

3. Results and Discussion

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ กำหนดให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ x, y, z เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบ

ทฤษฎีบท 3.1 : สมการ $p^x + 5^y = z^2$ เมื่อ $p \equiv 1 \pmod{4}$ ไม่มีคำตอบจำนวนเต็มไม่ติดลบ

พิสูจน์ สมมติให้ $p \equiv 1 \pmod{4}$ จะได้ว่า $p \equiv 1 \pmod{4}$

พิสูจน์ ให้ $p \equiv 1 \pmod{4}$

$$\text{จะได้ } p^x \equiv 1^x \pmod{4}$$

$$\text{ดังนั้น } p^x \equiv 1 \pmod{4}$$

กรณีที่ 1 : ให้ $x=0$ หรือ $y=0$

แบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณี 1.1 : ให้ $x=0$

$$x=0 \text{ และ } y=0 : p^x + 5^y = z^2$$

$$p^0 + 5^0 = z^2$$

$$1 + 1 = 2 = z^2, \text{ เป็นไปไม่ได้ } \text{ เพราะ } z \text{ เป็นจำนวนเต็ม.}$$

$$x=0 \text{ และ } y=1 : p^x + 5^y = z^2$$

$$p^0 + 5^1 = z^2$$

$$1 + 5 = 6 = z^2, \text{ เป็นไปไม่ได้ } \text{ เพราะ } z \text{ เป็นจำนวนเต็ม.}$$

$$x=0 \text{ และ } y>1 : p^x + 5^y = z^2$$

$$p^0 + 5^y = z^2$$

$$1 + 5^y = z^2$$

$$z^2 - 5^y = 1, \text{ เป็นไปไม่ได้}$$

จากทฤษฎีบท Catalan

กรณี 1.2 : ให้ $y=0$

$$y=0 \text{ หรือ } x=0 : p^x + 5^y = z^2$$

$$p^0 + 5^0 = z^2$$

$$1 + 1 = 2 = z^2, \text{ หารลงตัว} \quad \text{เพราะ } z \text{ หารลงตัว 2}$$

$$y=0 \text{ หรือ } x=1 : p^x + 5^y = z^2$$

$$p^1 + 5^0 = z^2$$

$$p + 1 = z^2, \text{ หารลงตัว}$$

$$\text{จาก } p \equiv 1 \pmod{4}$$

$$p+1 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$\text{ดังนั้น } z^2 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$\text{หารลงตัว} \quad \text{เพราะ } z^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$y=0 \text{ หรือ } x \geq 1 : p^x + 5^y = z^2$$

$$p^x + 5^0 = z^2$$

$$p^x + 1 = z^2$$

$$z^2 - p^x = 1, \text{ หารลงตัว} \quad \text{เพราะ } p > 3 \text{ จากทฤษฎีบท Catalan}$$

กรณีที่ 2 : 9 หาร x 1 และ y 1

มีสมมติ 9 หาร x 1 และ y 1

จะได้ว่า p^x เป็นจำนวนเต็มคี่ และ
 q^y เป็นจำนวนเต็มคี่

$$\text{จากสมการ } p^x + q^y = z^2$$

จะได้ว่า จำนวนเต็มคี่ + จำนวนเต็มคี่ = จำนวนเต็มคี่

ดังนั้น z^2 เป็นจำนวนเต็มคี่. #

[กรณีที่ 1 z เป็นจำนวนเต็มคี่]

ถ้า z^2 เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว z เป็นจำนวนเต็มคี่ [ใช้กรณีข้อสลับที่]

มีสมมติ ถ้า z เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว z^2 เป็นจำนวนเต็มคี่

9 หาร z เป็นจำนวนเต็มคี่

ถ้าจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $z = 2k+1$

$$\text{จะได้ว่า } z^2 = (2k+1)^2$$

$$= 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2(2k^2 + 2k) + 1 \quad \text{เมื่อ } 2k^2 + 2k \text{ เป็นจำนวนเต็ม.}$$

นั่นคือ z^2 เป็นจำนวนเต็มคี่.

