Corso di

ROBOTICA

Prof.ssa Giuseppina Gini

Esercitazioni

Anno 2008/2009

Cinematica Diretta

Convenzione di Denavit-Hartenberg (1955)

0 Si porta il robot nella sua posizione di riposo (Home Configuration)

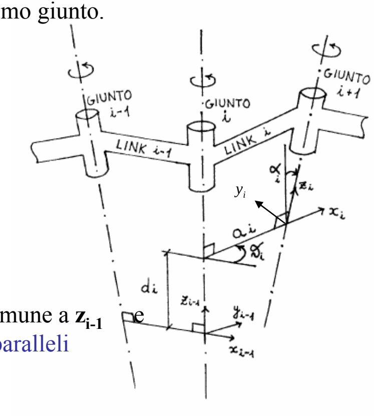
1 Sdr0 (inerziale) alla base della catena cinematica

Oss1: la terna base può essere posizionata ovunque nella base del robot purché lasse $\mathbf{z_0}$ sia coincidente con l'asse del primo giunto.

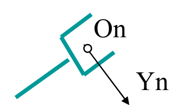
(normalmente orientato verso la spalla del robot)

2 Ogni **link-i** possiede un **Sdr-i** $(\mathbf{x_i, y_i, z_i})$ ad esso solidale

- asse $\mathbf{z_i}$ coincidente con l'asse del giunto **i+1**
- si individua $\mathbf{O_i}$ dall'intersezione di $\mathbf{z_i}$ con $\mathbf{z_{i-1}}$ oppure dall'intersezione di $\mathbf{z_i}$ con la normale comune a $\mathbf{z_{i-1}}$ e $\mathbf{z_i}$
- asse $\mathbf{x_i = z_{i-1} \wedge z_i / \| z_{i-1} \wedge z_i \|}$ oppure lungo la normale comune a $\mathbf{z_{i-1}}$ e $\mathbf{z_i}$ con verso positivo dal giunti **i-1** al giunto **i** se sono paralleli
- asse $\mathbf{y_i}$ a completare una terna destrorsa



Sdrn il sdr. deve avere l'asse Z_n con la stessa direzione e verso di Z_{n-1} se non esiste la mano, oppure con la direzione delle dita e asse Y_n lungo l'asse di scorrimento delle dita se esiste una mano



Oss: la convenzione di D-H **non fornisce una definizione univoca** del **Sdri**

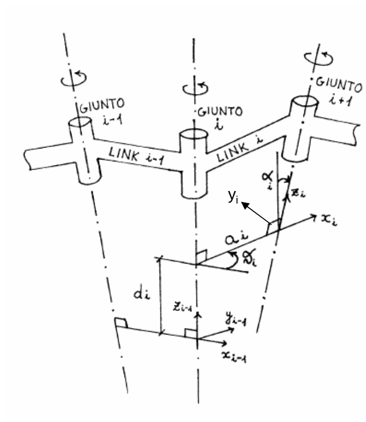
- Il Sdr_0 non può essere definito univocamente perché in realtà impongo solo la direzione dell'asse z_0
- Se z_{i-1} e z_i sono paralleli la normale non è univoca (io posso definire O_i in modo arbitrario), di solito se il giunto è rotoidale si cerca di annullare d_i

Oss: Se z_{i-1} e z_i sono sghembi la normale passa per il segmento di minima distanza tra z_{i-1} e z_i

Oss2: la rappresentazione di Denavit-Hartemberg dipende da 4 parametri geometrici:

θ_i angolo fra l'asse $\mathbf{x}_{i-1}$ e $\mathbf{x}_i$ attorno a $\mathbf{z}_{i-1}$ (variabile nel giunto rotoidale).

- $\mathbf{d}_i$ distanza fra $\mathbf{x}_{i-1}$ e $\mathbf{x}_i$ misurata lungo la direzione di $\mathbf{z}_{i-1}$ (variabile nel giunto prismatico).
- $\mathbf{a}_i$ lunghezza del link, distanza fra $\mathbf{z}_{i-1}$ e $\mathbf{z}_i$ lungo l'asse $\mathbf{x}_i$. (lunghezza del link)
- α_i angolo fra gli assi $\mathbf{z}_{i-1}$ e $\mathbf{z}_i$ intorno a $\mathbf{x}_i$ (dipende dalla geometria del link), è l'angolo di "twist".

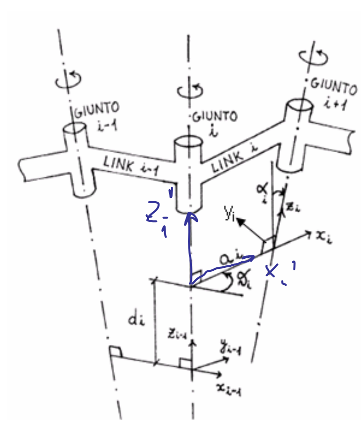


Oss2: La relazione tra due **Sdr** consecutivi può essere rappresentata mediante una matrice di trasformazione omogenea.

