LOGICA MULTIMODALE

Sia nella ingegneria della conoscenza, sia nell'ingegneria del software e nelle tecniche di verifica formale si incontrano logiche che estendono le logiche modali, introdotte nel precedente fascicolo di dispense, permettendo l'uso di più connettivi modali.

Dal punto di vista sintattico si parte da un linguaggio costituito da un insieme (al più numerabile) Φ di formule atomiche, dai soliti connettivi logici, dalle parentesi come simboli ausiliari e da un insieme $\{[i]|i\in I\}$di connettivi modali, ognuno dei quali è trattato come precedentemente era stato trattato $\Box$, per ognuno di essi viene anche introdotto il connettivo duale <i>, definito come $\neg[i]\neg$, da trattare come nella logica (uni)modale era trattato $\Diamond$.

Analogamente al caso (uni)modale si chiamano formule ben formate su questo alfabeto tutte e sole le formule ottenute mediante il solito procedimento:

- ogni formula atomica è una fbf,
- se $\mathcal{A}$ è una fbf anche $\sim\mathcal{A}$, $[i]\mathcal{A}$, $<i>\mathcal{A}$ (per ogni $i\in I$) è una fbf,
- se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono fbf anche $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B}$ sono fbf,
- niente altro è una fbf.

L'insieme delle fbf costruite su Φ come sopra indicato utilizzando i connettivi $\{[i]|i\in I\}$ si indica con $Fma_I(\Phi)$. Analogamente a quanto avevamo visto nel caso (uni)modale si definisce una priorità nell'uso degli operatori, secondo la quale, il connettivo ~ e gli operatori modali hanno la stessa priorità ed hanno priorità maggiore di tutti gli altri connettivi, che, naturalmente, seguono le usuali regole di priorità fra connettivi logici.

La formula $[i]\mathcal{A}$ si legge "necessariamente in i $\mathcal{A}$" e può avere diversi significati a seconda del contesto, ad esempio, se I è un insieme di agenti può avere il significato "l'agente i conosce $\mathcal{A}$", se I={F,P} dove F indica il futuro e P il passato, $[F]\mathcal{A}$ significa "in ogni istante del futuro vale $\mathcal{A}$", $[P]\mathcal{A}$ significa "in ogni istante del passato vale $\mathcal{A}$".

Per la parte semantica si può fare uso ancora dei concetti di frame e modelli (standard).
Un frame è costituito da un insieme di mondi S e da una collezione $\{R_i|i\in I\}$ di relazioni binarie su S (cioè un frame ha una relazione di raggiungibilità per ogni operatore modale), aggiungendo ad un frame una funzione $V:\Phi\rightarrow\wp(S)$ si ottiene un modello.
La verità di una formula in un mondo α di un modello è definita nel solito modo, usando ovviamente nell'interpretazione di una formula $[i]\mathcal{A}$ la relazione R_i associata all'operatore [i], dunque $M\models_\alpha [i]\mathcal{A}$ se e solo per ogni $\beta\in S$ tale che $(\alpha,\beta)\in R_i$ si ha $M\models_\beta\mathcal{A}$.
Le definizioni di verità in un modello e validità in un frame rimangono le solite.

Una logica multimodale, con un insieme I di operatori modali e sull'insieme di formule atomiche Φ si definisce come un sottoinsieme di $Fma_I(\Phi)$ contenente le tautologie e chiuso rispetto al Modus Ponens e alle sostituzioni uniformi.
Una logica multimodale si dice normale se contiene gli schemi

K_i: $\quad [i](\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow([i]\mathcal{A}\Rightarrow[i]\mathcal{B})$

ed è chiusa rispetto alla regola di necessitazione per ogni operatore [i].
Ripetendo in modo ovvio quanto fatto per le logiche (uni)modali normali si ottengono le definizioni di modello canonico, sottomodello generato e filtrazione e si provano i relativi teoremi.

LOGICHE TEMPORALI

Tra le logiche multimodali sono di particolare interesse quelle coi due connettivi modali [P] e [F], da leggere come "necessariamente nel passato" e "necessariamente nel futuro".
Un frame di questo linguaggio sarà allora del tipo $F=(S,R_P,R_F)$ dove al solito si definisce

$M\models_\alpha [P]\mathcal{A}$ se e solo se per ogni $\beta\in S$ con $(\alpha,\beta)\in R_P$ si ha $M\models_\beta \mathcal{A}$

e

$M\models_\alpha [F]\mathcal{A}$ se e solo se per ogni $\beta\in S$ con $(\alpha,\beta)\in R_F$ si ha $M\models_\beta \mathcal{A}$.

Ovviamente per dare un naturale significato alle parole passato e futuro, dovrà essere

(1) $(\alpha,\beta)\in R_P$ se e solo se $(\beta,\alpha)\in R_F$, cioè $R_P = R_F^{-1}$.

Si dimostra facilmente che in un frame $F=(S,R_P,R_F)$ dove la (1) è soddisfatta sono validi gli schemi

(2) $\mathcal{A}\Rightarrow [P]<F>\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}\Rightarrow [F]<P>\mathcal{A}$.

e viceversa in ogni frame $F=(S,R_P,R_F)$ in cui sono validi gli schemi si ha la (1).
A questo proposito consideriamo un frame $F=(S,R_P,R_F)$ in cui R_P ed R_F soddisfano le (1), allora in ogni modello M costruito sul frame F sono valide le (2), infatti se $\mathcal{A}$ vale in un mondo α di M, in ogni β tale che $(\alpha,\beta)\in R_P$ è vera $<F>\mathcal{A}$ essendo $(\beta,\alpha)\in R_F$ e analogamente in ogni γ tale che $(\alpha,\gamma)\in R_F$ è vera $<P>\mathcal{A}$ essendo $(\gamma,\alpha)\in R_P$.
Viceversa supponiamo che in un frame $F=(S,R_P,R_F)$ valgano le (2) e supponiamo che esistano α e β in S con $(\alpha,\beta)\in R_P$ e non $(\beta,\alpha)\in R_F$; consideriamo la seguente istanza della prima delle (2): $A\Rightarrow [P]<F>A$ e la valutazione $V(A)=\{\alpha\}$ allora nel mondo α del modello M, costruito su F con la valutazione in esame, l'istanza considerata della prima delle (2) non è vera. Analogamente supponendo che esistano γ e δ in S con $(\gamma,\delta)\in R_F$ e non $(\delta,\gamma)\in R_P$, l'istanza $A\Rightarrow [F]<P>A$ della seconda delle (2) con la valutazione $V(A)=\{\delta\}$ non è vera in δ.
Si prova anche che se una logica normale contiene i due schemi (2), allora le relazioni R_P e R_F del modello canonico soddisfano la (1), cioè sono una l'inversa dell'altra.

