Soluzioni agli esercizi su Equazioni Differenziali Ordinarie

11 giugno 2005

Esercizio 1
Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2x^3y + x^3y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

1. Si trovi la soluzione generica, discutendone l'unicitá locale.
2. Si trovino i valori del dato inizale y_0 per cui la soluzione corrispondente sia prolungabile a tutto $\mathbb{R}$
3. Si trovino i valori del dato inizale y_0 per cui la soluzione corrispondente sia prolungabile almeno in $(-1, 1)$.
4. Si trovino i valori del dato inizale y_0 per cui la soluzione corrispondente sia sempre positiva nel suo dominio massimale di esistenza.
5. Si tracci un grafico qualitativo delle soluzioni.

Soluzione :

1. L'equazione é a variabili separabili, come si vede raccogliendo il termine x^3 al membro destro:
$$y' = x^3(2y + y^2)$$
ed ha quindi come soluzioni le funzioni costantemente uguali ad uno zero di $2y+y^2$: $y \equiv 0$ e $y \equiv -2$. Supponendo quindi $y \neq 0, -2$ possiamo integrare l'equazione ponendo
$$\int \frac{dy}{2y + y^2} = \int x^3 dx$$

ossia
$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{y}-\frac{1}{y+2}dy=\frac{x^4}{4}+C, \qquad C\in\mathbb{R}$$
e quindi
$$\log|y|-\log|y+2|=\log\left|\frac{y}{y+2}\right|=\frac{x^4}{2}+2C, \qquad C\in\mathbb{R}$$
$$\frac{y}{y+2}=\pm e^{2C}e^{x^4/2}, \qquad C\in\mathbb{R}.$$
Ponendo quindi $K=\pm e^{2C}$ si ha $K\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e risolvendo in y si ottiene
$$y=\frac{2Ke^{x^4/2}}{1-Ke^{x^4/2}}$$
con $K\in\mathbb{R}$, ($K=0$ corrisponde alla soluzione $y\equiv 0$ precedentemente trovata). A queste soluzioni va aggiunta la soluzione costantemente uguale a -2 (corrispondente, intuitivamente, al valore $K=\infty$).
L'unicitá locale della soluzione del problema di Cauchy é garantita dal fatto che la funzione $x^3(2y+y^2)$ é continua e differenziabile infinite volte (in particolare rispetto alla variabile y) su tutto $\mathbb{R}^2$.

2. Le soluzioni non costanti precedentemente trovate sono definite fintanto che il denominatore non si annulla, ossia quando
$$\frac{x^4}{2}=\log(\frac{1}{K}).$$
L'equazione é risolubile solo per $K>0$ per via del logaritmo e inoltre per $1/K\geq 1$ essendo il membro di sinistra maggiore o uguale a 0. Quindi le soluzioni non sono definite in tutto $\mathbb{R}$ solo per valori del coefficiente K che soddisfano $0<K\leq 1$. I dati iniziali corrispondenti sono
$$y_0=y(0)=\frac{2K}{1-K}, \qquad 0<K<1$$
che variano quindi in tutto il semiasse positivo $y_0>0$. Quindi i dati iniziali che forniscono soluzioni prolungabili a tutto $\mathbb{R}$ sono $y_0\leq 0$.

3. Occorre che le soluzioni dell'equazione $\frac{x^4}{2}=\log(\frac{1}{K})$ non appartengano all'intervallo $(-1,1)$, il che equivale a
$$\sqrt[4]{\log(\frac{1}{K^2})}\geq 1$$

ossia $K^2 \leq 1/e$ o $-1/\sqrt{e} \leq K \leq 1/\sqrt{e}$. I dati iniziali corrispondenti si ottengono studiando l'immagine di $[-1/\sqrt{e}, 1/\sqrt{e}]$ attraverso la funzione $y_0(K) = 2K/(1-K)$, che risulta essere monotona crescente nell'intervallo considerato. Quindi i dati iniziali che sono prolungabili almeno in $(-1,1)$ sono dati da

$$-\frac{2}{\sqrt{e}+1} = \frac{2(-1/\sqrt{e})}{1-(-1/\sqrt{e})} \leq y_0 \leq \frac{2(1/\sqrt{e})}{1-(1/\sqrt{e})} = \frac{2}{\sqrt{e}-1}.$$

4. Poiché una soluzione dell'equazione é data da $y \equiv 0$ e l'equazione soddisfa il Teorema di esistenza e unicitá locale per ogni condizione iniziale, le soluzioni che hanno dato iniziale y_0 positivo devono necessariamente rimanere positive in tutto il loro intervallo massimale di esistenza.

