Equazioni Differenziali Ordinarie	Seconda prova in itinere	4 luglio 2007
Cognome	**Nome**	**Firma**
Prof.ssa Furioli	**Matricola**	**Sezione INF**

Esercizio 1. È data l'equazione alle differenze

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

con funzione generatrice $f(x) = \dfrac{x + x^2}{1 + x^2}$.

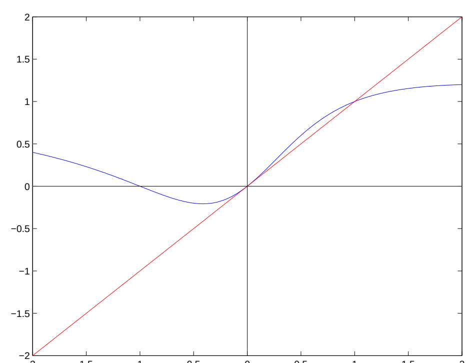
a. Trovarne i punti di equilibrio, dopo aver disegnato il grafico di f (si osservi che $f'(0) = 1$ e $f''(0) = 2$).

b. Determinarne la natura ed eventualmente il bacino di attrazione.

c. Disegnare con un diagramma a gradino le orbite relative ai dati iniziali $x_0 = -1/2$, $x_0 = 1/2$, $x_0 = -3/2$.

Soluzione.

a. La funzione generatrice è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$, dunque per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste una sola orbita $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uscente da x_0. Il grafico di $f(x) = \dfrac{x + x^2}{1 + x^2}$ è riportato in figura.



I punti di equilibrio, che verificano $f(x) = x$, sono $\bar{x}_1 = 0$ e $\bar{x}_2 = 1$.

b. Si ha $f'(x) = \dfrac{1 + 2x - x^2}{(1 + x^2)^2}$ da cui

$$f'(0) = 1, \quad f'(1) = \frac{1}{2}.$$

Poiché il punto $\bar{x}_2 = 1$ è iperbolico (cioè $|f'(\bar{x}_2)| \neq 1$), grazie al teorema sulla stabilità si ha che $\bar{x}_2$ è asintoticamente stabile, mentre il punto $\bar{x}_1 = 0$ non è iperbolico, dunque nulla si può dire per ora sulla stabilità.

Per studiare la natura del punto $\bar{x}_1 = 0$ e il bacino di attrazione di $\bar{x}_2 = 1$, determiniamo i sottointervalli $J \subset \mathbb{R}$ stabili tramite f, cioè tali che $f(J) \subset J$. Si ha

$$\begin{aligned}
&f([1, \infty)) \subset ([1, \infty)) \\
&f([0, 1]) \subset ([0, 1]) \\
&f([-1, 0]) \subset ([-1, 0]) \\
&f((-\infty, -1]) \subset ([0, 1])
\end{aligned}$$

dunque gli intervalli $[1, \infty)$, $[0, 1]$ e $[-1, 0]$ sono stabili tramite f, mentre $(-\infty, -1]$ è instabile, ma si osserva che se $x_0 \in (-\infty, -1]$, allora $x_1 = f(x_0) \in [0, 1]$, dunque basta studiare l'andamento delle orbite uscenti da $x_0 \in [0, +\infty)$.

Osserviamo inoltre che per $x \in (-\infty, 1]$ si ha $f(x) \geq x$ mentre per $x \in [1, +\infty)$ si ha $f(x) \leq x$.

Studiamo allora l'andamento delle orbite.

A) Se $x_0 > 1$, si ha $x_{n+1} = f(x_n) > 1$ per ogni $n \geq 0$; inoltre per ogni n si ha $x_{n+1} = f(x_n) \leq x_n$, dunque $\{x_n\}$ è monotona decrescente, inferiormente limitata, quindi ammette limite

$$\lim_{n \to \infty} x_n = l \in [1, +\infty)$$

ma poiché f è continua, il limite deve essere un punto fisso e quindi per forza $l = 1$ (non ci sono altri punti fissi di f in $[1, +\infty)$).

B) Se $x_0 = 1$, allora $x_n = 1$ per ogni n.