ดังนั้น z^2 เป็นจำนวนเต็มคี่. จะได้ว่า z เป็นจำนวนเต็มคี่. #

จาก z เป็นจำนวนเต็มคี่

จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $z = 2k$

$$\text{จะได้ว่า } z^2 = (2k)^2$$

$$= 4k^2$$

$$\text{นั่นคือ } 4 \mid z^2$$

$$\text{ดังนั้น } z^2 \equiv 0 \pmod{4} \quad \#$$

จาก $5 \equiv 1 \pmod{4}$ จะได้ว่า $5^y \equiv 1 \pmod{4}$

จาก $5^y \equiv 1 \pmod{4}$ แล้ว $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$

จะได้ว่า $z^2 - 5^y \equiv -1 \pmod{4}$

จากสมการ $p^x + 5^y = z^2$

จะได้ $z^2 - 5^y = p^x$

จะได้ว่า $p^x \equiv -1 \pmod{4}$

ดังนั้น $p^x \equiv 3 \pmod{4}$

เกิดข้อขัดแย้ง เพราะ $p \equiv 1 \pmod{4}$ จะได้ว่า $p^x \equiv 1 \pmod{4}$.

จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จะได้ว่าสมการ $p^x + 5^y = z^2$ ไม่มีคำตอบจำนวนเต็มไม่ติดลบ เมื่อ $p \equiv 1 \pmod{4}$. #

ทฤษฎีบท 3.2 : สมการการ $x^2 + y^2 = z^2$ มีคำตอบจำนวนเต็มไม่เกิดลบเพียง 2 คำตอบเท่านั้น เมื่อ (x, y, z) คือ $(3, 0, 3)$
 และ $(2, 1, 3)$ เมื่อ $p \equiv 2 \pmod{4}$

พิสูจน์ เนื่องจาก $p \equiv 2 \pmod{4}$ ดังนั้น $p = 2$
 จะได้ $x^2 + y^2 = z^2$

กรณีที่ 1 : ถ้า $x=0$ หรือ $y=0$

แบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณี 1.1 : ถ้า $x=0$

$$x=0 \text{ และ } y=0 : x^2 + y^2 = z^2$$

$$0^2 + 0^2 = z^2$$

$$0 + 0 = z^2 = z^2, \text{ เป็นไปไม่ได้ เพราะ } z \text{ เป็นจำนวนเต็ม.}$$

$$x=0 \text{ และ } y=1 : x^2 + y^2 = z^2$$

$$0^2 + 1^2 = z^2$$

$$0 + 1 = 1 = z^2, \text{ เป็นไปไม่ได้ เพราะ } z \text{ เป็นจำนวนเต็ม.}$$

$$x=0 \text{ และ } y>1 : x^2 + y^2 = z^2$$

$$0^2 + y^2 = z^2$$

$$1 + y^2 = z^2$$

$$z^2 - y^2 = 1, \text{ เป็นไปไม่ได้}$$

จากการคาดเดาของ Catalan : สมการ $x^a - y^b = 1$ จะมีคำตอบเพียงคำตอบเดียวเท่านั้น

เมื่อ (a, b, x, y) ซึ่ง x, y เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 ด้วย $(3, 2, 2, 3)$.

กรณี 1.2 : ให้ $y=0$

$$y=0 \text{ หรือ } x=0 : 2^x + 5^y = z^2$$

$$2^0 + 5^0 = z^2$$

$$1+1=2=z^2, \text{ เข้าไปไม่ได้ เพราะ } z \text{ เป็นจำนวนเต็ม.}$$

$$y=0 \text{ หรือ } x=1 : 2^x + 5^y = z^2$$

$$2^1 + 5^0 = z^2$$

$$2+1=3=z^2, \text{ เข้าไปไม่ได้ เพราะ } z \text{ เป็นจำนวนเต็ม.}$$

$$y=0 \text{ หรือ } x>1 : 2^x + 5^y = z^2$$

$$2^x + 5^0 = z^2$$

$$2^x + 1 = z^2$$

$$z^2 - 2^x = 1$$

จากกรณี Catalan ; สมการ $a^x - b^y = 1$ จะมีคำตอบเพียงสองค่าคือ $(3,2)$ และ $(2,3)$

เมื่อแทน (a,b,x,y) ซึ่ง a เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 ดัง $(3,2,2,3)$.

