia rimasta, sapendo che I3 percorre tutti i bipoli serie: Veq1+Req1·I3+Vx+Req2·I3-Veq2=0 da cui Vx = 0 V.

Esercizio 2.5

Dato il circuito in figura 2.7, sono noti:
R2 = 4 Ω, R3 = 3 Ω,
R4 = 2 Ω, R5 = 6 Ω,
V1 = 30 V.
Calcolare Rx affinchè Ix = 1A in valore assoluto

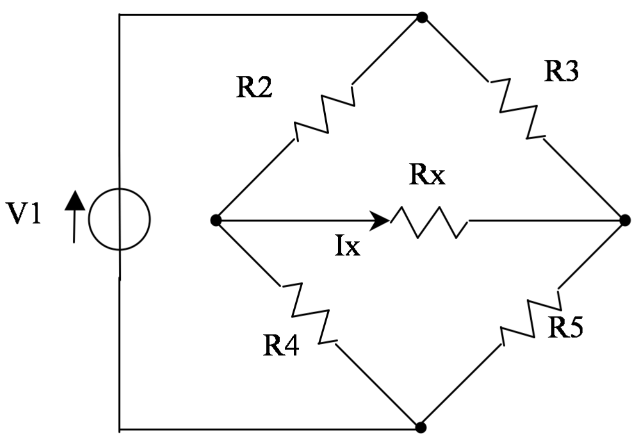

Figura 2.8

Soluzione

Conviene semplificare il circuito intorno a Rx utilizzando Thevenin o Norton. Il calcolo della resistenza equivalente "vista" dai morsetti di Rx può essere effettuato in due modi: o calcolando la resistenza equivalente vista dai morsetti di Rx dopo aver reso

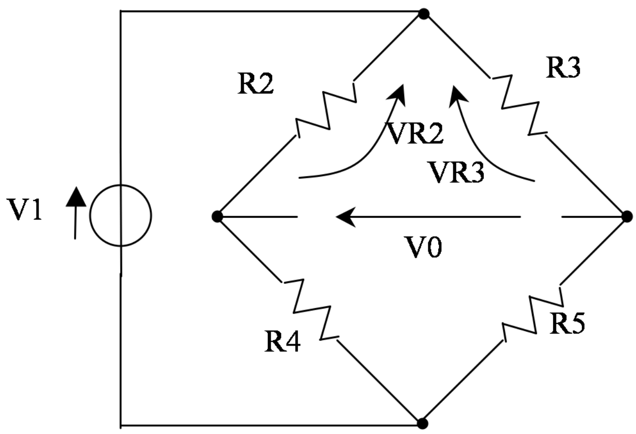

Figura 2.9

passiva la rete, o come rapporto tra la tensione del generatore equivalente (tensione a vuoto) del bipolo serie e la corrente del generatore equivalente del bipolo parallelo (corrente di corto circuito). La tensione a vuoto si trova appoggiandosi ad una delle due maglie, ad esempio quella costituita da R2, R3 ed il posto vuoto lasciato da Rx. Le tensioni su R2 e su R3 si trovano utilizzando la formula del partitore di tensione:

*VR2 = V1*R2/(R2+R4) = 20 V*

*VR3 = V1*R3/(R3+R5) = 10 V*

Vo (con il verso indicato) = VR3-VR2 = -10 V

La resistenza equivalente di ottiene come serie del parallelo tra R2 e R4 e il parallelo tra R3 e R5, e vale Req = (R2//R4)+(R3//R5)= 3.333

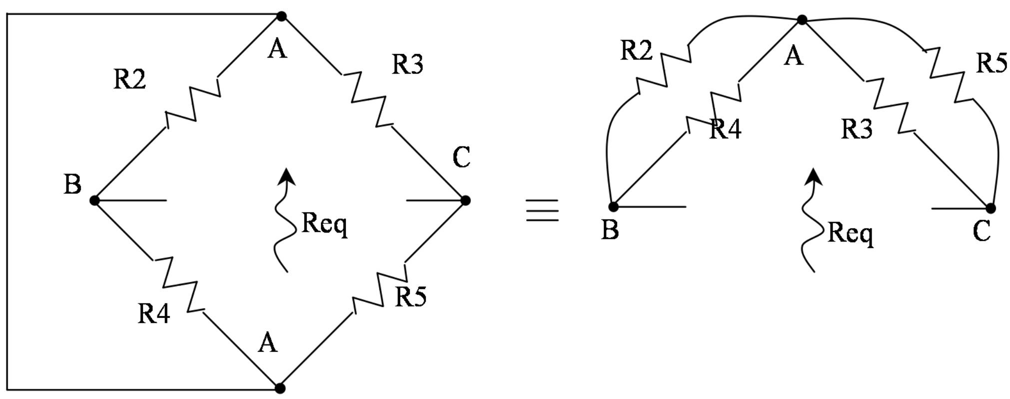

Figura 2.10

Ω (il simbolo // viene usato per indicare il calcolo necessario per individuare la resistenza equivalente del parallelo). Se non è chiaro il collegamento tra R2, R4 e R3, R5, si ridisegni la rete ricordando che un corto circuito porta i nodi allo stesso potenziale (Figura 2.10)
Considerando l'equivalente di tipo serie la corrente Ix (figura 2.11) si ottiene come Ix = Vo/(Req+Rx). Quindi Rx = Vo/Ix-Req = 6.667 Ω
L'altro metodo consiste nel calcolare la corrente di corto circuito. La corrente di corto circuito (verso destra) si ottiene con una legge ai nodi (ad esempio il nodo costituito da R2, R4 e il corto circuito). Le correnti in R2 e R4 si trovano come quota parte della totale corrente erogata dal generatore V1.