C) Se $x_0 \in (0, 1)$, allora $x_n \in (0, 1)$ per ogni n e $x_{n+1} = f(x_n) \geq x_n$ per ogni n, dunque $\{x_n\}$ è monotona crescente, superiormente limitata, dunque ammette limite in $(0, 1]$ e, come sopra, il limite deve essere un punto fisso di f e quindi $\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$.

D) Se $x_0 = 0$, allora $x_n = 0$ per ogni n.

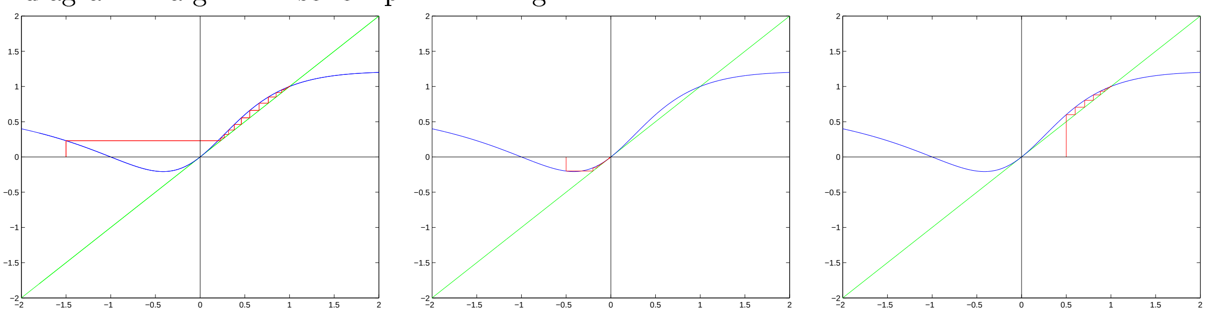
E) Se $x_0 \in (-1, 0)$, allora $x_n \in (-1, 0)$ per ogni n, inoltre $x_{n+1} = f(x_n) \geq x_n$ per ogni n e quindi, come sopra, $\{x_n\}$ è monotona crescente, superiormente limitata, quindi ammette limite $l \in (-1, 0]$ e quindi $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$.

F) Se $x_0 = -1$ allora $x_1 = 0$ e $x_n = 0$ per ogni $n \geq 1$.

G) Se infine $x_0 < -1$, allora $x_1 \in (0, 1)$ e quindi $\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$.

In definitiva, $\bar{x}_1 = 0$ è semistabile dalla sinistra e il suo bacino di attrazione è $[-1, 0]$, mentre $\bar{x}_2 = 1$ è asintoticamente stabile e il suo bacino di attrazione è $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

c. I diagrammi a gradino sono riportati in figura.



Equazioni Differenziali Ordinarie	Seconda prova in itinere	4 luglio 2007
Cognome	**Nome**	**Firma**
Prof.ssa Furioli	**Matricola**	**Sezione INF**

Esercizio 2. Studiare il sistema conservativo ad un grado di libertà generato dall'equazione

$$x'' = -x^3 + x^2 + 2x.$$

In particolare:

a. scrivere il sistema equivalente e determinarne i punti di equilibrio;

b. determinare il potenziale (disegnandone il grafico) e l'energia totale del sistema;

c. disegnare le traiettorie nel piano delle fasi, specificando il verso di percorrenza;

d. determinare i livelli energetici corrispondenti a traiettorie periodiche e precisare se esistono traiettorie illimitate.

e. La natura dei punti di equilibrio poteva essere dedotta utilizzando la linearizzazione?

Soluzione.

a. Il sistema di due equazioni del primo ordine equivalente all'equazione del secondo ordine proposta è

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^3 + x^2 + 2x \end{cases}$$

i cui punti critici sono $A = (-1, 0)$, $O = (0, 0)$ e $B = (2, 0)$.

