บทนิยาม 5.1.1

กำหนดให้ $f: I \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $I \subseteq \mathbb{R}$ และ $x \in I$

เราจะกล่าวว่า f หาอนุพันธ์ได้ (differentiable) หรือ มีอนุพันธ์บนช่วง I ถ้าลิมิตต่อไปนี้ หาค่าได้

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad - \quad (1)$$

f มีอนุพันธ์ (differentiable) ที่จุด $c \in I$ ถ้า ลิมิตต่อไปนี้ หาค่าได้

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \quad - \quad (2)$$

บทที่ 5

Final → online → 9:00 - 12:00 น.

อนุพันธ์ (Derivatives)

5.1 นิยามของอนุพันธ์ (Definition of the derivative)

บทนิยาม 5.1.1 ให้ $I \subset \mathbb{R}$ เป็นช่วง และ $f : I \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน จะกล่าวว่า f **หาอนุพันธ์ได้** (differentiable) หรือ**มีอนุพันธ์ที่จุด** $c \in I$ ถ้าลิมิตต่อไปนี้หาค่าได้

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

และจะกล่าวว่า f หาอนุพันธ์ได้บน I ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุด $c \in I$

ตัวอย่าง 5.1.2 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = x^2$ สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ จงแสดงว่า $f'(x) = 2x$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

การพิสูจน์ สำหรับ h ใดๆ ใน R

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\cancel{x^2} + 2xh + h^2) - \cancel{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$$

*

ทฤษฎีบท 5.1.3 กำหนดให้ I เป็นช่วงที่บรรจุจุด c และ $f: I \to \mathbb{R}$ แล้ว จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) f มีอนุพันธ์ที่จุด c

(2) สำหรับทุก ๆ ลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่ง $x_n \in I\setminus\{c\}$ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c} = f'(c) \quad \text{หาค่าได้}$$

การพิสูจน์ ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด contrapositive $\sim q \to \sim p$ □

p → q

ทฤษฎีบท 5.1.4 สมมติให้ฟังก์ชัน $f: I \to \mathbb{R}$ มีอนุพันธ์ที่จุด $c \in I$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด c

การพิสูจน์

สมมติให้ f มีอนุพันธ์ที่จุด $c \in I$

MST: f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด c

[Theorem 4.3.2.

f is con at $c \iff \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$]

ดังนั้น จากนิยาม

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$$

พิจารณา สำหรับทุกๆ $x \in I$ ซึ่ง $x \neq c$ เราจะได้ว่า

$$f(x) = (x-c)\cdot\frac{f(x)-f(c)}{x-c} + f(c)$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}\left[(x-c)\cdot\frac{f(x)-f(c)}{x-c} + f(c)\right]$$

$$= \lim_{x \to c}(x-c) \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} + \lim_{x \to c} f(c)$$

$$= 0 \cdot f'(c) + f(c)$$

$$= f(c)$$

ดังนั้น $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

จาก Theorem 4.3.2. เราสามารถสรุป f เป็นฟังก์ชัน ที่ต่อเนื่องที่จุด c

ข้อสังเกต 5.1.5

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่จุด $c \in I$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด c

ทฤษฎีบท 5.1.6 สมมติให้ $f: I \to \mathbb{R}$ และ $g: I \to \mathbb{R}$ มีอนุพันธ์ที่จุด $c \in I$ แล้ว

(1) $(kf)'(c) = kf'(c)$ สำหรับทุก ๆ $k \in \mathbb{R}$

(2) $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$

(3) $(fg)'(c) = f(c)g'(c) + g(c)f'(c)$ → udv + vdu

(4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{g(c)f'(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$ เมื่อ $g(c) \neq 0$ → vdu − udv / v²

การพิสูจน์

สมมติให้ $f: I \to \mathbb{R}$ และ $g: I \to \mathbb{R}$ มีอนุพันธ์ที่จุด c

② ทสร: $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

$$\left[\lim_{x \to c} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}\right]$$

สำหรับทุกๆ $x \in I$ และ $x \neq c$ จะได้ว่า

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(c)}{x - c} = \frac{(f(x) + g(x)) - (f(c) + g(c))}{x - c}$$

$$= \frac{f(x) - f(c) + g(x) - g(c)}{x - c}$$

$$= \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

$$\lim_{x \to c} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(c)}{x-c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} + \lim_{x \to c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c}$$