5. *Le soluzioni sono tutte funzioni pari, perché l'equazione é dispari nella variabile x.* É sufficiente quindi studiare il comportamento delle soluzioni sul semiasse $x > 0$. Le soluzioni hanno derivata y' che ha lo stesso segno di $y(2+y)$ e quindi sono crescenti quando assumono valori positivi o minori di -2, decrescenti quando assumono valori compresi fra -2 e 0. Inoltre la derivata si annulla per $x = 0$ che risulta essere quindi punto di minimo per le soluzioni positive e per quelle minori di -2, di massimo per quelle comprese fra -2 e 0. Dalla formula risolutiva si osserva che tutte le soluzioni non costanti hanno un asintoto orizzontale di equazione $y = -2$. Infine le soluzioni esistono in tutto $\mathbb{R}$ se hanno dato iniziale non positivo, mentre per dati inizali positivi hanno intervallo massimale di esistenza $(-\sqrt[4]{\log(1/K^2)}, \sqrt[4]{\log(1/K^2)})$ con $K = y(0)/(y(0)+2)$, agli estremi del quale tendono a $+\infty$.

Esercizio 2

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

1. $$\begin{cases} xy' + y = \log(x+1) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} (x^2+1)y' - 2xy = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione :

1. L'equazione é lineare a coefficienti non costanti. Risolvendo col metodo del fattore integrante dividiamo per x e moltiplichiamo ambo i membri per una funzione incognita $\mu(x)$, ottenendo

$$\mu y' + \frac{\mu}{x} y = \mu \frac{\log(x+1)}{x}$$

Imponendo la condizione $\mu y' + \mu y/x = (\mu y)'$ si ottiene l'equazione a variabili separabili

$$\mu' = \mu/x$$

che ha una soluzione $\mu(x) = x$. L'equazione puó quindi essere riscritta come

$$(xy)' = \log(x+1)$$

che integrata direttamente da'

$$xy = (x+1)\log(x+1) - x + C$$

ossia

$$y(x) = \frac{x+1}{x}\log(x+1) - 1 + \frac{C}{x}.$$

Risolvendo invece col metodo di variazione delle costanti troviamo innanzitutto le soluzioni dell'equazione omogenea associata

$$xy' + y = 0$$

che essendo a variabili separabili si integra facilmente fornendo le soluzioni $y = C/x$. Moltiplicando la soluzione particolare dell'omogenea $1/x$ per una funzione incognita $c(x)$ e imponendo che il prodotto risolva l'equazione si ottiene

$$x\frac{c'x - c}{x^2} + \frac{c}{x} = \log(x+1) \qquad \Leftrightarrow \qquad c' = \log(x+1)$$

da cui $c = (x+1)\log(x+1) - x$ che fornisce la soluzione particolare dell'equazione completa $c/x = \frac{x+1}{x}\log(x+1) - 1$. La soluzione generale si ottiene quindi sommando alla soluzione particolare cosí trovata una generica soluzione dell'omogenea, ottenendo lo stesso risultato di prima. Ponendo $y(1) = 1$ si ottiene

$$1 = 2\log(2) - 1 + C \qquad \Rightarrow \qquad C = 2\log(e/2)$$

che fornisce la soluzione cercata, il cui intervallo massimale di esistenza é $(0, +\infty)$.

2. L'equazione é lineare a coefficienti non costanti. Risolvendo col metodo del fattore integrante dividiamo per x^2+1 e moltiplichiamo ambo i membri per una funzione incognita $\mu(x)$, ottenendo

$$\mu y' - 2\frac{\mu x}{x^2+1}y = \mu\frac{x^2}{x^2+1}$$

Imponendo la condizione $\mu y' - 2\mu x/(x^2+1)y = (\mu y)'$ si ottiene l'equazione a variabili separabili

$$\mu' = -2\mu\frac{x}{x^2+1}$$

che ha una soluzione $\log(\mu(x)) = -\log(x^2+1)$. L'equazione puó quindi essere riscritta come

$$\left(\frac{1}{x^2+1}y\right)' = \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$$

che integrata direttamente da' (integrando il membro destro per parti)

$$\frac{1}{x^2+1}y = \int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{x}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx =$$
$$= -\frac{x}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan(x) + C$$

ossia

$$y(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^2+1}{2}\arctan(x) + C(x^2+1)$$

