Logica del I ordine

(Seconda e terza lezione)

Termine t libero per una variabile x in una f.b.f. $\mathcal{A}$ se nessuna occorrenza libera di x in $\mathcal{A}$ cade nel campo di azione di un quantificatore che quantifica una variabile di t.

Definizioni

Una f.b.f. $\mathcal{A}$ si dice chiusa se non ci sono variabili libere in $\mathcal{A}$

Siano $x_1, x_2, ..., x_n$ variabili libere di $\mathcal{A}$. Si dice chiusura universale di $\mathcal{A}$:

$$(\forall x_n)...(\forall x_2)(\forall x_1)\mathcal{A}$$

chiusura esistenziale di $\mathcal{A}$:

$$(\exists x_n)...(\exists x_2)(\exists x_1)\mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}_1^2(a,b) \vee (\forall x)\mathcal{A}_2^2(f_1^2(x,y), f_2^2(a,x))$$
$$\Rightarrow (\exists y) \sim \mathcal{A}_1^2(f_1^2(y, f_2^2(a,y)), b)$$

Chiusura universale

$$(\forall y)(\mathcal{A}_1^2(a,b) \vee (\forall x)\mathcal{A}_2^2(f_1^2(x,y), f_2^2(a,x))$$
$$\Rightarrow (\exists y) \sim \mathcal{A}_1^2(f_1^2(y, f_2^2(a,y)), b))$$

Chiusura esistenziale

$$(\exists y)(\mathcal{A}_1^2(a,b) \vee (\forall x)\mathcal{A}_2^2(f_1^2(x,y), f_2^2(a,x))$$
$$\Rightarrow (\exists y) \sim \mathcal{A}_1^2(f_1^2(y, f_2^2(a,y)), b))$$

Esempi

(1) Scrivere in forma di f.b.f. ”Ognuno ama qualcuno e nessuno ama tutti oppure qualcuno ama tutti e qualcuno non ama nessuno”.

Introduciamo la lettera predicativa $A(x, y)$ che significa x ama y
$((\forall x)(\exists y)A(x, y) \wedge \sim (\exists x)(\forall y)A(x, y)) \vee$
$((\exists x)(\forall y)A(x, y) \wedge (\exists x) \sim (\exists y)A(x, y))$

(2) Attenzione al significato:
1.$(\forall x)(\exists y)(\sim A(x, f(y)) \Rightarrow A(x, a))$
2.$(\forall x)((\exists y) \sim A(x, f(y)) \Rightarrow A(x, a))$
Ad esempio se consideriamo variabili in $\mathbb{N}$
$A(x, y)$ significa $x = y$
$f(y)$ significa $y + 1$ (successivo di y)
$a = 0$ la prima formula sta per
“Per ogni x esiste y tale che se x non è il successivo di y allora $x = 0$”
mentre la seconda sta per “Per ogni x se esiste y tale che x non è il successivo di y allora $x = 0$”

Semantica

Interpretazione: coppia $J = (D, I)$ con D insieme non vuoto detto dominio, I assegnamento che associa:

- ad ogni costante un elemento di D, ovvero I : Cost $\rightarrow D$
- ad ogni lettera funzionale con apice k un'operazione di arità k su D ovvero I : Funz$^k \rightarrow \{D^k \rightarrow D\}$
- ad ogni lettera predicativa con apice k una relazione di arità k su D ovvero I : Pred$^k \rightarrow \mathcal{P}(D^k)$

Data una interpretazione una f.b.f senza variabili libere rappresenta una proposizione che è quindi vera oppure falsa. Se ci sono variabili libere si ottiene una relazione sul dominio che può essere soddisfatta per alcuni valori del dominio attribuiti alle variabili libere e non soddisfatta per altri.

Data una interpretazione, possiamo assegnare dei valori alle variabili che compaiono in D. Un assegnamento è allora una legge s : Var $\rightarrow D$. I termini possono quindi essere valutati e sono elementi di D. Sia s^* la legge che valuta i termini, $s^* : Ter \rightarrow D$, allora

- $s^*(c) = I(c)$

- $s^*(x) = s(x)$

- $s^*(f_i^n(t_1, ..., t_n)) = I(f_i^n)(s^*(t_1), ..., s^*(t_n))$

Le formule atomiche sono relazioni tra elementi di D quindi possiamo dire che data una formula atomica, un assegnamento di variabili ci consente di dire se tale formula è soddisfatta oppure no.