ดังนั้น สมการ $z^2 - 2^x = 1$ มีคำตอบจำนวนเต็มไม่ติดลบ เมื่อ (x,y,z) คือ $(3,0,3)$. #

กรณี 2 : $5 \nmid x$ และ $5 \nmid y$

นิเสธ $5 \nmid x$ และ $5 \nmid y$

จะได้ว่า x เป็นจำนวนเต็มคู่ และ

y เป็นจำนวนเต็มคี่

$$\text{จากสมการ } x^2 + y^2 = z^2$$

จะได้ว่า จำนวนเต็มคู่ + จำนวนเต็มคี่ = จำนวนเต็มคี่

ดังนั้น z เป็นจำนวนเต็มคี่. #

$$\text{จากสมการ } x^2 + y^2 = z^2$$

$$\text{จะได้ } x^2 + y^2 \equiv z^2 \pmod{5} \quad 5 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\text{จะได้ว่า } z^2 \equiv z^2 \pmod{5}$$

$$\text{ดังนั้น } z^2 \not\equiv 0 \pmod{5}$$

$$\text{นั่นคือ } 5 \nmid z^2$$

จาก $p \nmid a$ จะได้ว่า $(p, a) = 1$

$$\text{ดังนั้น } (5, z^2) = 1$$

จะได้ว่า $x, y \in \mathbb{I}$ ที่ทำให้

$$5x + z^2y = 1$$

$$5x + z(z^2y) = 1$$

$$\text{ดังนั้น } (5, z) = 1$$

$$\text{นั่นคือ } 5 \nmid z. \#$$

จาก $5 \nmid z$ และ z เป็นจำนวนเต็มคี่

$$\text{จะได้ว่า } z \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod{5}$$

$$\text{จาก } z \equiv 1, 4 \equiv 1, -1 \pmod{5}$$

$$\text{จะได้ว่า } z^2 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\text{จาก } z \equiv 2, 3 \equiv 2, -2 \pmod{5}$$

$$\text{จะได้ว่า } z^2 \equiv 4 \equiv -1 \pmod{5}.$$

จาก $2^x \equiv 2^2 \pmod{5}$ และ $x \geq 1$

๑. x เป็นจำนวนคี่

จะได้ $2^x = 2^{2k} = 4^k \equiv (-1)^k \pmod{5}$

๒. x เป็นจำนวนคู่

จะได้ $2^x = 2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k \equiv 2 \cdot (-1)^k \pmod{5}$

เป็นไปได้ \Rightarrow เพราะ $2^x \equiv \pm 1 \pmod{5}$.

ดังนั้น x เป็นจำนวนคี่. #

จาก x เป็นจำนวนคี่

๑. จำนวนคี่ k ที่ทำให้ $x = 2k$

จากสมการ $2^x + 5^y = 2^z$

จะได้ $2^{2k} + 5^y = 2^z$

$$5^y = 2^z - 2^{2k}$$

$$= 2^{2k} (2^{z-2k} - 1)$$

$$= (2^k - 2^k)(2^k + 2^k)$$

๑. y และ n เป็นจำนวนคี่ $y \geq 2n$ และ $n \geq 0$

จะได้ $(5^{y-n})(5^n) = (2^k - 2^k)(2^k + 2^k)$

เนื่องจาก $2^k + 2^k > 2^k - 2^k$

ทำให้ $(2^k + 2^k) = 5^{y-n}$ และ $(2^k - 2^k) = 5^n$.

จาก $(2^k + 2^k) = 5^{y-n}$ และ $(2^k - 2^k) = 5^n$

จะได้ $5^{y-n} - 5^n = 2^k + 2^k - 2^k + 2^k$

$$5^n (5^{y-2n} - 1) = 2^{k+1}$$

จาก $5^n (5^{y-2n} - 1) = 2^{k+1}$ ทำให้ได้ n ต้องเท่ากับ 0

จะได้ $5^y - 1 = 2^{k+1}$

$$5^y - 2^{k+1} = 1$$

จากการคาดเดาของ Catalan ; สมการ $a^x - b^y = 1$ จะมีคำตอบเพียงคำตอบเดียวเท่านั้น

เมื่อ (a, b, x, y) ซึ่ง a, b, x, y เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 ดัง (3, 2, 2, 3).

