Equazioni Differenziali Ordinarie		12 luglio 2006
Cognome	Nome	Firma
Proff. Arioli, Rossi, Vegni	Matricola	Sezione INF

7

Primo Appello

Esercizio 1. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = kx + y \\ \dot{y} = (2-k)x + y, \end{cases}$$

dove k è un parametro reale,

a. determinare la stabilità dell'origine al variare del parametro k.

b. Classificare le traiettorie del sistema al variare di k.

Nel caso $k = 1$,

c. trovare la matrice esponenziale associata al sistema;

d. scrivere l'integrale generale dell'equazione

e. e determinare la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $x(1) = 1$, $y(1) = -2$.

La matrice dei coefficienti del sistema è:

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 \\ (2-k) & 1 \end{bmatrix} \qquad \det A = k - 2 + k = 2k - 2 = 2(k-1)$$

nel caso $k = 1$ la matrice è singolare

Sia $k \neq 1$; l'origine è l'unico punto critico; per analizzare la stabilità occorre calcolare gli autovalori

Equazione caratteristica: $\lambda^2 - \underbrace{(k+1)}_{Tr.A}\lambda + \underbrace{2(k-1)}_{\det A} = 0$

$$\lambda = \frac{k+1 \pm \sqrt{(k+1)^2 - 8(k-1)}}{2} = \frac{k+1 \pm \sqrt{k^2 - 6k + 9}}{2} = \frac{(k+1) \pm (k-3)}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ k-1 \end{matrix} \right.$$

$\forall k \neq 1$ c'è sempre almeno un autovalore positivo (2) quindi l'origine è instabile, tuttavia per completezza analizziamo alcuni casi particolari

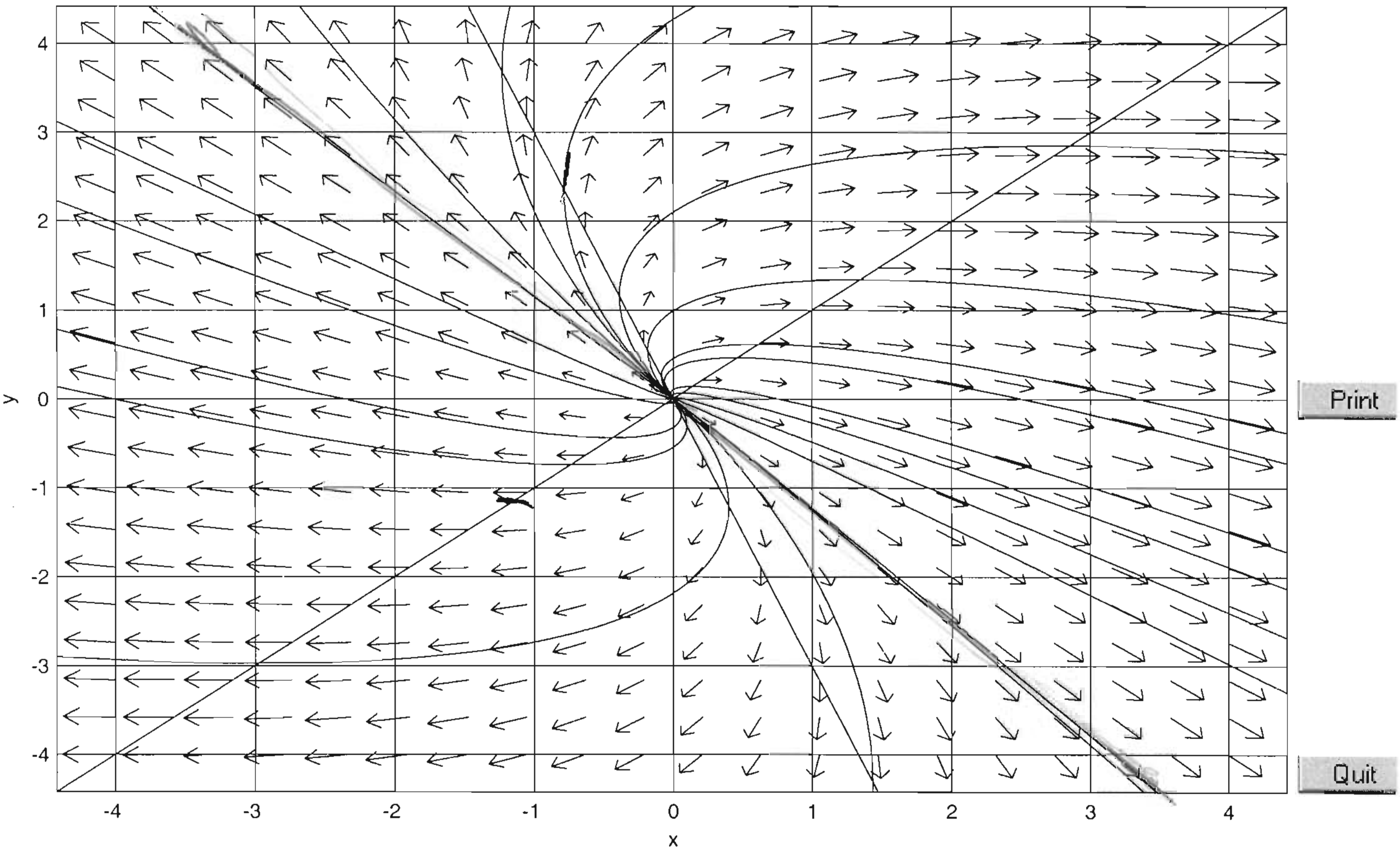
$k = 3$ due soluzioni coincidenti; nodo ad una tangente instabile

