Capitolo 6. Transitori

Esercizio 6.1

Dato il circuito in figura 6.1, sono noti:
R1 = 4 Ω, R2 = 6 Ω,
V1 = 18 V, V2 = 24 V,
I1 = 6 A, C = 3 μF.
Determinare alla chiusura di S la tensione v(t) ed il valore assunto per t = 6μs

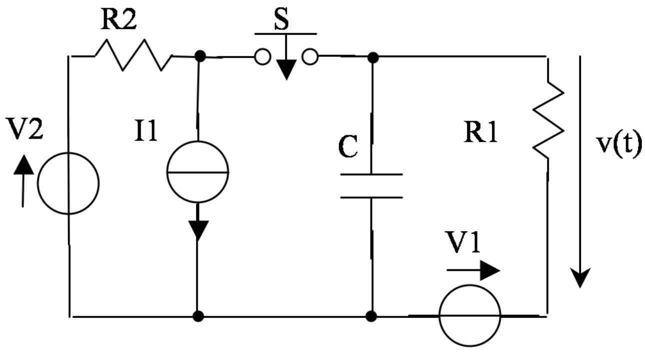


Figura 6.1

Soluzione

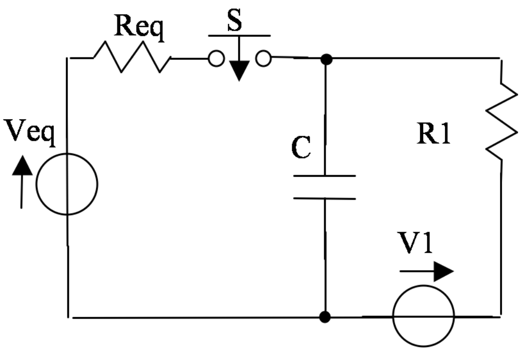


Figura 6.2

Conviene semplificare la parte di sinistra del circuito trasformandola nel bipolo equivalente serie; si ottiene allora che:

Veq = V2-R2 I1 = -12 V
Req = R2 = 6Ω .

All'istante $t=0^-$ il condensatore si comporta come un circuito aperto e la tensione ai suoi capi (diretta verso l'alto) è pari a V1, vc_{0-}=18 V e la tensione richiesta $v(0^-) = 0$ V.
All'istante $t = 0^+$ si sostituisce il condensatore con un generatore di tensione pari a vc_{0-} e si calcola la tensione richiesta. Si può notare in tal caso che Veq-Req risulta in parallelo ad un generatore di tensione

(vc_{0-}) e quindi agli effetti esterni equivale al solo generatore di tensione. A questo punto $v(0^+) = V1 - v(0^-) = 0V$

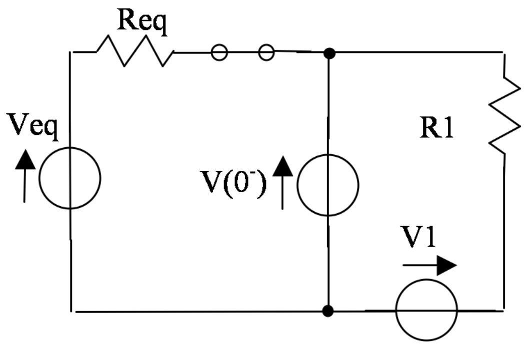


Figura 6.3

A regime il condensatore si comporta come un circuito aperto, la tensione $v(\infty)$ può essere calcolata osservando che Veq e V1 risultano in serie e con la regola del partitore di tensione si ottiene: $v(\infty) = (V1-Veq)\ R1/(R1+Req) = 12V$. Per il calcolo della costante di tempo è necessario calcolare la Geqc vista dei morsetti del condensatore a manovra avvenuta e con la rete resa passiva; risulta quindi che Geqc è pari al parallelo del resistore Req e del resistore R1, $Geqc = Geq+G1 = 0.417$ S, la costante di tempo $\tau = C/Geqc = 7.2\ \mu s$.
Segue che $v(t) = -12\ e^{-t/\tau}+12$ V. $v(6\mu s) = 6.785$ V

Esercizio 6.2

Dato il circuito in figura 6.4, sono noti:
R1 = 2 Ω,
R2 = 3 Ω, R3 = 5 Ω
V1 = 8 V, V2 = 10 V,
L = 1 mH.
Determinare i(t) e stabilire il suo valore per t = 2τ