ถ้าให้ y ให้อยู่ที่ 1

สมการ $5 - 2^{k+1} = 1$ หรือ $y=1$

ถ้าให้ $5 - 2^{k+1} = 1$

$$2^{k+1} = 4$$

$$2^{k+1} = 2^2$$

ถ้าให้ $k+1 = 2$

$$k = 1$$

นั่นคือ $x = 2k = 2$. #

สมการ $2^x + 5^y = z^2$, $y=1$ หรือ $x=2$

ถ้าให้ $2^x + 5^y = z^2$

$$4 + 5 = 9 = z^2$$

ดังนั้น $z = 3$.

ดังนั้น สมการ $2^x + 5^y = z^2$ มีคำตอบจำนวนเต็มไม่ติดลบ เมื่อ (x, y, z) คือ $(2, 1, 3)$. #

จากการที่ 1 และกรณีที่ 2 ได้ว่า สมการ $2^x + 5^y = z^2$ มีคำตอบจำนวนเต็มไม่ติดลบ เมื่อ 2 ตัวบนเท่านั้น

เมื่อ (x, y, z) คือ $(3, 0, 3)$ หรือ $(2, 1, 3)$ เมื่อ $p \equiv 2 \pmod{4}$. #

ทฤษฎีบท 3.3 : สมการ $p^x + q^y = z^2$ เมื่อ $p \equiv 3 \pmod{4}$ และ $q \equiv 2 \pmod{5}$ ไม่มีคำตอบจำนวนเต็มไม่ติดลบ

พิสูจน์ สมมติได้ $p \equiv 3 \pmod{4}$ และ $q \equiv 2 \pmod{5}$.

กรณีที่ 1 : ถ้า $x=0$ หรือ $y=0$

แบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณี 1.1 : ถ้า $x=0$

$$x=0 \text{ และ } y=0 : p^x + q^y = z^2$$

$$p^0 + q^0 = z^2$$

$$1 + 1 = 2 = z^2, \text{ เป็นไปไม่ได้} \text{ เพราะ } z \text{ เป็นจำนวนเต็ม.}$$

$$x=0 \text{ และ } y=1 : p^x + q^y = z^2$$

$$p^0 + q^1 = z^2$$

$$1 + q = z^2, \text{ เป็นไปไม่ได้} \text{ เพราะ } z \text{ เป็นจำนวนเต็ม.}$$

$$x=0 \text{ และ } y>1 : p^x + q^y = z^2$$

$$p^0 + q^y = z^2$$

$$1 + q^y = z^2$$

$$z^2 - q^y = 1, \text{ เป็นไปไม่ได้}$$

จากทฤษฎีบท Catalan : สมการ $a^x - b^y = 1$ ไม่มีคำตอบเต็มบวกต่างจากกัน

เมื่อ (a, b, x, y) ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 ด้วย $(3, 2, 2, 3)$.

กรณี 1.2 : ให้ $y=0$

$$y=0 \text{ และ } x=0 : p^x + 5^y = z^2$$

$$p^0 + 5^0 = z^2$$

$$1 + 1 = 2 = z^2, \text{ แก้ไม่ได้} \quad \text{เพราะ } z \text{ เป็นจำนวนเต็ม.}$$

$$y=0 \text{ และ } x=1 : p^x + 5^y = z^2$$

$$p^1 + 5^0 = z^2$$

$$p + 1 = z^2, \text{ แก้ไม่ได้}$$

$$\text{จาก } p \equiv 2 \pmod{5}$$

$$p+1 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$\text{ดังนั้น } z^2 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$\text{แก้ไม่ได้} \quad \text{เพราะ } z^2 \equiv 0 \pmod{5} \text{ หรือ } z^2 \equiv 1 \pmod{5} \text{ หรือ } z^2 \equiv 4 \pmod{5}.$$

$$y=0 \text{ และ } x>1 : p^x + 5^y = z^2$$

$$p^x + 5^0 = z^2$$

$$p^x + 1 = z^2$$

$$z^2 - p^x = 1, \text{ แก้ไม่ได้} \quad \text{เพราะ } p > 3$$

จากทฤษฎีบท Catalan ; สมการ $a^x - b^y = 1$ จะมีคำตอบเพียงคำตอบเดียวเท่านั้น

เมื่อ (a, b, x, y) เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 ด้วย $(3, 2, 2, 3)$.