Osserviamo inoltre che $f(x, y) = x$ e $g(x, y) = -x^3 + x^2 + 2x$ sono funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, dunque per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ e per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esiste un'unica soluzione $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ definita in un intorno di t_0 tale che $\phi(t_0) = x_0$ e $\psi(t_0) = y_0$.

b. L'energia totale del sistema è

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \int_{x_0}^{x} (-t^3 + t^2 + 2t)\,\mathrm{d}t, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

e scegliendo $x_0 = 0$ si ottiene

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2.$$

In particolare l'energia potenziale è $U(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$ e sappiamo già dal teorema che i punti di minimo forte dell'energia potenziale sono punti di equilibrio stabile ma non asintoticamente per il sistema. Per altro, i punti di minimo per $U(x)$ si trovano calcolando la derivata prima che è (ovviamente) $U'(x) = -(-x^3 + x^2 + 2x)$ e sono $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

c. Poiché l'energia totale $E(x, y)$ è un integrale primo per il sistema, sappiamo che le linee di livello sono unioni di orbite e che ogni orbita si trova su una linea di livello dell'energia. Studiamo quindi le curve nel piano x, y corrispondenti a $E(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 = c \\ \iff\ & y = \pm\sqrt{2\left(c - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\right)} \\ \iff\ & y = \pm\sqrt{2(c - U(x))}, \quad c - U(x) \geq 0 \end{aligned}$$

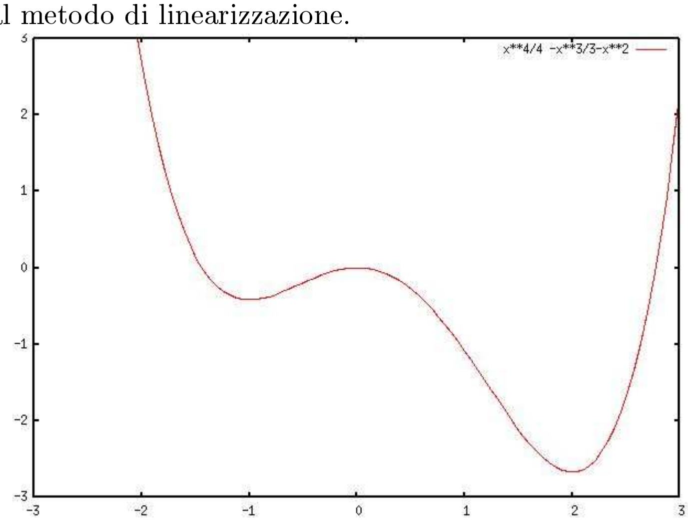
Dobbiamo quindi studiare il dominio di tali funzioni $c \geq U(x)$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

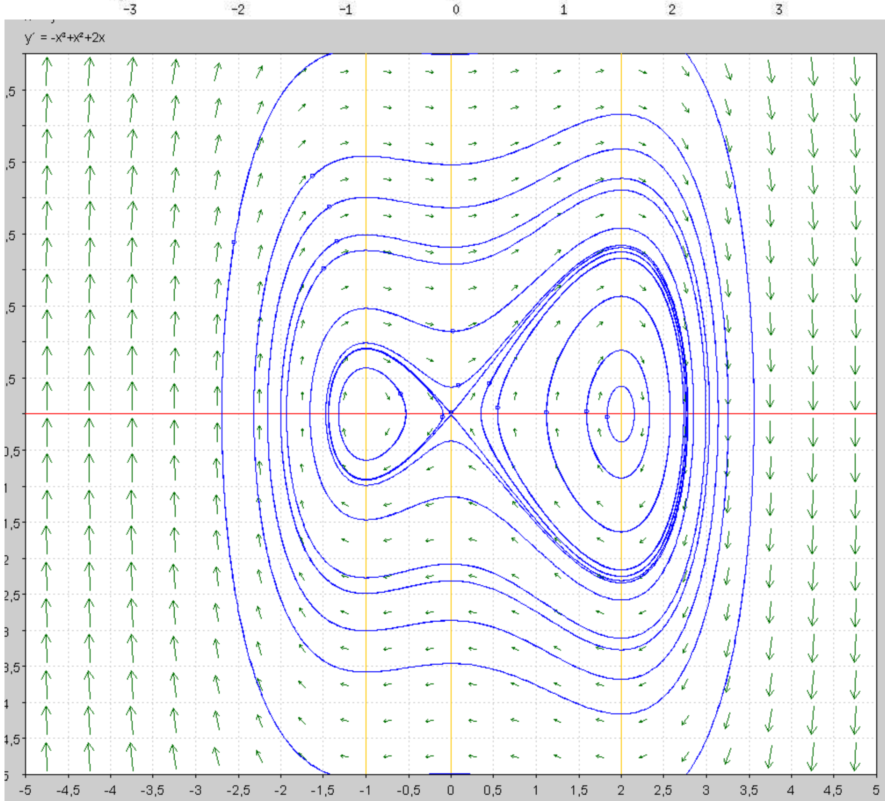
In base al grafico di $U(x)$ riportato in figura si hanno i casi seguenti:

A) se $c < -\frac{8}{3}$, non esistono orbite corrispondenti al livello di energia c;
B) se $c = -\frac{8}{3}$, esiste una sola orbita stazionaria in $B = (2, 0)$;
C) se $c \in (-\frac{8}{3}, -\frac{5}{12})$, esiste un'orbita chiusa (simmetrica rispetto all'asse x) che racchiude il punto critico B;
D) se $c = -\frac{5}{12}$, esiste un'orbita chiusa intorno a B e l'orbita stazionaria in $A = (-1, 0)$;
E) se $c \in (-\frac{5}{12}, 0)$, esistono due orbite chiuse, simmetriche rispetto all'asse x che racchiudono l'una il punto critico A e l'altra il punto critico B;
F) se $c = 0$, esistono 3 orbite: l'orbita stazionaria nel punto critico $O = (0, 0)$, un'orbita aperta che parte ed arriva in O racchiudendo il punto critico A e un'orbita aperta che parte ed arriva in O racchiudendo il punto critico B. Si tratta di orbite NON periodiche;
G) se $c > 0$ esiste un'unica orbita chiusa, simmetrica rispetto all'asse x che racchiude al suo interno i tre punti critici.

d. Le orbite sono chiuse (e quindi periodiche) per $c \geq -\frac{8}{3}$, $c \neq 0$ e sono tutte limitate, poiché sono racchiuse in insiemi limitati del piano.

e. I punti A e B sono centri, dunque la loro natura non si sarebbe potuta dedurre dal metodo di linearizzazione; invece il punto O è un punto di sella, dunque la sua natura poteva essere dedotta anche dal metodo di linearizzazione.





Equazioni Differenziali Ordinarie	Seconda prova in itinere	4 luglio 2007
Cognome	**Nome**	**Firma**
Prof.ssa Furioli	**Matricola**	**Sezione INF**

Esercizio 3. Sia dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2 y e^{x^2} \\ \dot{y} = -2xy^2 e^{x^2}(1+x^2). \end{cases}$$

a. Trovarne i punti critici.
b. Determinare un integrale primo.
c. Disegnare nel piano delle fasi un grafico dettagliato delle orbite del sistema, giustificando i risultati trovati.
d. Determinare la stabilità/instabilità dei punti critici.

Soluzione.

a. Si osservi inizialmente che $f(x,y) = 2x^2 y e^{x^2}$ e $g(x,y) = -2xy^2 e^{x^2}(1+x^2)$ sono di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, dunque per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ e per ogni $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ esiste un'unica soluzione $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ definita in un intorno di t_0 tale che $\phi(t_0) = x_0$ e $\psi(t_0) = y_0$.

I punti critici si trovano risolvendo

$$\begin{cases} 2x^2 y e^{x^2} = 0 \\ 2xy^2 e^{x^2}(1+x^2) = 0 \end{cases}$$

e quindi sono tutti i punti dell'asse x e tutti i punti dell'asse y. Poiché non sono punti isolati (e quindi sono sicuramente degeneri), non sarebbe possibile studiarne la stabilità tramite il metodo di linearizzazione.

b. Il sistema è Hamiltoniano: infatti la funzione $H(x,y) = x^2 y^2 e^{x^2}$ è tale che

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y). \end{cases}$$

Un altro modo per trovare un integrale primo è quello di determinare le traiettorie $y = y(x)$ tramite l'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{2xy^2 e^{x^2}(1+x^2)}{2x^2 y e^{x^2}}$$

per $xy \neq 0$, oppure $x = x(y)$ tramite l'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{2x^2 y e^{x^2}}{2xy^2 e^{x^2}(1+x^2)}$$

sempre per $xy \neq 0$.