Calcolo autovettori: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\quad \begin{cases} 3x + y = 2x \\ -x + y = 2y \end{cases}$ $\quad x + y = 0 \quad y = -x$

$h_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (cfr. diagramma allegato)

$\boxed{k=3}$ Nodo a una tangente instabile
autovalore 2 doppio

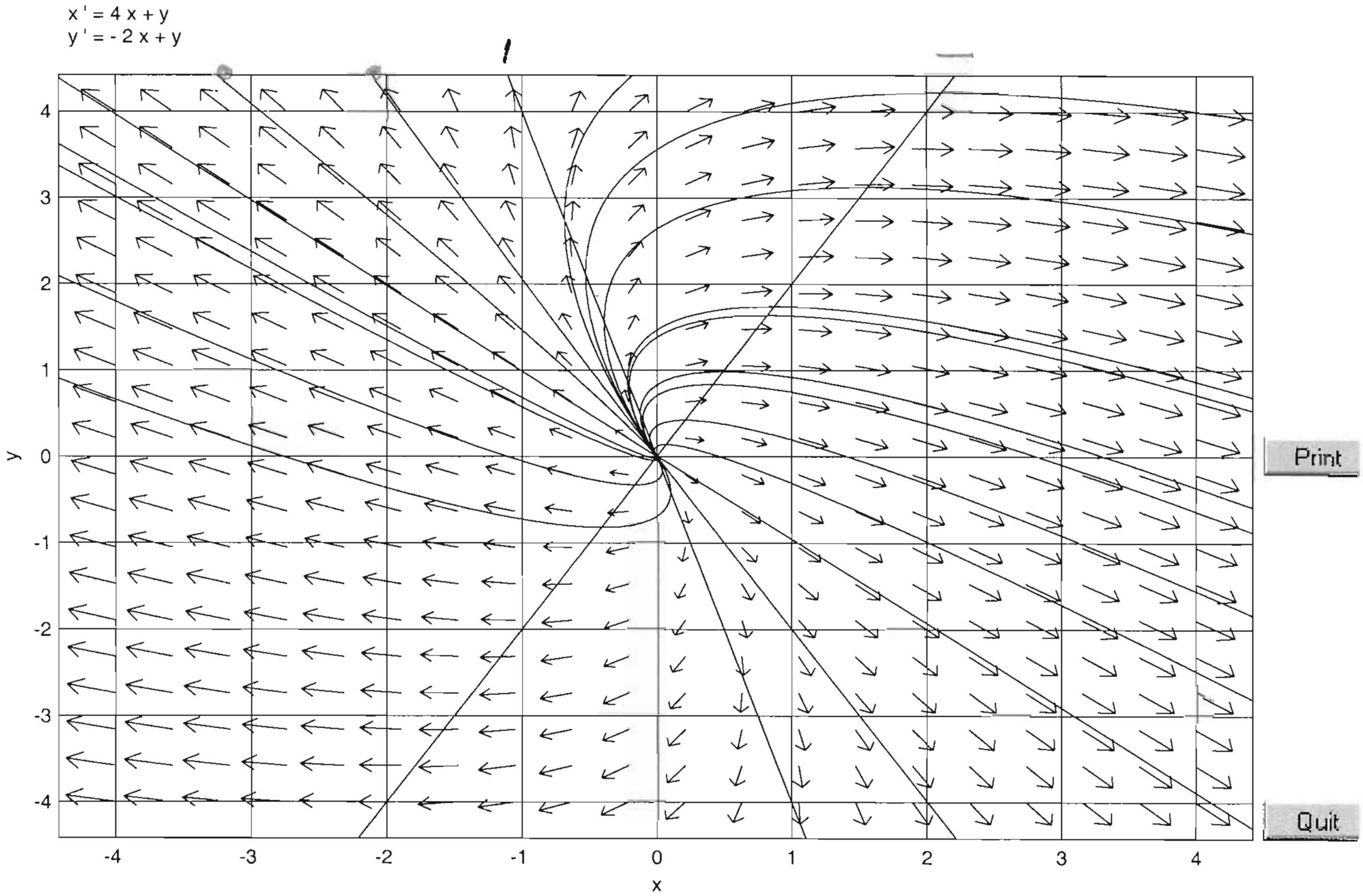
$x' = 3x + y$
$y' = -x + y$



The backward orbit from (1.3, -3.2) --> a possible eq. pt. near (0.013, -0.016).
Ready.
The forward orbit from (-1.2, 3.1) left the computation window.
The backward orbit from (-1.2, 3.1) --> a possible eq. pt. near (-0.013, 0.016).
Ready.

$\boxed{k=4}$ due autovalori distinti e positivi

l'origine è nodo a due tangenti, instabile.