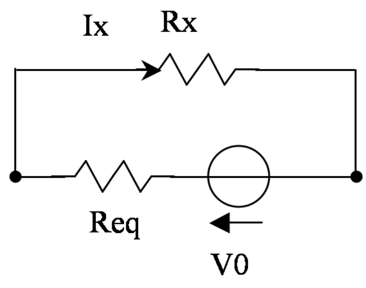

Figura 2.11

La resistenza totale vista da V1 è ora ottenuta dalla serie di due oggetti: il parallelo di R2 con R3 ed il parallelo tra R4 e R5. La nuova R2345 vale:
R2345 =R2//R3+R4//R5 = 3.214 Ω
Itot = V1/R2345 = 9.334 A
*IR2 = Itot*G2/(G2+G3) = 4 A*
*IR4 = Itot*G4/(G4+G5) = 7 A*
Icc (verso destra) = IR2-IR4 = -3 A
Quindi la resistenza equivalente vale Req = Vo/Icc = 3.333 Ω come nel caso precedente.

Esercizio 2.6

Sia dato il circuito rappresentato in figura 2.5, con i seguenti dati:
R1 = 5 Ω, R2 = 6 Ω, R3 = 3 Ω, R4 = 6 Ω,
V1 = 18 V, I1 = 12 A.R4 R1

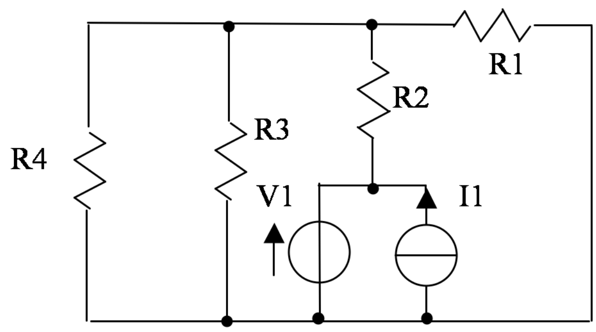

Figura 2.12

Soluzione

Occorre semplificare il circuito esterno ad R4.
A questo proposito si nota che il generatore di corrente I1 si trova in

parallelo al generatore di tensione V1. Agli effetti esterni equivalgono al solo generatore di tensione V1 (basta applicare Thevenin al parallelo di I1 e V1). Ora R4, R3, R1 ed il bipolo serie V1, R2 sono in parallelo. Trasformando il bipolo serie in un bipolo di tipo parallelo si ottengono quattro resistori (R1, R2, R3 e R4) in parallelo ad un generatore di corrente Ieq = V1/R2 = 3 A (figura 2.13).

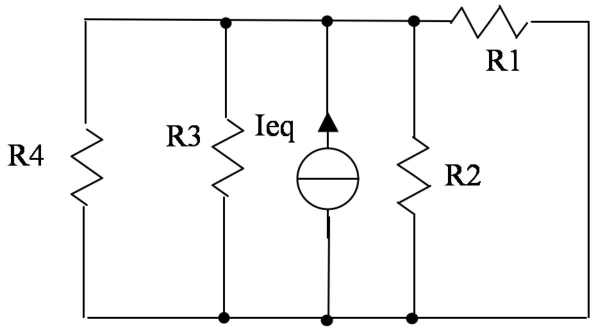

Figura 2.13

La potenza dissipata in R4 si conosce se si conosce la tensione o la corrente di R4. Ma la corrente in R4 è una quota parte della corrente Ieq: IR4 = Ieq·G4/(G1+G2+G3+G4) = 0.5769 A. Allora PR4 = R4·IR42 = 1.997 W

Esercizio 2.7

Il circuito in figura 2.14 presenta:
R1 = 5 Ω, R2 = 3 Ω,
R3 = 2 Ω, R4 = 6 Ω,
V1 = 18 V, V2 = 20V,
I1 = 12 A.
Determinare la corrente I11 e la potenza elettrica assorbita dalla sorgente di tensione

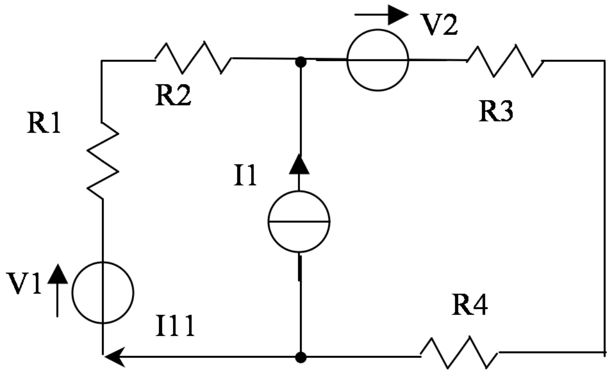

Figura 2.14

Soluzione

Nel circuito sono presenti tre bipoli in parallelo: il resistore R12 equivalente alla serie di R1 con R2, V1 con R34, equivalente alla serie di R3 e R4, V2 e I1. Trasformando tutti i componenti in bipoli di tipo parallelo si ottiene facilmente la tensione comune ai bipoli:
*V = (V1*G12-V2*G34+I1)/(G34+G12) = 47 V*

Tornando al circuito di fig. 2.14, è ora possibile calcolare la corrente I11:
I11 = (V1-V)/(R1+R2) = -3.625A.
La potenza assorbita dalla sorgente V1 è allora pari a P=-V1·I11 = 65.25W

Esercizio 2.8

Dato il circuito in figura 2.15 sono noti:
R1 = 4 Ω, R2 = 6 Ω, R3 = 2 Ω, R4 = 5 Ω
V1 = 18 V, V2 = 20 V.
Determinare la potenza dissipata dal resistore R4 e le potenze generate PV1 e PV2.