Sia $J = (D, I)$ una interpretazione, un assegnamento s soddisfa

- la f.b.f. atomica $\mathcal{A}$ in $(t_1, ..., t_n)$ sse $(s^*(t_1), ..., s^*(t_n)) \in I(\mathcal{A}_i^n)$

- una f.b.f del tipo $\sim \mathcal{B}$ sse non soddisfa $\mathcal{B}$

- una f.b.f del tipo $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$ sse soddisfa sia $\mathcal{B}$ sia $\mathcal{C}$

- una f.b.f del tipo $\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ sse soddisfa una almeno fra $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$

- una f.b.f del tipo $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ sse non soddisfa $\mathcal{B}$ o soddisfa $\mathcal{C}$

- una f.b.f del tipo $\mathcal{B} \Longleftrightarrow \mathcal{C}$ sse soddisfa sia $\mathcal{B}$ sia $\mathcal{C}$ o non soddisfa nè $\mathcal{B}$ nè $\mathcal{C}$

- una f.b.f del tipo $(\forall x)\mathcal{B}$ sse ogni assegnamento s', che differisce da s al più per il valore assegnato ad x, soddisfa $\mathcal{B}$

- una f.b.f del tipo $(\exists x)\mathcal{B}$ sse c'è un assegnamento s', che differisce da s al più per il valore assegnato ad x, che soddisfa $\mathcal{B}$

$(\forall x)(\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y), f_1^2(x,z)) \Rightarrow \mathcal{A}_1^2(y,z))$
(1) Consideriamo l'interpretazione $D = \mathbb{R}$, f_1^2: prodotto, $\mathcal{A}_1^2$ uguaglianza
$(\forall x)$(se $xy = xz \Rightarrow y = z$)
La formula non è vera: basta prendere $x = 0$ e $y \neq z$. È soddisfacibile (vedi pag. 11 e 12): basta prendere $y = z$ (cosicchè il conseguente risulta vero), quindi non è falsa.

(2) Se $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con le stesse assegnazioni la formula è vera. Infatti non può succedere che si abbia il conseguente vero, ovvero $x = y$ e l'antecedente falso.

(3) Se $D = \mathbb{R}^-$, f_1^2: prodotto, $\mathcal{A}_1^2$ è "$<$"
$(\forall x)$(se $xy < xz \Rightarrow y < z$)
la formula è falsa.

(4) Se $D = \mathbb{R}$, f_1^2: somma, $\mathcal{A}_1^2$ è "$<$"
$(\forall x)$(se $x + y < x + z \Rightarrow y < z$)
la formula è vera (confronta con il punto (2)).

Esempio

$(\mathcal{A}_1^2(a,b) \wedge \mathcal{A}_2^2(f_1^2(x,y), f_1^2(x,z))) \Rightarrow$
$(\exists x)(\forall y)\mathcal{A}_3^2(x,y)$
Interpretazione: $D = \mathbb{R}$, $f_1^2(x,y)$ è il prodotto di x e y, $\mathcal{A}_1^2(x,y)$: x divide y, $\mathcal{A}_2^2(x,y)$: $x = y$, $\mathcal{A}_3^2(x,y)$: $x < y$, $a = 2$, $b = 3$. Se 2 divide 3 e $xy = xz$ allora esiste x tale che per ogni y, si ha $x < y$.
Si noti che la f.b.f. è vera perchè l'antecedente è falso.

