Linguaggi Formali e Compilatori
Prof. Crespi Reghizzi
Soluzioni della prova scritta[1]
06/10/2004

Revisione 25.01.2005

1 Espressioni regolari e automi finiti 20%

1. Progetto di espr. regolare. Alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$. Con riferimento ai linguaggi
   $R_1 = \{x \in \Sigma^* \mid x \text{ contiene due sottostringhe } ab\}$
   $R_2 = \{x \in \Sigma^* \mid x \text{ contiene un numero(anche nullo) pari di } a\}$
   $R = R_1 \setminus R_2$

   (a) Scrivete le espr. reg. di R_1, R_2, R con i soli operatori di base $\{\cup, *, .\}$

   (b) Scrivete l'espr. reg. di R usando anche l'operatore $\neg$ e $\cap$ (ma non la differenza insiemistica).

Soluzione

(a)

$$R_1 = b^* a^* abb^* a^* abb^* a^*$$

$$R_2 = (b^* ab^* a)^* b^* \text{ opp.} (b^*(ab^*a)^*)^*$$

Una frase di R è una frase di R_1 con il vincolo di avere un numero dispari di a.
Da cui:

$$R = b^* \{a^r abb^* a^s abb^* a^t \mid r + s + t \text{ dispari}\}$$

Si danno tre casi: r, s pari, t dispari; r, t pari, s dispari; s, t pari, r dispari.

$$R = b^*((a^2)^* abb^* (a^2)^* abb^* (a^2)^* a \mid \ldots \mid \ldots)$$

(b) $R = R_1 \cap \neg R_2$

[1] Tempo 2 ore 30'. Libri e appunti personali possono essere consultati. Per superare la prova l'allievo deve dimostrare la conoscenza di tutte e 5 le parti.

2. Dato il linguaggio regolare

$$L = (\neg(b^+) \cap (aa \mid bb)^*)^+$$

   (a) Costruite, mostrando i passaggi, il riconoscitore deterministico minimo del linguaggio.
   (b) Calcolate l'espr. reg. senza gli operatori $\neg, \cap$

Soluzione

Vediamo due approcci per costruire il riconoscitore di L:

Composizione di automi

(a) Costruire il riconoscitore minimo A_1 di $\neg(b^+)$
(b) Costruire il riconoscitore minimo A_2 di $(aa \mid bb)^*$
(c) Costruire la macchina $A = A_1 \times A_2$ prodotto che riconosce $R = \neg(b^+) \cap (aa \mid bb)^*$
(d) Osservare che $L = R^+ \equiv R$ per la idempotenza di stella e croce.
(e) Calcolare la e.r. di $L(A)$ con il metodo di eleiminazione opp. risolvendo le eq.

Osservazione del linguaggio

Si vede facilmente che l'intersezione R contiene la stringa vuota e le stringhe contenenti almeno una a tra quelle appartenenti a $(aa \mid bb)^*$, ossia

$$R = \varepsilon \mid (a^2 \mid b^2)^* a^2 (a^2 \mid b^2)^*$$

da cui è facile ricavare, a occhio (o con il metodo di McNaughton e Yamada) l'automa.

2 Grammatiche 20%

1. Progettate una grammatica (consentita la forma EBNF) per il ling. di alfabeto $\{(,), v, +, \times\}$ così definito, con riferimento al linguaggio delle espressioni aritmetiche.

   - Il prodotto ha precedenza sulla somma
   - Gli operatori sono associativi a sinistra
   - Una espressione moltiplicativa con tre o più operandi $o_1 \times o_2 \times o_3 \times \ldots$ deve essere racchiusa tra parentesi. (Le parentesi sono possibili anche con uno o due operandi.)
     Ad es. $v \times v \times (v \times v)$ non è valida, ma è valida $(v \times v \times (v \times v))$

   (a) Progettate la grammatica

   (b) Disegnate l'albero sint. della frase $v + (v \times (v + v) \times v) \times (v \times v)$

Soluzione

$E \rightarrow T(+T)^*$
$T \rightarrow F \mid F \times F \mid '('F \times F(\times F)^{+}')'$
$F \rightarrow v \mid '('E')'$

2. Il ling. L descrive la serie di operazioni nel carrello di un negozio virtuale.

Alfabeto delle azioni	Le regole di validità
i inserisce un articolo nel carrello	sempre possibile
t toglie un articolo dal carrello	t è lecito solo se il carrello non è vuoto
a azzera il prezzo degli articoli presi	a è possibile e obbligatorio immediatamente dopo l'azione t, se essa ha svuotato il carrello

Esempi validi	Esempi non validi
$i, iit, iitta, itaiittai$	$t, ti, iita, ia, ait$

(a) Descrivete il ling. a parole o con un predicato caratteristico.

(b) Scrivete la grammatica (consentita la forma EBNF)

(c) Disegnate un albero sintattico sufficientemente rappresentativo.

Soluzione

Astraendo dall'alfabeto si nota che i e t possono essere visti come una marca di apertura e di chiusura di un ling. a parentesi.
Sia D il ling. di Dyck di alfabeto i, t
sia N il ling. $\{i^n t^n \mid n \geq 1\}$
e sia P il ling. dei prefissi del ling. di Dyck D.