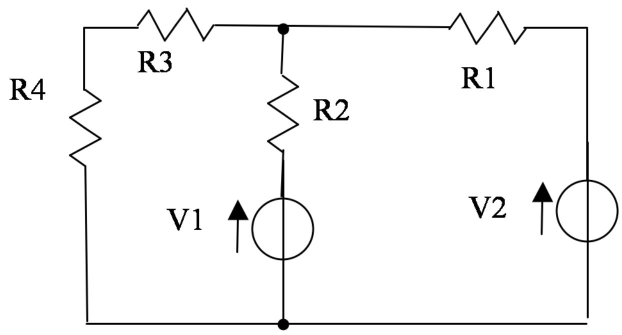

Figura 2.15

Soluzione

Nel circuito sono presenti tre bipoli in parallelo: il resistore R34 equivalente alla serie di R3 con R4, V1 con R2 e V2 con R1. Trasformando tutti i componenti in bipoli di tipo parallelo si ottiene facilmente la tensione comune ai bipoli:
V = (V1·G2-V2·G1)/(G34+G2+G1) = -3.574 V

Tornando al circuito di fig. 2.16, è ora possibile calcolare tutte le correnti:
IR4 = V/(R3+R4) = -0.5106 A;
IV1 = (V-V1)/R2 = -3.5957 A
IV2 = -IR4-IV1 = 4.106 A . Quindi
PR4 = R4· IR42 = 1.304 W;
PV1 = V1·(-IV1) = 64.72 W;
PV2 = V2·IV2 = 82.12 W

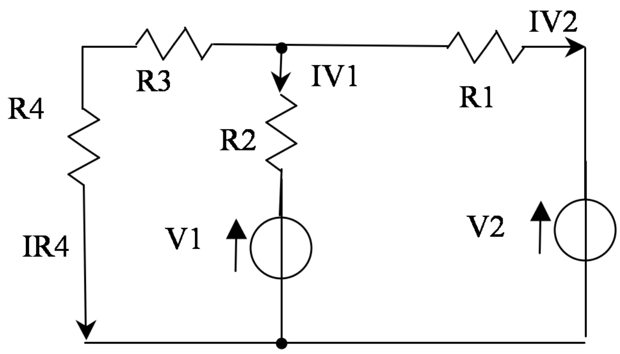

Figura 2.16

Esercizio 2.9

Dato il circuito in figura 2.17 sono noti:
R1 = 4 Ω, R2 = 15 Ω, R3 = 5 Ω, R4 = 10 Ω,

R5 = 25 Ω, R6 = 8 Ω, V1 = 25 V, I5 = 1 A
Determinare la potenza dissipata in R6

Soluzione

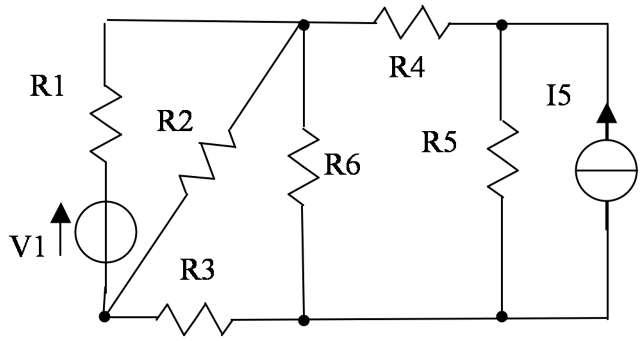

Figura 2.14

La potenza dissipata su R6 può essere calcolata come P6 = R6·I6 oppure come P6 = G6·V6.
Conviene semplificare il circuito a sinistra e a destra del resistore R6 calcolando i parametri dei bipoli equivalenti serie o parallelo. Per quello che riguarda il circuito a sinistra si può notare che è costituito dal parallelo di V1 e R1 con R2 che sono a loro volta in serie a R3. Si può quindi calcolare il bipolo equivalente serie, la resistenza equivalente è data dalla serie del parallelo di R1 con R2 con R3:
Req = (R1//R2)+R3 = 8.158 Ω (il simbolo // indica il parallelo).
La tensione a vuoto è la tensione sul resistore R2 e può essere calcolata con la formula del partitore di tensione come:
Vo = V1·R2/(R1+R2) = 17.73 V
Il circuito di destra ouò essere trasformato nel suo equivalente serie con una resistenza equivalente Req1 pari alla serie di R4 e R5:
Req1 = R4+R5 = 35 Ω
*E una tensione a vuoto pari a Vo1 = R5*I5 = 25V. LA tensione V6 ai capi di R6 può essere facilmente calcolata trasformando i bipoli serie nel loro equivalente parallelo come:*
V6 = Geq·Vo+Geq1·Vo1/(Geq+Geq1+G6) = 11.35 V
La potenza dissipata su R6 vale quindi P6 = G6·V62 = 16.10 W

Capitolo 3. Reti in regime sinusoidale

Esercizio 3.1

Dato il circuito in figura 3.1, sono noti:

R = 8 Ω, L = 10 mH, C = 100μF.
v(t) = 50·cos(300·t+π/6) V

Determinare la corrente , le tensioni sul resistore, sul condensatore e sull'induttore nel dominio del tempo ed in quello fasoriale.