Nel seguito chiederemo che tutte le logiche temporali contengano gli schemi (2) e pertanto non avremo la necessità di introdurre due relazioni nei loro frame, ma ci basterà usare una relazione R che identificheremo con R_F, intendendo che $R_P= R^{-1}$.
Inoltre R deve rappresentare un ordinamento temporale ed è perciò naturale chiedere che goda almeno della proprietà transitiva. La transitività di R (e quindi di R^{-1}) implica che siano validi gli schemi

(3) $[P]\mathcal{A}\Rightarrow [P][P]\mathcal{A}$ e $[F]\mathcal{A}\Rightarrow [F][F]\mathcal{A}$.

Definizione 1.1.
Un **frame temporale** (standard) è una coppia (S,R), con S insieme dei mondi, $R\subseteq S\times S$ relazione transitiva (di raggiungibilità nel futuro) e con una (non esplicitata) relazione R^{-1} di raggiungibilità nel passato; un modello temporale (standard) è un modello costruito su un frame temporale.
Una **logica temporale** è una logica normale multimodale nei connettivi modali [F] e [P] che contiene gli schemi (2) e (3).

Come già osservato nel caso delle logiche (uni)modali si prova che esiste una minima logica temporale che denoteremo con K_t, e che risulta essere l'intersezione di tutte le logiche temporali (sullo stesso linguaggio di K_t).

La logica K_t può essere facilmente assiomatizzata prendendo come assiomi i soliti schemi A1, A2, A3, K_F, K_P, i quattro schemi (2) e (3) e come regole di inferenza MP e le regole di necessitazione rispetto a futuro e passato.
Si può provare che K_t è determinata dalla classe di tutti i frame temporali ed è decidibile. La dimostrazione procede secondo le stesse linee della dimostrazione del fatto che K è determinata dalla classe di tutti i frame ed è decidibile.

Per riformulare la dimostrazione nel caso della logica temporale sarà necessario riadattare la definizione di Γ-*filtrazione*, per definire Γ-filtrazioni di modelli M=(S,R,V) su frame temporali si deve mantenere il fatto che R è transitiva e che R va intesa come R_F mentre R^{-1} va intesa come R_P.
Una relazione adatta a questo scopo è la relazione R^τ definita su S_Γ, ponendo
$|\alpha| \; R^\tau \; |\beta|$ se e solo se $[F]\mathcal{B} \in \Gamma$ e $M \models_\alpha [F]\mathcal{B}$ implicano $M \models_\beta [F]\mathcal{B} \wedge \mathcal{B}$
e $[P]\mathcal{B} \in \Gamma$ e $M \models_\beta [P]\mathcal{B}$ implicano $M \models_\alpha [P]\mathcal{B} \wedge \mathcal{B}$.
(Per evitare confusione notazionale , abbiamo indicato le $\sim_\Gamma$ classi di α con $|\alpha|$ invece che con $[\alpha]$ come avevamo fatto nel caso di logiche unimodali.)
Il modello M^τ=(S_Γ, R^τ, V_Γ) risulta così transitivo e per ogni formula $\mathcal{B} \in \Gamma$ vale il lemma di filtrazione:

$$M \models_\alpha \mathcal{B} \qquad \text{se e solo se} \qquad M^\tau \models_{|\alpha|} \mathcal{B}.$$

Analogamente si possono riadattare a frame e modelli temporali le nozioni di sottomodello generato e di p-morfismo.
Sia M=(S,R,V) un modello su un frame temporale, allora si definisce il *modello generato* da α, M^α=(S^α,R^α,V^α), ponendo S^α come il più piccolo sottoinsieme X di S che contiene α ed è chiuso rispetto ad R e ad R^{-1} (questo significa che se $\alpha \in X$ e $\alpha R \beta$ o $\beta R \alpha$, allora $\beta \in X$), V^α come la restrizione di R ad S^α e $V^\alpha(p)$ come $V(p) \cap S^\alpha$.

Per la logica temporale il *p-morfismo* fra due modelli M_1=(S_1,R_1,V_1) e M_2 =(S_2,R_2,V_2) è definito come una applicazione f: $S_1 \rightarrow S_2$, tale che

$\alpha \; R_1 \beta$	implica	$f(\alpha) \; R_2 \; f(\beta)$
$f(\alpha) R_2 \; \gamma$	implica che esiste un β con	$\alpha \; R_1 \beta$ e $f(\beta)=\gamma$
$\delta \; R_2 \; f(\beta)$	implica che esiste un α con	$\alpha \; R_1 \beta$ e $f(\alpha)=\delta$.

Se esiste un p-morfismo fra i due modelli M_1 e M_2 si ha, per ogni formula $\mathcal{A}$, $M_1 \models_\alpha \mathcal{A}$ se e solo se $M_2 \models_{f(\alpha)} \mathcal{A}$.

Poiché un frame temporale sembra richiedere solo una relazione di raggiungibilità (la seconda è implicitamente definita) è abbastanza naturale chiedersi se serva introdurre in una logica temporale sia il connettivo [F] sia quello [P] o se l'introduzione del secondo connettivo sia dovuta solo a maggior semplicità e naturalezza del linguaggio.
Come vedremo in seguito possiamo spesso fare a meno del connettivo [P] e quindi pensare a logiche temporali con un solo connettivo modale che indicheremo al solito con $\Box$ (col significato di [F]).

Per esempio supponiamo di riferirci ad un **tempo lineare discreto con origine** (punti a coordinate intere sulla semiretta reale), questo tempo può essere visto come un frame (standard) (ω,<), dove ω -insieme dei mondi- è un insieme totalmente ordinato discreto con minimo e senza massimo, può cioè essere visto come l'insieme degli interi non negativi, e la relazione di raggiungibilità < è l'ordinamento stretto rispetto al quale l'insieme dei mondi è una catena (usuale ordinamento stretto di interi). E' naturale chiedersi se esista una logica normale determinata da tale frame, se sia assiomatizzabile ed in tal caso quali siano gli schemi di assiomi con cui definirla.