Risolvendo invece col metodo di variazione delle costanti troviamo innanzitutto le soluzioni dell'equazione omogenea associata

$$(x^2+1)y' - 2xy = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2+1}$$

che essendo a variabili separabili si integra facilmente fornendo le soluzioni $y = C(x^2+1)$. Moltiplicando la soluzione particolare dell'omogenea x^2+1 per una funzione incognita $c(x)$ e imponendo che il prodotto risolva l'equazione si ottiene

$$(x^2+1)(c'(x^2+1) + c2x) - 2xc(x^2+1) = (x^2+1)^2c' = x^2$$

da cui, ad esempio

$$c = \int\frac{x^2}{x^2+1}dx = -\frac{x}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan(x)$$

La soluzione generale si ottiene quindi sommando alla soluzione particolare cosí trovata una generica soluzione dell'omogenea, ottenendo lo stesso risultato di prima.
Ponendo $y(0) = 1$ si ottiene

$$y(0) = C = 1$$

che fornisce la soluzione cercata, il cui intervallo massimale di esistenza é $\mathbb{R}$.

Esercizio 3
Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:

1. $$2y'' - 7y' - 4y = xe^x + \sin(x)$$

2. $$y'' - 2y' + 3y = e^{2x}\sin(\sqrt{2}x) + 4x^2$$

3. $$y'' + 6y' + 13y = (x+1)e^{-3x}\cos(2x)$$

4. $$y'' - 6y' + 9y = xe^{3x} + 3$$

Soluzione :

1. L' equazione caratteristica risulta essere

$$2z^2 - 7z - 4 = 0$$

che ha come soluzioni $z = -1/2$ e $z = 4$. L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea associata é quindi dato da

$$Ae^{-x/2} + Be^{4x}.$$

Troviamo quindi, separatamente, una soluzione particolare dell'equazione

$$2y'' - 7y' - 4y = xe^x$$

e di

$$2y'' - 7y' - 4y = \sin(x).$$

Il termine e^x ha frequenza propria 1, che non é soluzione dell'equazione caratteristica, quindi possiamo cercare una soluzione particolare della forma $u(x) = (ax + b)e^x$. Inserendo quest'ultima nell'equazione e imponendo che risolva si ottiene

$$2(ae^x + (ax + b)e^x) - 7(ae^x + (ax + b)e^x) - 4(ax + b)e^x = xe^x$$

da cui, eliminando il termine e^x e imponendo l'uguaglianza dei termini aventi medesimo grado, si ottiene

$$\begin{cases} 2a + 2b - 7a - 7b - 4b = 0 \\ 2a - 7a - 4a = 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} b = \frac{5}{81} \\ a = -\frac{1}{9}. \end{cases}$$

Per quanto riguarda invece il secondo termine, questo ha frequenza propria i che non annulla il polinomio caratteristico e quindi una soluzione particolare si puó trovare della forma $v(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$. Inserendo quest'ultima nell'equazione e imponendo che risolva si ottiene

$$2(-a\cos(x)-b\sin(x))-7(-a\sin(x)+b\cos(x))-4(a\cos(x)+b\sin(x)) = \sin(x)$$

da cui

$$\begin{cases} -2a - 7b - 4a = 0 \\ -2b + 7a - 4b = 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} b = -\frac{6}{85} \\ a = \frac{7}{85} \end{cases}$$