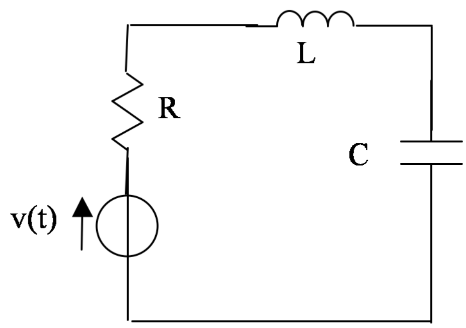

Figura 3.1

Soluzione

E' necessario esprimere la sorgente di tensione nel dominio fasoriale. In tale dominio:

$$\overline{V} = \frac{50}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{6}} = \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 30.62 + j17.68 \quad V.$$

La pulsazione è pari a ω=300 rad/s. Si può ricavare la reattanza induttiva Xl = ω·L = 3 Ω, la reattanza capacitiva è pari a Xc = 1/(ω·C) = 33.33 Ω. Scrivendo la legge alla maglia si ottiene la corrente:

$$\overline{I} = \frac{\overline{V}}{R + j(Xl - Xc)} = -0.296 + j1.087$$

La tensione ai capi del resistore è pari a:

$\overline{V} = R \cdot \overline{I} = -2.368 + j8.7\,V$

la tensione sull'induttore vale:

$\overline{V} = jXl \cdot \overline{I} = -3.262 - j0.888\,V$

la tensione sul condensatore vale:

$\overline{V} = jXl \cdot \overline{I} = -3.262 - j0.888\,V$*. Per trasformare le grandezze trovate nel dominio del tempo si procede nel medesimo modo per tutte le grandezze. Ad esempio per la corrente si ha:*

i(t) = I_M cos*($\omega t+\varphi$), dove* $I_M = \sqrt{2}\left(\sqrt{\mathrm{Re}(\overline{I})^2 + \mathrm{Im}(\overline{I})^2}\right)$ *e*

$\varphi = \arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}(\overline{I})}{\mathrm{Re}(\overline{I})}\right)$

se la parte reale è positiva e $\varphi = \pi + \arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}(\overline{I})}{\mathrm{Re}(\overline{I})}\right)$ *la parte reale è negativa.*

Si ottiene allora:

i(t) = 1.594·cos(300·t+1.8387) A,

vr(t) = 12.751·cos(300·t+1.837) V,

vl(t) = 4.782·cos(300·t+3.407) V,

vc(t) = 53.13·cos(300·t+0.266) V

Esercizio 3.2

Dato il circuito in figura 3.2, sono noti:
I1 = 18 A, X1 = 3 Ω,
R = 4 Ω
Xc = 1 Ω,
ω = 200 rad/s

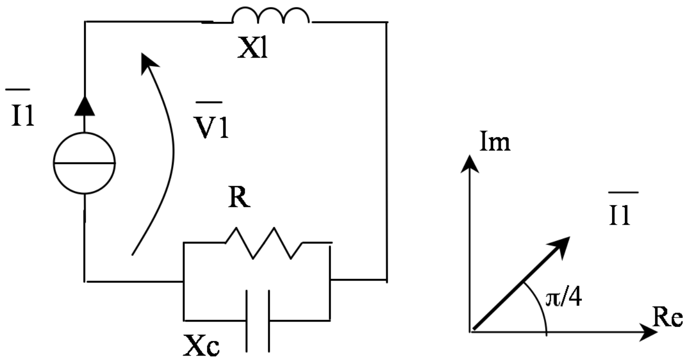

Figura 3.2

Soluzione

Il fasore $\overline{I}1$ *è pari a* $\overline{I}1 = 18 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$*=18· (cos(π/4)+j·sin(π/4)) = 12.73+j·12.73. R e Xc sono in parallelo di conseguenza equivalgono ad una impedenza* $\overline{Z}$ *= 1/*$\overline{Y}$*, dove* $\overline{Y}$ *= G+(-1/(j·Xc)),* $\overline{Z}$ *= 0.235-j·0.941 Ω. La tensione* $\overline{V}1$ *è apri a* $\overline{V}1$ *=* $\overline{Z}\cdot\overline{I}1$ *= 14.974-j·8.984 V=17.462·e*$^{-j0.54}$ *V. La tensione* $\overline{V}1$ *nel dominio del tempo è pari a v1(t) = 24.696·cos(200·t–0.54) V. Lo sfasamento di* $\overline{I}1$ *rispetto* $\overline{V}1$ *è pari alla* *differenza della fase della corrente e di quella della tensione: φ =π/4-(-0.54) = 1.325 rad*

Esercizio 3.3

Dato il circuito in figura 3.3, sono noti:
X1 = 30 Ω, R1 = 7 Ω,
R2 = 10 Ω, Xc = 18 Ω
V1 = 18 V, V2 = 20 V,
δ = π/3
ω = 100 rad/s

Determinare la corrente i(t) e il suo fasore rappresentativo

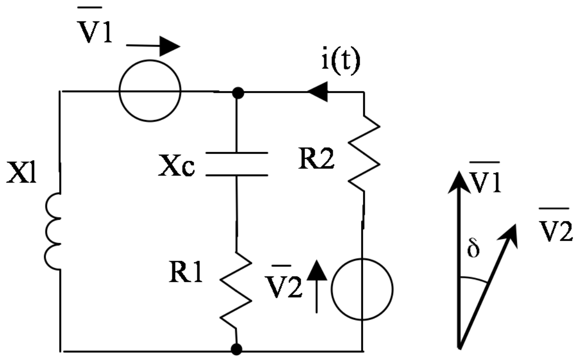

Figura 3.3

Soluzione

Poiché è dato lo sfasamento relativo tra $\overline{V}1$ e $\overline{V}2$ è necessario scegliere dove porre l'asse reale, la scelta migliore consiste nel posizionare tale asse su uno dei due fasori. Se si posiziona l'asse reale coincidente con $\overline{V}2$ si ottiene:
$\overline{V}2$ = 20 V, $\overline{V}1$ = 18·$e^{j\cdot\delta}$ V = 9+j·15.59 V.
A questo punto conviene semplificare la rete di sinistra che comprende V1-X1, R1 – Xc, trasformandolo nel bipolo equivalente serie. La tensione a vuoto può essere calcolata con la regola del partitore di tensione,
Vv = $\overline{V}1$·(R1-j·Xc)/(j·X1+R1-j·Xc) = 9.174-j·23.28 V.
L'impedenza equivalente è pari al parallelo di X1 con la serie di R1 e Xc: Zeq = 1/(1/(j·X1)+1/(R1-j·Xc))= 32.64-j·25.96 Ω.
A questo punto il fasore corrente può essere calcolato scrivendo una legge alla maglia e si ottiene:
I = ($\overline{V}2$-Vv)/(R2+Zeq) = -0.057+j·0.511 A. Tornando nel dominio del tempo si ottiene i(t) = 0.727·cos(100·t+1.682) A