เพราะฉะนั้น

$$(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$$

$\cos(2x) = -\sin(2x)\,2$

$g \circ f(x) \; g'(f(x))\,f'(x)$

ทฤษฎีบท 5.1.7 (กฎลูกโซ่ (Chain rule)) กำหนดให้ฟังก์ชัน $f: I \to \mathbb{R}$ และ $g: J \to \mathbb{R}$ โดยที่ $I, J \subseteq \mathbb{R}$, $f(I) \subseteq J$ และ $c \in I$ ถ้าฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ g มีอนุพันธ์ที่จุด $f(c)$ แล้ว $g \circ f$ มีอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ

$$(gof)'(c) = g'(f(c))f'(c)$$

การพิสูจน์

สมมติให้ f มีอนุพันธ์ที่จุด c และ g มีอนุพันธ์ที่จุด $f(c)$

MST: $g \circ f$ มีอนุพันธ์ที่จุด c $\wedge$ $(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c)$

f มีอนุพันธ์ที่จุด c

$$\lim_{x \to c} \frac{\overset{g(y)}{f(x)} - \overset{g(f(c))}{f(c)}}{\underset{y}{x} - \underset{f(c)}{c}}$$

$g: J \to \mathbb{R}$

$f(I) \subseteq J$

$y \in$ Domain g

$y \in f(I)$

$\to y = f(x) : x \in I$

$$g'(f(c)) = \lim_{y \to f(c)} \frac{g(y) - g(f(c))}{y - f(c)}$$

นิยาม $h: J \to \mathbb{R}$ โดยที่

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(c))}{y - f(c)} & \text{เมื่อ } y \neq f(c) \quad ① \\ g'(f(c)) & \text{เมื่อ } y = f(c) \quad ② \end{cases}$$

ต่อไป เราจะแสดงว่า h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $f(c)$

$\hookrightarrow \lim_{y \to f(c)} h(y) = h(f(c))$

เนื่องจาก

$$\lim_{y \to f(c)} h(y) = \lim_{y \to f(c)} \frac{g(y) - g(f(c))}{y - f(c)} = g'(f(c))$$

$$= h(y)$$

$$= h(f(c))$$

ดังนั้น h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $f(c)$

เพราะฉะนั้น $h \circ f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด c

- เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด c จะได้ว่า

$$\lim_{x \to c} h \circ f(x) = h \circ f(c) = \boxed{h(f(c))} = g'(f(c))$$

$$h(y)$$

จากนิยามฟังก์ชัน h จะได้ว่า

$$h(y) = \frac{g(y) - g(f(c))}{y - f(c)}$$

$$g(y) - g(f(c)) = h(y)(y - f(c)), \ \forall y \in J$$

$f(I) \subseteq J$
$y \in f(I)$
$y = f(x) : x \in I$

ดังนั้น ถ้า $x \in I$ แล้ว $f(x) \in J$

$$g(f(x)) - g(f(c)) = h(f(x))\,(f(x) - f(c))$$

MST: $\quad (g\circ f)'(c) = g'(f(c))\, f'(c)$

$$\lim_{x \to c} \frac{g\circ f(x) - g\circ f(c)}{x - c}$$

สำหรับ $x \in I$ และ $x \neq c$ จะได้ว่า

$$\frac{g(f(x)) - g(f(c))}{x - c} = \frac{h(f(x))\,(f(x) - f(c))}{x - c}$$

เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
(g\circ f)'(c) &= \lim_{x \to c} \frac{g(f(x)) - g(f(c))}{x - c} \\
&= \lim_{x \to c} \frac{h(f(x))\,(f(x) - f(c))}{x - c} \\
&= \lim_{x \to c} h(f(x)) \cdot \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\
&= g'(f(c)) \cdot f'(c)
\end{aligned}
$$

*

ตัวอย่าง 5.1.8 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่ถูกนิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 0, & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$$

- ①
- ②

จงหา $f'(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \neq 0$

วิธีทำ กำหนดให้ $h(x) = \sin\frac{1}{x}$ ดังนั้น $f(x) = xh(x)$

สำหรับทุก ๆ $x \neq 0$ จะได้ว่า

$$h'(x) = (\cos\frac{1}{x})(-x^{-2})$$

ดังนั้น

นล' + ลน'

$$f'(x) = xh'(x) + h(x) = x(\cos\frac{1}{x})(-x^{-2}) + \sin\frac{1}{x}$$
$$= -\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$$

□

แบบฝึกหัด 5.1

(1) จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.1.5 ข้อที่ 1 และข้อที่ 3

(2) กำหนดให้ $f(x) = x|x|$ จงพิสูจน์ว่า $f'(x) = 2|x|$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

(3) จงแสดงว่าสำหรับ $n \in \mathbb{N}$ ใด ๆ ถ้า $f(x) = x^n$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ แล้ว

$f'(x) = nx^{n-1}$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ (พิสูจน์โดยหลักการของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์)

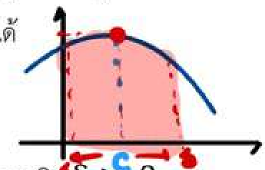
(4) กำหนดให้ $f : I \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิด I และมีอนุพันธ์ที่จุด $c \in I$ จงพิสูจน์ว่า สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $x, y \in I$ ซึ่ง $|x - y| < \delta$ และ $x < c < y$ จะได้ว่า

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(c)\right| < \varepsilon$$

diff → ต่อเนื่อง !

