Politecnico di Milano — Anno accademico 2005–2006
Secondo anno di Laurea — Foglio 5

Algebra e Logica Matematica

Algebra

Esercizio 5.1. Sia n un intero magiore o uguale a 1. Si denota $\mathfrak{S}_n$ l'insieme delle biiezioni da $\{1, ..., n\}$ in se stesso. La composizione delle applicazione ne fa un gruppo. Prendiamo $n = 3$ e consideriamo $G = \mathfrak{S}_3$. I suoi elementi sono (1) l'applicazione identica, (12), (risp. (13), (23)) che scambia 1 e 2 (risp. 1 e 3, 2 e 3) e lascia 3 (risp. 2, 1) fisso e (123) cha manda 1 su 2, 2 su 3 e 3 su 1 e (132) che fa il ciclo inverso: manda 1 su 3, 3 su 2 e 2 su 1.

1) Verificare che G non è abeliano.
2) Calcolare l'ordine di ogni elemento.
3) Esplicitare i sottogruppi di G.
4) Quali sono normali ?
5) Qual'è il centro di G ?

Esercizio 5.2. Sia $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. A è munito delle operazioni naturali di somma e prodotto:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b)(a', b') = (aa', bb')$$

1) Verificare che $(A, +, .)$ è un anello commutativo.
2) Dimostrare che l'applicazione $\begin{array}{rccl} \Phi : & A & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & (a,b) & \longmapsto & \Phi(a,b) = a \end{array}$ è un morfismo suriettivo di anelli.
3) Determinare il nucleo di Φ.
4) Sia I il sottoinsieme di A così definito: $I = \{(2k, 0)/k \in \mathbb{Z}\}$. Verificare che I è un ideale di A.
5) Determinare $I' = \Phi(I)$ e l'immagine inversa $\overline{I}$ di I' per Φ.

Esercizio 5.3.

1) Sia $(K, +, .)$ un campo. Verificare che se I è un ideale di K (visto come anello), allora $I = \{0\}$ oppure $I = K$.

2) Si suppone che $(A, +, .)$ (con almeno due elementi) sia un anello commutativo unitario tale che i suoi ideali sono $\{0\}$ e A. Dimostrare che $(A, +, .)$ è un campo.

Esercizio 5.4. Sia $n \in \mathbb{Z}$. Verificare che $(n) = n\mathbb{Z} = \{nx/x \in \mathbb{Z}\}$ è un ideale di $\mathbb{Z}$. Mostrare che $n\mathbb{Z}$ è primo se e solo se n è primo o uguale a 0. Mostrare che se n è primo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è un campo.

Esercizio 5.5. Sia A l'anello $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$.

1) Qual'è l'ordine di A ? A è un campo ?

2) Si determinino i divisori dello zero in A.

3) Si determinino gli elementi invertibili di A.

4) Sia $\mathcal{Z}$ il sottoinsieme di A costituito dello zero e dei divisori dello zero. È $\mathcal{Z}$ un ideale di A ?

Esercizio 5.6. Un ideale I di un anello commutativo $(A, +, .)$ è detto primo[1] se $I \neq A$ e $\forall x, y \in A$, $xy \in I \Rightarrow x \in I$ o $y \in I$.

Un elemento a di A è detto nilpotente se esiste $n > 1$ tale che $a^n = 0$.

1) Verificare che se $a \in A$ è nilpotente e I è un ideale primo di A allora $a \in I$ (osservazione: se $a^r \in I$, allora $a \in I$ o $a^{r-1} \in I$). Dedurre che tutti i nilpotenti di A sono nell'intersezione di tutti gli ideali primi di A.

2) Verificare che se N è l'insieme costituito dallo zero e di tutti i nilpotenti di A, N è un ideale di A. Quindi è un ideale incluso nell'intersezione di tutti gli ideali primi di A.

3) (difficile) Mostrare l'inclusione inversa.

Esercizio 5.7. Costruzione di insieme numerici.

Supponiamo che abbiamo costruito l'insieme $\mathbb{N}$ munito di due leggi di composizione interne $+$ e $\times$ e di un ordine total $>=$ che verificano:

1) $(\mathbb{N}, +)$ è un monoide comutativo con neutro 0.

2) $(\mathbb{N}, \times)$ è un monoide comutativo con neutro 1.

3) $\forall (a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, $a(b + c) = ab + ac$ (distributività).

4) 0 è il minimo di $\mathbb{N}$. Più in generale, ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ ha un minimo.

5) Ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ che è maggiorato ha un massimo.

[1] Nota storica: gli ideali di $\mathbb{Z}$ sono della forma $(n) = n\mathbb{Z} = \{nk/k \in \mathbb{Z}\}$ per $n \in \mathbb{N}$: rappresenta una forma "ideale" del numero; un ideale primo diverso da $\{0\}$ è un tale ideale dove n è un numero primo.

6) L'ordine è compatibile con la somma:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c.$$

7) L'ordine è compatibile con il prodotto:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a \leqslant b \Rightarrow ac \leqslant bc.$$

Oss: in $\mathbb{N}$ tutti gli elementi sono maggiori o uguali a 0 !

Sia $(A, +, \times)$ il prodotto $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, con le leggi naturali:

$$\forall (a, b) \in A, \forall (c, d) \in A, (a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$$
$$\forall (a, b) \in A, \forall (c, d) \in A, (a, b) \times (c, d) = (ab, cd)$$

Definiamo una relazione su A nel modo seguente:

$$\forall (a, b) \in A, \forall (c, d) \in A, (a, b) \simeq (c, d) \iff a + d = b + c.$$

1) Verificare che $(A, +)$ e $(A, \times)$ sono due monoidi e esplicitare i loro neutri.

2) Verificare che $\simeq$ è una relazione di equivalenza.

3) Verificare che l'applicazione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z} = A/_\simeq$ che a n associa la classe di equivalenza di $(n, 0)$ è un'iniezione.

4) Verificare che le leggi $+$ e $\times$ definite su $\mathbb{Z}$ da

$$[(a, b)]_\simeq + [(c, d)]_\simeq = [(a + c, b + d)]_\simeq$$

$$[(a, b)]_\simeq \times [(c, d)]_\simeq = [(a \times c, b \times d)]_\simeq$$

sono ben definite.

5) Verificare che $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{Z}, \times)$ sono monoidi, esplicitare i loro neutri e verificare che $(\mathbb{Z}, +)$ è in più un gruppo.

6) Rifare lo stesso esercizio con $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ (dove $\mathbb{Z}^* = \{x \in \mathbb{Z} / x \neq 0\}$), $(a, b) \equiv (c, d) \iff (ad = bc)$ e $\mathbb{Q} = B/_\equiv$ e verificare che $(\mathbb{Q}, +, \times)$ è un campo.