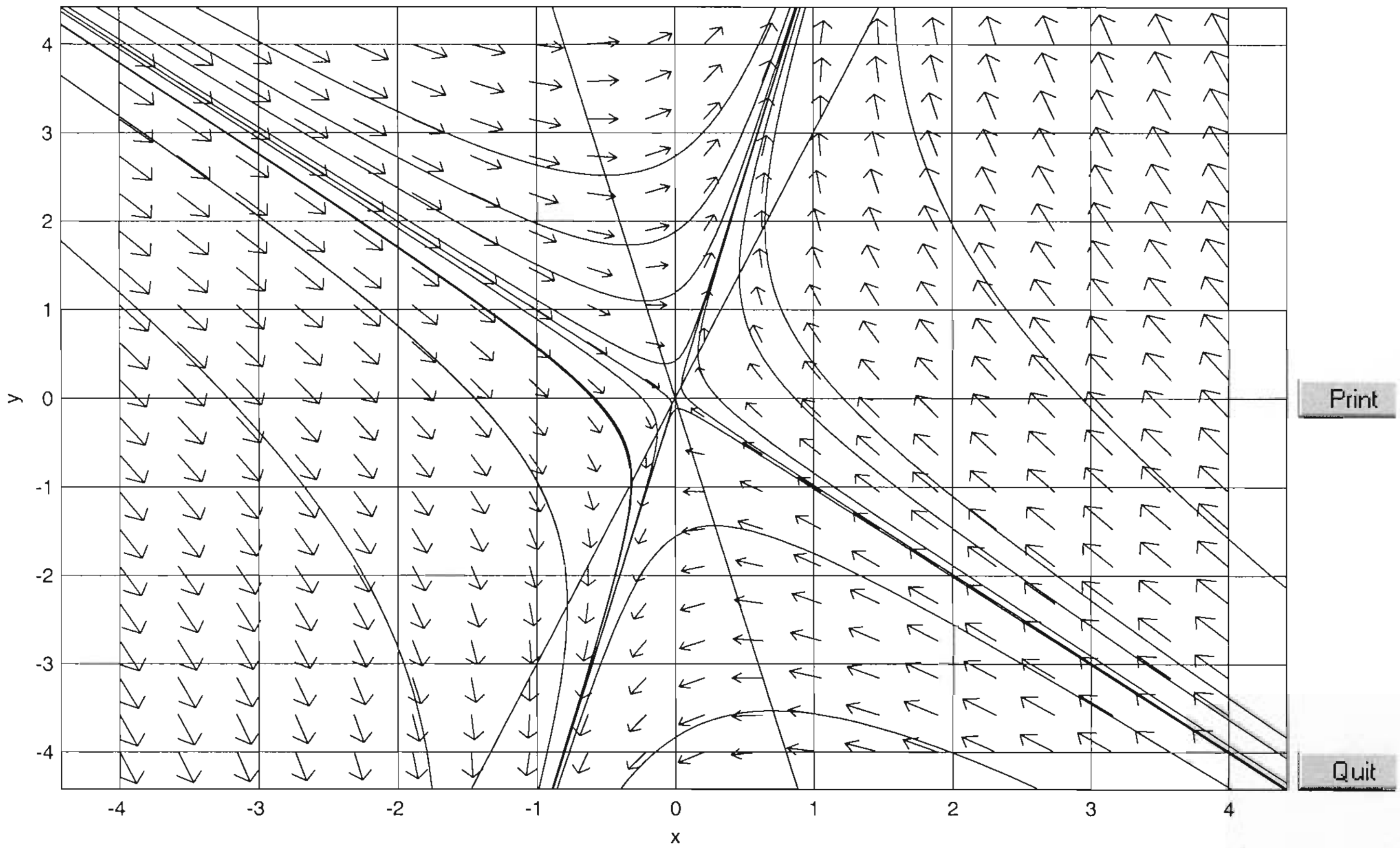


The backward orbit from (1.1, 3.1) --> a possible eq. pt. near (-0.0059, 0.012).
Ready.
The forward orbit from (-0.28, 3.2) left the computation window.
The backward orbit from (-0.28, 3.2) --> a possible eq. pt. near (-0.0062, 0.013).
Ready.

$\boxed{b = -3}$

2 autovalori distinti di segno opposto.
pto di sella

$x' = -3x + y$
