Equazioni Differenziali Ordinarie		12 luglio 2006
Cognome	Nome	Firma
Proff. Arioli, Rossi, Vegni	Matricola	Sezione INF

Esercizio 2. È data l'equazione autonoma $\dot{y} = cy - y^3$ al variare del parametro $c \in \mathbb{R}$.

a. Enunciare i teoremi di esistenza ed unicità locale nella forma che si ritiene di applicare all'equazione assegnata. È possibile prevedere la prolungabilità delle soluzioni in base ai noti teoremi di prolungamento?

b. Trovare i punti critici al variare di c.

c. Determinare la stabilità dei punti critici al variare di c, utilizzando il diagramma di fase.

a) Vedi testo.

Non sono applicabili i teoremi noti al fine del prolungamento di soluzioni.
Dal diagramma qualitativo delle soluzioni si potrà concludere eventuale prolung. a $+\infty$ o a $-\infty$.
Nel caso di almeno due sol. stazionarie si ottengono soluz. prolungabili

b) Per $c=0$ $\quad y=0$ unico pto critico

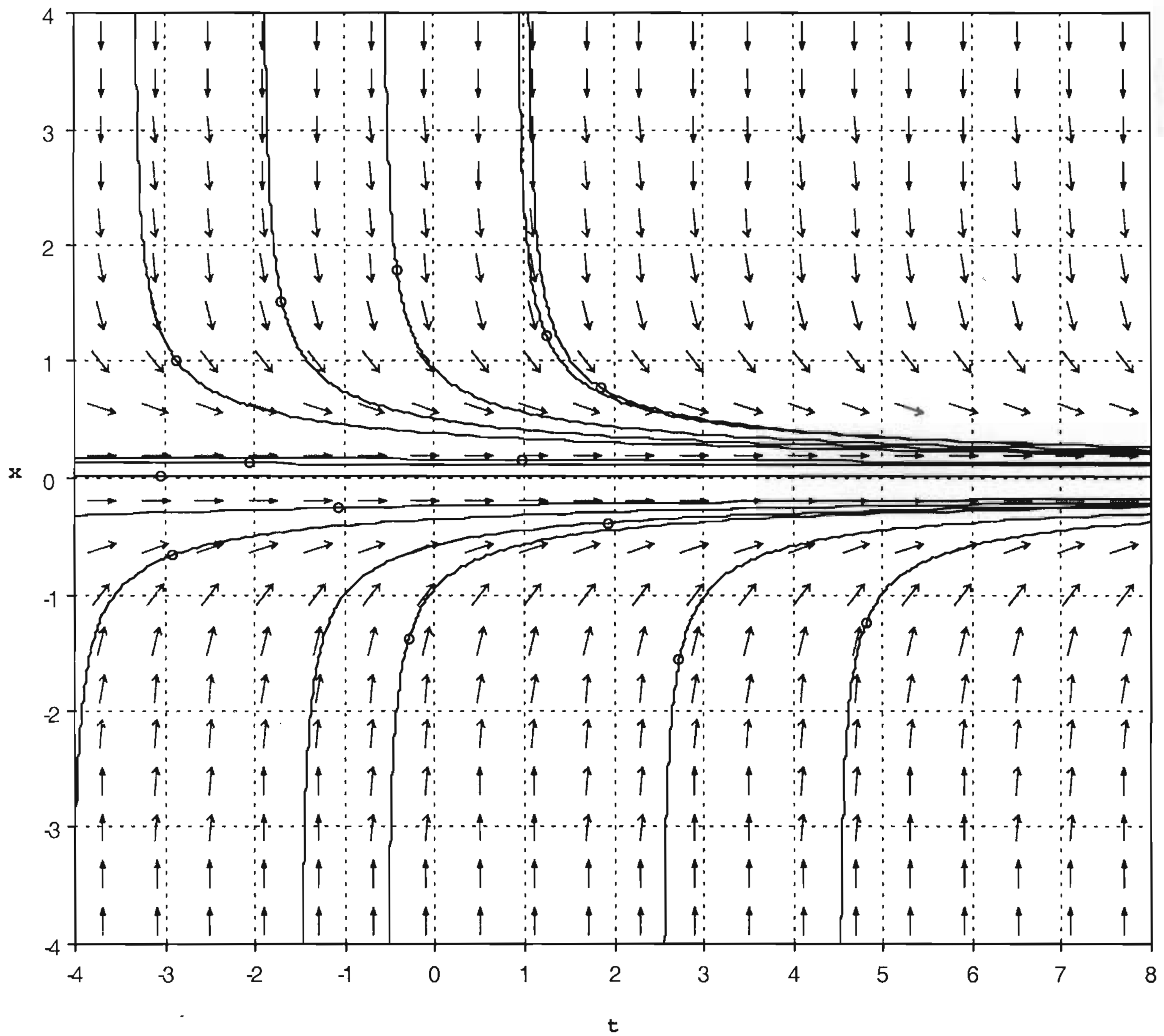
$c<0$ $\quad$ ancora $y=0$ è l'unica soluzione dell'equazione $y(c-y^2)=0$ essendo il secondo fattore $(c-y^2)$ sempre negativo