Esempio

Consideriamo un linguaggio del primo ordine che contiene:
$a, b, x, y, f_1^2, f_2^2, \mathcal{A}_1^2, \mathcal{A}_2^2$
e la f.b.f.
$(\mathcal{A}_1^2(a,b) \vee (\forall x)\mathcal{A}_2^2(f_1^2(x,y), f_2^2(a,x)))$
$\Rightarrow (\exists y) \sim \mathcal{A}_1^2(f_1^2(y, f_2^2(a,y)), b)$

Consideriamo l'interpretazione: $D = \mathbb{N}$, $a = 1$, $b = 2$, f_1^2 è il prodotto, f_2^2 è la somma, $\mathcal{A}_1^2$ la relazione " $<$ ", $\mathcal{A}_2^2$ la relazione " $=$ ".
La f.b.f. si legge: " Se 1 è minore di 2 o per ogni numero naturale x si ha $xy = 1 + x$ allora esiste un numero naturale y tale che $y(1+y) \not< 2$ ".

La formula $xy = 1 + x$ non è vera nè falsa ma può essere soddisfatta da qualche assegnazione. Tuttavia l'OR è soddisfatto perchè $1 < 2$ è vero. Il conseguente è vero quindi la f.b.f. è vera.

Riprendiamo l'esempio (2) a pagina 2.
Nell'interpretazione data, la formula
1.$(\forall x)(\exists y)(\sim A(x, f(y)) \Rightarrow A(x, a))$ è vera, infatti o $x = 0$ quindi il conseguente è vero oppure $x \neq 0$. In questo caso se prendiamo come y il numero che precede x abbiamo che l'antecendente risulta falso perchè non è vero che vale $x \neq y + 1$. (Quindi per ogni x esiste y tale che l'implicazione sia vera in ogni caso).
La formula
2.$(\forall x)((\exists y) \sim A(x, f(y)) \Rightarrow A(x, a))$ è falsa infatti se consideriamo $x = 1$ il conseguente è falso tuttavia l'antecendente è vero, perchè esiste un numero naturale y tale che x non sia il suo successivo.

Notazione: $\boxed{(J,s) \models \mathcal{A}}$ significa che nell'interpretazione J, l'assegnamento s soddisfa $\mathcal{A}$

J interpretazione, s assegnamento

$$v^{(J,s)} : \{f.b.f.\} \rightarrow \{0,1\}$$

- $v^{(J,s)}(\mathcal{A}(t_1, ..., t_n)) = 1$ sse $(s^*(t_1), ..., s^*(t_n)) \in I(\mathcal{A})$

- $v^{(J,s)}(\sim \mathcal{B}) = 1 - v^{(J,s)}(\mathcal{B})$

- $v^{(J,s)}(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) = \min\{v^{(J,s)}(\mathcal{B}), v^{(J,s)}(\mathcal{C})\}$

- $v^{(J,s)}(\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = \max\{v^{(J,s)}(\mathcal{B}), v^{(J,s)}(\mathcal{C})\}$

- $v^{(J,s)}(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) = \max\{(1 - v^{(J,s)}(\mathcal{B}), v^{(J,s)}(\mathcal{C})\}$

- $v^{(J,s)}(\mathcal{B} \Longleftrightarrow \mathcal{C}) = \min\{\max\{(1 - v^{(J,s)}(\mathcal{A}), v^{(J,s)}(\mathcal{B})\}, \max\{v^{(J,s)}(\mathcal{A}), 1 - v^{(J,s)}(\mathcal{B})\}\}$

- $v^{(J,s)}(\forall x\mathcal{B}) = \min\{v^{(J,s)}(\mathcal{B}[a/x])|a \in D\}$

- $v^{(J,s)}(\exists x\mathcal{B}) = \max v^{(J,s)}(\mathcal{B}[a/x])| \in D\}$

dove $\mathcal{B}[a/x]$ indica la formula che si ottiene da $\mathcal{B}$ sostituendo tutte le occorrenze libere di x in $\mathcal{B}$ con a

L'assegnamento s soddisfa la f.b.f. $\mathcal{A}$, ovvero $(J,s) \models \mathcal{A}$, sse $v^{(J,s)}(\mathcal{A}) = 1$

Riprendiamo l'esempio (1) a pag.8. Con l'assegnamento $s:\ y = z$ la f.b.f. $(\forall x)\mathcal{B}$ con $\mathcal{B}$ data da $(\mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y), f_1^2(x,z)) \Rightarrow \mathcal{A}_1^2(y,z))$ è tale che $v^{(J,s)}((\forall x)\mathcal{B}) = 1$. Non tutti gli assegnamenti forniscono però $v^{(J,s)}(\forall x\mathcal{B}) = 1$. Basta prendere $y \neq z$ e sostituire x con 0.