In alternativa, detto $z = i$, possiamo considerare la parte immaginaria di una soluzione particolare a valori complessi di

$$2y'' - 7y' - 4y = e^{zx}$$

della forma ae^{zx} con $a \in \mathbb{C}$. Inserendo nell'equazione si ottiene

$$2z^2ae^{zx} - 7zae^{zx} - 4ae^{zx} = e^{zx}$$

ed eliminando il termine e^{zx} si ottiene

$$a = \frac{1}{2z^2 - 7z - 4} = \frac{1}{-2 - 7i - 4} = \frac{1}{-6 - 7i}$$

da cui, ricordando che $1/z = \overline{z}/|z|^2$, si ottiene

$$a = \frac{-6 + 7i}{36 + 49} = -\frac{6}{85} + i\frac{7}{85}$$

e quindi una soluzione particolare é data dalla parte immaginaria di

$$\begin{aligned} ae^{ix} &= (-\frac{6}{85} + i\frac{7}{85})(\cos(x) + i\sin(x)) \\ &= (-\frac{6}{85}\cos(x) - \frac{7}{85}\sin(x)) + i(-\frac{6}{85}\sin(x) + i\frac{7}{85}\cos(x)) \end{aligned}$$

In definitiva una soluzione particolare dell'equazione non omogenea é data dalla somma $u+v$ e quindi tutte le soluzioni sono

$$Ae^{-x/2} + Be^{4x} + (-\frac{x}{9} + \frac{5}{81})e^x + \frac{7}{85}\cos(x) - \frac{6}{85}\sin(x).$$

2. L'equazione caratteristica risulta essere

$$z^2 - 2z + 3 = 0$$

le cui soluzioni sono $z = 1 \pm i\sqrt{2}$. L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea associata é quindi dato da

$$Ae^x \sin(\sqrt{2}x) + Be^x \cos(\sqrt{2}x).$$

Troviamo quindi, separatamente, una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - 2y' + 3y = e^{2x}\sin(\sqrt{2}x)$$

e di

$$y'' - 2y' + 3y = 4x^2$$

Il termine $e^{2x}\sin(\sqrt{2}x)$ ha frequenza propria $2 \pm i\sqrt{2}$, che non é soluzione dell'equazione caratteristica, quindi possiamo cercare una soluzione particolare della forma $u(x) = ae^{2x}\sin(\sqrt{2}x) + be^{2x}\cos(\sqrt{2}x)$. Inserendo quest'ultima nell'equazione e imponendo che risolva si ottiene

$$\begin{aligned}
&4ae^{2x}\sin(\sqrt{2}x) + 4\sqrt{2}ae^{2x}\cos(\sqrt{2}x) - 2ae^{2x}\sin(\sqrt{2}x)\\
&+ 4be^{2x}\cos(\sqrt{2}x) - 4\sqrt{2}be^{2x}\sin(\sqrt{2}x) - 2be^{2x}\cos(\sqrt{2}x)\\
&- 2(2ae^{2x}\sin(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}ae^{2x}\cos(\sqrt{2}x) + 2be^{2x}\cos(\sqrt{2}x) - \sqrt{2}be^{2x}\sin(\sqrt{2}x))\\
&+ 3(ae^{2x}\sin(\sqrt{2}x) + be^{2x}\cos(\sqrt{2}x)) = e^{2x}\sin(\sqrt{2}x)
\end{aligned}$$

da cui, eliminando il termine e^{2x} e imponendo l'uguaglianza dei termini dello stesso tipo trigonometrico, si ottiene

$$\begin{cases} 4a - 2a - 4\sqrt{2}b - 4a + 2\sqrt{2}b + 3a = 1 \\ 4\sqrt{2}a + 4b - 2b - 2\sqrt{2}a - 4b + 3b = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} b = -\frac{2\sqrt{2}}{9} \\ a = \frac{1}{9}. \end{cases}$$

In alternativa, detto $z = 2 + i\sqrt{2}$ possiamo considerare la parte immaginaria di una soluzione particolare a valori complessi di

$$y'' - 2y' + 3y = e^{zx}$$

della forma ae^{zx} con $a \in \mathbb{C}$. Inserendo nell'equazione si ottiene

$$z^2 ae^{zx} - 2zae^{zx} + 3ae^{zx} = e^{zx}$$

ed eliminando il termine e^{zx} si ottiene

$$a = \frac{1}{z^2 - 2z + 3} = \frac{1}{4 - 2 + 4i\sqrt{2} - 2(2 + i\sqrt{2}) + 3} = \frac{1}{1 + i2\sqrt{2}}$$

da cui, ricordando che $1/z = \overline{z}/|z|^2$, si ottiene

$$a = \frac{1 - 2i\sqrt{2}}{1 + 8} = -\frac{1}{9} - i\frac{2\sqrt{2}}{9}.$$

e quindi una soluzione particolare é data dalla parte immaginaria di '

$$ae^{zx} = (\frac{1}{9} - i\frac{2\sqrt{2}}{9})e^{2x}(\cos(\sqrt{2}x) + i\sin(\sqrt{2}x)) =$$
$$e^{2x}(\frac{1}{9}\cos(\sqrt{2}x) + \frac{2\sqrt{2}}{9}\sin(\sqrt{2}x)) + i(e^{2x}(\frac{1}{9}\sin(\sqrt{2}x) - \frac{2\sqrt{2}}{9}\cos(\sqrt{2}x)))$$