A tal proposito chiamiamo Ω la logica *K4DLZ*, cioè la minima logica normale contenente gli schemi

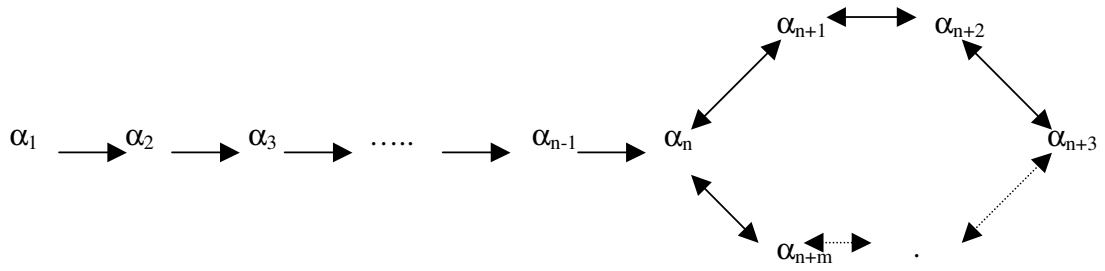
4. $\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\Box\mathcal{A}$,
D. $\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Diamond\mathcal{A}$,
L. $\Box(\mathcal{A}\wedge\Box\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\vee\Box(\mathcal{B}\wedge\Box\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A})$,
Z. $\Box(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A})\Rightarrow(\Diamond\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\mathcal{A})$.

e proviamo il seguente

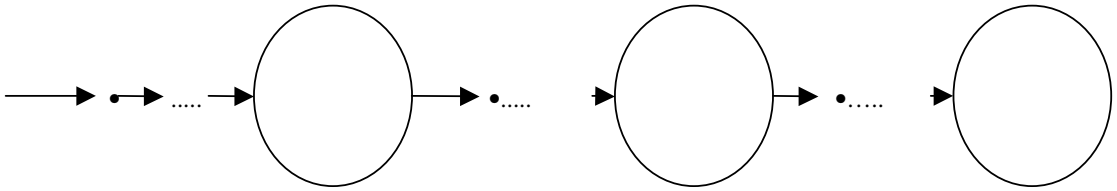
Teorema 1.1.
Ω è determinata dal frame (ω,<).
Dim
E' facile vedere che se $\vdash_{\Omega}\mathcal{A}$ allora $(\omega,<)\models\mathcal{A}$. Infatti, gli assiomi A1,A2,A3,K (che appartengono ad una qualunque logica modale normale) sono validi su (ω,<), inoltre su (ω,<) è valido lo schema 4 in quanto (ω,<) è transitivo, è valido lo schema D in quanto (ω,<) è seriale ed è valido L poiché (ω,<) è debolmente connesso. Resta da far vedere che Z è valido su (ω,<); infatti considerati un qualsiasi modello costruito sul frame (ω,<) e un qualunque mondo $\alpha\in\omega$, se in α è falsa una delle formule $\Box(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A})$ o $\Diamond\Box\mathcal{A}$, Z risulta ovviamente vero, allora supponiamo che in α siano vere sia $\Box(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A})$ sia $\Diamond\Box\mathcal{A}$, ne segue che in ogni $\beta\in\omega$ tale che $\alpha<\beta$ è vera la formula $\Box\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}$, e che in un $\gamma\in\omega$ tali che $\alpha<\gamma$ è vera $\Box\mathcal{A}$, quindi in γ è vera $\mathcal{A}$, ma allora nel mondo che precede immediatamente γ nell'ordinamento <, è vera $\Box\mathcal{A}$ e di nuovo in quel mondo è vero $\mathcal{A}$, poiché fra α e δ c'è solo un numero finito di mondi ripetendo questo argomento un numero finito di volte si ottiene che in α è vera $\Box\mathcal{A}$, pertanto essendo vero il conseguente di Z è vero Z. Inoltre MP e regole di necessitazione fanno passare da formule valide su un frame a forme valide sullo stesso frame, da cui l'asserto.
Dobbiamo allora dimostrare che se $(\omega,<)\models\mathcal{A}$ allora $\vdash_{\Omega}\mathcal{A}$.

Supponiamo per assurdo che non sia $\vdash_{\Omega}\mathcal{A}$.

Passo 1: Esiste un modello di Ω seriale, transitivo e debolmente connesso in cui $\mathcal{A}$ non è vera.
Infatti consideriamo il modello canonico di Ω, che indichiamo con M_1, sappiamo che esiste un mondo α di tale modello su cui $\mathcal{A}$ non è vera; inoltre M_1 è seriale, transitivo e debolmente connesso, da cui segue l'asserto.
Passo 2: Esiste un modello M_2 di Ω seriale, transitivo e connesso (cioè tale che presi comunque due mondi α e β del modello o da α è raggiungibile β o da β è raggiungibile α) in cui $\mathcal{A}$ non è vera.
Infatti basta considerare il sottomodello di M_1 generato da α, questo sottomodello è ancora seriale, transitivo, e risulta connesso in quanto due suoi mondi qualsiasi sono raggiungibili da α e quindi dalla debole connessione di M_1 segue la connessione del sottomodello. Per quanto dimostrato nella dispensa precedente a proposito del sottomodello generato, anche in questo sottomodello la formula $\mathcal{A}$ non è vera in α.
Passo 3: Esiste un modello *M* di Ω seriale, transitivo, connesso e il cui insieme di mondi ha cardinalità minore o uguale a $2^{|\mathrm{Sfma}(\mathcal{A})|}$ in cui $\mathcal{A}$ non è vera. Basta infatti costruire a partire da Γ=Sfma($\mathcal{A}$) il modello *M* che è la Γ-filtrazione di M_2 dove come Γ-filtrazione delle relazione di raggiungibilità di M_2 si prende la filtrazione transitiva. *M* è ancora seriale e connesso ed è transitivo per costruzione, inoltre il suo insieme di mondi ha cardinalità limitata superiormente da $2^{|\mathrm{Sfma}(\mathcal{A})|}$.
Passo 4:
Diciamo *palloncino* un frame (T, ρ) dove $T=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{n+m}\}$ e $\rho=\{(\alpha_i,\alpha_j)|1\le i<j\le n+m\}\cup\{(\alpha_h,\alpha_k)|n\le h,k\}$.
Sostanzialmente il grafo di ρ si presenta nella seguente forma (a meno degli archi che esprimono il fatto che ρ è transitiva.



Dimostriamo che esiste un palloncino, modello di Ω, il cui insieme di mondi ha cardinalità minore o uguale a $2^{|Sfma(\mathcal{A})|}$ in cui $\mathcal{A}$ non è vera.
Sia infatti *M*=(S,R,V) il modello che abbiamo trovato nel precedente passo in cui $\mathcal{A}$ non è vera. Definiamo su S la relazione $\alpha \approx \beta$ se e solo se $\alpha = \beta$ oppure α R β e β R α. La relazione $\approx$ è una relazione d'equivalenza su S e la classe di equivalenza C_α di α è detta *R-cluster* di α. Sull'insieme degli R-cluster si introduce una relazione $\leq$ ponendo $C_\alpha \leq C_\beta$ se e solo se α R β. Questa relazione risulta transitiva ed antisimmetrica. Poniamo poi in modo ovvio $C_\alpha < C_\beta$ se $C_\alpha \leq C_\beta$ e $C_\alpha \neq C_\beta$ e in tal caso diciamo che C_α *precede strettamente* C_β. Se un R-cluster C contiene più di un elemento, la relazione R è riflessiva su C e si ha C ≤ C, infatti detti α e β due elementi di C si ha $\alpha R\beta$ e $\beta R\alpha$ quindi, per la transitività di R $\alpha R\alpha$, inoltre $C= C_\alpha \leq C_\alpha = C$. Se non è C ≤ C, l'R-cluster C si dice *degenere* ed è formato da un unico elemento α per il quale non risulta $\alpha R\alpha$. Poiché R è connessa gli R-cluster formano una catena rispetto alla relazione <. I mondi di S sono dunque raggruppati in una sequenza finita di R-cluster di cui l'ultimo è non degenere, infatti se $C=C_\alpha$ è l'ultimo R-cluster, per la serialità di R esiste un β tale che $\alpha R\beta$, e allora $C\leq C_\beta$ ma C è l'ultimo R-cluster dunque $C=C_\beta$ cioè C≤C.
Un palloncino può essere visto come una sequenza finita di cluster di cui solo l'ultimo è non degenere. Ma nel nostro modello possono esserci, oltre all'ultimo R-cluster C_α, altri R-cluster non degeneri, cioè i mondi di S possono essere disposti come in figura