5.2 ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมและการประยุกต์ (Mean Value Theorem and applications)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีบทค่ามัชฌิมที่เป็นทฤษฎีบทที่สำคัญของการประยุกต์ความรู้เกี่ยวกับอนุพันธ์ที่สามารถอธิบายความสัมพันธ์ของค่าฟังก์ชันและค่าอนุพันธ์ฟังก์ชันต่าง ๆ ได้



บทนิยาม 5.2.1 กำหนดให้ $S \subset \mathbb{R}$ เป็นเซตและ $f : S \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน

(1) จะกล่าวว่า f มี **ค่าสูงสุดสัมพัทธ์** (Relative maximum) ที่จุด c ก็ต่อเมื่อ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่ง สำหรับทุก ๆ $x \in S$ ซึ่งทำให้ $|x - c| < \delta$ เราจะได้ว่า $f(c) \geq f(x)$

(2) จะกล่าวว่า f มี **ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** (Relative minimum) ที่จุด c ก็ต่อเมื่อ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่ง สำหรับทุก ๆ $x \in S$ ซึ่งทำให้ $|x - c| < \delta$ เราจะได้ว่า $f(c) \leq f(x)$

(3) จะกล่าวว่า f มี **จุดสุดขีดสัมพัทธ์** (Relative extremum) ที่จุด c ก็ต่อเมื่อ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

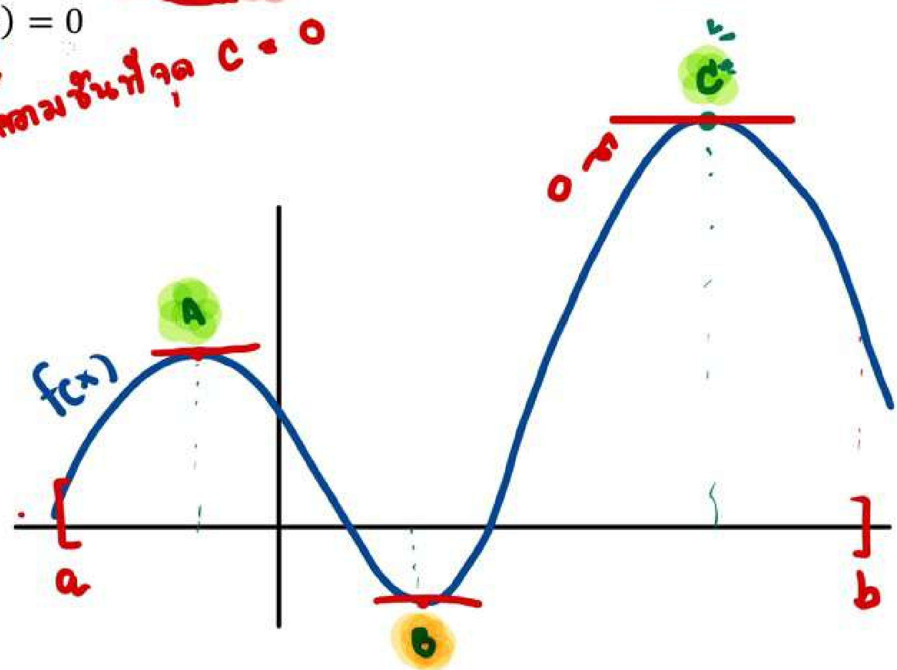
***

S

ทฤษฎีบท 5.2.2 กำหนดให้ฟังก์ชัน $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ มีอนุพันธ์ที่จุด $c \in (a, b)$ ถ้า f มีจุดสุดขีดสัมพัทธ์ที่ c แล้ว $f'(c) = 0$

ต่อเนื่องที่จุด c = 0

การพิสูจน์



สมมติให้ f มีจุดสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุด c นั่นคือ

f จะมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือ ต่ำสุดสัมพัทธ์ ทีเอว

สมมติให้ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด c

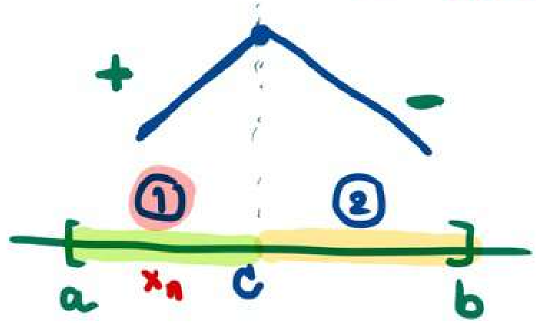
ดังนั้น จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง สำหรับทุก ๆ $x \in [a,b]$