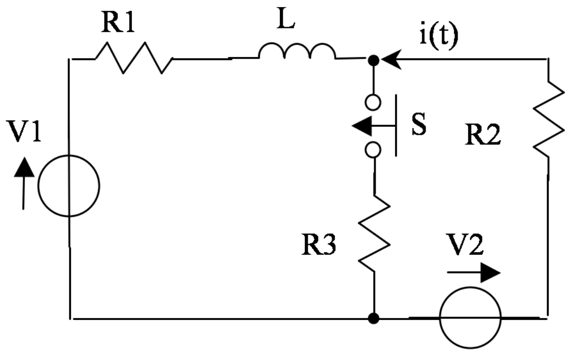


Figura 6.4

Soluzione

La rete è già abbastanza semplificata. Poiché il circuito è regime prima dell'evento, per $t=0^-$ la tensione sull'induttanza è nulla. La corrente nell'induttanza prima dell'evento (corrisponde anche alla corrente richiesta) è sostenuta dai due generatori V1 e V2 (in serie) e limitata dalla serie dei due resistori R1 ed R2.
Quindi vale $i(0^-) = (V2-V1)/(R1+R2) = 0.4$ A. Al fine di risolvere il circuito all'istante $t=0^+$, l'induttanza può essere sostituita da un

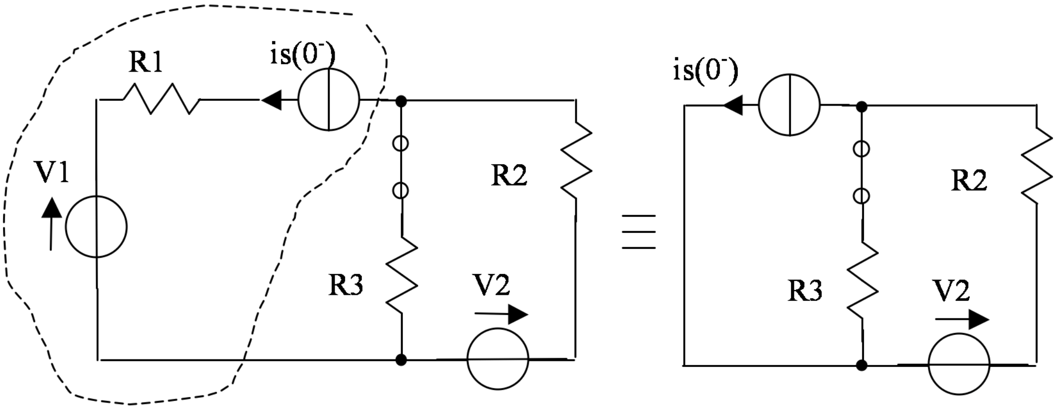


Figura 6.5

generatore di corrente $is(0^-) = 0.4$ A (verso sinistra), che risulta, agli effetti esterni, in parallelo al resistore R3. Trasformando in equivalente serie il parallelo is-R3 si ottiene $i(0^+) = (V2+Is\cdot R3)/(R2+R3) = 1.5$ A. A regime il circuito si presenta come parallelo di tre bipoli di tipo serie. La tensione ai loro capi (verso l'alto) si trova trasformandoli in bipoli di tipo parallelo (formula di Millman):

$V = (V1\cdot G1+V2\cdot G2)/(G1+G2+G3) = 7.097$ V.

Quindi $i(+\infty) = (V2-V)/R2 = 0.9677$ A. La costante di tempo τ si ottiene come L/Req, dove Req è la resistenza "vista" da L dopo aver reso passiva la rete $Req = R1+(R2//R3) = 3.875\ \Omega$; da cui $\tau = 258.1\ \mu s$. Segue $i(t) = 0.5323\ e^{-t/\tau}+0.9677$ A. $i(2\tau) = 1.0397$ A

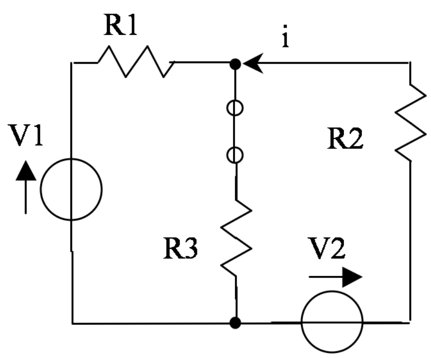


Figura 6.6

Esercizio 6.3

Dato il circuito in figura 6.7, sono noti:
R1 = 2 Ω, R2 = 3 Ω,
R3 = 1 Ω R4 = 5 Ω,
R5 = 4 Ω,
V1 = 10 V, V2 = 12 V,
V3 = 80 V, C = 3μF.