Esercizio 3.4

Dato il circuito in figura 3.4 sono noti:

I1 = 12 A, I2 = 15 A, E = 18 V
L = 1 H, R = 10 Ω, C = 200 μF
δ = π/6, β = π/4, f = 50 Hz

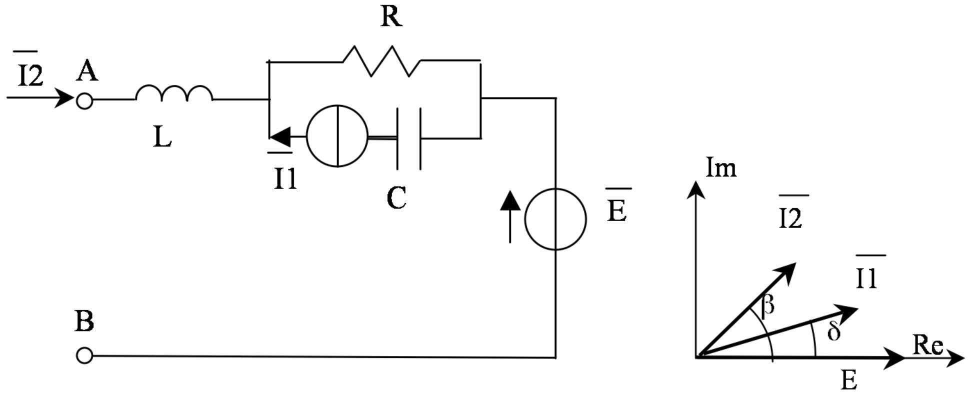

Figura 3.4

Determinare il bipolo equivalente di Thevenin ai morsetti AB e la potenza complessa ai morsetti AB

Soluzione

Le reattanze induttiva e capacitiva valgono rispettivamente:

$$Xl = 2\pi fL = 314.16\ \Omega$$
$$Xc = \frac{1}{2\pi fC} = 15.915\ \Omega$$

Mentre i fasori corrispondenti alle sorgenti possono essere ricavati dal diagramma fasoriale:

$$\overline{E} = E = 18\ V$$
$$\bar{I}1 = I1 \cdot e^{j\delta} = 10.392 + j6\ A$$
$$\bar{I}2 = I2 \cdot e^{j\beta} = 10.607 + j10.607\ A$$

Il bipolo equivalente di Theveni si ricava facilmente dall'osservazione della figura. Spegnendo i generatori rimane la serie di Xl e R, mentre la tensione a vuoto tra i morsetti AB è la somma della tensione del generatore E e della tensione su R, in quanto per soddisfare la condizione di vuoto (senza carico) si deve imporre I2 = 0. Si ottiene dunque:

$\overline{Z}o = R + jXl = 10 + j314.16\ \Omega$

$\overline{V}o = \overline{E} + R\overline{I}1 = 121.923 + j60\ V$

La potenza complessa ai morsetti AB può essere quindi ottenuta sfruttando il bipolo equivalente appena trovato (fig 3.5). La tensione a carico tra i morsetti è:

$\overline{V}AB = \overline{V}o + \overline{Z}o \cdot \overline{I}2 = -3104 + j3498\ V$

da cui:

$\overline{A} = \overline{V}AB \cdot \underline{I}2 = -70032 + j4160\ VA$

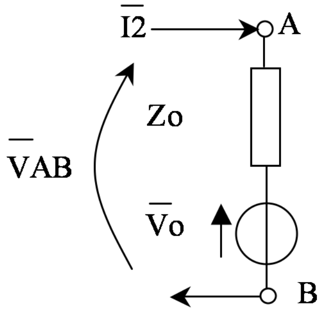

Figura 3.5

Esercizio 3.5

Dato il circuito in figura 3.6 sono noti:
R = 6 Ω, L = 1 mH, C = 12 μF
f = 50 Hz, δ = π/6
V1 = 18 V, I1 = 18 A
Determinare la tensione v(t) e lo sfasamento di Vr rispetto a Ic.

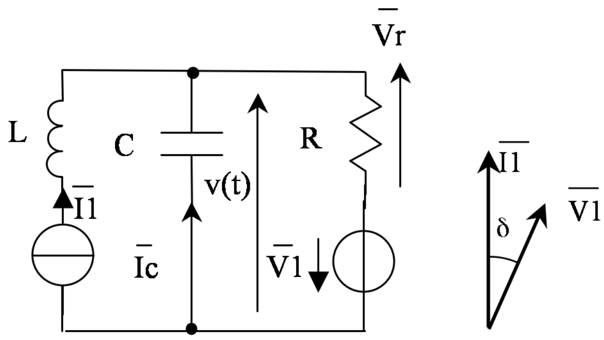

Figura 3.6

Soluzione

Scegliendo di posizionare l'asse reale allineato con il fasore tensione V1, si ottiene che la tensione V1 e la coorente I1 nel dominio fasoriale valgono rispettivamente:

$\overline{V}1 = 18\ V \qquad \overline{I}1 = 18 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} = 15.59 + j9\ A$

. La rete è costituita dal parallelo di $\overline{I}1$, $\overline{V}1$ e $\overline{Z}r$ (dove $\overline{Z}r$ = R), $\overline{Z}c$ = -j Xc. La reattanza Xc può essere facilmente calcolata come Xc =

$1/(\omega C) = 265.3\ \Omega$, $(\omega = 2 \cdot \pi \cdot f)$.
La reattanza Xl, essendo in serie ad un generatore di corrente, non influenza la tensione vista ai morsetti esterni.
La tensione v(t) richiesta è quella ai capi di Xc, che può essere calcolata in diversi modi: si può infatti semplificare la parte della rete attorno a Xc cercando il bipolo equivalente serie oppure si può trasformare il bipolo , $\overline{V}1$ e $\overline{Z}r$ nel suo equivalente parallelo riducendo così la rete nel parallelo di $\bar{I}1$, del bipolo paralleo e $\overline{Z}c$ da cui si può calcolare la tensione richiesta come:

$$\overline{V} = \frac{\bar{I}1 - \dfrac{\overline{V}1}{\overline{Z}r}}{\dfrac{1}{\overline{Z}r} + \dfrac{1}{\overline{Z}c}} = 76.71 + j52.26\ V$$

La tensione v(t) risulta allora pari a

$v(t) = \sqrt{2}\,V\cos(\omega t + \operatorname{atan}(\operatorname{Im}(\overline{V})/\operatorname{Re}(\overline{V}))) = 131.27 \cdot \cos(314.15 \cdot t + 0.598)\ V$

La tensione $\overline{V}r$ si trova scrivendo la legge delle tensioni e risulta pari a

$\overline{V}r = \overline{V} + \overline{V}1 = 94.71 + j52.265\ V$

La corrente Ic può essere calcolata come

$$\bar{I}c = -\frac{\overline{V}}{\overline{Z}c} = 0.197 - j0.289\ A.$$

L'angolo φ richiesto è pari a $\varphi = \arg(\overline{V}r\ \underline{I}c) = 1.477\ rad$

Esercizio 3.6

Dato il circuito in figura 3.7 sono noti:
$\overline{V}1 = 10$ V,
$\overline{V}2 = j12$ V,
R1= 2 Ω, R2 = 4 Ω
R3 = 5 Ω, R4 = 10 Ω,
Xc = 2 Ω, Xl = 3 Ω,

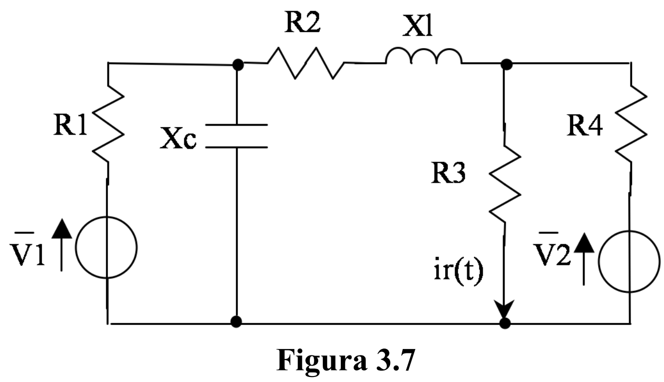

Figura 3.7

f = 50 Hz.
Si deterimini ir(t).

Soluzione

Conviene semplificare la parte di rete di sinistra costituita dal bipolo di tipo serie cstituito dal generatore di tensione $\overline{V}1$ e dall'impedenza $\overline{Z}1$ = R1, in parallelo a $\overline{Z}c$ = -j Xc , in serie all'impedenza Z2 = R2 + jXl.
La tensione a vuoto si trova con la regola del partitore di tensione e vale

$$\overline{V}o = \overline{V}1\frac{\overline{Z}c}{\overline{Z}c + \overline{Z}1} = 5 - j5 \text{ V}$$

l'impedenza equivalente è data dalla serie di Z2 e del parallelo di Z1 e Zc e vale $\overline{Z}o = 5 + j2\ \Omega$.
La corrente $\bar{I}r$ può essere calcolata trasformando i due bipoli $\overline{V}o - \overline{Z}o$ e $\overline{V}2 - \overline{Z}4$ ($\overline{Z}4$ = R4) nel loro equivalente parallelo e applicando la regola del partitore di corrente tra Y3, Y4 e Yo si ottiene quindi:

$$\bar{I}r = \left(\frac{\overline{V}o}{\overline{Z}o} + \frac{\overline{V}2}{\overline{Z}4}\right)\left(\frac{\overline{Y}3}{\overline{Y}3 + \overline{Y}4 + \overline{Y}o}\right) = 0.215 + j0.028 \text{ A.}$$

La corrente ir(t) risulta allora pari a ir(t)= 0.306·cos(314.15·t+0.132) A

Esercizio 3.7

Dato il circuito in figura 3.8 sono noti:
$\overline{Z}1$= 1-j Ω,
$\overline{Z}2$ = 2+j Ω,
$\overline{Z}3$ = 1-j2 Ω,
$\overline{Z}4$ = 3+j2 Ω,
V = 120 V,
I1 = 80 A, I2 = 50 A