$c>0$ $\quad y(c-y^2)=0 \quad y=0 \quad y=\pm\sqrt{c}$

Si vedono gli andamenti qualitativi delle soluzioni: si nota che tutte sono prolungabili per $t \to +\infty$.
Nel caso $c>0$, le soluzioni limitate tra due soluzioni costanti, sono prolungabili a tutto $\mathbb{R}$

$\boxed{C=0}$

$x' = -x^3$

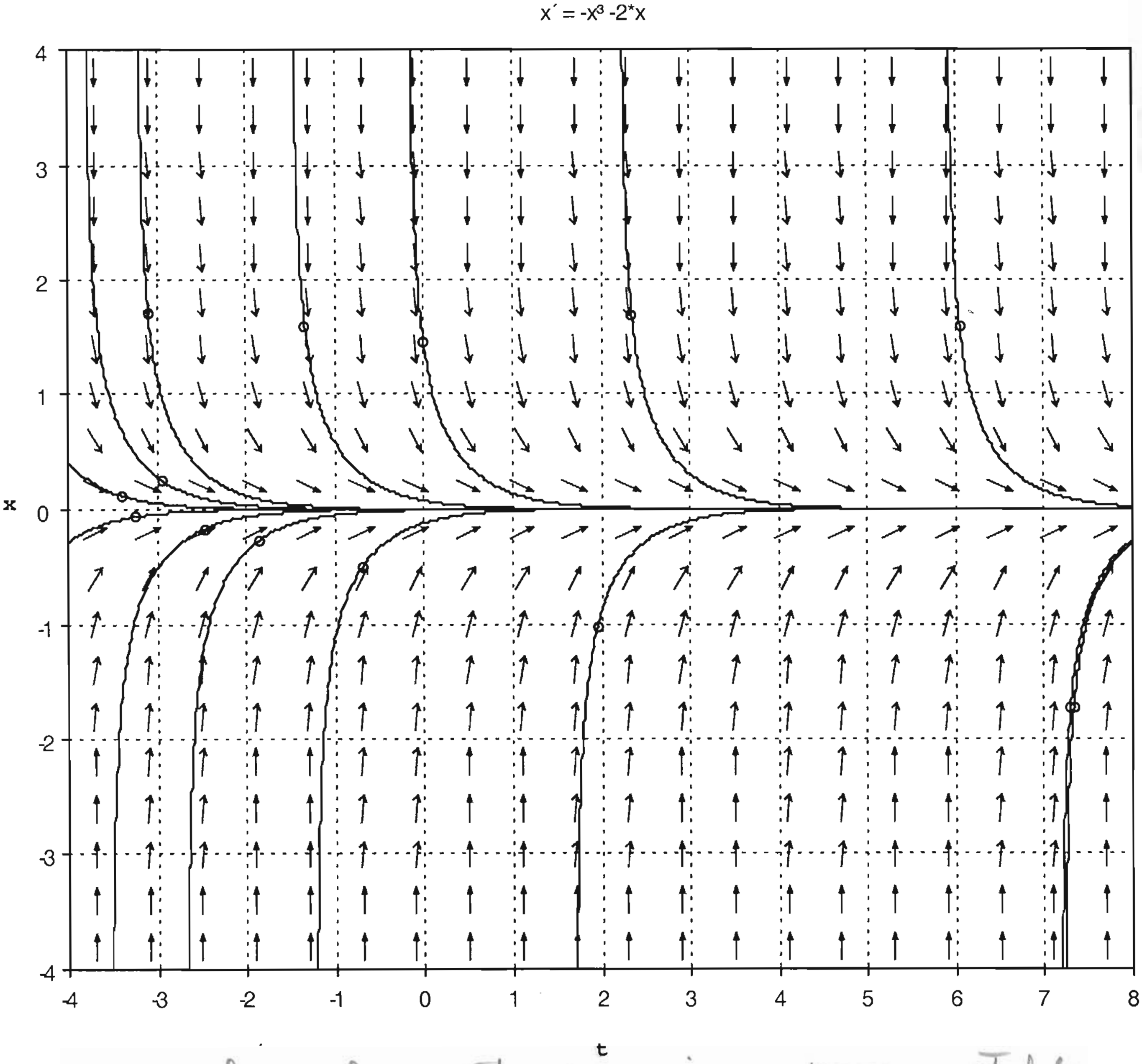


una sola soluzione stazionaria $y=0$ (o $x=0$ nel grafico)