$y' = 5x + y$



The backward orbit from (0.18, -0.22) left the computation window.
Ready.
The forward orbit from (0.11, -0.035) left the computation window.
The backward orbit from (0.11, -0.035) left the computation window.
Ready.

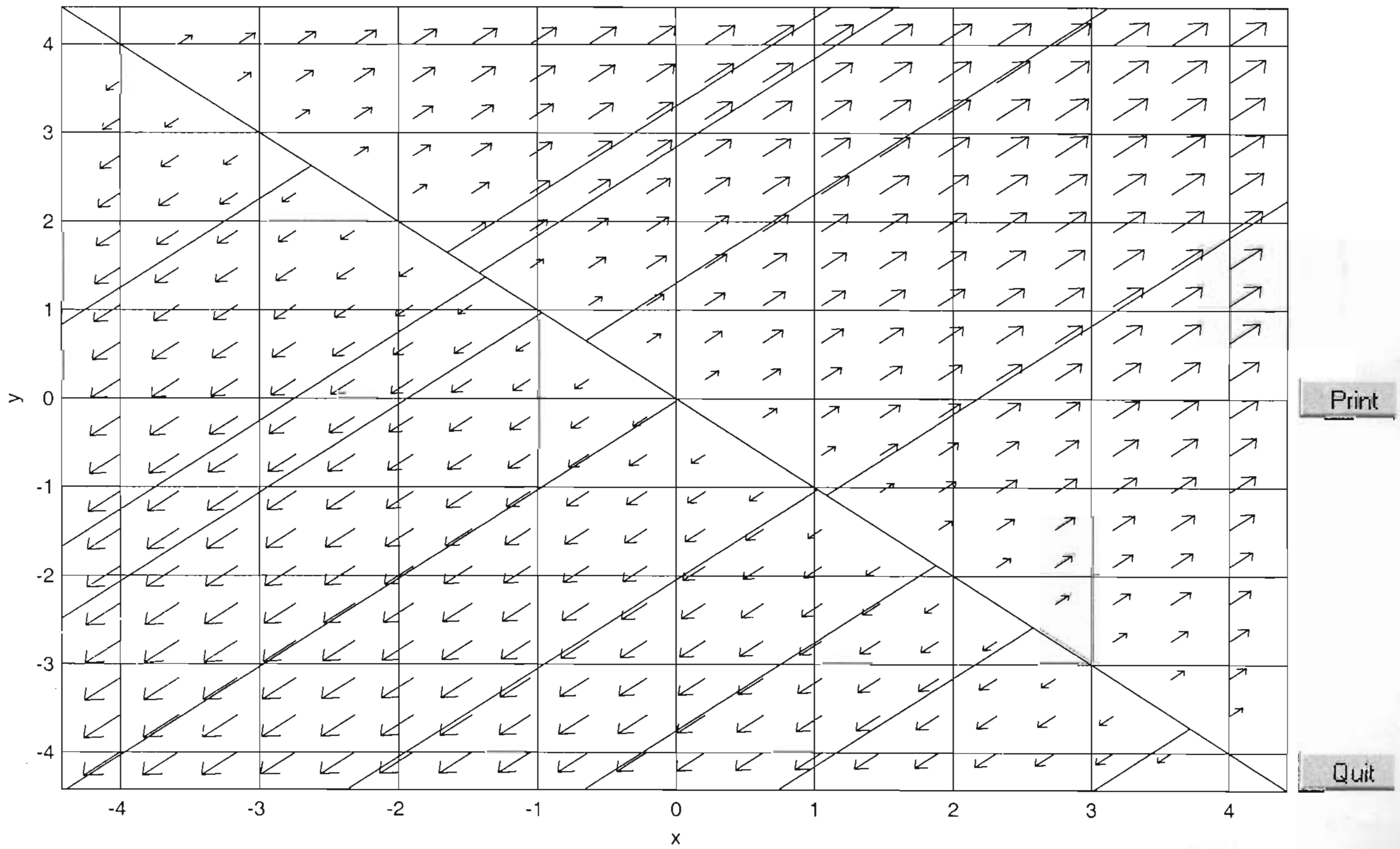
Matrice A degenere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (caso $k=1$)