Per quanto riguarda invece il secondo termine, questo ha frequenza propria 0 che non annulla il polinomio caratteristico e quindi una soluzione particolare si puó trovare della forma $v(x) = (ax^2 + bx + c)$. Inserendo quest'ultima nell'equazione e imponendo che risolva si ottiene

$$2a - 2(2ax + b) + 3(ax^2 + bx + c) = 4x^2$$

da cui

$$\begin{cases} 3a = 4 \\ -4a + 3b = 0 \\ 2a - 2b + 3c = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = \frac{16}{9} \\ c = \frac{8}{27} \end{cases}$$

In definitiva una soluzione particolare dell'equazione non omogenea é data dalla somma $u + v$ e quindi tutte le soluzioni sono

$$Ae^x \sin(\sqrt{2}x) + Be^x \cos(\sqrt{2}x) + \frac{1}{9}e^{2x}\sin(\sqrt{2}x) - 2\frac{\sqrt{2}}{9}e^{2x}\cos(\sqrt{2}x) + \frac{4}{3}x^2 + \frac{16}{9}x - \frac{16}{27}.$$

3. L' equazione caratteristica risulta essere

$$z^2 + 6z + 13 = 0$$

che ha come soluzioni $z = -3 \pm i2$. L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea associata é quindi dato da

$$Ae^{-3x}\sin(2x) + Be^{-3x}\cos(2x).$$

Il termine $e^{-3x}\cos(2x)$ ha frequenza propria $-3 \pm i2$, che é soluzione dell'equazione caratteristica, quindi possiamo cercare una soluzione particolare della forma $u(x) = x(ax+b)e^{-3x}\cos(2x) + x(cx+d)e^{-3x}\sin(2x)$. Inserendo quest'ultima nell'equazione e imponendo che risolva si ottiene, ponendo $s(x) = e^{-3x}\cos(2x)$ e $t(x) = e^{-3x}\sin(2x)$:

$$
\begin{aligned}
&2as + 2(2ax+b)s' + (ax^2+bx)s'' + 2ct + 2(2cx+d)t' + (cx^2+dx)t'' + \\
&+ 6\big((2ax+b)s + (ax^2+bx)s' + (2cx+d)t + (cx^2+dx)t'\big) + \\
&+ 13\big((ax^2+bx)s + (cx^2+dx)t\big) = \\
&(ax^2+bx)(s''+6s'+13s) + (cx^2+dx)(t''+6t'+13t) + \\
&+ (12ax+6b+2a)s + (12cx+6d+2c)t + (4ax+2b)s' + (4cx+2d)t' = \\
&= (x+1)s
\end{aligned}
$$

da cui, ricordando che s e t sono soluzioni dell'equazione omogenea e quindi vale

$$
\begin{cases}
s'' + 6s' + 13s = 0 \\
t'' + 6t' + 13t = 0
\end{cases}
$$

si ottiene

$$(12ax+6b+2a)s + (12cx+6d+2c)t + (4ax+2b)s' + (4cx+2d)t' = (x+1)s$$

che equivale, esplicitando le derivate, a

$$
\begin{aligned}
&(12ax+6b+2a)e^{-3x}\cos(2x) + (12cx+6d+2c)e^{-3x}\sin(2x) + \\
&+ (4ax+2b)(-2e^{-3x}\sin(2x) - 3e^{-3x}\cos(2x)) + \\
&+ (4cx+2d)(2e^{-3x}\cos(2x) - 3e^{-3x}\sin(2x)) = (x+1)e^{-3x}\cos(2x).
\end{aligned}
$$