ซึ่งทำให้ $|x-c| < \delta$ แล้ว

$$f(c) \geq f(x)$$

MST: $f'(c) = 0$ → $\underbrace{f'(c)}_{\text{ความชัน}} \geq 0$ — ①

$f'(c) \leq 0$ — ②



Theorem 6.1.3

ถ้า f มีอนุพันธ์ที่จุด $c \leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset I \wedge x_n \neq c$

$\wedge\ x_n \to c$ แล้ว

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = f'(c)$$

① MST: $f'(c) \geq 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} \geq 0$$

หา x_n, $n \in \mathbb{N}$

เนื่องจาก $a < c$ จะได้ว่า $c - a > 0$

จาก Archimedean property (4) จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$

$[\forall x > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t } 0 < \frac{1}{n} < x]$

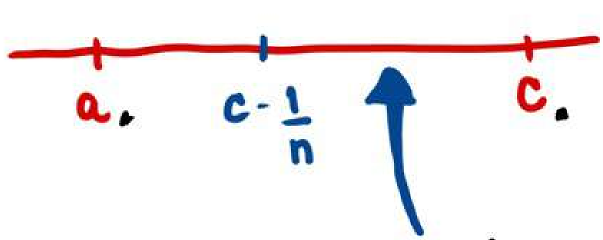
ซึ่ง

$$0 < \frac{1}{n_0} < c - a$$

สำหรับทุกๆ $n \geq n_0$.

$$\frac{1}{n} \boxed{\leq} \frac{1}{n_0} < c - a$$

จะได้ว่า $a < c - \frac{1}{n}$, $\forall n \geq n_0$



หา $x_n \in (a, c)$

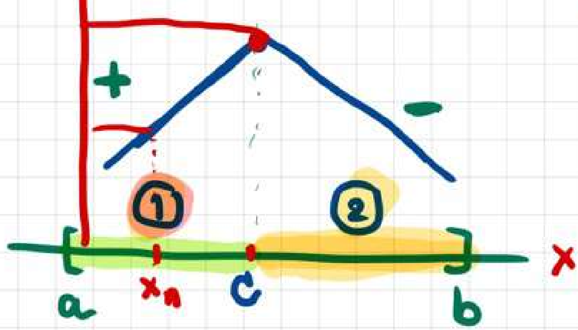
เราจะเลือก $x_n = c - \dfrac{1}{n_0 + (n-1)}$, $\forall n \geq n_0$

ดังนั้น $a < x_n < c$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = c$$

เนื่องจาก f สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด c จาก Theorem 5.1.3

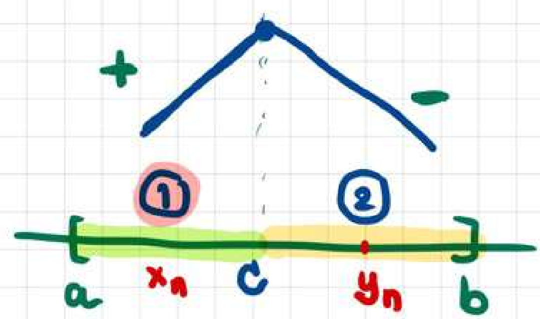
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overset{-}{f(x_n)-f(c)}}{\underset{-}{x_n - c}} = f'(c) \geq 0$$



เนื่องจาก $f(x_n) \boxed{<} f(c)$ และ $x_n \boxed{<} c$ ดังนั้น

$$\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n - c} \geq 0$$

เพราะฉะนั้น $f'(c) \geq 0$



② MST: $f'(c) \leq 0$

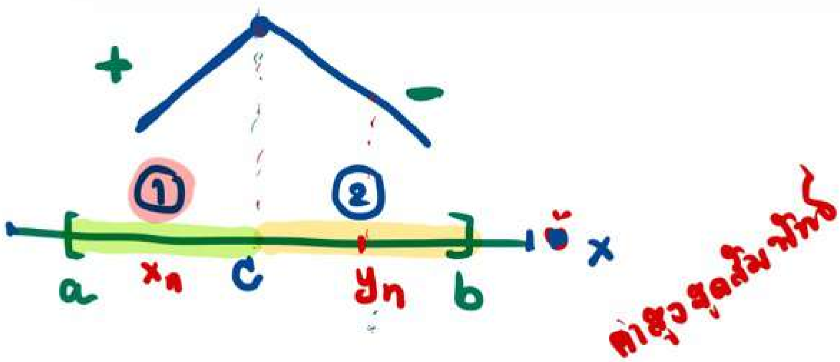
เนื่องจาก $c < b$ ดังนั้น $b - c > 0$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถหา ลำดับ $\{y_n\}$ ซึ่ง