Def Data una interpretazione J:

$\mathcal{A}$ si dice soddisfacibile (in J) se c'è un assegnamento s che soddisfa $\mathcal{A}$ ovvero $((J, s) \models \mathcal{A})$

$\mathcal{A}$ si dice vera (in J) e si scrive $(J \models \mathcal{A})$ se ogni assegnamento soddisfa $\mathcal{A}$. J è *modello* per $\mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ si dice falsa (in J) se nessun assegnamento soddisfa $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ si dice insoddisfacibile in J.

In generale:

$\mathcal{A}$ si dice soddisfacibile se ci sono una interpretazione J ed un assegnamento s che soddisfano $\mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ si dice (logicamente) valida e si scrive $\models \mathcal{A}$ se $\mathcal{A}$ è vera in ogni interpretazione

$\mathcal{A}$ si dice (logicamente) contradditoria se $\mathcal{A}$ falsa in ogni interpretazione

Oss Ogni esempio di tautologia è una f.b.f logicamente valida

Se $\mathcal{A}$ è una f.b.f. chiusa in una data interpretazione $\mathcal{A}$ sempre o vera o falsa (insoddisfacibile);

la chiusura universale di $\mathcal{A}$ è vera sse $\mathcal{A}$ è vera

la chiusura esistenziale di $\mathcal{A}$ è soddisfacibile (e quindi vera) sse $\mathcal{A}$ è soddisfacibile

Sia Γ un insieme di f.b.f. Un modello per Γ è un'interpretazione J che è modello di ogni formula in Γ.

$\mathcal{A}$ è conseguenza semantica di Γ e si scrive
$\Gamma \models \mathcal{A}$ se in ogni interpretazione ogni assegnamento che soddisfa tutte le formule di Γ soddisfa $\mathcal{A}$

Sia $\Gamma = \Delta \cup \{\mathcal{B}\}$. Si ha $\Gamma \models \mathcal{A}$ sse $\Delta \models \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ (deduzione semantica)

Se $\mathcal{A}$ e le formule di Γ sono chiuse, allora $\Gamma \models \mathcal{A}$ se ogni modello di Γ è modello di $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si dicono (semanticamente) *equivalenti* e si scrive $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$ sse $\{\mathcal{A}\} \models \mathcal{B}$ e $\{\mathcal{B}\} \models \mathcal{A}$,

$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono equivalenti sse $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$ è una f.b.f logicamente valida

Le f.b.f. $(\forall x)\mathcal{A}$ e $(\forall y)\mathcal{A}[y/x]$ sono equivalenti, se $\mathcal{A}$ non ha occorrenze libere di y e x è libero per y in $(\forall)x\mathcal{A}$

Una f.b.f. $\mathcal{A}$ si dice in *forma normale prenessa* se

- $\mathcal{A}$ è priva di quantificatori, o

- $\mathcal{A}$ è della forma $(Q_1x_1)(Q_2x_2)...(Q_nx_n)\mathcal{B}$ con $\mathcal{B}$ priva di quantificatori.
  Si dice che $(Q_1x_1)...(Q_nx_n)$ è il prefisso e che $\mathcal{B}$ è la matrice della formula $\mathcal{A}$

Ulteriori equivalenze fondamentali:

- $\sim (Qx)\mathcal{A} \equiv (Q'x) \sim \mathcal{A}$

- $(Qx)\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \equiv (Qy)(\mathcal{A}[y/x] \wedge \mathcal{B})$,

- $(Qx)\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv (Qy)(\mathcal{A}[y/x] \vee \mathcal{B})$,

- $(Qx)\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv (Q'y)(\mathcal{A}[y/x] \Rightarrow \mathcal{B})$,

- $\mathcal{B} \Rightarrow (Qx)\mathcal{A} \equiv (Qy)(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}[y/x])$,

Q : quantificatore, Q' : quantificatore diverso da Q
y : variabile che non ha occorrenze libere in $\mathcal{B}$ e in $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}[y/x]$: formula ottenuta sostituendo in $\mathcal{A}$ ogni occorrenza di x con y.