prolungabilità delle soluzioni per $x \to +\infty$

$y=0$ ($x=0$ nel grafico) è sol. stabile

$c < 0$



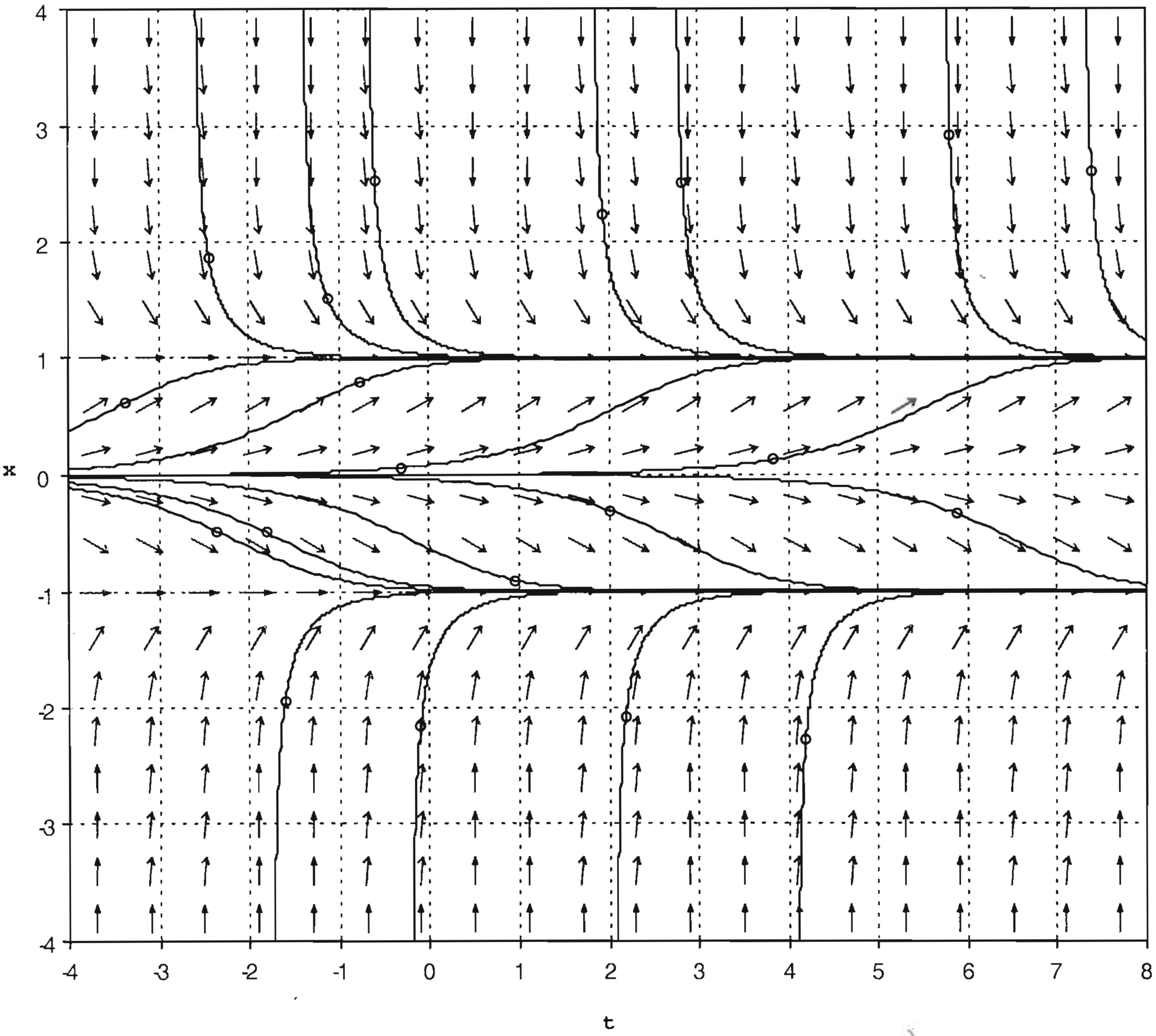
una sola soluz. stazionaria $y=0$ stabile

Andamento simile al caso $c=0$

$\boxed{c>0}$

(caso $c=1$)

$x' = -x^3 + x$

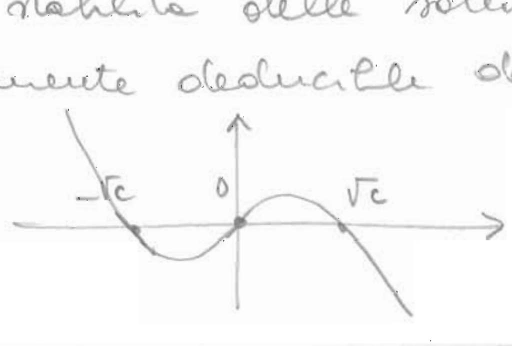


$y=0$, $y = \pm\sqrt{c}$ ($y = \pm 1$ nel grafico)
sono tre soluzioni stazionarie.

Tutte le soluzioni $-\sqrt{c} < x(t) < 0$ e $0 < x(t) < \sqrt{c}$
sono prolungabili a tutto $\mathbb{R}$

Si nota che $y=0$ è sol. instabile
mentre sono stabili $y = \pm\sqrt{c}$

In questo caso la stabilità delle soluzioni stazionarie è facilmente deducibile dal grafico di $f(y)$



$f'(-\sqrt{c}) = f'(\sqrt{c}) < 0$