$\boxed{c < y_n} < b$, $\forall n \in \mathbb{N}$ และ $y_n \to c$

เนื่องจาก f มีอนุพันธ์ที่จุด c จาก Theorem 5.1.3 จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overset{-}{f(y_n)-f(c)}}{\underset{+}{y_n - c}} = f'(c) \leq 0$$



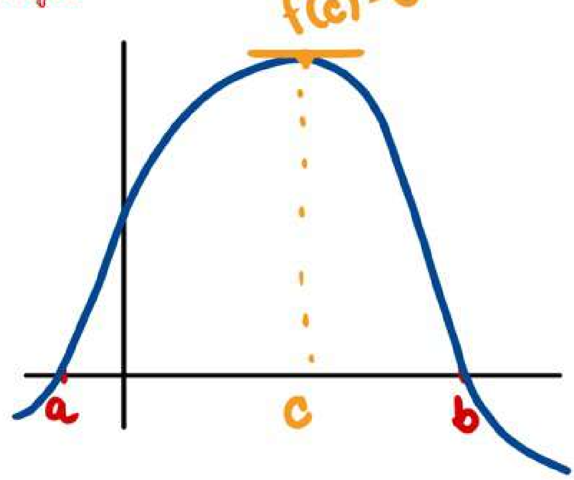
เนื่องจาก $f(y_n) \boxed{<} f(c)$ และ $y_n \boxed{>} c$

[เขียนเอง]

i.e., f con on $[a,b]$, f diff on (a,b) s.t $f(a)=f(b)=0 \rightarrow \exists c\in(a,b)$ s.t $f'(c)=0$

ทฤษฎีบท 5.2.3 (Rolle's Theorem) กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ มีอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a,b) ซึ่ง $f(a)=f(b)=0$ แล้วจะมี $c\in(a,b)$ ซึ่ง $f'(c)=0$

การพิสูจน์



สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และมีอนุพันธ์บน (a,b) ซึ่ง $f(a)=f(b)=0$

Minimum Maximum

MST: $\exists c\in(a,b)$ s.t $f'(c)=0$ [Theorem 4.4.5]

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ จาก Theorem 4.4.5 เราจะได้ว่า f จะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และต่ำสุดสัมบูรณ์ นั่นคือ จะมี $\alpha,\beta\in[a,b]$ ซึ่ง

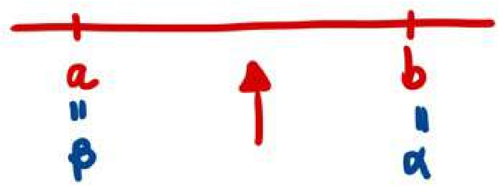
$$f(\beta) = \inf f([a,b])$$
$$f(\alpha) = \sup f([a,b])$$

ดังนั้น สำหรับทุก $x\in[a,b]$

$$f(\beta) \boxed{\le} f(x) \le f(\alpha) \quad — \ *$$

$\alpha, \beta \in [a,b]$

- $a = \beta,\ b = \alpha$
- $\alpha \in (a,b)$
- $\beta \in (a,b)$



MST: $\exists c \in (a,b)$ s.t $f'(c) = 0$

เฉลย: แบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 3 กรณี

$\boxed{\text{กรณีที่ 1}}$ ถ้า $\beta = a$ และ $\alpha = b$ แล้ว

$$f(\beta) = f(a) = 0 = f(b) = f(\alpha)$$

จาก (*) สำหรับทุกๆ $x \in [a,b]$

$$0 = f(\beta) \le f(x) \le f(\alpha) = 0$$

ดังนั้น $f(x) = 0$

เพราะฉะนั้น $f'(\overset{c}{x}) = 0, \quad \forall x \in [a,b]$

$\boxed{\text{กรณีที่ 2}}$ ถ้า $\beta \in (a,b)$ ($\alpha \in (a,b)$) จาก (*)

$$f(\beta) \le f(x) \le f(\alpha), \quad \forall x \in [a,b]$$

sup $f([a,b])$

inf $f([a,b])$ จุดต่ำสุดสัมบูรณ์ → จุดต่ำสุดสัมพัทธ์

Theorem 3.2.3 เขียนเอง

f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ β → $f'(\overset{c}{\beta}) = 0$

MST: $\exists c \in (a,b)$ s.t $f'(c) = 0$

ทฤษฎีบท 5.2.4 (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม (Mean value theorem)) สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และมีอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a, b) แล้วจะมี $c \in (a, b)$ ซึ่ง

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

สูตรหาความชัน

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

การพิสูจน์

สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และมีอนุพันธ์บน (a, b)