Trasformazione dal sdr i-1 al sdr i espressa rispetto al sdr i-1.

1) **Ruotare** $\mathbf{x}_{i-1}$ di θ_i attorno a z_{i-1}, in modo da allinearlo con $\mathbf{x}_i$. e **Traslare** l'origine del sistema $\mathbf{Sdr}_{i-1}$ di una quantità $\mathbf{d}_i$ lungo Z_{i-1}, fino a sovrapporre $\mathbf{x}_{i-1}$ ad $\mathbf{x}_i$

2) **Traslare** l'origine del sistema **i'** di una quantità $\mathbf{a}_i$ lungo $\mathbf{x}_i$, fino a portarla nell'origine del sistema **i** e **Ruotare** $\mathbf{z'}_i$ attorno ad $\mathbf{x}_i$ di un angolo α_i, fino a far coincidere i due sistemi.



Oss3: x'_i coincide con x_i

$$\mathbf{A}^{i-1}_{i-1,i} = \mathbf{Trasl}(0,0,\mathbf{d}_i) \cdot \mathbf{Rot}(\mathbf{z}_{i-1},\theta_i) \cdot \mathbf{Rot}(\mathbf{x}_i,\alpha_i) \cdot \mathbf{Trasl}(\mathbf{a}_i,0,0)$$

$$H = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{i-1,i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_{i',i}^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{i-1,i}^{i-1} = A_{i-1,i'}^{i-1} A_{i',i}^{i'} = \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & +s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Giunto di Rotazione e Traslazione

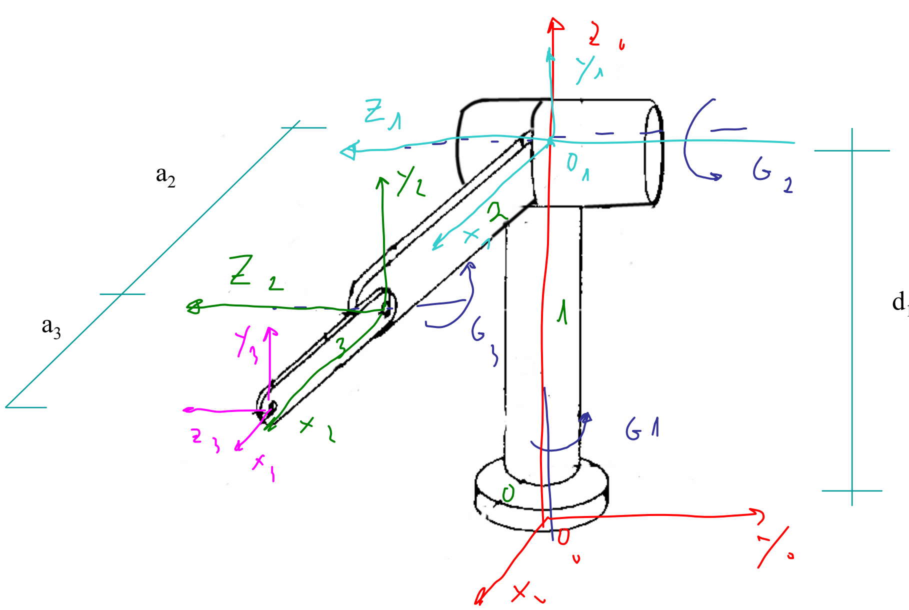
$$\mathbf{A}_{i-1,i}^{i-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \,\mathrm{sen}\theta_i & \mathrm{sen}\alpha_i \,\mathrm{sen}\theta_i & \mathbf{a}_i \cos\theta_i \\ \mathrm{sen}\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\mathrm{sen}\alpha_i \cos\theta_i & \mathbf{a}_i \,\mathrm{sen}\theta_i \\ 0 & \mathrm{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & \mathbf{d}_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

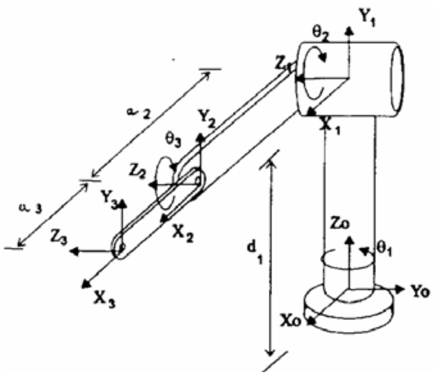
Algoritmo per la collocazione dei sistemi di riferimento i-esimo

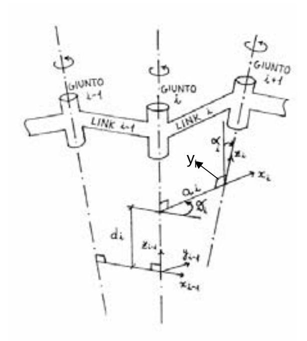
Per **i=1, .. ,n-1** si ripetono i passi 1 – 4