L'interruttore S è chiuso da lungo tempo. Determinare all'apertura di S il transitorio di vc(t) e tracciarne l'andamento in modo qualitativo

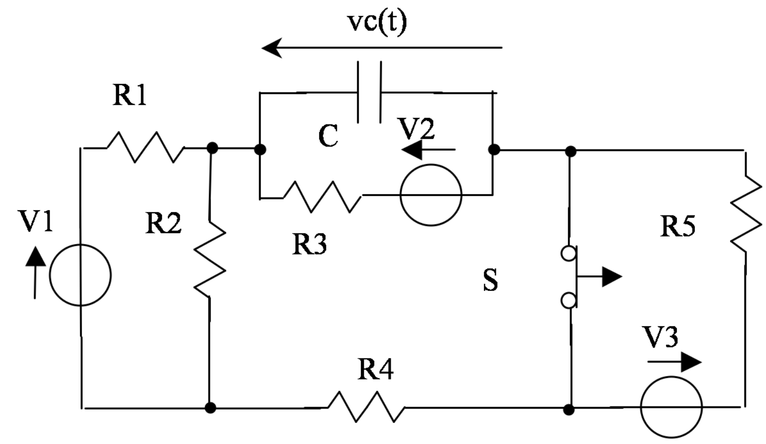
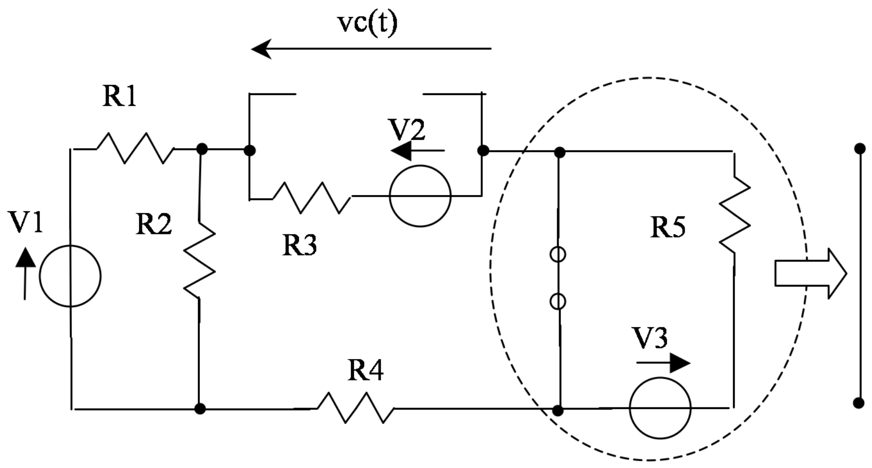
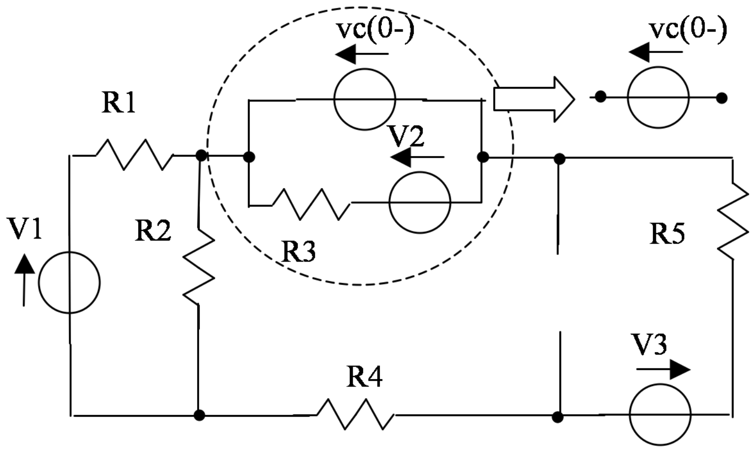


Figura 6.7

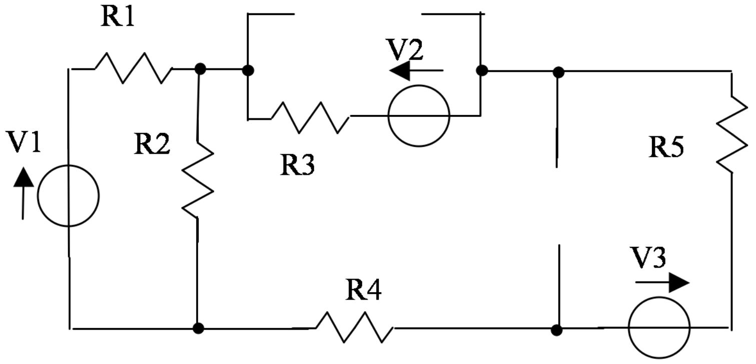
Soluzione

A $t=0^-$ rimangono tre bipoli di tipo serie in parallelo tra loro: (V1,R1), (R2) e (V2,R3+R4).