dove i punti rappresentano gli R-cluster degeneri ed i cerchi rappresentano gli R-cluster non degeneri (costituiti o da più mondi tutti associati fra loro o da un solo mondo associato a se stesso nella R). Per ottenere un palloncino dobbiamo allora indebolire R e portarci ad una relazione R' ottenuta "aprendo" tutti gli R-cluster non degeneri intermedi. La R' è una relazione su S contenuta in R e ordina in modo arbitrario ogni insieme di mondi appartenenti ad uno stesso R-cluster che non sia l'ultimo. Sostanzialmente la relazione R' è così definita: per ogni γ,δ che non appartengono ad uno stesso cluster $(\gamma,\delta)\in$ R' sse $(\gamma,\delta)\in$ R, per ogni γ,δ che appartengono entrambi all'ultimo cluster $(\gamma,\delta)\in$ R', per un cluster (non ultimo) detti $\gamma_1, \gamma_2,\ldots, \gamma_n$ gli elementi del cluster, $(\gamma_i, \gamma_j)\in$ R' sse i<j.

(S,R') è un palloncino e se prendiamo sul palloncino la stessa funzione di valutazione di *M* otteniamo un modello *M*'=(S,R',V) basato su un palloncino. Vogliamo dimostrare che una formula $\mathcal{C}$ è vera in un mondo α di *M* se e solo se è vera nel mondo α di *M*'. Questo è ovviamente vero per le formule che non contengono connettivi modali. Supponiamo allora che $\mathcal{C}$ abbia la forma $\Box\mathcal{B}$, poiché R' $\subseteq$ R se $\mathcal{C}$ è vera in un mondo β di *M*, $\mathcal{C}$ è vera anche nel mondo β di *M*'. Sia allora $\mathcal{C}$ vera in un mondo β di *M*'e supponiamo che $\mathcal{C}$ non sia vera nel mondo β di *M*. $\mathcal{B}$ dovrà allora risultare falsa in un mondo γ tale che $(\beta,\gamma)\in$ R mentre $(\beta,\gamma)\notin$ R'. Ovviamente se $(\beta,\gamma)\in$ R ma $(\beta,\gamma)\notin$ R', i mondi β,γ devono appartenere ad uno stesso R-cluster che non è l'ultimo. Si può ora far uso dello Z-lemma che garantisce l'esistenza di un mondo δ in un R- cluster C_δ tale che $C_\beta < C_\delta$ in cui $\mathcal{B}$ non è vera (lo Z-lemma sarà enunciato e dimostrato nel seguito). Ma $C_\beta < C_\delta$ implica $(\beta,\delta)\in$ R' e dunque $\mathcal{C}$ non sarebbe vera nel mondo β del modello *M*', contro il supposto. Dunque avendo dimostrato nel passo 3 che $\mathcal{A}$ non è vera nel mondo α del modello *M*, abbiamo che $\mathcal{A}$ non è vera nel mondo α del modello *M*', costruito su un palloncino e quindi non è valida su ogni palloncino.
Passo 5:
Un palloncino risulta essere una immagine di $(\omega,<)$ rispetto ad un p-morfismo.
Infatti sia (T, ρ) un palloncino dove $T=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{n+m}\}$ e $\rho=\{(\alpha_i,\alpha_j)|1\le i<j\le n+m\}\cup\{(\alpha_h,\alpha_k)|n\le h,k\}$, dove $\{\alpha_0\},\{\alpha_1\},\ldots,\{\alpha_{n-1}\}$ sono i ρ-cluster degeneri nell'ordine $\{\alpha_0\}<\{\alpha_1\}<\ldots<\{\alpha_{n-1}\}$ e $\{\alpha_n,\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{n+m}\}$ è l'ultimo ρ-cluster ed è non degenere. La corrispondenza $f:\omega\to S$, definita ponendo $f(i)=\alpha_i$ se $0 \le i <n$ ed $f(i)=\alpha_{n+j}$ con j resto della divisione di i per m se $i \ge n$ è un p-morfismo, quindi se $\mathcal{A}$ non è valida su ogni palloncino non è valida su $(\omega,<)$, contro l'ipotesi, pertanto $\mathcal{A}$ deve essere un teorema di Ω.

Osserviamo che a causa del limite superiore sulla dimensione dei palloncini abbiamo che la logica Ω è decidibile.

Enunciamo e dimostriamo ora lo
Z-lemma :
Sia *M* un modello costruito su un frame (S,R) seriale riflessivo e connesso su cui è vero lo schema Z.
Se una formula $\Box\mathcal{B}$ non è vera in un mondo α di un R-cluster C_α che non sia l'ultimo allora esiste un mondo β appartenente ad un R-cluster C_β tale che $C_\alpha < C_\beta$ in cui $\mathcal{B}$ non è vera.
Dim.
Supponiamo che esista una formula $\Box\mathcal{B}$ non vera in un mondo α di un R-cluster C_α che non sia l'ultimo, e tale che $\mathcal{B}$ sia vera in tutti i mondo γ di R-cluster successivi a C_α. Ovviamente allora $\mathcal{B}$ non è vera in un mondo di C_α e di conseguenza in ogni mondo di un cluster $C_\beta \le C_\alpha$ non è vera $\Box\mathcal{B}$ e dunque è vera $\Box\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{B}$. Invece in tutti i mondi dei cluster successivi a C_α sono vere sia $\Box\mathcal{B}$ sia $\mathcal{B}$ e dunque è ancora vera $\Box\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{B}$, pertanto in ogni mondo del nostro modello è vera la formula $\Box(\Box\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{B})$ e dunque, essendo vero lo schema Z, è vera anche la formula $\Diamond\Box\mathcal{B}\Rightarrow\Box\mathcal{B}$; del resto in α è vera la formula $\Diamond\Box\mathcal{B}$, dunque dovrebbe essere vera $\Box\mathcal{B}$, contro il supposto. Pertanto non può mai accadere che $\Box\mathcal{B}$ non sia vera in un mondo α di un R-cluster C_α che non sia l'ultimo, e che invece $\mathcal{B}$ sia vera in tutti i mondo γ di R-cluster successivi a C_α . La dimostrazione è dunque conclusa.