MST: $c \in (a, b)$ s.t $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

นิยามฟังก์ชัน $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ โดย

$$g(x) = f(x) - f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - x)$$

$$g'(x) = f'(x) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(-1)$$

สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$

g

Theorem 5.2.3

f con $[a,b] \wedge f$ diff (a,b) s.t $f(a) = f(b) = 0$

$\to \exists c \in (a,b)$ s.t $f'(c) = 0$

จากสมมติฐาน เราจะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และมีอนุพันธ์บน (a, b) จริง $g(a) = g(b) = 0$ จาก Theorem 5.2.3 จะได้ว่า จะมี $c \in (a, b)$ จริง $g'(c) = 0$ นั่นคือ

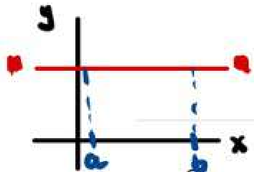
$$0 = g'(c) = f'(c) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(-1)$$

MST: $\exists c \in (a,b)$ s.t $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ดังนั้น

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

#



~ If $x_2 \geq x_2$, $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$.

then $f(x_1) \boxed{=} f(x_2)$ $\neq$

ทฤษฎีบท 5.2.5 สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และมีอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a,b) ถ้า $f'(x) = 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a,b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันค่าคงที่บนช่วงปิด $[a,b]$

การพิสูจน์

สมมติให้ $f'(x) = 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a,b)$

TST: f เป็นฟังก์ชันค่าคงที่บนช่วงปิด $[a,b]$ (contradiction)

สมมติให้ f ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงที่บนช่วงปิด $[a,b]$

ดังนั้น จะมี $x_1, x_2 \in [a,b]$ ซึ่ง

$a \leq x_1 < x_2 \leq b$ แล้ว $f(x_1) \neq f(x_2)$

ความชัน

จาก Mean Value theorem จะมี $c \in (x_1, x_2)$

ซึ่ง

$$f'(c) = \frac{\overset{\neq}{f(x_2) - f(x_1)}}{x_2 - x_1 \ \neq} \boxed{\neq} 0$$

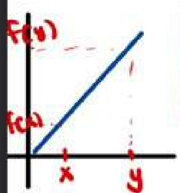
เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันค่าคงที่บน $[a,b]$ ※

บทแทรก 5.2.6 กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และมีอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a, b) สมมติให้ $f'(x) = g'(x)$ สำหรับทุก ๆ (a, b) แล้ว จะมี ค่าคงที่ C ซึ่ง $f = g + C$ บน (a, b)

การพิสูจน์ (ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด)

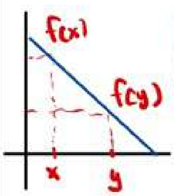
ไม่ออก !

บทนิยาม 5.2.7 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันบนช่วง $I \subseteq \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า



(1) f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม** (Increasing function) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ $x, y \in I$ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) \leq f(y)$

(2) f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้** (Strictly increasing function) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ $x, y \in I$ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) < f(y)$



(3) f เป็น**ฟังก์ชันลด** (Decreasing function) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ $x, y \in I$ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) \geq f(y)$

(4) f เป็น**ฟังก์ชันลดโดยแท้** (Strictly decreasing function) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ $x, y \in I$ ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) > f(y)$

(5) f เป็น**ฟังก์ชันทางเดียว** (Monotone function) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดอย่างใดอย่างหนึ่ง

ทฤษฎีบท 5.2.8 กำหนดให้ฟังก์ชัน $f : I \to \mathbb{R}$ มีอนุพันธ์บนช่วง I

(1) f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ก็ต่อเมื่อ $f'(x) \geq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in I$

(2) f เป็นฟังก์ชันลด ก็ต่อเมื่อ $f'(x) \leq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in I$ (แบบฝึกหัด)

การพิสูจน์

($\rightarrow$) สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

MST: $f'(x) \geq 0, \ \forall x \in I$ หยิบจุด $c \in I$

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $x, c \in I$

ถ้า $c < x$ แล้ว $f(c) \boxed{\leq} f(x)$

ดังนั้น

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \boxed{\geq} 0$$

(+ , +)

เพราะฉะนั้น

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

เนื่องจาก c เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า $f'(x) \geq 0, \ \forall x \in I$.