Infiniti punti critici: $y = -x$ luogo punti critici

traiettorie sulle rette $y = x + k$

$k = 1$

$x' = x + y$
$y' = x + y$



The backward orbit from (1.1, -2.7) --> a possible eq. pt. near (1.9, -1.9).
Ready.
The forward orbit from (3.4, -4) left the computation window.
The backward orbit from (3.4, -4) --> a possible eq. pt. near (3.7, -3.7).
Ready.

$k > 1$ due autovalori positivi, nodo instabile (cfr. il diagramma di fase per $k=4$

$k < 1$ due autovalori distinti uno di segno opposto l'origine (instabile) è una sella.
(cfr. diagramma di fase relativo a $k=-3$

Consideriamo ora il caso $\boxed{k=1}$ dal punto di vista delle traiettorie. La matrice A è degenere e quindi si hanno infiniti punti critici.

$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0 \qquad x+y=0$

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ autovettore relativo ad autovalore nullo.

la retta $y=-x$ è luogo di punti critici.

In questo caso l'equazione caratteristica è
$\lambda^2-2\lambda=0$ con un autovalore nullo (come è ovvio avendo $\det A=0$) e $\lambda=2$

Le traiettorie si hanno dalla ricerca dell'autovettore legato a $\lambda=2$ (autovalore non nullo)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x+y=2x \\ x+y=2y \end{cases} \qquad y=x \qquad \underline{h}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le traiettorie giacciono sulle rette $y=x+k$; ciascuna contiene 1 punto critico (o soluzione stazionaria, costante) e due semirette. I punti critici sono instabili come mostra il campo di direzioni. (vedi caso $k=1$)

c) Consideriamo ora il caso $k=1$, per scrivere le soluzioni del sistema attraverso la matrice esponenziale

$0, 2$ sono gli autovalori di A, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ gli autovettori relativi

matrice diagonalizzata $\Lambda=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $\quad e^{\Lambda t}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

$$S=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad S^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At}=S e^{\Lambda t} S^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2t}+1 & e^{2t}-1 \\ e^{2t}-1 & e^{2t}+1 \end{bmatrix}$$

Integr. generale sistema $\quad Y=e^{At}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{e^{2t}+1}{2} & \frac{e^{2t}-1}{2} \\ \frac{e^{2t}-1}{2} & \frac{e^{2t}+1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} c_1\frac{e^{2t}+1}{2}+c_2\frac{e^{2t}-1}{2}=1 \\ c_1\frac{e^{2t}-1}{2}+c_2\frac{e^{2t}+1}{2}=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{c}_1=\frac{3-e^{-2t}}{2} \\ \bar{c}_2=-\frac{e^{-2t}+3}{2} \end{cases}$$

sol. probl. Cauchy $\quad Y_0=e^{At}\bar{C}$