Algebra
Prima Semiunità

Appello del 30 Giugno 1999

Esercizio 1

Si consideri il gruppo additivo <Z,+> degli interi relativi. Siano n,m due interi fissati e siano H_n ed H_m i sottogruppi di <Z,+> costituti dai multipli di n ed m rispettivamente Si provi che l'intersezione insiemistica di H_n ed H_m è a sua volta un sottogruppo di <Z,+>, mentre l'unione insiemistica di H_n ed H_m è un sottogruppo di <Z,+> se e solo se n divide m od m divide n.

Provare che il minimo sottogruppo contenente H_n ed H_m coincide con <Z,+> se e solo se n ed m sono primi fra loro.

Esercizio 2

Si provi che nella teoria L è possibile dedurre la formula $(C\Rightarrow B)\Rightarrow(C\Rightarrow\sim A)$ dalla formula $A\Rightarrow\sim B$.

Tenendo conto di quanto sopra, giustificare brevemente il fatto che la formula del primo ordine

$((\forall x)A_1^2(x,y) \Rightarrow B_1^2(x,y))\Rightarrow((A_1^1(x)\Rightarrow\sim B_1^2(x,y))\Rightarrow(A_1^1(x)\Rightarrow(\exists x)\sim A_1^2(x,y)))$

è una formula logicamente valida.

TRACCIA DI SOLUZIONE

Esercizio 1

L'intersezione di H_n ed H_m è ovviamente un sottogruppo infatti se r ed s stanno sia in H_n sia in H_m allora r-s è multiplo sia di n sia di m e quindi sta nell'intersezione di H_n ed H_m. Tale intersezione è costituita dai multipli del m.c.m(n,m). Se l'unione insiemistica di H_n ed H_m è un sottogruppo ed n non divide m, sia r un multiplo di m che non sia multiplo di n, e si consideri r+n. Tale elemento deve stare nell'unione e dunque non essendo un multiplo di n deve essere un multiplo di m e dunque m divide n. Viceversa, supponiamo, senza perdita di generalità) che m divida n allora ogni elemento di H_n sta in H_m e l'unione coincide con H_m che è un sottogruppo.
E' noto che, dati due interi n,m, r = M.C.D(n,m) si può scrivere come combinazione lineare (a coefficienti interi) di n, m. E' facile provare che il minimo sottogruppo contenente H_n ed H_m è costituito da tutti e soli i multipli di r e dunque coincide con <Z,+>se e solo se r=1.

Esercizio 2

E' immediato verificare che la formula $(A\Rightarrow\sim B)\Rightarrow((C\Rightarrow B)\Rightarrow(C\Rightarrow\sim A))$ è una tautologia, dunque, tenendo conto del teorema di completezza tale formula è un teorema e dunque dall'ipotesi $A\Rightarrow\sim B$ si può dedurre $(C\Rightarrow B)\Rightarrow(C\Rightarrow\sim A)$.
La formula del primo ordine indicata è ottenuta dalla precedente tautologia sostituendo ad A la formula $(\forall x)A_1^2(x,y)$, a B la formula $\sim B_1^2(x,y)$ e a C la formula $A_1^1(x)$ e dunque essendo un esempio di tautologia è logicamente valida.