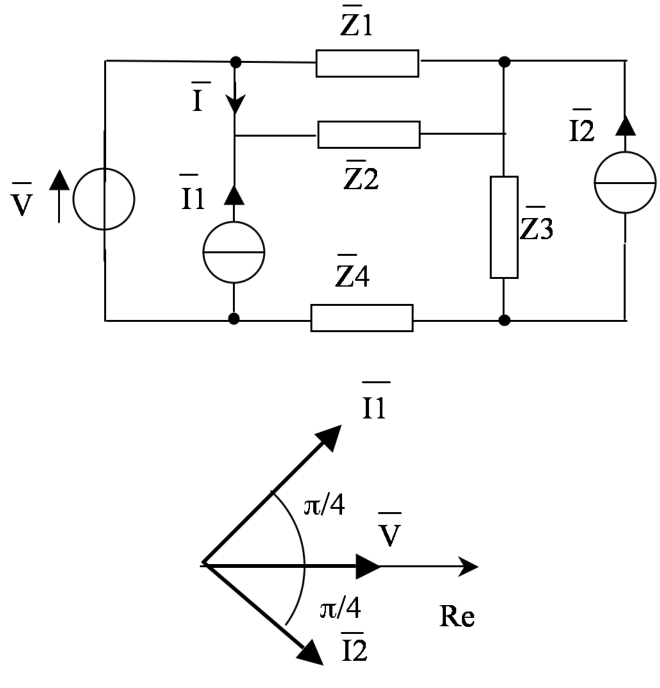

Figura 3.8

Soluzione

Conviene semplificare il circuito cercando il bipolo equivalente serie visto dai morsetti del ramo percorso dalla corrente I.
L'impedenza equivalente è data da $\bar{Z}eq = ((\bar{Z}3 + \bar{Z}4)//\bar{Z}1) + \bar{Z}2$ = *2.923+j0.385 Ω (dove // indica il parallelo). Per il calcolo della tensione a vuoto conviene trasformare il bipolo parallelo formato da* $\bar{I}2$ *e* $\bar{Z}3$ *nel suo equivalente serie formato da* $\bar{V}2 = \bar{Z}3 \cdot \bar{I}2$ *e sempre* $\bar{Z}3$*. Si osserva a questo punto che l'impedenza* $\bar{Z}3$ *risulta in serie a* $\bar{Z}4$ *e che la rete è diventata binodale*
La tensione VAB può essere calcolata trasformado tutti i bipoli tra A e B in bipoli di tipo parallelo e risulta:

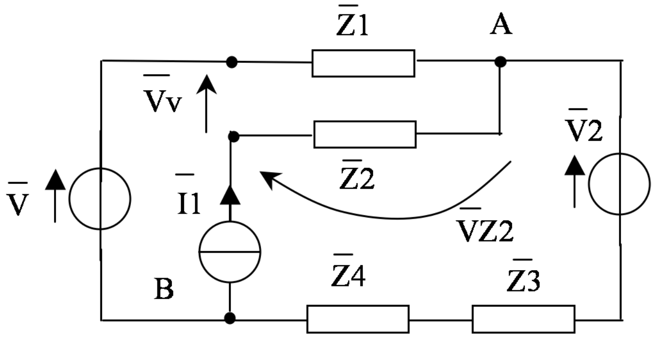

Figura 3.9

$$\bar{V}AB = \frac{\dfrac{\bar{V}1}{\bar{Z}1} + \bar{I}1 + \dfrac{\bar{V}2}{\bar{Z}3 + \bar{Z}4}}{\dfrac{1}{\bar{Z}1} + \dfrac{1}{\bar{Z}3 + \bar{Z}4}} = 154.86 + j16.83\,V \text{ (formula di Millman)}$$

allora la tensione a vuoto è pari a
$\bar{V}v = \bar{V}Z1 - \bar{V}Z2 = (\bar{V}AB - \bar{V}) - \bar{Z}2 \cdot \bar{I}1$ = *-91.43-j186.5 V.*
La corrente I richiesta è allora data da
$\bar{I} = \bar{V}v / \bar{Z}eq$ = *-39-j58.68 A*

Esercizio 3.8

Dato il circuito in figura 3.10 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:
v1(t) = $\sqrt{2}$·200·sin(500·t) V,
v2(t) = $\sqrt{2}$·300·cos(500·t) V
a1(t) = $\sqrt{2}$·10·sin(500·t-π/4) A

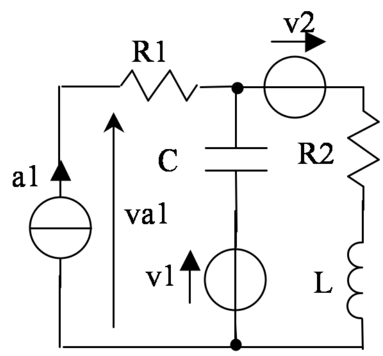

Figura 3.10

R1 = 5 Ω, R2 =10 Ω,
L = 20 mH,
C = 100 μF

Determinare la tensione va1(t)

Soluzione

I generatori di tensione e corrente espressi in regime fasoriale sono pari a: $\overline{V}1 = -j200$ *V,* $\overline{V}2 = 300$ *V,* $\overline{A}1 = 10e^{-j(\pi/4+\pi/2)}$ *A. Conviene semplificare la rete di destra cercando il bipolo equivalente serie.*
Le ipedenze sono $\overline{Z}r = R1$*,* $\overline{Z}c = -j/(\omega C)$ *(con ω = 500 rad/s),* $\overline{Z}2 = R2+j\omega L2$*, l'impedenza equivalente* $\overline{Z}eq$ *è data dalla serie di* $\overline{Z}r$ *con il parallelo di* $\overline{Z}c$ *e* $\overline{Z}2$*.* $\overline{Z}eq = \overline{Z}r + (\overline{Z}c // \overline{Z}2) = 25\ \Omega$*.*
La tensione a vuoto è data dalla legge alla maglia e vale
$\overline{V}v = \overline{V}1 - \overline{Z}c(\overline{V}1 + \overline{V}2)/(\overline{Z}2 + \overline{Z}c) = -100+j300V$*.*
La tensione $\overline{V}a = \overline{V}v + \overline{Z}eq\overline{A}1 Va = -267.78+j123.22$ *V. Ritornando nel dominio del tempo si trova: va1(t) = 428.46cos(500t+2.723) V*

Esercizio 3.9

Dato il circuito in figura 3.11, sono noti:
$\overline{V}1$= 10 V (fasore su Re)
R1= 5 Ω, R2 = 20 Ω
R3 = 6 Ω, R4 = 10 Ω,
C1 = C2 = 1 mF
L = 0.1 H, ω = 100 rad/s.