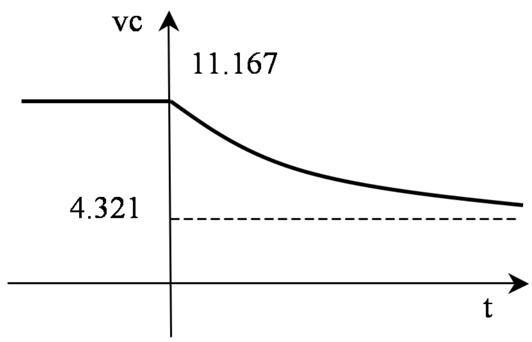




La comune tensione vale V=(V1·G1+V2·G34)/(G1+G2+G34)= 7 V, da cui vc(0^-) = V2+R3·(V-V2)/(R3+R4) = 11.167 V. A t=0^+ sono sempre tre i bipoli in parallelo: (V1,R1), (R2) e (V3+vc(0-),R5+R4).



A regime nel condensatore non circola corrente; i tre bipoli in parallelo sono (V1,R1), (R2) e (V3+V2,R3+R5+R4).
V=(V1·G1+(V3+V2)·G345)/(G1+G2+G345)= 15.214 V, da cui si può calcolare la tensione sul condensatore che è pari a : vc(∞) = (V-V3-V2)· R3/(R3+R4+R5)+V2 = 4.321 V. La costante di tempo si ottiene come τ = C·Req = 2.732 μs dove Req =((R1//R2)+R4+R5)//R3.



Esercizio 6.4

Nel circuito in figura 6.8 sono noti:
R1 = 8 Ω, R2 = 3 Ω, R3 = 5 Ω, V1 = 20 V, V2 = 22 V, I1 = 12 A, L = 20mH
Determinare v(t) e tracciarne l'andamento in funzione del tempo

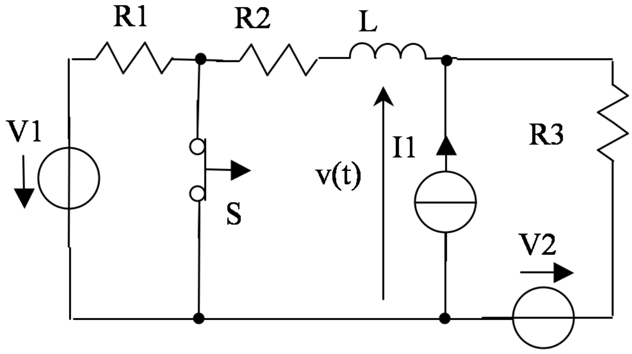
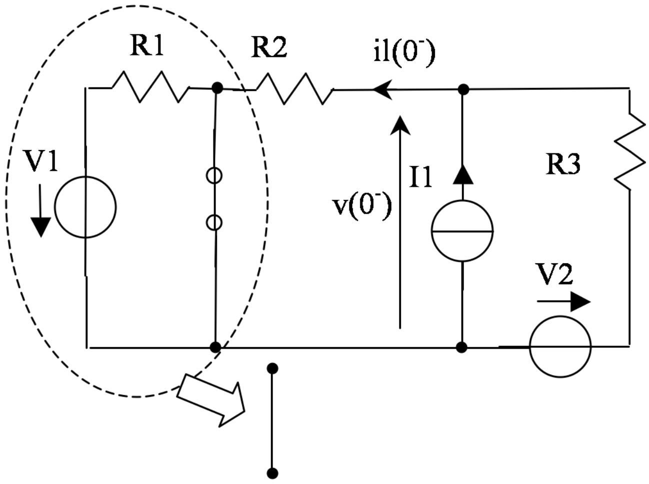


Figura 6.8

Soluzione



A $t=0^-$ rimangono tre bipoli in parallelo: (R2), (I1) e (R3,V2). Trasformando V2-R2 nell'equivalente parallelo si può facilmente calcolare la corrente ; $il(0^-)= (I1+V2/R3)\cdot G2/(G2+G3) = 10.25$ A (verso sinistra) e la tensione $v(0^-)= R2\cdot il(0^-)= 30.75$ V.