Con tecniche analoghe alla precedente si prova che il frame riflessivo $(\omega,\le)$ determina invece la logica KT4LDum dove lo schema Dum è lo schema: $\Box(\Box(\mathcal{A}\Rightarrow\Box\mathcal{A})\Rightarrow\mathcal{A})\Rightarrow(\Diamond\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\mathcal{A})$.

Ci si potrebbe a questo punto chiedere se la logica bimodale sia necessaria per trattare col "tempo". La motivazione per l'introduzione dei due operatori [P], [F] viene da questa considerazione:

i frames lineari (R,<) e (Q,<) determinano la stessa logica K4DLX, dove X è lo schema $\Box\Box\mathcal{A}\Rightarrow \Box\mathcal{A}$, che corrisponde alla condizione di debole densità .
La logica unimodale non è dunque abbastanza espressiva per distinguere tra le granularità "densa" e "continua" del tempo, per far questo abbiamo bisogno dei due operatori [P], [F].
In tale linguaggio bimodale risulta utile anche l'introduzione dell'operatore $\Box$ (sempre), che non va però letto come un operatore indipendente, ma come un operatore derivato dagli altri due, la formula $\Box\mathcal{A}$ viene infatti introdotta come forma abbreviata della formula $[P]\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}\wedge[F]\mathcal{A}$, analogamente si tratta la formula duale $\Diamond\mathcal{A}$, che significa "in qualche momento $\mathcal{A}$", ed è l'abbreviazione di $<P>\mathcal{A}\vee\mathcal{A}\vee<F>\mathcal{A}$.

Nel linguaggio bimodale si può mostrare che
la formula $\Box([P]\mathcal{A}\Rightarrow<F>[P]\mathcal{A})\Rightarrow([P]\mathcal{A}\Rightarrow[F]\mathcal{A})$ è valida su (R,<), ma non su (Q,<).
Verifichiamo che $\Box([P]\mathcal{A}\Rightarrow<F>[P]\mathcal{A})\Rightarrow([P]\mathcal{A}\Rightarrow[F]\mathcal{A})$ non è valido sul frame F=(Q,<). Costruiamo infatti su F un modello M ponendo $V(A)=\{\alpha\in Q|\alpha<\sqrt{2}\}$. In ogni istante β di M, cioè in ogni numero razionale, che sia $<\sqrt{2}$ è vera la formula [P]A⇒<F>[P]A, poiché è ovviamente vero l'antecedente, ma è vero anche il conseguente perché c'è sempre un razionale fra β e $\sqrt{2}$; in ogni istante γ di M che sia $>\sqrt{2}$ non è vero [P]A, quindi è vera la formula [P]A⇒<F>[P]A, pertanto in ogni istante di M è vera la formula $\Box$([P]A⇒<F>[P]A), ma in tutti i mondi $\beta<\sqrt{2}$ è falsa la formula [P]A⇒[F]A e quindi è falso il nostro schema di assiomi.
Mostriamo ora che $\Box([P]\mathcal{A}\Rightarrow<F>[P]\mathcal{A})\Rightarrow([P]\mathcal{A}\Rightarrow[F]\mathcal{A})$ è valida su (R,<). Se in ogni istante di ogni modello costruito su (R,<), $[P]\mathcal{A}\Rightarrow[F]\mathcal{A}$ è vera il risultato è ovvio. Sia allora α un istante di un modello costruito su (R,<) in cui è falsa ($[P]\mathcal{A}\Rightarrow[F]\mathcal{A}$), da questo segue che in α è vera $[P]\mathcal{A}$ ma è falsa $[F]\mathcal{A}$, cioè $\mathcal{A}$ è vera in ogni $\delta\leq\alpha$ ed esiste un β con $\alpha<\beta$ in cui $\mathcal{A}$ è falsa. Sia γ il più grande numero reale tale che in tutti gli istanti τ , con $\tau\leq\gamma$, $\mathcal{A}$ sia vera. In γ è falsa la formula $[P]\mathcal{A}\Rightarrow<F>[P]\mathcal{A}$ perché ogni istante successivo a γ è preceduto da un istante in cui $\mathcal{A}$ non è vera.
Dunque in α non è vera la formula $\Box([P]\mathcal{A}\Rightarrow<F>[P]\mathcal{A})$ e quindi è vera $\Box([P]\mathcal{A}\Rightarrow<F>[P]\mathcal{A})\Rightarrow([P]\mathcal{A}\Rightarrow[F]\mathcal{A})$.

Vista allora la maggior espressività delle logica temporale bimodale cerchiamo di definire la linearità nel contesto delle logiche con i due operatori [F], [P] per qualunque granularità del tempo.

Si dice *logica temporale lineare* ogni logica normale che contenga la minima logica temporale K_t e gli schemi $\Box\mathcal{A}\Rightarrow[P][F]\mathcal{A}$ e $\Box\mathcal{A}\Rightarrow[F][P]\mathcal{A}$ (dove l'operatore $\Box$ è visto al solito come operatore derivato che serve a "riassumere" le formule: $\Box\mathcal{A}$ è infatti introdotta come forma abbreviata della formula $[P]\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}\wedge[F]\mathcal{A}$).
La più piccola logica lineare temporale è chiamata *Lin* ed è determinata dalla classe dei frame transitivi debolmente connessi nel futuro e nel passato.
La minima logica lineare temporale contenente gli schemi

D_F: <F>T,
D_P: <P>T,
Z_F: $[F]([F]\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A})\Rightarrow(<F>[F]\mathcal{A}\Rightarrow[F]\mathcal{A})$
Z_P: $[P]([P]\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A})\Rightarrow(<P>[P]\mathcal{A}\Rightarrow[P]\mathcal{A})$

è determinata dal frame (Z,<) e viene detta *Lin Disc*.
Se Z_P viene sostituito da W_P: $[P]([P]\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A})\Rightarrow[P]\mathcal{A}$ otteniamo la logica *Lin Disc*$^{\omega}$ determinata da $(\omega,<)$.
La più piccola estensione normale di *Lin* che contiene gli schemi

D_F, D_P, X_F: $[F][F]\mathcal{A}\Rightarrow[F]\mathcal{A}$

è determinata dal frame (Q,<) e viene chiamata *LinRat*.
La più piccola estensione normale di *LinRat* che contiene lo schema

Cont: $\Box([P]\mathcal{A}\Rightarrow<F>[P]\mathcal{A})\Rightarrow([P]\mathcal{A}\Rightarrow[F]\mathcal{A})$

è determinata dal frame (R,<) e viene chiamata *LinRe*.