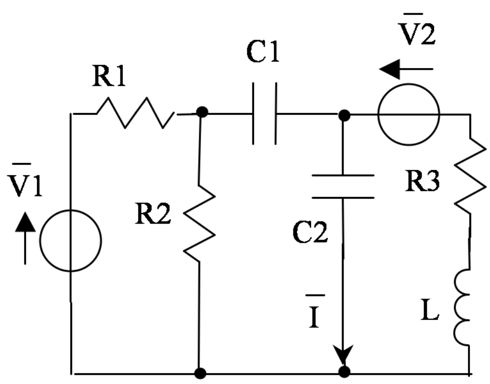

Figura 3.11

Calcolare V2 in modulo e fase rispetto a V1 in modo che I = 0.

Soluzione
Affinché la corrente I sia pari a zero dovrà essere I = Vc2/Zc2 = 0 e quindi dovrà essere nulla la tensione ai capi di C2.

Conviene semplificare la parte di rete di sinistra, costituita da V1-R1, R2, C1. Le impedenze possono essere calcolate come:

$\bar{Z}1 = R1,\ \bar{Z}2 = R2,\ \bar{Z}c = -j/(\omega C2)$

l'impedenza equivalente risulta la serie di $\bar{Z}c$ *con il parallelo di* $\bar{Z}1$ *e* $\bar{Z}2$, $\bar{Z}eq = (\bar{Z}1 // \bar{Z}2) + \bar{Z}c = 4 - j10\ \Omega$.
La tensione a vuoto può essere calcolata con la regola del partitore di tensione e risulta pari a $\bar{V}o = \bar{V}1 \cdot \bar{Z}2/(\bar{Z}2 + \bar{Z}1) = 8\ V$. *La parte di rete di destra è costituita dall'impedenza* $\bar{Z}3 = R3+j(\omega L)$ *e dal generatore di tensione V2. Imponendo che la tensione ai capi di C2 sia nulla si ottiene:* $\bar{V}c2 = \bar{V}o - \bar{Z}eq(\bar{V}o - \bar{V}2)/(\bar{Z}eq + \bar{Z}3) = 0$, *da cui si ottiene:*
$\bar{V}2 = 5.241-j6.897$ *e quindi* $v2(t) = 12.25\cdot\cos(100\cdot t-0.921)\ V$

Esercizio 3.10

Dato il circuito in figura 3.12, sono noti:
v1(t)= 14.139·sin(10·t) V,
R1= 2 Ω, R2 = 1 Ω
R3 = 4 Ω, C1 = C2 = 0.1 F
L1 = 0.1 H, L2 =0.5 H.

Calcolare i1(t), i2(t), v(t).

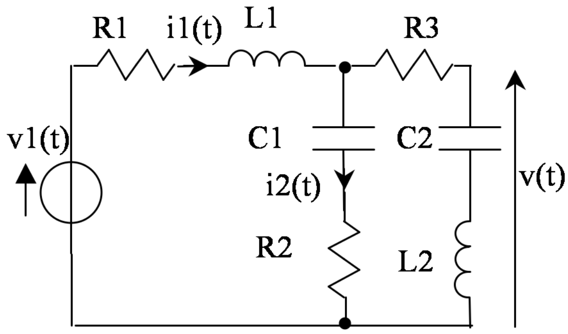

Figura 3.12

Soluzione

Il generatore di tensione v1(t) in regime fasoriale è pari a $\bar{V}1 = -j9.99$ *V. La rete è costituita dal parallelo di 3 bipoli: V1-Z1, Z2, Z3, dove*

$\bar{Z}1 = R1+j\omega L,\ \bar{Z}2 = R2-j/(\omega C1),\ \bar{Z}3 = R3 +j(\omega L2- 1/(\omega C2))$.

Per calcolare la tensione $\bar{V}$ *conviene trasformare V1-Z1 nel suo equivalente parallelo e notare che in tal modo si ottiene che la tensione* $\bar{V}u$ *ai capi di* $\bar{Z}2$ *è pari a*

$\bar{V}u = (\bar{V}1/\bar{Z}1)/(1/\bar{Z}1+1/\bar{Z}2+1/\bar{Z}3) = -2.543-j3.467\ V$.

La tensione V si trova applicando la regola del partitore di tensione ed è pari a $\bar{V} = \bar{V}u \cdot (j(\omega L2\text{-}1/(\omega C2)))/ \bar{Z}3 = 0.462\text{-}j3.005$ *V, la corrente* $\bar{I}2$ *è pari a* $\bar{I}2 = \bar{V}u/\bar{Z}2 = 0.462\text{-}j3.005$ *A, la corrente* $\bar{I}1 = (\bar{V}1\text{-}\bar{V}u)/\bar{Z}1 = -0.289\text{-}j3.121$ *A.*

Ritornando nel dominio del tempo si ottiene:

i1(t) = 4.43 cos(10t-1.663) A,

i2(t) = 4.3 cos(10t-1.418) A,

v(t) = 4.3cos(10t+1.418) V