All'istante $t = 0^+$ rimangono tre bipoli in parallelo: un generatore di corrente pari a $il(0^-)$, I1 e R3-V2. La tensione $v(0^+)$ può essere calcolata trasformando il bipolo serie V2-R3 nell'equivalente parallelo e risulta pari a $v(0+) = (I1+V2\cdot G3-il(0^-))/(G3) =30.75V$;

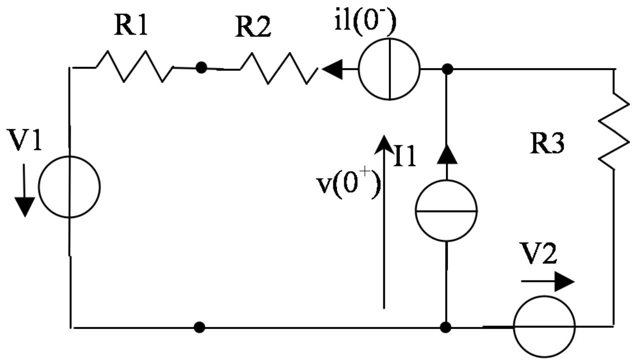


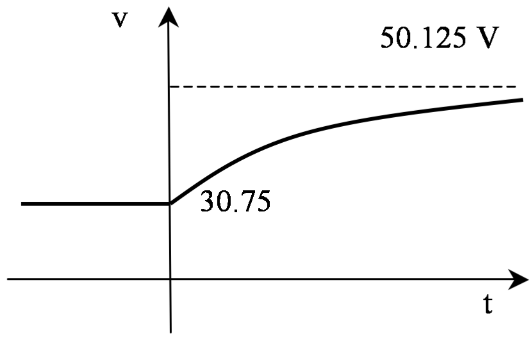
Figura 6.10

La $v(\infty)$ si calcola osservando che a $t=\infty$ restano tre bipoli in parallelo: (V1-R1+R2), (I1) e (V2-R3).

Si trova allora $v(\infty) = (-G12\cdot V1+I1+V2\cdot G3)/(G12+G3)= 50.125$ V dove $G12 = 1/(R1+R2)$;

Per il calcolo della costante di tempo si ha $Req = R1+ R2 + R3 = 16\ \Omega$;

$\tau = L/Req = 1.25$ ms



Esercizio 6.5

Sia dato il circuito rappresentato in figura 6.11, con i seguenti dati:
R1 = 18 Ω, R2 = 5 Ω,
R3 = 3 Ω, R4 = 7 Ω,
V1 = 18 V, V2 = 22V,
L = 1 mH.
Determinare la tensione v(t) alla chiusura dell'interruttore

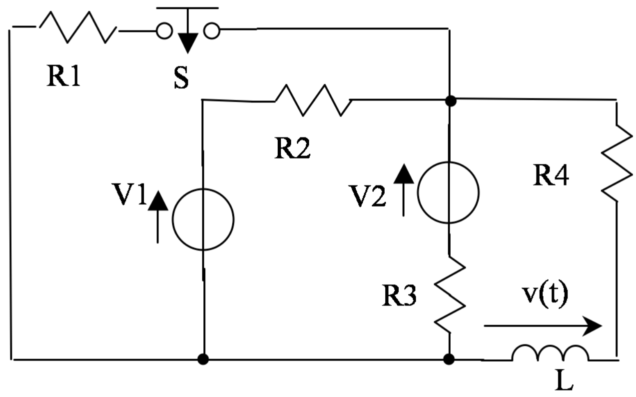


Figura 6.11

Soluzione

All'istante $t=0^-$ (interruttore aperto) rimangono tre bipoli in parallelo: (V1-R2), (V2-R5), (R4). La corrente può essere quindi facilmente calcolata come $il(0^-) = (G2 \cdot V1+V2 \cdot G3) \cdot G4/(G2+G3+G4) = 2.31$ A(diretta verso il basso).

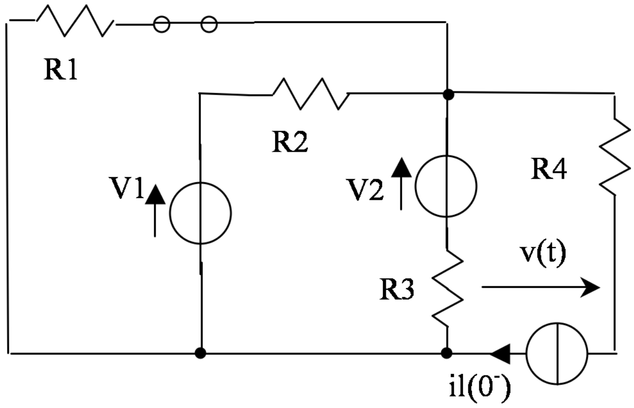


Figura 6.12

La tensione $v(0^-) = 0$ in quanto l'induttore è equivalente ad un corto circuito. A $t = 0^+$ rimangono quattro bipoli in parallelo: (R1), (V1-R2), (V2-R3), ($il(0^-)$-R4).