Osserviamo da ultimo che lo schema $\mathcal{A}\wedge[P]\mathcal{A}\Rightarrow<F>[P]\mathcal{A}$ è valido in un frame F=(S,R) con R connessa, transitiva, antisimmetrica e irriflessiva (tale cioè che per nessun α si abbia $(\alpha,\alpha)\in R$) se e solo se per ogni elemento α di S esiste un successore immediato ovvero un elemento β tale che $(\alpha,\beta)\in R$ e non esiste γ tale che $(\alpha,\gamma)\in R$ e $(\gamma,\beta)\in R$.
Notate che chiedendo che una relazione sia connessa e irriflessiva oltre che simmetrica e transitiva, possiamo descrivere bene un ordinamento forte, che come vi ricorderete non potevemo includere nella nostra definizione di relazione d'ordine.

LOGICA TEMPORALE DELLA CONCORRENZA.

Una logica che si presta bene a descrivere la concorrenza, cioè un insieme di n diversi processi che agiscono in parallelo, condividendo la memoria, in modo che ognuno di essi può alterare i valori delle variabili usate dagli altri è la logica nota sotto il nome di LTL (linear temporal logic) o di logica delle concorrenza. Come alcuni di voi avranno sicuramente visto in altri corsi questa logica è adatta a descrivere interessanti proprietà della concorrenza, come l'assenza di deadlock, la mutua esclusione, la accessibilità, la fairness, l'assenza di risposte non richieste, la correttezza, etc...
L'alfabeto di questa logica è formato da un insieme di formule atomiche Φ, dai soliti connettivi logici $\sim$ e $\Rightarrow$ (a cui potremo aggiungere al solito gli altri connettivi $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$), dagli operatori $\Box$, $\bigcirc$, $\mathtt{U}$ (a cui si aggiunge col solito significato $\Diamond$) e dai simboli ausiliari (,).Le *formule ben formate* si definiscono al solito modo, tenendo conta dell'aggiunta dell'operatore binario $\mathtt{U}$:
ogni formula atomica è una fbf,
se $\mathcal{A}$ è una fbf anche $\sim\mathcal{A}$, $\Box\mathcal{A}$, $\bigcirc\mathcal{A}$ sono fbf,
se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono fbf anche $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ e $\mathcal{A}\mathtt{U}\mathcal{B}$.
Gli operatori $\Box$, $\bigcirc$, $\mathtt{U}$, hanno rispettivamente il significato: da ora in poi, nello stato successivo, finché.
(Se avete già visto questa logica molto probabilmente avete indicato con X l'operatore modale $\bigcirc$, con G l'operatore $\Box$ e con E l'operatore $\Diamond$).
Per mettere a punto la semantica di questi operatori si fa uso di un frame detto *sequenza di stati* che è costituito da una coppia (S,σ) dove σ è una funzione suriettiva da ω ad S e dispone in sequenza gli elementi di S. Su questo frame si costruisce al solito modo un modello *M* e alla scrittura $M\models_j\mathcal{A}$ (dove con j si indica il j-esimo mondo della sequenza) si dà il seguente significato
$M\models_j\mathcal{A}$ con $\mathcal{A}$ formula atomica A, se e solo se $\sigma_j\in V(A)$,
$M\models_j\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$, se e solo se $M\not\models_j\mathcal{A}$ oppure $M\models_j\mathcal{B}$,
$M\models_j\sim\mathcal{A}$, se e solo se non $M\models_j\mathcal{A}$,
$M\models_j\bigcirc\mathcal{A}$, se e solo se $M\models_{j+1}\mathcal{A}$,
$M\models_j\Box\mathcal{A}$, se e solo se $M\models_k\mathcal{A}$ per ogni $k\geq j$,
$M\models_j\mathcal{A}\mathtt{U}\mathcal{B}$, se e solo se $M\models_k\mathcal{B}$ per qualche $k\geq j$ e $M\models_i\mathcal{A}$ per ogni i con $j\leq i<k$.
Sostanzialmente la relazione di raggiungibilità associata a $\Box$ può essere vista come la relazione $\leq$ su ω e quella associata a $\bigcirc$ come la relazione R che associa ad ogni intero il suo successivo, pertanto la relazione associata a $\Box$ è la chiusura riflessiva e transitiva della relazione associata ad $\bigcirc$.
Sia Θ la più piccola logica sui simboli introdotti contenente gli schemi
K: $\Box(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow(\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\mathcal{B})$

K_o $\bigcirc(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}) \Rightarrow (\bigcirc\mathcal{A}\Rightarrow\bigcirc\mathcal{B})$
Fun $\bigcirc\sim\mathcal{A}\Leftrightarrow\sim\bigcirc\mathcal{A}$
Mix $\Box\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}\wedge\bigcirc\Box\mathcal{A}$
Ind $\Box\ (\mathcal{A}\Rightarrow\bigcirc\mathcal{A})\Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow\Box\mathcal{A})$
U1 $\mathcal{A}U\mathcal{B}\Rightarrow\Diamond\mathcal{B}$
U2 $\mathcal{A}U\mathcal{B}\Leftrightarrow\mathcal{B}\vee(\mathcal{A}\wedge\bigcirc\ (\mathcal{A}U\mathcal{B}))$
e chiusa rispetto alle regole di necessitazione rispetto a $\Box$ e a $\bigcirc$.
Osserviamo che Fun esprime il fatto che la relazione di raggiungibilità associata a $\bigcirc$ è una funzione, Mix e Ind insieme esprimono il fatto che la relazione di raggiungibilità di $\Box$ è interpretato come la chiusura transitiva e riflessiva della relazione di $\bigcirc$. Mix implica immediatamente lo schema T e quindi la riflessività, lo schema 4 è derivabile dai precedenti ed implica la transitività, Ind esprime il principio di induzione.

Da questi assiomi si possono poi derivare alcuni interessanti schemi:
4: $\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\Box\mathcal{A}$
$\bigcirc\Box\mathcal{A}\Rightarrow\ \Box\bigcirc\Box\mathcal{A}$
$\bigcirc\Box\mathcal{A}\Rightarrow\ \bigcirc(\mathcal{A}\wedge\bigcirc\Box\mathcal{A})$
$\mathcal{A}\wedge\bigcirc\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\mathcal{A}$
$\bigcirc\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\ (\mathcal{A}\Rightarrow\Box\mathcal{A})$
Dum: $\Box\ (\Box\ (\mathcal{A}\Rightarrow\Box\mathcal{A})\Rightarrow\mathcal{A})\Rightarrow(\Diamond\Box\mathcal{A}\Rightarrow\Box\mathcal{A})$.