Una qualsiasi f.b.f. può essere sempre trasformata in modo algoritmico in una f.b.f. equivalente in forma prenessa.

Esercizio Si porti la formula
$(\forall x)\mathcal{A}_1^2(x, f_1^2(x, y)) \Rightarrow \sim (\forall y)\mathcal{A}_1^2(y, x)$
in forma normale prenessa.
$(\exists v)\left(\mathcal{A}_1^2(v, f_1^2(v, y)) \Rightarrow (\exists y) \sim \mathcal{A}_1^2(y, x)\right)$
$(\exists v)(\exists w)(\mathcal{A}_1^2(v, f_1^2(v, y)) \Rightarrow \sim \mathcal{A}_1^2(w, x))$

$\mathcal{A}$ in *forma di Skolem*: $\mathcal{A}$ in forma normale prenessa e nel prefisso di $\mathcal{A}$ non compaiono quantificatori esistenziali.

Se si hanno abbastanza costanti e lettere funzionali una qualsiasi f.b.f. $\mathcal{A}$ puó essere trasformata in modo algoritmico in una f.b.f in forma di Skolem (indichiamo la forma di Skolem di $\mathcal{A}$ con $\mathcal{A}^S$). In generale, la forma di Skolem $\mathcal{A}^S$ NON è equivalente ad $\mathcal{A}^S$, tuttavia è soddisfacibile se e solo se $\mathcal{A}$ è soddisfacibile.

Esempi.
1. Consideriamo la f.b.f. $(\forall x)\mathcal{A}(x)$ che afferma l'esistenza di un "elemento" che denotiamo ad esempio c per cui vale $\mathcal{A}$. Possiamo quindi eliminare il quantificatore esistenziale considerando $\mathcal{A}(c)$.

2. Consideriamo la f.b.f. $(\forall x)(\exists y)\mathcal{A}(x,y)$. Non possiamo procedere come prima introducendo una costante opportuna c. Consideriamo infatti l'interpretazione $D = \mathbb{N}$ e $\mathcal{A}(x,y)$ sia $x < y$. Sostituendo y con una costante c si afferma che ogni numero naturale x è minore di c che è assurdo. Il problema è che il quantificatore esistenziale è nel campo d'azione di un quantificatore universale. Bisogna allora sostituire y con una funzione che rappresenti la dipendenza di ciò di cui si predica da x (ovvero dalle variabili quantificate universalmente che precedono). Possiamo quindi scrivere ad esempio $(\forall x)\mathcal{A}(x, f(x))$, dove $f(x)$ nell'interpretazione data sopra è, ad esempio, la funzione che fornisce il successivo di x.

Passi per trasformare $\mathcal{A}$ in forma di Skolem (*skolemizzazione* di $\mathcal{A}$).
Sia $\mathcal{A}$ una qualsiasi f.b.f.

1) Sia $\mathcal{A}'$ f.b.f in forma normale prenessa equivalente ad $\mathcal{A}$
2) Se non ci sono quantificatori universali che precedono un dato quantificatore esistenziale del prefisso di $\mathcal{A}'$, si introduce una costante che non compare nel prefisso e si cancella il quantificatore. Oppure
2') A partire dal primo quantificatore esistenziale del prefisso di $\mathcal{A}'$ e finchè ci sono quantificatori esistenziali, cancellare il quantificatore esistenziale $(\exists x_j)$ e sostituire nella matrice ogni occorrenza libera di x_j con il termine $f_j(x_1, x_2, ..., x_{j-1})$ dove f_j una nuova lettera funzionale e $x_1, x_2, ..., x_{j-1}$ sono le variabili quantificate universalmente che precedevano $(\exists x_j)$ nel prefisso.