($\leftarrow$) สมมติให้ $\boxed{f'(x) \geq 0}, \ \forall x \in I$

c

MST: f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

$\forall x_1, x_2 \in I$ If $x_1 < x_2$ then $f(x_1) \boxed{\leq} f(x_2)$

Mean Value Theorem

f con $[\overset{x_1}{a}, \overset{x_2}{b}] \wedge f$ diff $(\overset{x_1}{a}, \overset{x_2}{b}) \rightarrow \exists\, c \in (\overset{x_1}{a}, \overset{x_2}{b})$

$$\text{s.t } f'(c) = \frac{f(\overset{x_2}{b}) - f(\overset{x_1}{a})}{\underset{x_2}{b} - \underset{x_1}{a}}$$

สมมติให้ $x_1, x_2 \in I$ และ $\boxed{x_1 < x_2}$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[x_1, x_2]$ และ มี อนุพันธ์บน (x_1, x_2) จาก Mean Value theorem จะได้ว่า จะมี $c \in (x_1, x_2)$ ซึ่ง

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

MST: $x_1 < x_2$ then $f(x_1) \le f(x_2)$

ดังนั้น

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{\overset{\geq 0}{\boxed{f'(c)}}\,\overset{\geq 0}{\boxed{(x_2 - x_1)}}}_{\geq 0}$$

เนื่องจาก $f'(c) \geq 0$ และ $x_2 - x_1 > 0$ จะได้ว่า

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

ดังนั้น $f(x_2) \geq f(x_1)$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน I #

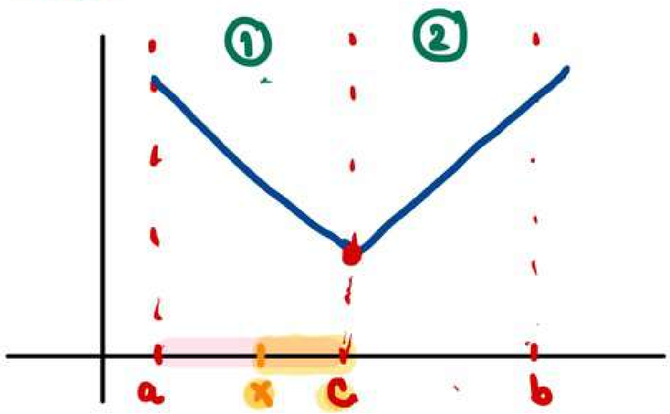
ทฤษฎีบท 5.2.9 กำหนดให้ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $c\in(a,b)$ สมมติให้ฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์บน (a,c) และ (c,b)

(ลด) (เพิ่ม)

(1) ถ้า $f'(x)\le 0$ สำหรับทุก ๆ $x\in(a,c)$ และ $f'(x)\ge 0$ สำหรับทุก ๆ $x\in(c,b)$ แล้ว f จะมีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่จุด c

(2) ถ้า $f'(x)\ge 0$ สำหรับทุก ๆ $x\in(a,c)$ และ $f'(x)\le 0$ สำหรับทุก ๆ $x\in(c,b)$ แล้ว f จะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่จุด c แบบฝึกหัด

การพิสูจน์



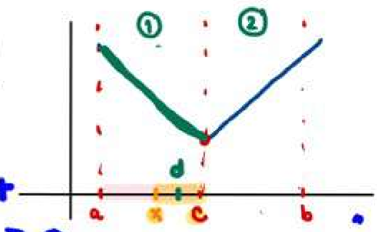
สมมติให้ $f'(x)\le 0$, $\forall x\in(a,c)$ และ $f'(x)\ge 0$, $\forall x\in(c,b)$

① สมมติให้ $x\in(a,c)$

MST: f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่จุด c i.e., $f(c)\boxed{\le} f(x)$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[x,c]$ และมีอนุพันธ์บน (x,c) จาก Mean Value theorem จะได้ว่า จะมี $d\in(x,c)$ ซึ่ง

$$f'(d) = \frac{f(c)-f(x)}{c-x}$$



MST: $f(c) \le f(x)$

ดังนั้น $$f(c) - f(x) = \underbrace{\overset{\le 0}{f'(d)}\,\overset{\ge 0}{(c-x)}}_{\le 0.}$$

เนื่องจาก $f'(d) \le 0$ และ $c - x > 0$ จะได้

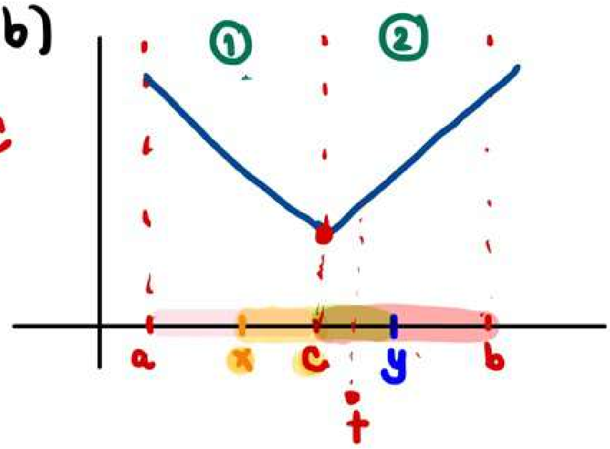
$$f(c) - f(x) \le 0$$

ดังนั้น $f(c) \le f(x), \ \forall x \in (a, c)$

② สมมติให้ $y \in (c, b)$

MST: f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่จุด c

i.e., $f(c) \le f(y)$



Mean Value theorem

$\exists t \in (c, y)$ $$f'(t) = \frac{f(y)-f(c)}{y-c}$$

≥ 0 ≤ 0

$f(c) \le f(y)$

ทฤษฎีบท 5.2.10 (Darboux's Theorem) กำหนดให้ฟังก์ชัน $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ สามารถหาอนุพันธ์ได้และให้ $k \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $f'(a) < k < f'(b)$ หรือ $f'(a) > k > f'(b)$ แล้ว จะมี $c \in (a,b)$ ซึ่ง $f'(c) = k$