Si dice *frame di induzione* una struttura F=(S,f) dove f è una funzione da S ad S.
Si prende come relazione R su S la relazione $(s,t)\in R$ se e e solo se t=f(s), sia poi R* la sua chiusura riflessiva e transitiva.
I modelli M sui frame di induzione danno la semantica di Θ in questo modo
$M\models_s \bigcirc\mathcal{A}$ se e solo se $M\models_{f(s)}\mathcal{A}$
$M\models_s \Box\mathcal{A}$ se e solo se sR*t implica $M\models_t\mathcal{A}$
$M\models_s \mathcal{A}U\mathcal{B}$ se e solo se esiste una sequenza finita $s_0,s_1,...,s_k$ con $s_i=f(s_{i-1})$ e $M\models_{s_k}\mathcal{B}$ e $M\models_{s_i}\mathcal{A}$ per ogni i<k.
Una non semplice dimostrazione che utilizza le tecniche dei cluster opportunamente affinata prova che Θ è determinata dalla classe dei frame finiti di induzione.

LOGICA DINAMICA

L'idea base della logica dinamica è quella di associare ad ogni comando α di un linguaggio di programmazione un operatore modale $[\alpha]$, attribuendo alla formula modale $[\alpha]\mathcal{A}$ il significato "dopo ogni esecuzione di α A è vero", mentre $<\alpha>\mathcal{A}$ ha il significato esiste una esecuzione di α che termina con $\mathcal{A}$ vero.
In questo modo si ottiene una logica multimodale con l'insieme degli operatori modali indiciati dall'insieme dei programmi.
I programmi si pensano a loro volta come generati da un insieme di programmi atomici,
alla cui natura non siamo interessati.

La sintassi su cui si lavora è la seguente:
Φ è un insieme di formule atomiche,
Π è un insieme di programmi atomici,

Fma(Φ,Π) è l'insieme delle formule ben formate,
Prog(Φ,Π) è l'insieme dei programmi,
Fma(Φ,Π) e Prog(Φ,Π) sono definiti ricorsivamente in questo modo:
- ogni formula atomica è una f.b.f.,
- se $\mathcal{A}$ è una f.b.f, $\sim\mathcal{A}$ è una una f.b.f.,
- se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono f.b.f, $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$ è una formula,
- se $\mathcal{A}$ è una f.b.f. ed α è un programma, $[\alpha]\,\mathcal{A}$ è una una f.b.f.,
- niente altro è una formula;
- ogni programma atomico è un programma,
- se α e β sono programmi, $\alpha;\beta$ è un programma,
- se α e β sono programmi, $\alpha\cup\beta$ è un programma,
- se α è un programma, α^* è un programma,
- se $\mathcal{A}$ è una formula, $\mathcal{A}?$ è un programma.

I significati delle formule e dei programmi così costruiti sono:

$[\alpha]\,\mathcal{A}$	sta per	dopo α vale $\mathcal{A}$
$\alpha;\beta$	sta per	esegui α e poi β
$\alpha\cup\beta$	sta per	esegui non deterministicamente α o β
α^*	sta per	ripeti un numero finito di volte o 0 volte α
$\mathcal{A}?$	sta per	testa $\mathcal{A}$: continua se $\mathcal{A}$ è vero altrimenti esci.

Vengono usate poi le abbreviazioni
T e $\perp$ per vero e falso
$\langle\alpha\rangle\mathcal{A}$ per $\sim[\alpha]\sim\mathcal{A}$.

In questo linguaggio si esprimono i costrutti comuni

if $\mathcal{A}$ then α else β	si può scrivere come $(\mathcal{A}?;\alpha)\cup(\sim\mathcal{A}?;\beta)$
while $\mathcal{A}$ do α	si può scrivere come $(\mathcal{A}?;\alpha)^*;\sim\mathcal{A}?$
repeat α until $\mathcal{A}$	si può scrivere come $\alpha;(\sim\mathcal{A}?;\alpha)^*$
skip o α^0	p si può scrivere comeT?
abort	si può scrivere come $\perp?$

Un modello per la logica costruita su questa sintassi ha la forma
$M=(S,\{R_\alpha:\alpha\in Prog(\Phi,\Pi)\},V)$
dove R_α è una relazione binaria su S associata al programma α e
$M\models_s[\alpha]A$ se e solo se $(s,t)\in R_\alpha$ implica $M\models_t A$.
Un modello può essere dato più semplicemente attraverso $(S,\{R_\pi:\pi\in\Pi\},V)$.
e le altre relazioni possono essere costruite dalle relazioni associate ai programmi atomici in modo induttivo, imponendo loro di rispettare le condizioni :
$R_{\alpha;\beta}=R_\alpha\cdot R_\beta$
$R_{\alpha\cup\beta}=R_\alpha\cup R_\beta$
$R_{\alpha^*}=(R_\alpha)^*$
$R_{A?}=\{(s,s):M\models_s A\}$
Un modello in cui le relazioni soddisfano le suddette condizioni si dice *standard*.

Definiamo PDL come la più piccola logica normale in Fma(Φ,Π) che contiene gli schemi

Comp.	$[\alpha;\beta]\mathcal{A}\Leftrightarrow[\alpha]\,[\beta]\mathcal{A}$
Union.	$[\alpha\cup\beta]\mathcal{A}\Leftrightarrow[\alpha]\mathcal{A}\wedge[\beta]\mathcal{A}$
Test.	$[\mathcal{A}?]\mathcal{B}\Leftrightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$
Mix.	$[\alpha^*]\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}\wedge[\alpha][\alpha^*]\mathcal{A}$

Ind. $[\alpha^*](\mathcal{A} \Rightarrow [\alpha]\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow [\alpha^*]\mathcal{A})$

e naturalmente ha come regole di inferenza, oltre MP, le regole di necessitazione rispetto ad $[\alpha]$ per ogni programma α.

Osserviamo che per ogni programma α, $[\alpha^*]$ e $[\alpha]$ hanno in questa logica un significato analogo a quello di $\Box$ e $\bigcirc$ in logica temporale della concorrenza.

Si potrebbe dimostrare che

lo schema Comp. è valido su un modello se e solo se le relazioni del modello soddisfano alla condizione $R_{\alpha;\beta}=R_\alpha \cdot R_\beta$;

lo schema Union è valido su un modello se e solo se le relazioni del modello soddisfano alla condizione $R_{\alpha\cup\beta} = R_\alpha \cup R_\beta$;

lo schema Test è valido su un modello M se e solo se $R_{A?}=\{(s,s): M \models_s A\}$;

gli schemi Mix e Ind sono validi su un modello se e solo se le relazioni del modello soddisfano alla condizione $R_{\alpha^*}=(R_\alpha)^*$.

Teorema. PDL è determinata dalla classe dei modelli standard ed ha la proprietà forte di modello finito rispetto a questa classe.