กรณีที่ 2 : ให้ $x \geq 1$ และ $y \geq 1$

นิสจน์ ให้ $x \geq 1$ และ $y \geq 1$

จะได้ว่า p^x เป็นจำนวนเต็มคี่ และ
 q^y เป็นจำนวนเต็มคี่

$$\text{จากสมการ } p^x + q^y = z^2$$

จะได้ว่า จำนวนเต็มคี่ + จำนวนเต็มคี่ = จำนวนเต็มคู่

ดังนั้น z^2 เป็นจำนวนเต็มคู่. #

[๑. แสดงว่า z เป็นจำนวนเต็มคี่]

ถ้า z^2 เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว z เป็นจำนวนเต็มคี่ [ใช้ทฤษฎีบท]

นิสจน์ ถ้า z เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว z^2 เป็นจำนวนเต็มคี่

ให้ z เป็นจำนวนเต็มคี่

๑. จำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $z = 2k+1$

$$\text{จะได้ว่า } z^2 = (2k+1)^2$$

$$= 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2(2k^2 + 2k) + 1 \quad \text{เมื่อ } 2k^2 + 2k \text{ เป็นจำนวนเต็ม.}$$

นั่นคือ z^2 เป็นจำนวนเต็มคี่.

ดังนั้น z^2 เป็นจำนวนเต็มคี่. จะได้ว่า z เป็นจำนวนเต็มคี่. #

จาก z เป็นจำนวนเต็มคี่

๑. ได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $z = 2k$

$$\text{จะได้ว่า } z^2 = (2k)^2$$

$$= 4k^2$$

$$\text{นั่นคือ } 4 \mid z^2$$

$$\text{ดังนั้น } z^2 \equiv 0 \pmod{4} \quad \#$$

จาก z เป็นจำนวนเต็มคู่

จะได้ว่า $z \equiv 0, 1, 2, 3, 4 \pmod{5}$

จะได้ว่า $z^2 \equiv 0, 1, 4, 9, 16 \pmod{5}$

นั่นคือ $z^2 \equiv 0, 1, 4, 4, 1 \pmod{5}$

ดังนั้น $z^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$. #

จาก $5 \equiv 1 \pmod{4}$ จะได้ว่า $5 \equiv 1 \pmod{4}$

จาก $5 \equiv 1 \pmod{4}$ และ $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$

จะได้ว่า $z^2 - 5 \equiv -1 \pmod{4}$

จากสมการ $p^x + 5^y = z^2$

จะได้ $p^x = z^2 - 5^y$

จะได้ว่า $p^x \equiv -1 \pmod{4}$

ดังนั้น $p^x \equiv 3 \pmod{4}$. #

ถ้า $p^x \equiv 3 \pmod{4}$ แล้ว x เป็นจำนวนเต็มคี่

[ถ้า x เป็นจำนวนคู่]

พิสูจน์ ใต้ x เป็นจำนวนเต็มคี่

จะใส่จำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $x = 2k$

จาก $p \equiv 3 \pmod{4}$

จะได้ว่า $p \equiv -1 \pmod{4}$

$p^{2k} \equiv 1 \pmod{4}$

แต่ $1 \not\equiv 3 \pmod{4}$

ดังนั้น $p^x \not\equiv 3 \pmod{4}$. เมื่อ $x = 2k$

ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว $p^x \equiv 2 \pmod{5}$ หรือ $p^x \equiv 3 \pmod{5}$.

พิสูจน์ ๑. ถ้า x เป็นจำนวนคี่

จำนวนคี่ k ที่ทำให้ $x = 2k+1$

$$\text{จาก } p \equiv 2 \pmod{5}$$

$$p^x \equiv 2^x \pmod{5}$$

$$p^{2k+1} \equiv 2^{2k+1} \pmod{5}$$

$$p^{2k+1} \equiv 2 \cdot 4^k \equiv 2 \cdot (-1)^k \pmod{5}$$

$$\text{นั่นคือ } p^{2k+1} \equiv -2, 2 \equiv 3, 2 \pmod{5}$$

$$\text{ดังนั้น } p^x \equiv 2 \pmod{5} \text{ หรือ } p^x \equiv 3 \pmod{5}. \#$$

จาก $5 \equiv 0 \pmod{5}$ และ $p^x \equiv 2 \pmod{5}$ หรือ $p^x \equiv 3 \pmod{5}$

$$\text{จากสมการ } p^x + 5 = z^2$$

$$\text{จะได้ว่า } z^2 \equiv 2 \pmod{5} \text{ หรือ}$$

$$z^2 \equiv 3 \pmod{5}$$

เกิดข้อขัดแย้ง เพราะ $z^2 \equiv 0 \pmod{5}$ หรือ $z^2 \equiv 1 \pmod{5}$ หรือ $z^2 \equiv 4 \pmod{5}$.

จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จะได้ว่าสมการ $p^x + 5 = z^2$ ไม่มีคำตอบจำนวนเต็มไม่ติดลบ

$$\text{เมื่อ } p \equiv 3 \pmod{4} \text{ และ } p \equiv 2 \pmod{5}. \#$$

ทฤษฎีบท 3.4 : สมการ $p^x + q^y = z^2$ เมื่อ $p \equiv 3 \pmod{4}$ และ $q \equiv 3 \pmod{5}$ มีคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ
เมื่อ (x, y, z) ก็คือ $(1, 0, 1)$

พินัย สมมติได้ $p \equiv 3 \pmod{4}$ และ $q \equiv 3 \pmod{5}$.

กรณีที่ 1 : ไล่ $x=0$ หรือ $y=0$
แบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณี 1.1 : ไล่ $x=0$

$$\begin{aligned} x=0 \text{ และ } y=0 : & \quad p^x + q^y = z^2 \\ & \quad p^0 + q^0 = z^2 \\ & \quad 1 + 1 = 2 = z^2, \text{ เป็นไปไม่ได้} \quad \text{เพราะ } z \text{ เป็นจำนวนเต็ม.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=0 \text{ และ } y=1 : & \quad p^x + q^y = z^2 \\ & \quad p^0 + q^1 = z^2 \\ & \quad 1 + q = z^2, \text{ เป็นไปไม่ได้} \quad \text{เพราะ } z \text{ เป็นจำนวนเต็ม.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=0 \text{ และ } y>1 : & \quad p^x + q^y = z^2 \\ & \quad p^0 + q^y = z^2 \\ & \quad 1 + q^y = z^2 \\ & \quad z^2 - q^y = 1, \text{ เป็นไปไม่ได้} \end{aligned}$$

จากการคาดเดาของ Catalan : สมการ $a^x - b^y = 1$ จะมีคำตอบเพียงคำตอบเดียวเท่านั้น
เมื่อแทน (a, b, x, y) ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 ด้วย $(3, 2, 2, 3)$.

กรณี 1.2 : ไล่ $y=0$

$$\begin{aligned} y=0 \text{ และ } x=0 : & \quad p^x + q^y = z^2 \\ & \quad p^0 + q^0 = z^2 \\ & \quad 1 + 1 = 2 = z^2, \text{ เป็นไปไม่ได้} \quad \text{เพราะ } z \text{ เป็นจำนวนเต็ม.} \end{aligned}$$

$$y=0 \text{ หรือ } x=1: p^x + 5^y = z^2$$

$$p + 1 = z^2$$

มีคำตอบเมื่อ $p=3$ หรือ $z=2$

$$y=0 \text{ และ } x>1: p^x + 5^y = z^2$$

$$p^x + 5 = z^2$$

$p^x + 1 = z^2$, เป็นไปไม่ได้ เมื่อ $p>3$

จาก Lemma 2.2: สมการ $p^x + 1 = z^2$ ไม่มีคำตอบจำนวนเต็มไม่ติดลบ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะที่มากกว่า 3.

กรณีที่ 2: ถ้า $x \geq 1$ และ $y \geq 1$

นิสฺจฺย ถ้า $x \geq 1$ และ $y \geq 1$

จะได้ว่า p^x เป็นจำนวนเต็มคี่ และ
 5^y เป็นจำนวนเต็มคี่

$$\text{จากสมการ } p^x + 5^y = z^2$$

จะได้ว่า จำนวนเต็มคี่ + จำนวนเต็มคี่ = จำนวนเต็มคู่

ดังนั้น z^2 เป็นจำนวนเต็มคู่. #

[จะแสดงว่า z เป็นจำนวนเต็มคี่]

ถ้า z^2 เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว z เป็นจำนวนเต็มคี่ [ใช้การผกผันกัน]

นิสฺจฺย ถ้า z เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว z^2 เป็นจำนวนเต็มคี่

ถ้า z เป็นจำนวนเต็มคี่

จะมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $z = 2k+1$

$$\text{จะได้ว่า } z^2 = (2k+1)^2$$

$$= 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2(2k^2 + 2k) + 1 \text{ เมื่อ } 2k^2 + 2k \text{ เป็นจำนวนเต็ม.}$$

นั่นคือ z^2 เป็นจำนวนเต็มคี่.