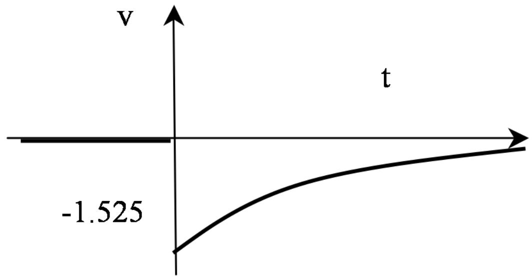
La tensione su (il(0^-)-R4) è pari a

V = (V1·G2+V2·G3-il(0^-))/(G1+G2+G3) = 14.64 V (la resistenza R4 non è presa in considerazione in quanto in serie a il(0^-)).

La tensione v è quindi pari a v(0^+)= V-R4·il(0^-) = -1.525 V.

A regime (∞) la tensione è nulla in quanto l'induttore si comporta di nuovo come un corto circuito.

La costante di tempo è τ = L/Req= 1.1497·10^{-4} s, dove Req = R4+(1/(G1+G2+G3))=8.698 Ω



Esercizio 6.6

Il circuito in figura 6.13 presenta:
R1 = 6 Ω, R2 = 8 Ω
V1 = 18 V, V2 = 20V,
V3 = 22V, I1 = 12 A.
C = 10μF
L'interruttore è chiuso da tempo infinito. A t = 0 s si apre l'interruttore, determinare la tensione sul condensatore nel verso indicato in figura.

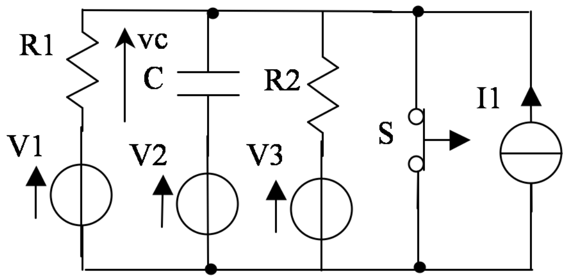


Figura 6.13

Soluzione

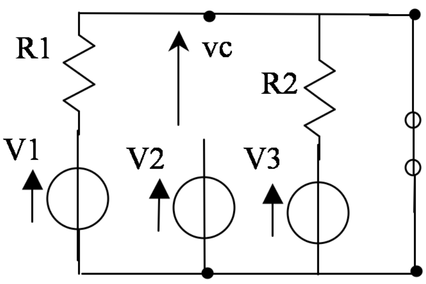


Figura 6.14

All'istante t = 0^- resta V2 in serie ad un circuito aperto e un corto circuito, vc(0^-) = -V2 = -20V (diretta verso l'alto). All'istante t=∞ il condensatore è un circuito aperto, la tensione ai capi di V2-C si trova trasformando i bipoli nel loro equivalente parallelo ed è pari a V = (V1·G1+V3·G2+I1)/(G1+G2) =

60.86 V;
la tensione vc(∞) vale quindi: V-V2=40.86 V. La costante di tempo $\tau = C/Geq$, *Geq = G1+G2 = 0.292 S,* $\tau = 34.29\ \mu s$, *da cui*
$vc(t) = (vc(0^+)-vc(\infty))\cdot e^{-t/\tau} + vc(\infty) = -60.86\cdot e^{-t/\tau}+40.86\ V$

Esercizio 6.7

Dato il circuito in figura 6.15, sono noti:
v(t) = 150·sin(500·t)
R = 50 Ω, L = 0.2 H
Determinare i(t), alla chiusura dell'interruttore al tempo t=0.

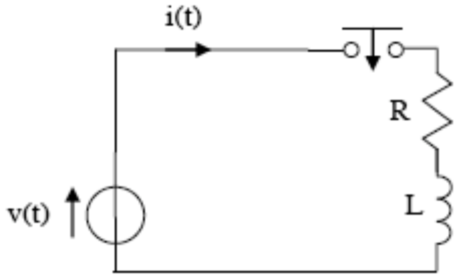


Figura 6.15

Soluzione
Il transitorio è retto dalla seguente equazione differenziale: v=Ri+Lpi, la soluzione è data dalla somma dell'integrale particolare ip(t) e della soluzione dell'omogenea associata io(t), i(t)=ip(t)+io(t). L'integrale particolare ip(t) è la soluzione di regime, e si trova avvalendosi dell'algebra dei fasori, in particolare Ip=V/(R+jωL)=-0.849-j0.424 A e quindi $ip(t)= \sqrt{2}\cdot|I|\cdot\cos(\omega t+\mathrm{atan}(Im(I)/Re(I))+\pi)$.
L'integrale dell'omogenea associata io(t) è noto è pari all'esponenziale:
io(t)=Ae(-R/L)·t.
La costante A si calcola imponendo la condizione iniziale i(t)=io(t)+ip(t)=0 e si trova A=1.2 A

Esercizio 6.8

Dato il circuito in figura 6.16, sono noti:
v(t) = 250·sin(500*t+π/4)
R = 100 Ω, C = 250 mF
Vo=200V
Determinare i(t), derivante dalla chiusura dell'interruttore al tempo t=0.

