

Equazioni Differenziali Ordinarie		22 aprile 2004
Cognome:	Nome:	Firma:
Sez. Ambientali	Prof. Marchionna	Matricola:

© I seguenti quesiti e il relativo svolgimento sono coperti da diritto d'autore; pertanto essi non possono essere sfruttati a fini commerciali o di pubblicazione editoriale. Ogni abuso sarà perseguito a termini di legge dal titolare del diritto

1

a) Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & k \\ 0 & 2 & 0 \\ -k & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

determinare per quali valori del parametro reale k la matrice A risulta diagonalizzabile. In questo caso calcolarne gli autovettori.

b) Scrivere in forma esplicita il sistema $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$.

c) Nel caso $k = 1$, scrivere l'integrale generale del sistema $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ sia in forma scalare che nella forma $W(x)\mathbf{c}$, mettendo in evidenza una opportuna matrice wronskiana.

2

Sia data l'equazione differenziale ordinaria

$$y' = (3t^2 - 2t)(y^2 - 1).$$

a) Dopo aver enunciato il Teorema di Esistenza ed Unicità in piccolo (locale) per le soluzioni del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, specificare in quale campo $A \subseteq \mathbf{R}^2$ ne sono soddisfatte le ipotesi.

b) Dare un enunciato del teorema di Esistenza ed Unicità in grande e verificare se é possibile, in base a tale teorema, prevedere a priori l'insieme massimale di definizione delle soluzioni.

c) Scrivere lo sviluppo di Taylor centrato in $t = 1$ della soluzione del problema di Cauchy $y(1) = 0$ arrestato al secondo grado e disegnarne un grafico locale.

d) Scrivere l'integrale generale dell'equazione.

e) Trovare la linea integrale che risolve il problema di Cauchy del punto c).

f) Studiare nel piano (t, y) il segno di y' .

g) Disegnare un grafico qualitativo delle soluzioni dei problemi di Cauchy $y(0) = a$ al variare di a (non é richiesta la localizzazione dei punti di flesso). Si può garantire il prolungamento delle soluzioni a $+\infty$ e/o a $-\infty$? (Giustificare adeguatamente la risposta).

Equazioni Differenziali Ordinarie		22 aprile 2004
Cognome:	Nome:	Firma:
Sez. Ambientali	Prof. Marchionna	Matricola:

© I seguenti quesiti e il relativo svolgimento sono coperti da diritto d'autore; pertanto essi non possono essere sfruttati a fini commerciali o di pubblicazione editoriale. Ogni abuso sarà perseguito a termini di legge dal titolare del diritto

3

Sia data l'equazione

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t}.$$

- Enunciare il principio di sovrapposizione per equazioni o sistemi lineari, e spiegare cosa occorre trovare per scriverne l'integrale generale.
- Calcolare l'integrale generale.
- Trovare la soluzione che ha un flesso a tangente orizzontale per $t = 0$.

4

Una tazza di cioccolata, alla temperatura di 90° C, viene posta in una stanza alla temperatura di 20° C. Supponendo che valga la legge di Fourier relativa alla velocità di raffreddamento, che dice che la velocità di raffreddamento é proporzionale alla differenza di temperatura, e sapendo che all'istante $t = 0$ la velocità di raffreddamento é di 20° C al minuto, scrivere

- L'equazione differenziale che modella il raffreddamento della tazza di cioccolata.
- Dopo quanto tempo la cioccolata raggiunge la temperatura di 40° C?