Oss $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{A}^S$ in generale non sono (semanticamente) equivalenti

Proposizione Una qualsiasi f.b.f. $\mathcal{B}$ puó essere trasformata in una formula chiusa e in forma di Skolem $\mathcal{B}'$ in modo che $\mathcal{B}'$ sia soddisfacibile sse $\mathcal{B}$ è soddisfacibile.

Infatti basta considerare la chiusura esistenziale di $\mathcal{B}$ rispetto alle variabili libere e poi skolemizzare.

Esempio
Si porti la formula
$(\forall x_2)(\exists x_1)\mathcal{A}_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow (\exists x_1)(\forall x_2)\mathcal{A}_1^2(x_1, x_2)$
in forma di Skolem.

Sappiamo che in forma normale prenessa la formula si può scrivere come
$(\exists t)(\forall s)(\exists x_1)(\forall x_2)\left(\mathcal{A}_1^2(s, t) \Rightarrow \mathcal{A}_1^2(x_1, x_2)\right)$
si ottiene quindi
$(\forall s)(\forall x_2)\left(\mathcal{A}_1^2(s, c) \Rightarrow \mathcal{A}_1^2(f_1^1(s), x_2)\right)$

Risoluzione per la logica del I ordine.
Nomenclatura:

- letterale: f.b.f. atomica o negazione di una f.b.f atomica

- clausola: disgiunzione (finita) di letterali; si rappresenta come insieme di letterali

- clausola vuota (indicata, come al solito, $\Box$) è la clausola che non contiene letterali

- Una f.b.f. chiusa in forma normale di Skolem si dice in forma a clausole se la sua matrice è scritta come congiunzione di clausole; la f.b.f. è denotata, trascurando il suo prefisso, come insieme di insiemi.

N.B. ogni formula chiusa in forma normale di Skolem ammette una formula equivalente in forma a clausole.

Unificazione

Def Si definisce *sostituzione* un insieme finito (eventualmente vuoto) $\sigma = \{t_1/x_1, t_2/x_2, ..., t_r/x_r\}$ dove le x_i sono variabili tali che $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$ e t_i è un termine del linguaggio tale che $t_i \neq x_i$.

Def Sia E una stringa nel linguaggio dato, $E\sigma$ stringa ottenuta da E sostituendo tutte le occorrenze di x_i con t_i, $i = 1, 2, ..., r$.

Esempio Siano: $\sigma = \{a/x, b/y, h(c)/z\}$ e $E = \mathcal{A}_1^2(f_1^2(x,y), z)$, allora $E\sigma = \mathcal{A}_1^2(f_1^2(a,b), h(c))$.

Def Date le sostituzioni $\sigma = \{t_1/x_1, t_2/x_2, ..., t_r/x_r\}$, $\theta = \{u_1/y_1, u_2/y_2, ..., u_h/y_h\}$, definiamo il prodotto $\sigma \cdot \theta$ come l'insieme
$\{t_1\theta/x_1, ..., t_r\theta/x_r, u_1/y_1, ..., u_h/y_h\}$ in cui si cancellano

- u_j/y_j se $x_i = y_j$ per qualche i
- e $t_k\theta/x_k$ se $t_k\theta = x_k$.

Esempio
Siano $\sigma = \{a/x, f(b)/y, y/z\}$, $\theta = \{a/y, b/z\}$.
Allora $\sigma \cdot \theta = \{a/x, f(b)/y, a/z\}$.

Osservazioni
1. Se ε denota la sostituzione vuota, allora per ogni sostituzione σ vale $\sigma \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \sigma = \sigma$.
2. $E(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = (E\sigma_1)\sigma_2$
3. vale la proprità associativa del prodotto di sostituzioni
4. non vale la p. commutativa: $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \neq \sigma_2 \cdot \sigma_1$

Def Sia $X = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ un insieme di stringhe nel linguaggio dato. Si chiama *unificatore* di X una sostituzione σ tale che $E_1\sigma = E_2\sigma = ... = E_n\sigma$, se esiste. Se una tale σ non esiste l'insieme X si dice non unificabile.

