# Esercizio 2

Si consideri la seguente relazione di ricorrenza:

$$\begin{cases} T(n) = T\left(\dfrac{n}{3}\right) + 5n & \text{per } n > 1 \\ T(n) = 1 & \text{per } n = 1 \end{cases}$$

- Applicare il master theorem del divide et impera per avere una stima asintotica di *T(n)*
- Risolvere in modo esatto la relazione di ricorrenza usando il metodo iterativo
- Verificare per induzione la soluzione trovata al punto precedente

# Esercizio 2 – Soluzione

- Si osserva che a=1, b =3, k=1
- Siamo quindi nel terzo caso ($a < b^k$) del master theorem
- Pertanto T(n) è $\Theta(n)$

# Esercizio 2 – Soluzione

- Espandendo la relazione iterativamente:

$$T(n) = T\left(n/3\right) + 5n = 5n + T(n/9) + 5(n/3) =$$

$$= 5n(1 + 1/3 + 1/9) + T(n/27) =$$

$$= 5n\sum_{i=0}^{d-1}(1/3)^i + T(n/3^d)$$

La ricorsione termina quando d = $\log_3 n$

$$T(n) = 5n\sum_{i=0}^{\log_3 n - 1}\left(\frac{1}{3}\right)^i + 1 = 5n\frac{1-\left(1/3^{\log_3(n)}\right)}{2/3} + 1 =$$

$$= 5n \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 = \frac{15(n-1)}{2} + 1 = \Theta(n)$$

# Esercizio 2 – Soluzione

- **Base**: $T(n) = \frac{15(1-1)}{2} + 1 = 1 \quad \text{[OK]}$
- **Induzione**:

$$\begin{cases} T(n) = T(n/3) + 5n \\ T(n/3) = \frac{15(n/3-1)}{2} + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(n) = T(n/3) + 5n = \frac{15(n/3-1)}{2} + 1 + 5n =$$

$$= \frac{5n - 15 + 10n}{2} + 1 = \frac{15(n-1)}{2} + 1 \quad \text{[c. v. d.]}$$