Per quanto riguarda la correttezza il teorema si prova al solito modo.

Sia $\mathcal{A}$ un teorema di PDL, poiché nei frame standard gli schemi Comp,Union, Test, Mix, Ind sono validi, e le regole di necessitazione fanno passare da formule valide a formule valide, ogni teorema di PDL è valido nei frame standard.

La completezza di PDL richiede una dimostrazione più articolata.

Si considera dapprima il modello canonico di PDL $M^P=(S^P,\{R_\alpha{}^P : \alpha \in Progr(\Phi,\Pi)\}, V^P)$.

In questo modello, come è noto, sono soddisfatti tutti i PDL-teoremi e sono falsi tutti i non teoremi (stiamo lavorando su una logica normale). Tale modello inoltre soddisfa tutte le condizioni dei modelli standard ad eccezione di $R_\alpha{}^*=(R_\alpha)^*$.

Sia dunque $\mathcal{A}$ una formula che non è un teorema di PDL. Dobbiamo costruire un modello standard che falsifichi $\mathcal{A}$ e faremo ciò usando una opportuna Γ-filtrazione di M^P.

Per far questo consideriamo un insieme "chiuso" Δ di formule, tale che

- sia chiuso rispetto alle sottoformule,
- se $[\mathcal{B}?]\mathcal{D} \in \Delta$ allora $\mathcal{B} \in \Delta$,
- se $[\alpha;\beta]\mathcal{B} \in \Delta$ allora $[\alpha][\beta]\mathcal{B} \in \Delta$,
- se $[\alpha\cup\beta]\mathcal{B} \in \Delta$ allora $[\alpha]\mathcal{B} \in \Delta$ e $[\beta]\mathcal{B} \in \Delta$,
- se $[\alpha^*]\mathcal{B} \in \Delta$ allora $[\alpha][\alpha^*]\mathcal{B} \in \Delta$.

Data una formula $\mathcal{A}$, sia Γ il più piccolo insieme di formule chiuso e contenente $\mathcal{A}$.

Si prova facilmente che Γ è un insieme finito la cui cardinalità è una funzione lineare della complessità di $\mathcal{A}$.

Poniamo poi $\Phi_\Gamma = \Phi \cap \Gamma$ e $Prog_\Gamma$ sia il più piccolo insieme di programmi contenente tutti i programmi atomici e tutti i test che figurano in elementi di Γ e che sia chiuso rispetto agli operatori * $\cup$; .

Consideriamo il modello

$M_\Gamma = (S_\Gamma,\{R_\alpha{}^\Gamma : \alpha \in Prog_\Gamma\}, V_\Gamma)$

dove S_Γ e V_Γ sono definiti nel modo solitamente usato nelle filtrazioni, $R_\pi{}^\Gamma$ è una Γ-filtrazione di $R_\pi{}^P$ per ogni π in Π, $R_{B?}=\{([s],[s]): M^P \models_s B\}$, e le altre relazioni sono costruite induttivamente in modo da soddisfare le condizioni del modello standard.

Si prova che questo modello è una Γ-filtrazione di M^P procedendo per induzione sulla complessità degli α in $Prog_\Gamma$. Il punto più complesso della dimostrazione è quello riguardante la relazione $R_\alpha{}^*$.

Con la solita tecnica si prova poi che ogni formula $\mathcal{B}$ di Γ è vera nel modello canonico M^P se e solo se è vera nella sua Γ-filtrazione M_Γ.
Poiché la Γ-filtrazione è un modello standard, S_Γ è finito ed la cardinalità di S_Γ è esprimibile in funzione della complessità della formula $\mathcal{A}$, si è provato che PDL è completa rispetto ai modelli standard, ha la proprietà forte di modello finito e quindi, essendo una teoria assiomatica, è decidibile.

La logica dinamica è ancora oggetto di numerosi studi, in cui generalmente si considerano condizioni particolari sulla classe dei programmi atomici.
Ad esempio si potrebbe chiedere che tali programmi siano deterministici ed in tal caso la relazione R_π dovrebbe risultare una funzione parziale per ogni programma atomico π e la logica che abbiamo considerato dovrebbe contenere lo schema di assiomi $<\pi>\mathcal{A} \Rightarrow [\pi]\mathcal{A}$.
Nel modello canonico di una logica dinamica contenente lo schema di assiomi $<\pi>\mathcal{A} \Rightarrow [\pi]\mathcal{A}$, R_π è una funzione parziale, tale proprietà però si perde passando ad una generica Γ-filtrazione e quindi la dimostrazione della completezza della logica dinamica costruita su programmi atomici deterministici, richiede ulteriori aggiustamenti.

Noi abbiamo solo considerato una logica dinamica proposizionale, è di notevole interesse lo studio di logiche in cui il formalismo della logica dinamica è costruito sul linguaggio delle teorie del primo ordine, tale studio supera però i limiti di questo corso.
Vorremmo solo sottolineare come ci sia una stretta connessione tra le formule modali di PDL, quando si identifichino i programmi atomici con i comandi di assegnamento, e il procedimento di sostituzione di un termine al posto delle occorrenze libere di una variabile in una formula del primo ordine.
Infatti la formula $[v:=\sigma]A \equiv A_\sigma^v$, dove A_σ^v denota il risultato della sostituzione di σ al posto delle occorrenze libere di v nella formula del primo ordine A.
Lo stato corrente di una computazione viene allora determinato dicendo il valore corrente delle variabili . Introdotta allora la relazione $\sim_v$ tra gli stati per indicare che se $s\sim_v t$ allora s e t differiscono per il valore assunto da v, i quantificatori $(\forall x)$ ed $(\exists x)$ possono essere pensati come connettivi modali ponendo:
$\models_s(\exists v)\mathcal{A}$ se e solo se per qualche t, $s\sim_v t$ e $\models_t \mathcal{A}$ ed inoltre
$\models_s(\forall v)\mathcal{A}$ se e solo se per ogni t, $s\sim_v t$ e $\models_t \mathcal{A}$.
Questo risultato si potrebbe ottenere sostituendo $(\exists x)$ con $<v:=?>$ e $(\forall x)$ con $[v:=?]$ dove
v:=? è il comando "assegna a v un valore random".
La domanda che si pone naturalmente è quella dei legami fra la potenza espressiva della logica dinamica del primo ordine e della logica del primo ordine.
Si prova che la logica dinamica del primo ordine ha una potenza espressiva migliore.
Basta considerare la formula
$(\forall w)<v:=0;$ while $v\neq w$ do $v:=v+1>T$
che dà il principio di induzione utilizzando l'arricchimento dinamico del linguaggio dell'aritmetica dei numeri naturali e che non è esprimibile nel linguaggio del primo ordine della struttura $(\omega,',0)$.