ดังนั้น z^2 เป็นจำนวนเต็มคี่. จะได้ว่า z เป็นจำนวนเต็มคี่. #

หาก z เป็นจำนวนเต็มคู่

จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $z = 2k$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } z^2 &= (2k)^2 \\ &= 4k^2\end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } 4 \mid z^2$$

$$\text{ดังนั้น } z^2 \equiv 0 \pmod{4} \quad \#$$

หาก z เป็นจำนวนคี่

$$\text{จะได้ว่า } z \equiv 0, 1, 2, 3, 4 \pmod{5}$$

$$\text{จะได้ว่า } z^2 \equiv 0, 1, 4, 9, 16 \pmod{5}$$

$$\text{นั่นคือ } z^2 \equiv 0, 1, 4, 4, 1 \pmod{5}$$

$$\text{ดังนั้น } z^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5} \quad \#$$

$$\text{หาก } 5 \equiv 1 \pmod{4} \quad \text{จะได้ว่า } 5 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\text{หาก } 5 \equiv 1 \pmod{4} \quad \text{นั่นคือ } z^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\text{จะได้ว่า } z^2 - 5 \equiv -1 \pmod{4}$$

$$\text{จากสมการ } p^x + 5^y = z^2$$

$$\text{จะได้ } p^x = z^2 - 5^y$$

$$\text{จะได้ว่า } p^x \equiv -1 \pmod{4}$$

$$\text{ดังนั้น } p^x \equiv 3 \pmod{4} \quad \#$$

ถ้า $p \equiv 3 \pmod{4}$ แล้ว x เป็นจำนวนเต็มคี่ [ใช้การแบ่งส่วนที่]

พิสูจน์ ใต้ x เป็นจำนวนเต็มคี่

จะมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $x = 2k$

$$\text{จาก } p \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\text{จะได้ว่า } p \equiv -1 \pmod{4}$$

$$p^{2k} \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\text{แต่ } 1 \not\equiv 3 \pmod{4}$$

$$\text{ดังนั้น } p^x \not\equiv 3 \pmod{4}, \text{ เมื่อ } x = 2k$$

ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว $p^x \equiv 2 \pmod{5}$ หรือ $p^x \equiv 3 \pmod{5}$.

พิสูจน์ ใต้ x เป็นจำนวนเต็มคี่

จะมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $x = 2k+1$

$$\text{จาก } p \equiv 3 \pmod{5}$$

$$p^x \equiv 3^x \pmod{5}$$

$$p^{2k+1} \equiv 3^{2k+1} \pmod{5}$$

$$p^{2k+1} \equiv 3 \cdot 1^k \equiv 3 \cdot (-1)^k \pmod{5}$$

$$\text{นั่นคือ } p^{2k+1} \equiv -3, 3 \equiv 2, 3 \pmod{5}$$

$$\text{ดังนั้น } p^x \equiv 2 \pmod{5} \text{ หรือ } p^x \equiv 3 \pmod{5}. \#$$

$$\text{จาก } y \equiv 0 \pmod{5} \text{ และ } p \equiv 2 \pmod{5} \text{ หรือ } p \equiv 3 \pmod{5}$$

$$\text{จากสมการ } p^x + y = z^2$$

$$\text{จะได้ว่า } z^2 \equiv 2 \pmod{5} \text{ หรือ}$$

$$z^2 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$\text{เกิดข้อขัดแย้ง เพราะ } z^2 \equiv 0 \pmod{5} \text{ หรือ } z^2 \equiv 1 \pmod{5} \text{ หรือ } z^2 \equiv 4 \pmod{5}.$$

จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จะได้ว่าสมการ $p^x + y = z^2$ ไม่มีคำตอบจำนวนเต็มไม่ติดลบ

$$\text{เมื่อ } p \equiv 3 \pmod{4} \text{ และ } p \equiv 3 \pmod{5}. \#$$