การพิสูจน์ [ไม่ออก]

5.3 กฎของโลปิตาล (L'Hospital's Rule)

ทฤษฎีบท 5.3.1 (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมโคชี (Cauchy Mean Value Theorem))

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และมีอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a,b) แล้ว จะมี $c \in (a,b)$ ซึ่ง

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(c) = \big(g(b)-g(a)\big)f'(c)$$

การพิสูจน์

กำหนดให้

$$h'(c) = (f(b)-f(a))\, g'(c) - (g(b)-g(a))\, f'(c)$$

$$h(x) = \big(f(b)-f(a)\big)g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)f(x)$$

สำหรับทุก ๆ $x \in [a,b]$ $h'(c)$

ดังนั้น h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และมีอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a,b) นอกเหนือจากนี้

$$\begin{aligned} h(a) &= \big(f(b)-f(a)\big)g(a) - \big(g(b)-g(a)\big)f(a) \\ &= f(b)g(a) - g(b)f(a) \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} h(b) &= \big(f(b)-f(a)\big)g(b) - \big(g(b)-g(a)\big)f(b) \\ &= f(b)g(a) - g(b)f(a) \end{aligned}$$

$$0 \to h'(c) = \frac{h(b)-h(a)}{b-a}$$

ดังนั้น $h(a) = h(b)$

จาก ทฤษฎีบท Mean Value Theorem จะได้ว่า จะมี $c \in (a,b)$ ซึ่ง $h'(c) = 0$ นั่นคือ

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(c) - \big(g(b)-g(a)\big)f'(c) = 0$$

ดังนั้น

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(c) = \big(g(b)-g(a)\big)f'(c)$$

□

นก.103

ทฤษฎีบท 5.3.2 (กฎของโลปิตาล (L'Hospital's Rule)) กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และมีอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a, b) ให้ $c \in (a, b)$ และ $f(c) = g(c) = 0$ สมมติให้ มี $\delta > 0$ ซึ่ง $g'(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in U$ โดยที่ $U = (a, b) \cap (c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$

ถ้า

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$$

แล้ว

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง $x_n \in U$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ และ $\lim_{n \to \infty} x_n = c$ จากทฤษฎีบท 5.3.1 จะได้ว่า จะมี c_n ซึ่งอยู่ระหว่าง x_n กับ c สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ และ

$$\big(f(x_n) - f(c)\big) g'(c_n) = \big(g(x_n) - g(c)\big) f'(c_n)$$

ต่อไปจะแสดงว่า $g(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in U$

สมมติให้ $g(x_0) = 0$ สำหรับบาง $x_0 \in U$ จากทฤษฎีบท 5.2.4 จะได้ว่า จะมี $z \in U$ ซึ่ง $g'(z) = \frac{g(x_0) - g(c)}{x_0 - c} = 0$ ซึ่งได้นำไปสู่ข้อขัดแย้ง เนื่องจาก $f(c) = g(c) = 0$ จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(c)}{g(x_n) - g(c)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\lim_{n \to \infty} c_n = c$

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim_{n \to \infty} x_n = c$ จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $|x_n - c| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geq N$ เนื่องจาก c_n อยู่ระหว่าง x_n กับ c สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ สามารถอธิบายได้ว่า

$$|c_n - c| < |x_n - c| < \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ จากสมมติฐาน $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ จากทฤษฎีบท 4.1.5 จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = L$$

เนื่องจาก $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$ จะได้ว่า $\lim_{x\to c}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$ และจากทฤษฎีบท 4.1.5 สามารถสรุปได้ว่า $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = L$

$\square$

ตัวอย่าง 5.3.3 กำหนดให้ $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ และ $g(x) = x - 1$

จงคำนวณค่าของ $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}$

วิธีทำ จาก $f(1) = 0 = g(1)$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{4x - 3}{1} = 1$$

ทฤษฎีบท 5.3.4 (กฎของโลปิตาล 2 (L'Hospital's Rule II))

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน (b, ∞) ให้

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

และ $g'(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (b, \infty)$

ถ้า

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$$

แล้ว

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

การพิสูจน์ **ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด** $\square$