Eliminando ad ambo i membri il termine e^{-3x} e uguagliando i termini simili si ottiene quindi il sistema

$$
\begin{cases}
12a - 12a + 8c = 1 \\
6b + 2a - 6b + 4d = 1 \\
12c - 8a - 12c = 0 \\
6d + 2c - 4b - 6d = 0
\end{cases}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{cases}
c = \frac{1}{8} \\
2a + 4d = 1 \\
a = 0 \\
c - 2b = 0
\end{cases}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{cases}
c = \frac{1}{8} \\
d = \frac{1}{4} \\
a = 0 \\
b = \frac{1}{16}
\end{cases}
$$

Alternativamente possiamo trovare una soluzione particolare dalla parte reale di una soluzione a valori complessi di

$$y'' + 6y' + 13y = (x+1)e^{zx}$$

dove si é posto $z = -3+2i$. Poiché z annulla il polinomio caratteristico la soluzione particolare andrá cercata della forma $u = x(ax+b)e^{zx}$ con $a, b \in \mathbb{C}$. inserendo quest'ultima nell'equazione e ricordando che e^{zx} é una soluzione complessa dell'equazione differenziale, si ottiene

$$\begin{aligned}
&2ae^{zx} + 2z(2ax+b)e^{zx} + z^2(ax^2+bx)e^{zx} + \\
&+ 6((2ax+b)e^{zx} + z(ax^2+bx)e^{zx}) + 13(ax^2+bx)e^{zx} = \\
&= (2a + 2z(2ax+b) + 6(2ax+b))\, e^{zx} = (x+1)e^{zx}
\end{aligned}$$

ossia

$$4a(3+z)x + 2(a + zb + 3b) = x + 1$$

che fornisce il sistema

$$\begin{cases} 8ia = 1 \\ 2(a + 2ib) = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a = -\frac{i}{8} \\ b = \frac{-i}{2}(\frac{1}{2} + \frac{i}{8}) = \frac{1}{16} - \frac{i}{4} \end{cases}$$

e quindi la soluzione particolare é la parte reale di

$$x(ax+b)e^{zx} = (-\frac{i}{8}x^2 + \frac{1}{16}x - \frac{i}{4}x)e^{-3x}(\cos(2x) + i\sin(2x))$$

pari a

$$\left(\frac{1}{16}x\cos(2x) + (\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x)\sin(2x)\right) e^{-3x}.$$

che é la stessa soluzione trovata con l'altro metodo. In definitiva l'insieme delle soluzioni dell'equazione completa é dato da

$$Ae^{-3x}\sin(2x) + Be^{-3x}\cos(2x) + \left(\frac{1}{16}x\cos(2x) + (\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x)\sin(2x)\right) e^{-3x}.$$

4. L'equazione caratteristica risulta essere

$$z^2 - 6z + 9 = 0$$

che ha l'unica soluzione $z = 3$ di molteplicitá algebrica 2. L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea associata é quindi dato da

$$Ae^{3x} + Bxe^{3x}.$$

Troviamo allora, separatamente, una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - 6y' + 9y = xe^{3x}$$

e di

$$y'' - 6y' + 9y = 3$$

Il termine e^{3x} ha frequenza propria 3, che é soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicitá algebrica 2, quindi possiamo cercare una soluzione particolare della forma $u(x) = x^2(ax+b)e^{3x}$. Inserendo quest'ultima nell'equazione e imponendo che risolva si ottiene

$$\begin{aligned}
&(6ax+2b)e^{3x} + 6(3ax^2+2bx)e^{3x} + 9(ax^3+bx^2)e^{3x} - \\
&- 6\left((3ax^2+2bx)e^{3x} + 3(ax^3+bx^2)e^{3x}\right) + 9(ax^3+bx^2)e^{3x} = \\
&= (6ax+2b)e^{3x} = xe^{3x}
\end{aligned}$$

che implica $a = 1/6$ e $b = 0$.
Per quel che riguarda il termine 3 la sua frequenza propria é 0 che non annulla il polinomio caratteristico e quindi possiamo trovare una soluzione particolare della forma $v(x) = c$ che, sostituita nell'equazione fornisce

$$9c = 3 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{1}{3}$$

Quindi l'insieme delle soluzioni é dato da

$$Ae^{3x} + Bxe^{3x} + \frac{1}{6}x^3e^{3x} + \frac{1}{3}.$$