Esempio
Sia $X = \{\mathcal{A}_1^2(x,a), \mathcal{A}_1^2(y,a)\}$. Può essere unificato da $\theta = \{b/x, b/y\}$ (infatti $\mathcal{A}_1^2(y,a)\theta = \mathcal{A}_1^2(b,a) = \mathcal{A}_1^2(y,a)\theta$) oppure da $\sigma = \{y/x\}$ infatti $\mathcal{A}_1^2(x,a)\sigma = \mathcal{A}_1^2(y,a) = \mathcal{A}_1^2(y,a)\sigma$. Notiamo che, posto $\rho = \{b/y\}$, si ha che $\theta = \sigma \cdot \rho$.
NB È facile vedere che $\rho \cdot \sigma \neq \sigma \cdot \rho$.
$X = \{f(x), f(g(x))\}$ non è unificabile.

Def Si dice che l'insieme $X = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ è unificabile mediante σ, σ *unificatore piú generale* (*most general unifier* o, in breve, m.g.u.) se **per ogni** altro unificatore θ di X si ha $\theta = \sigma\rho$ per qualche sostituzione ρ.

Problema: come determinare un m.g.u di un insieme X di stringhe?

Caso $X = \{E_1, E_2\}$
$X_1 = E_1$, $X_2 = E_2$, $\sigma_0 = \varepsilon$

1. Percorrere da sinistra i caratteri di X_1, X_2 fino a trovare due caratteri diversi.

2. Se i caratteri diversi sono una variabile x e la prima lettera di un termine t che non contenga x, si pone $\sigma = \{t/x\}$, $\sigma_{k+1} = \sigma_k \cdot \sigma$, $X_1 = X_1\sigma_{k+1}$, $X_2 = X_2\sigma_{k+1}$, e riprendere da 1.

3. Se si finisce di percorrere le due stringhe la sostituzione σ_{k+1} è un m.g.u. di X altrimenti, se due caratteri diversi non sono del tipo precedente, le stringhe non sono unificabili.

Teorema Ogni insieme di espressioni che sia unificabile ammette un m.g.u.

Osserviamo che m.g.u., se esiste, non è unico, ma lo è a meno di ridenominare le variabili. Nel caso dell'esempio precedente
$X = \{\mathcal{A}_1^2(x,a), \mathcal{A}_1^2(y,a)\}$
si ha che $\sigma = \{y/x\}$ e $\sigma' = \{x/y\}$ sono entrambi m.g.u. per X.

Esempio
$X = \{\mathcal{A}(f(x,h(v)),h(b)), \mathcal{A}(f(g(y),h(a)),t)\} =$
$\{E_1, E_2\} = \{X_1, X_2\}$ (nelle notazioni precedenti)
Passo 1. $\sigma = \{g(y)/x\}$, $\sigma_1 = \sigma$,
$\{X_1\sigma_1, X_2\sigma_1\} =$
$\{\mathcal{A}(f(g(y),h(v)),h(b)), \mathcal{A}(f(g(y),h(a)),t)\}$
Passo 2. $\sigma = \{a/v\}$, $\sigma_2 = \sigma_1 \cdot \sigma = \{g(y)/x, a/v\}$, si ottiene
$\{\mathcal{A}(f(g(y),h(av)),h(b)), \mathcal{A}(f(g(y),h(a)),t)\}$
Passo 3. $\sigma = \{h(b)/t\}$,
$\sigma_3 = \sigma_2 \cdot \sigma = \{g(y)/x, a/v, h(b)/t\}$, e quindi
$\{\mathcal{A}(f(g(y),h(av)),h(b)), \mathcal{A}(f(g(y),h(a)),h(b))\}$.
Un m.g.u. per X è σ_3.

Def *Risolvente* di due clausole C_1, C_2 in un linguaggio del I ordine:

- effettuare su C_1, C_2 due sostituzioni (eventualmente vuote) σ_1, σ_2 tali che $C_1\sigma_1$, $C_2\sigma_2$ siano prive di variabili comuni

- $L_1, L_2, ..., L_r$ letterali di $C_1\sigma_1$ e L_{r+1}, L_{r+2}, ... ,L_{r+s} letterali di $C_2\sigma_2$ tali che l'insieme $X = \{L_1, L_2, ..., L_r, \neg L_{r+1}, \neg L_{r+2}, ..., \neg L_{r+s}\}$ sia unificabile (dove $\neg L_{r+i}$ è $\sim \mathcal{A}_{r+i}$ se L_{r+i} è una formula atomica $\mathcal{A}_{r+i}$, è $\mathcal{A}_{r+i}$ se L_{r+i} è $\sim \mathcal{A}_{r+i}$). Sia σ un m.g.u. di X.