Il ling. L ha la struttura seguente

$$\underbrace{x_1 a x_2 a \ldots x_n a}_{x_i \in N} \; i \; \underbrace{y}_{y \in P}$$

La grammatica è:
$S \to (Na)^+ iP \mid (Na)^+ \mid iP$
$N \to iNt \mid it$
$P \to i^+ DtD \mid i^*$

Domanda relativa alle esercitazioni 20%

Vedi fogli separati

3 Grammatiche e analisi sintattica 20%

Dato il linguaggio

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \cup \{a^{2n} c b^{2n} \mid n \geq 0\}$$

1. Progettate una grammatica adatta all'analisi LL oppure LR.
2. Verificate che la grammatica sia, in conformità con la vostra scelta, LL(k) o LR(k).

3.1 Soluzione

LL(1): A prima vista il linguaggio potrebbe sembrare non essere LL(k), per ogni k, perché i due sottolinguaggi iniziano allo stesso modo con un numero qualsiasi di a. Ma la solita astuzia di mettere in comune le derivazioni dei due sottolinguaggi risolve facilmente il problema. La grammatica LL(1) è:

$$\begin{array}{l}
S \rightarrow aAb \\
S \rightarrow \varepsilon \\
S \rightarrow c \\
\hline
A \rightarrow aBb \\
A \rightarrow \varepsilon \\
A \rightarrow c \\
\hline
B \rightarrow aAb \\
A \rightarrow \varepsilon
\end{array}$$

LR(1): La grammatica LR(1) è:

$$\begin{array}{l}
S \rightarrow X \mid Y \\
X \rightarrow aXb \mid \varepsilon \\
Y \rightarrow a^2 Y b^2 \mid c
\end{array}$$

4 Traduzione e semantica 20%

1. Le compagnie aeree che volano tra le città indicate sono

Berlin	Milano	AZ, LH
Berlin	Paris	AF, LH
Milano	Paris	AF, AZ
Milano	Roma	AZ

Il ling. sorgente di alfabeto $\{B, M, P, R\}$ è l'insieme dei cammini, anche ciclici, da Milano a Milano, es.

$$x = \ MBPBMRM$$

La sua traduzione di alfabeto pozzo $\{AF, AZ, LH\}$ contiene le sequenze delle compagnie aeree possibili per quell'itinerario, ad es.

$$\tau(x) = \{AZ\ AF\ AF\ AZ\ AZ\ AZ,\ LH\ AF\ AF\ AZ\ AZ\ AZ,\ \ldots\}$$

(a) Progettate un automa trasduttore per calcolare la traduzione.

(b) Progettate una gramm. a attributi per calcolare come attributo una stringa di alfabeto $\{AF, AZ, LH\}$ appartenente a $\tau(x)$ tale da approssimare il seguente criterio: la varianza del numero di voli con ogni compagnia deve essere minima. Ad es. per l'itinerario precedente:
$LH\ AF\ AF\ LH\ AZ\ AZ$

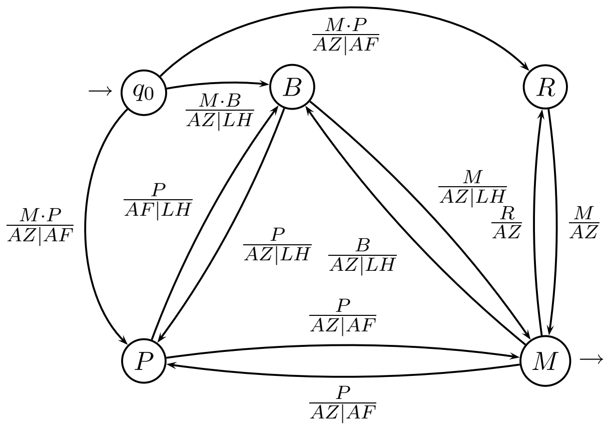
(c) Disegnate un albero decorato con gli attributi

(d) Disegnate i grafi delle dipendenze funzionali e indicate quali algoritmi di valutazione si possono applicare.

Soluzione

(a) Automa trasduttore non deterministico

Le frasi più corte sono $M(B \mid P \mid R)M$.



(b) Gramm. a attributi

Sintassi: $\Sigma = \{b, m, p, r\}$

$S \to mM$

$M \to bB$
$M \to pP$
$M \to rR$

$B \to mM$
$B \to pP$
$B \to m$

$P \to \dots$

$\dots$

Attributi e funzioni semantiche:

c	ereditato	è un record con i campi h, f, z, i contatori delle 3 compagnie
v	ereditato	sequenza delle compagnie scelte
$iter$	sintetizzato	lla sequenza finalke delle compagnie scelte
$min(a_1, a_2)$		quella tra le compagnie a_1, a_2 che ha viaggiato meno
$aggiorna(c, a)$		aggiorna i totali c aggiungendo la compagnia a

$S \to mM$	$c_1 := (0,0,0)$ $v_1 := \varepsilon$
$M \to bB$	$c_1 := aggiorna(c_0, min(c_0.h, c_0.z))$ $v_1 := cat(v_1, min(c_0.h, c_0.z)$
$M \to pP$	$\dots$
$M \to rR$	$c_1 := aggiorna(c_0, 'AZ')$ $v_1 := cat(v_1, 'AZ')$
$B \to mM$	$\dots$
$B \to pP$	$\dots$
$B \to m$	$iter_0 := cat(v_0, min(c_0.h, c_0.z))$
$P \to \dots$	$\dots$
$\dots$	

Valutazione: La grammatica è valutabile con una scansione del tipo L