Le traiettorie dunque si possono studiare implicitamente tramite le linee di livello dell'integrale primo

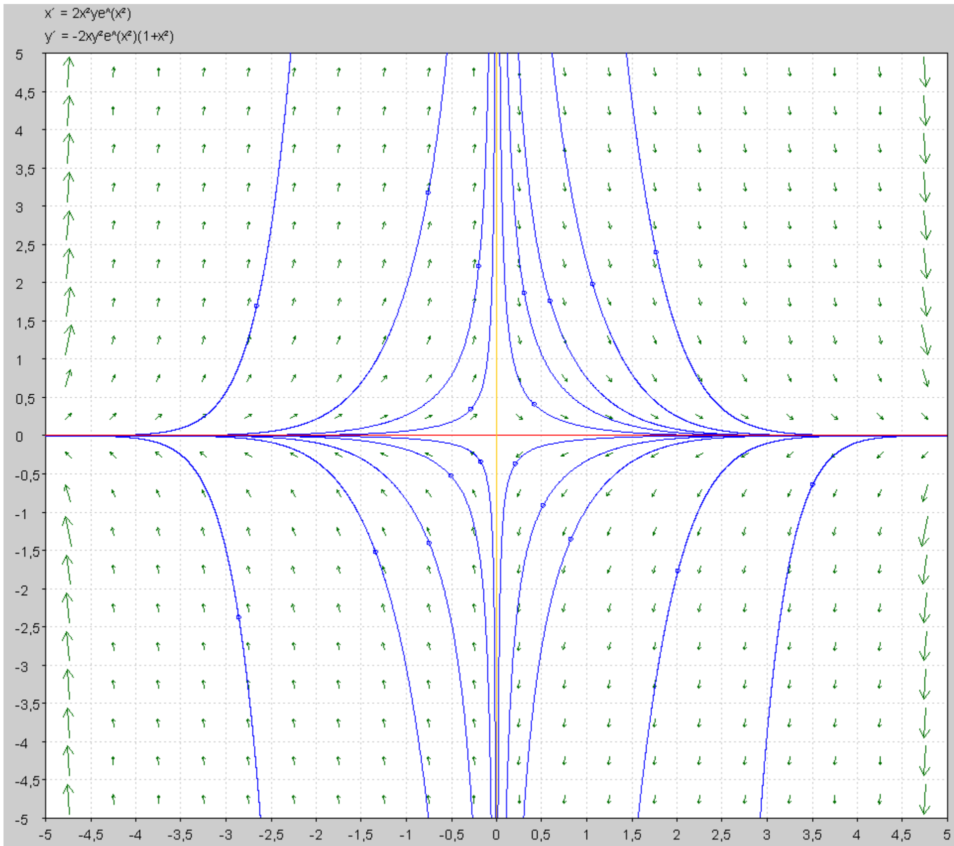
$$H(x,y) = x^2 y^2 e^{x^2} = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Si osserva subito che $c \geq 0$ e che se $c = 0$ si trovano gli assi $x = 0$ e $y = 0$ che sono luogo di punti critici. Se invece $c > 0$ allora le traiettorie si possono esplicitare (ad esempio) rispetto a y e quindi

$$y = \pm \frac{\sqrt{c}}{|x|} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \neq 0$$

Dunque, per ogni $c > 0$ esistono 4 orbite, ognuna racchiusa in un quadrante. Il ritratto di fase, insieme ai versi di percorrenza, è riportato in figura.

c. Tutti i punti critici sono instabili, poiché se x_0 si trova nell'intorno di un punto critico, l'orbita uscente da x_0 si allontana definitivamente da tale punto critico.