1. Si stabilisce l'asse $\mathbf{z_i}$ sull'asse del giunto **i+1**
2. Si posiziona l'origine $\mathbf{O_i}$ nell'intersezione di $\mathbf{z_i}$ con $\mathbf{z_{i-1}}$ oppure dall'intersezione di $\mathbf{z_i}$ con la normale comune a $\mathbf{z_{i-1}}$ e $\mathbf{z_i}$ (se sono sghembi nel punto di intersezione tra $\mathbf{z_i}$ e il segmento di minima distanza fra gli assi stessi).
3. Si determina $\mathbf{x_i = z_{i-1} x\ z_i / \| z_{i-1} x\ z_i \|}$ oppure lungo la normale comune a $\mathbf{z_{i-1}}$ e $\mathbf{z_i}$ con verso positivo dal giunti **i-1** al giunto **i** se sono paralleli.
4. Si determina l'asse $\mathbf{y_i}$ con la regola della mano destra.

Manipolatore RRR (3gdl, Antropomorfo) Cin. Diretta



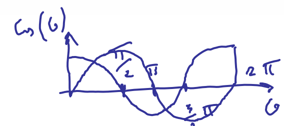




Link	θ	α	a	d
1	θ_1	90	0	d_1
2	θ_2	0	a_2	0
3	θ_3	0	a_3	0

Link	θ	α	a	d
1	θ_1	90°	0	d_1
2	θ_2	0	a_2	0
3	θ_3	0	a_3	0

$$\mathbf{A}_{i-1,i}^{i-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{cos}\theta_i & -\cos\alpha_i\,\mathrm{sen}\theta_i & \mathbf{sen}\alpha_i\mathbf{sen}\theta_i & \mathbf{a}_i\cos\theta_i \\ \mathrm{sen}\theta_i & \cos\alpha_i\cos\theta_i & -\mathrm{sen}\alpha_i\cos\theta_i & \mathbf{a}_i\,\mathrm{sen}\theta_i \\ 0 & \mathrm{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & \mathbf{d}_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$T_{0,n}^0 = A^0_{0,1} \cdot A^1_{1,2} \cdot A^2_{2,3}$$

$$A^0_{0,1} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^1_{1,2} = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2_{2,3} = \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{0,3}^{0} = A_{0,1}^{0} \cdot A_{12}^{1} \cdot A_{23}^{2} = \begin{bmatrix} C1 & 0 & S1 & 0 \\ S1 & 0 & -C1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & a_2 \cdot C2 \\ S2 & C2 & 0 & a_2 \cdot S2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 & a_3 \cdot C3 \\ S3 & C3 & 0 & a_3 \cdot S3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & s_1 & a_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & -c_1 & a_2 s_1 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 = c_1 \cdot (c_2 c_3 - s_2 s_3)$$

$$\downarrow c_1 c_{23}$$

$$sen(\alpha \pm \beta) = sen\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot sen\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp sen\alpha \cdot sen\beta$$

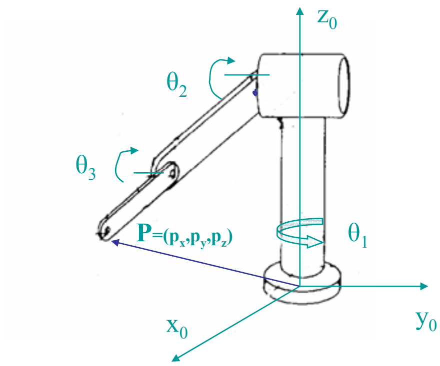
$$T_3^0(q) = A_1^0 A_2^1 A_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} + d1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore RRR Cin. Diretta

$$T_3^0(q) = A_1^0 A_2^1 A_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} + d1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{P}_0 = T_3^0 \cdot \vec{P}_3$$

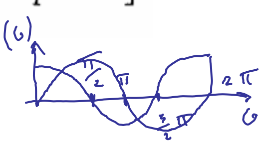
$$p_3^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



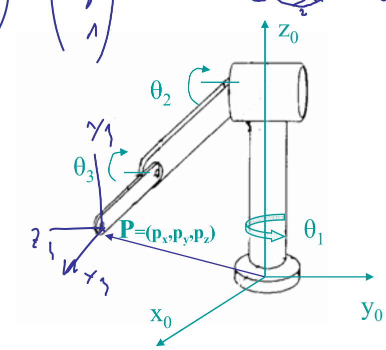
Es1: $\theta_1=0$, $\theta_2=0$, $\theta_3=0$ trovare la posizione del polso nello spazio di lavoro

$$T_3^0(q) = A_1^0 A_2^1 A_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} + d1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$= \begin{pmatrix} a_2 + a_3 \\ 0 \\ d_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Es1: θ_1=0°, θ_2=0°, θ_3=90° trovare la posizione del polso nello spazio di lavoro

$$T_3^0(q) = A_1^0 A_2^1 A_3^2 = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2s_2 + a_3s_{23}+\mathrm{d1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$