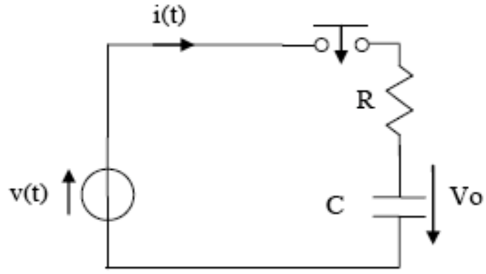


Figura 6.16

Soluzione

Il circuito è retto dall'equazione differenziale: $v=RC \cdot pvc + vc$ e tutte le grandezze di rete non di stato, evolveranno con la stessa costante di tempo. La soluzione è quindi data dalla somma dell'integrale particolare ip(t) e della soluzione dell'omogenea associata io(t), $i(t)=ip(t)+io(t)$. L'integrale particolare ip(t) è la soluzione di regime, e si trova avvalendosi dell'algebra dei fasori $Ip=V/(R+j/\omega C)=1.341-j1.143$ A e quindi $ip(t)= 2.492 \cdot \cos(\omega t-0.706)$. L'integrale dell'omogenea associata io(t) è il seguente: $io(t)=A \cdot e^{(-1/RC) \cdot t}$.

La tensione sul condensatore a $t =0^-=0^+$ è nulla $Vo = 0$, di conseguenza la costante A si calcola imponendo la condizione iniziale della corrente calcolata all'istante iniziale che è data da $Io=(v(0)+0)/R=3.77$ A da cui $i(0)=io(0)+ip(0)=3.77$ da cui si trova $A=1.871$ A

Esercizio 6.9

Dato il circuito trifase in figura 4, sono noti:

$v(t) = 200 \cdot \cos(300 \cdot t+\pi/4)$

$R1 = 500\ \Omega$, $R2 = 100\ \Omega$, $L = 0.2$ H

Determinare ir(t), derivante dalla chiusura dell'interruttore al tempo t=0

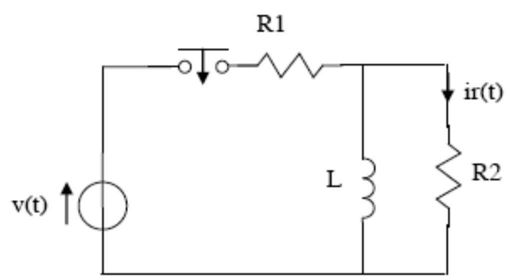


Figura 6.17

Soluzione

Il transitorio è retto dalla seguente equazione differenziale: $v=R1 \cdot iL+(((R1+R2)/R2))L \cdot p\ iL$, dove iL è la corrente sull'induttanza L, le altre grandezze di rete non di stato evolveranno con la stessa costante di tempo. La soluzione è data dalla somma dell'integrale particolare ip(t) e della soluzione dell'omogenea associata io(t), $i(t)=ip(t)+io(t)$. L'integrale

particolare ip(t) è la soluzione di regime, e si trova avvalendosi dell'algebra dei fasori. In particolare la rete risulta formata dal parallelo tra L, R2 e la serie del generatore v(t) e R1. La tensione ai capi di R2 è quindi pari a Vr2=(V/R1)/(1/R1+1/(ωL)+1/R2)= 6.98+j6.98 V.
La corrente è pari a Ir2=Vo/R2=-0.022+j0.136 A.
Quindi ip(t)= 0.195·cos(ωt+1.732). L'integrale dell'omogenea associata io(t) e' il seguente: io(t)=Ae$^{(-1/\tau)\cdot t}$, dove la costante di tempo τ è data dal rapporto tra l'induttanza L e il parallelo di R1 e R2, τ=2.4 ms. La costante A si trova imponendo la condizione iniziale sulla corrente ir(t). In particolare la corrente nell'induttanza L è nulla per a t =0$^-$=0$^+$=0, di conseguenza ir(0)=v(0)/(R1+R2)=0.236 A. La costante A risulta quindi pari a 0.267 A.

