

Equazioni Differenziali Ordinarie		30 giugno 2005
Cognome	Nome	Firma
Proff. Arioli, Rossi, Vegni	Matricola	Sezione INF

© I seguenti quesiti e il relativo svolgimento sono coperti da diritto d'autore; pertanto essi non possono essere sfruttati a fini commerciali o di pubblicazione editoriale. Ogni abuso sarà perseguito a termini di legge dal titolare del diritto

Esercizio 5. È data l'equazione differenziale

$$y'' + 4ay' + 8a^2y = 0$$

con $a \in \mathbb{R}$.

- Integrare l'equazione differenziale al variare del parametro a .
- Studiare il problema ai limiti omogeneo

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

associato all'equazione data, precisando l'insieme dei valori di a per i quali il problema ammette soluzione non banale (autovalori), e le relative (auto-)soluzioni.

1° caso: $a = 0$ $y'' = 0$ $\lambda^2 = 0$ $\lambda = 0$ autovale nullo doppio
 $y = C_1 + C_2 x$ integrale generale
 $\dot{y} = C_2$ $\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \end{cases}$ solo sol. identicamente nullo
 $a = 0$ non è autovalore

2° caso: $a \neq 0$ $\lambda^2 + 4a\lambda + 8a^2 = 0$ eq. caratter.
 $\lambda = -2a \pm \sqrt{4a^2 - 8a^2} = -2a \pm i2a$ autov. complessi e coniugati
 $y = C_1 e^{-2ax} \cos(2ax) + C_2 e^{-2ax} \sin(2ax)$
 $\dot{y} = -2a e^{-2ax} [C_1 \cos(2ax) + C_2 \sin(2ax) + (-\sin(2ax) - C_2 \cos(2ax))]$
 $\begin{cases} -2a [C_1 - C_2] = 0 \\ e^{-2a\pi} [C_1 \cos 2a\pi + C_2 \sin 2a\pi] = 0 \end{cases}$
 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \cos 2a\pi & \sin 2a\pi \end{vmatrix} = \sin 2a\pi + \cos 2a\pi = 0$
 $\sin 2a\pi = -\cos 2a\pi$ $2a\pi = \frac{3}{4}\pi + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
 $\boxed{a = \frac{3}{8} + \frac{k}{2}}$ autovalori
 Autosol $C_1 = C_2$ $y = C_1 e^{-\left(\frac{3}{4} + k\right)x} \left[\cos\left[\left(\frac{3}{4} + k\right)x\right] + \sin\left[\left(\frac{3}{4} + k\right)x\right] \right]$