ALGEBRA E LOGICA MATEMATICA
II prova in itinere
4/2/2004

1) Scrivere una formula f(A,B,C) che ammetta la seguente tavola di verità e contenga solo i connettivi ~ e $\Rightarrow$

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Scrivere una formula g(A,B,C), che non sia una tautologia, tale che $\sim f(A,B,C) \vdash_L g(A,B,C)$.
Nella formula trovata sostituire tutte le occorrenze di A,B,C rispettivamente con $\forall x A_1^1(x)$, $\exists x A_1^2(x,y)$, $\sim A_1^1(x)$. Nella formula così trovata il termine x è libero per y? Dire se la formula trovata è logicamente valida e portarla in forma normale prenessa.

2) Scrivere in un opportuno linguaggio del primo ordine la frase:
"Ogni numero primo è somma di quattro quadrati e non vale il viceversa"

3) Si consideri la formula del I ordine
$\forall x(A_1^1(x) \Rightarrow (\sim A_1^2(x,z) \Rightarrow (\sim A_1^2(x,f_1^2(y,z)) \vee A_1^2(x,y))))$
Si discuta la verità della formula data e delle sue chiusure esistenziale ed universale nell'interpretazione che ha come dominio N, in cui f_1^2 è l'ordinario prodotto di numeri reali, i predicati $A_1^1(x)$ e $A_1^2(x,y)$ significano rispettivamente "x è primo" e "x divide y".
Dimostrare che la formula non è logicamente valida né logicamente contraddittoria (cioè falsa per ogni interpretazione).

TRACCIA DI SOLUZIONE

1) $\sim f(A,B,C)=(\sim A\wedge B\wedge \sim C)\vee (\sim A\wedge B\wedge C)\vee (A\wedge B\wedge \sim C)= (\sim A\wedge B)\vee (A\wedge B\wedge \sim C)= B\wedge(\sim A\vee (A \wedge \sim C))= B\wedge(\sim A\vee \sim C)$
quindi $f(A,B,C)= \sim(B\wedge(\sim A\vee \sim C))= \sim B\vee(A\wedge C)=B\Rightarrow\sim(A\Rightarrow\sim C)$
Per il teorema di correttezza e completezza nella formulazione forte una formula A si deduce sintatticamente da una formula B se e solo se si deduce semanticamente da B. La formula $g(A,B,C)$ sarà perciò una formula che assume il valore 1 ogni volta che assume il valore 1 la formula $\sim f(A,B,C)$.
Ci sono vari modi di trovare $g(A,B,C)$, i più semplici sono prendere $g(A,B,C)=B$ o $g(A,B,C)= (\sim A\vee \sim C)$.
Effettuiamo ora le sostituzioni. Se prendiamo $g(A,B,C)=B$ abbiamo la formula del I ordine $\exists x A_1^2(x,y)$, in tale formula il termine x non è libero per y in quanto esiste un'occorrenza libera di y nel campo di azione di un quantificatore che quantifica x, la formula è già in f.n.p. e ovviamente non è logicamente valida (basta pensare ad un dominio formato da un solo elemento e alla relazione vuota come interpretazione di A_1^2).
Se prendiamo $g(A,B,C)= (\sim A\vee \sim C)$ abbiamo la formula del I ordine $\sim\forall x A_1^1(x)\vee A_1^1(x)$. Anche qui il termine x è libero per y perché non ci sono quantificatori che quantificano y. Per portarla in f.n.p. scriviamo prima la formula usando solo i quantificatori $\sim$ e $\Rightarrow$. Abbiamo $\forall x A_1^1(x) \Rightarrow A_1^1(x)$.
La f.n.p. è $\exists y(A_1^1(y) \Rightarrow A_1^1(x))$. Questa formula è logicamente valida in quanto è un assioma logico di K.

2) Il linguaggio del I ordine che serve per esprimere la frase deve contenere almeno 5 variabili x,y,z,u,v, una lettera funzionale f di arità 2 (per esprimere il prodotto) (tale lettera può essere sostituita da una lettera funzionale di arità 1 che dovrà essere interpretata come l' operazione che dato un numero restituisce il suo quadrato) ed una lettera funzionale g di arità 4 (per esprimere la somma di 4 addendi), due lettere predicative una A di arità 1 ed una B di arità 2 (dove A(x) è interpretato come "x è primo" e B(x,y) è interpretato come"x è uguale ad y").
A questo punto possiamo scrivere
$\forall x\exists y\exists z\exists u\exists v(A(x) \Rightarrow B(x,g(f(y,y),f(z,z),f(u,u),f(v,v))))\wedge$
$\exists x\exists y\exists z\exists u\exists v(B(x,g(f(y,y),f(z,z),f(u,u),f(v,v)))\wedge\sim A(x))$
Ovviamente il predicato A può essere specificato attraverso l'uso del predicato C(x,y) da interpretare come x divide y , del predicato B(x,y) e di una costante a da interpretare come 1, in questo modo
$\forall y(C(y,x)\Rightarrow B(y,a)\vee B(y,x))$
La formula allora diventa
$\forall x\exists y\exists z\exists u\exists v(\forall y(C(y,x)\Rightarrow B(y,a)\vee B(y,x))\Rightarrow B(x,g(f(y,y),f(z,z),f(u,u),f(v,v)))\wedge$
$\exists x\exists y\exists z\exists u\exists v(B(x,g(f(y,y),f(z,z),f(u,u),f(v,v)))\wedge\sim\forall y(C(y,x)\Rightarrow B(y,a)\vee B(y,x)))$
che forse è più chiara introducendo un'altra variabile w
$\forall x\exists y\exists z\exists u\exists v(\forall w(C(w,x)\Rightarrow B(w,a)\vee B(w,x))\Rightarrow B(x,g(f(y,y),f(z,z),f(u,u),f(v,v))$
$\wedge\exists x\exists y\exists z\exists u\exists v(B(x,g(f(y,y),f(z,z),f(u,u),f(v,v)))\wedge\sim\forall w(C(w,x)\Rightarrow B(w,a)$
$\vee B(w,x)))$.

3) Nella interpretazione suggerita la formula data si legge come

“per ogni numero naturale x, se x è primo allora se x non divide y allora o x non divide il prodotto di y per z o x divide z”, che è una frase vera in quanto preso un qualunque intero x o

x non è primo e allora la frase “se x è primo allora…” è vera perché è falso l’antecedente o

x è primo

allora assegnato un valore a y e a z

se l’assegnamento è tale che x divida y la frase “se x non divide y allora…” è soddisfatta perché non è soddisfatto il suo antecedente e dunque la frase “se x è primo allora se x non divide y allora…” è soddisfatta perché il è soddisfatto il conseguante

se l’assegnamento è tale che x non divida y, allora se l’assegnamento della frase “allora se l’assegnamento di z è tale che x non divide il prodotto di y per z , x essendo primo divide z e la frase è ancora soddisfatta.

Dunque la formula è vera e sono di conseguenza vere le chiusure universale ed esistenziale.

La formula di conseguenza non può essere logicamente contraddittoria, non è del resto neppure logicamente valida, una interpretazione in cui non è vera si ottiene cambiando solo il significato del predicato $A_1^2(x,y)$ in x=y.