Esercizio 6.10

Dato il circuito in figura , sono noti:
v(t) = $\sqrt{2}\cdot 100\cdot \sin(300\cdot t+\pi/6)$
R = 10 Ω, L = 0.1 H
Si considerino i seguenti tre casi:
Caso1: C=10 mF
Caso2: C=4 mF
Caso3: C=5 mF
Determinare i(t), derivante dalla chiusura dell'interruttore al tempo t=0

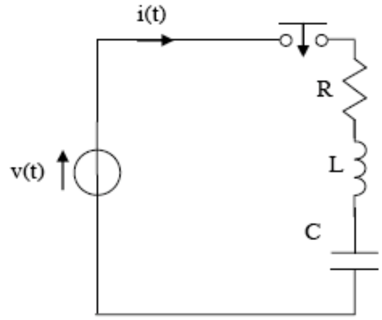


Figura 6.18

Soluzione

Il transitorio è retto dalle seguenti due equazioni differenziali:

v=Ri+Lpi+vc,
i=Cpvc *dove vc è la tensione ai capi del condensatore.*

Risolvendo l'equazione caratteristica si trovano, nel primo caso, i seguenti due autovalori: λ1= -50+j998.75, λ2= -50-j998.75. La soluzione è data dalla somma dell'integrale particolare ip(t) e dalla soluzione dell'omogenea associata io(t), i(t)=ip(t)+io(t). L'integrale particolare ip(t) è la soluzione di regime, e si trova avvalendosi *dell'algebra dei fasori, in particolare Ip=V/(R+jωL-j/(ωC))=-0.291+j0.155 A e quindi:*

ip(t)= $\sqrt{2}$ *·|Ip|·cos(ωt+atan(Im(I)/Re(I))).*

Dall'analisi matematica si ottiene che l'integrale dell'omogenea associata io(t) e' il seguente:

io(t)=$e^{(Re(\lambda 1))*t}$*(A1·cos(Im(λ1·t))+A2·sin(Im(λ1·t))).*

Per il calcolo delle costanti A1 e A2 bisogna imporre le condizioni iniziali sulla corrente e sulla sua derivata prima. La corrente nell'istante immediatamente precedente la chiusura dell'interruttore è nulla e resta nulla anche nell'istante immediatamente successivo, la derivata prima della corrente p i=vL/L dove vL è la tensione ai capi dell'induttanza L. Nell'istante t=0 risulta p i(0) = v(0)/L= 707.107 A. Risulta quindi A1= -0.411 A e A2= -0.795 A.

Risolvendo l'equazione caratteristica si trovano, nel secondo caso, i seguenti due autovalori: λ1= λ2= -50. La soluzione è data dalla somma dell'integrale particolare ip(t) e della soluzione dell'omogenea associata io(t), i(t)=ip(t)+io(t). L'integrale particolare ip(t) è la soluzione di regime, e si trova avvalendosi dell'algebra dei fasori, in particolare
Ip = V/(R+jωL-j/(ωC))=-2.131- j2.445 A e quindi
ip(t) = $\sqrt{2}$ *·|Ip|·cos(ωt+atan(Im(Ip)/Re(Ip))+π).*

L'integrale dell'omogenea associata io(t) e' il seguente:
io(t)=$e^{((\lambda 1))\cdot t}$*(A1+A2·t).*

Per il calcolo delle costanti A1 e A2 bisogna imporre le condizioni iniziali sulla corrente e sulla sua derivata prima. La corrente nell'istante immediatamente precedente la chiusura dell'interruttore è nulla e resta nulla anche nell'istante immediatamente successivo, la derivata prima della corrente p i=vL/L dove vL è la tensione ai capi dell'induttanza L. Nell'istante t=0 risulta p i(0) = v(0)/L= 707.107 A. Risulta quindi A1= 3.014 A e A2= -179.49 A.

Risolvendo l'equazione caratteristica si trovano, nel terzo caso, i seguenti due autovalori: l1= -72.36 l2= -27.64. La soluzione è data dalla somma dell'integrale particolare ip(t) e della soluzione *dell'omogenea associata io(t), i(t)=ip(t)+io(t). L'integrale particolare ip(t) è la soluzione di regime, e si trova avvalendosi dell'algebra dei fasori, in particolare:*

Ip=V/(R+jωL-j/(ωC))=-2.124-j2.429 A e quindi

$ip(t) = \sqrt{2} \cdot |Ip| \cdot cos(\omega t+atan(Im(I)/Re(I))+\pi)$.

L'integrale dell'omogenea associata io(t) è il seguente:

$io(t)=A1 \cdot e^{(\lambda 1) \cdot t}+A2 \cdot e^{(\lambda 2) \cdot t}$.

Per il calcolo delle costanti A1 e A2 bisogna imporre le condizioni iniziali sulla corrente e sulla sua derivata prima. La corrente nell'istante immediatamente precedente la chiusura dell'interruttore è nulla e resta nulla anche nell'istante immediatamente successivo, la derivata prima della corrente p i=vL/L dove vL è la tensione ai capi dell'induttanza L. Nell'istante t=0 risulta p i(0) = v(0)/L= 707.107 A. Risulta quindi A1= 5.373 A e A2= -2.369 A.