- $R = (C_1\sigma_1 \backslash \{L_1, L_2, ..., L_r\})\sigma \cup (C_2\sigma_2 \backslash \{L_{r+1}, L_{r+2}, ..., L_{r+s}\})\sigma$ è una risolvente di C_1, C_2.

Esempio
$C_1 = \{\mathcal{A}(x), \sim \mathcal{B}(y), \mathcal{C}(x,y), \mathcal{C}(f(z), f(z))\}$
$C_2 = \{\mathcal{D}(u), \sim \mathcal{C}(f(a), f(a)), \sim \mathcal{C}(u,u)\}$

$\sigma_1 = \sigma_2 = \varepsilon$

$X = \{\mathcal{C}(x,y), \mathcal{C}(f(z), f(z)), \mathcal{C}(f(a), f(a)), \mathcal{C}(u,u)\}$
è unificabile da $\sigma = \{f(z)/x, f(z)/y, a/z, f(a)/u\}$
$R = \{\mathcal{A}(f(a)), \sim \mathcal{B}(f(a)), \mathcal{D}(f(a))\}$

Si noti che è necessario ridenominare le variabili:

Esempio: $C_1 = \{\mathcal{A}(x)\}$, $C_2 = \{\sim \mathcal{A}(f(x))\}$

$\sigma_1 = \varepsilon$, $\sigma_2 = \{u/x\}$
Ottengo $X = \{\mathcal{A}(x), \sim \mathcal{A}(f(u))\}$
che è unificabile, basta usare $\sigma = \{f(u)/x\}$.

Proposizione Se R è risolvente di due clausole C_1 e C_2, allora R è conseguenza semantica di C_1 e C_2.

Def Sia Γ un insieme di clausole, si dice che la clausola C *deriva per risoluzione* da Γ e si scrive $\Gamma \vdash_R C$, se esiste una sequenza di clausole di cui l'ultima è C e che o stanno in Γ o sono ottenute come risolvente da clausole precedenti

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ Un insieme di clausole Γ è insoddisfacibile se e solo se $\Gamma \vdash_R \Box$.

Come nel calcolo proposizionale, introduciamo $Ris(\Gamma) = \Gamma \cup \{C_{i,j}$ dove $C_{i,j}$ risolvente di $C_i, C_j \in \Gamma\}$

e poniamo

$Ris^0(\Gamma) = \Gamma$ e $Ris^{n+1}(\Gamma) = Ris(Ris^n(\Gamma))$, per $n \geq 0$.

$Ris^*(\Gamma) = \cup_{n \geq 0} Ris^n(\Gamma)$

Abbiamo il seguente

Teorema Un insieme di clausole Γ è insoddisfacibile se e solo se $\Box \in Ris^*(\Gamma)$.

Una formula chiusa $\mathcal{A}$, scritta in forma a clausole, è semanticamente deducibile da un insieme di formule chiuse in forma normale di Skolem Γ se e solo se $\Gamma \cup \{\sim \mathcal{A}\} \vdash_R \Box$.

Valgono i fatti seguenti:

- la risoluzione agisce per refutazione e opera su f.b.f. chiuse in forma normale di Skolem e scritte in forma a clausole.

- è un sistema corretto ed completo per refutazione

- se $\Gamma \models \mathcal{A}$ non è detto che $\Gamma \vdash_R \mathcal{A}$

- non è decidibile se $\Gamma \models \mathcal{A}$, infatti dato un insieme Δ di f.b.f. non è detto che si riesca a determinare Ris*(Δ) in un numero finito di passi. Se si riesce e se si prova che $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash_R \square$ allora $\Gamma \models \mathcal{A}$ ma se non si riesce, in generale, non sappiamo dire nulla.