Equazioni Differenziali Ordinarie	Seconda prova in itinere	4 luglio 2007
Cognome	**Nome**	**Firma**
Prof.ssa Furioli	**Matricola**	**Sezione INF**

Esercizio 4. Sia dato il sistema non lineare
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^3 \\ \dot{y} = -x - x^2 y. \end{cases}$$
Dopo aver dato la definizione di funzione di Liapunov per un sistema relativa ad un punto critico (x_0, y_0), determinare la natura dell'origine come punto critico utilizzando un'opportuna funzione di Liapunov del tipo $V(x,y) = ax^{2m} + by^{2n}$, $a > 0$, $b > 0$, m, $n \in \mathbb{N}$. Enunciare precisamente ogni risultato sulla funzione di Liapunov utilizzato nella risoluzione di questo esercizio.

Si poteva studiare la natura dell'origine tramite il metodo di linearizzazione?

Soluzione.

Date $f,g \in C^1(D)$ con $D \subset \mathbb{R}^2$ un aperto, dato il sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$
e dato $(x_0, y_0) \in D$ un punto critico per il sistema, si dirà funzione di Liapunov per il sistema relativa al punto critico (x_0, y_0) ogni funzione $V(x,y) \in C^1(U)$, ove U è un intorno di (x_0, y_0) tale che

(1) $V(x,y) \geq 0$ in U e $V(x,y) = 0 \iff (x,y) = (x_0, y_0)$;
(2) $\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}(x,y) f(x,y) + \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) g(x,y) \leq 0$ in U.

Nel nostro caso $f(x,y) = -x + y^3$, $g(x,y) = -x - x^2 y$ sono di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, $O = (0,0)$ è un punto critico (anzi, è l'unico punto critico), dunque ricerchiamo una funzione di Liapunov relativa a O del tipo $V(x,y) = ax^{2m} + by^{2n}$, $a > 0$, $b > 0$, m, $n \in \mathbb{N}$ (in modo che la prima proprietà sarà senz'altro verificata). Poiché
$$\dot{V}(x,y) = -2max^{2m} + 2max^{2m-1}y^3 - 2nbxy^{2n-1} - 2nbx^2y^{2n},$$
se
$$\begin{aligned} 2m - 1 = 1 &\iff m = 1 \\ 2n - 1 = 3 &\iff n = 2 \\ 2a = 4b & \text{ (ad esempio } b = 1,\ a = 2) \end{aligned}$$
avremo $V(x,y) = 2x^2 + y^4$ e
$$\dot{V}(x,y) = -4x^2 - 4x^2y^4 \leq 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
Poiché vale il teorema:

Se esiste una funzione di Liapunov relativa al punto critico (x_0, y_0), allora il punto è stabile

possiamo dedurre che O è stabile.

Attenzione: non possiamo dedurre che O è asintoticamente stabile perché NON è vero che $\dot{V}(x,y) < 0$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$!! Infatti
$$\dot{V}(x,y) = -4x^2 - 4x^2y^4 = -4x^2(1 + y^2) = 0 \iff x = 0$$
dunque si annulla su tutto l'asse y. Però vale il risultato:

Se esiste una funzione di Liapunov $V(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ relativa a (x_0, y_0), se $\lim V(x,y) = +\infty$ se $|(x,y)| \to +\infty$, se $\{(x_0, y_0)\}$ è l'unico insieme positivamente invariante in $\{(x, y \in \mathbb{R}^2$:

$\dot{V}(x,y)=0\}$, *allora* (x_0,y_0) *è asintoticamente stabile e se* (x_0,y_0) *è l'unico punto critico, allora il suo bacino d'attrazione è* $\mathbb{R}^2$*.*

Nel nostro caso, poiché si osserva che per $(x,y)=(0,y)$ con $y\neq 0$ si ha $\dot{x}=y^3\neq 0$, l'asse y non è positivamente invariante (cioè le orbite che passano per l'asse y ne escono subito), allora per il risultato precedente si può dedurre che O è asintoticamente stabile e il suo bacino d'attrazione è $\mathbb{R}^2$.

Il ritratto di fase è riportato in figura.