作者：邱笑晨

本文是针对MSCKF2.0中的INS误差方程的详细推导。结论适用于任何采用**低成本IMU器件**的EKF估计。其中，采用了Hamilton Notation四元数，而非原始论文中的JPL（文中称Shuster Notation）。**如果仔细阅读并推导完本文，将对四元数误差方程有深入了解。**~~相关内容已发表paper，抄袭需谨慎~~。

1. 四元数notation拨乱反正

注意到，MSCKF这个派别的VIO使用的四元数体系采用的是Shuster Notation（包括MARS Lab的OC-KF流派以及Mingyang Li的MSCKF2.0），传统的四元数体系为Hamilton Notation，这两者的根本区别在于，HN的理论基于$\mathbf{ij}=\mathbf{k}$，而SN基于$\mathbf{ij}=-\mathbf{k}$。针对这两种Notation的争议，Hannes在其paper[1]中进行了详细的分析。部分结论包括：

- 无论是HN还是SN，其旋转四元数的定义一般均采用

$$\mathbf{q}=\cos\frac{\theta}{2}+\mathbf{u}^R\cdot\sin\frac{\theta}{2} \tag{1}$$

  其中$\mathbf{u}^R$表示参考系R下的某个单位矢量。
  上式表示，如果我们想要从Axis-Angle来构造四元数，应当将旋转轴放在参考系R下描述。一般会选择水平地理导航系n或世界坐标系w来作为参考系。

- (1)式定义的旋转四元数$\mathbf{q}$，描述的是"将坐标系R旋转成为新的坐标系b"，一般可写作${}_R^b\mathbf{q}$，于是有一部分人理解的旋转四元数与方向余弦阵的映射，为$C_S\left({}_R^b\mathbf{q}\right)=\mathbf{R}_R^b$（$\mathbf{R}_R^b$的意义表示可由矢量在$R$系下的坐标计算得到矢量在$b$下的坐标，即$\mathbf{v}^b=\mathbf{R}_R^b\cdot\mathbf{v}^R$）。
  我们希望当两个旋转四元数进行了乘法运算之后，对应的方向余弦阵就是原先两个旋转四元数对应方向余弦阵按照相同顺序进行乘法的结果（即维持了链式法则的顺序），称这样的旋转四元数到方向余弦阵的映射是一个homomorphy的映射。下面我们分析在Hamilton Notation四元数体系下，前面定义的$C_S\left(\bullet\right)$是否是homomorphy的。
  设

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}&={}_1^2\mathbf{q}\\ \mathbf{P}&={}_0^1\mathbf{q}\end{aligned} \tag{2}$$

  根据前述旋转四元数到方向余弦阵的映射$C_S\left(\bullet\right)$，有

$$\begin{aligned}C_S\left(\mathbf{Q}\right)&=\mathbf{R}_1^2\\ C_S\left(\mathbf{P}\right)&=\mathbf{R}_0^1\end{aligned} \tag{3}$$

  同时，根据旋转四元数自然的定义，有

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}\otimes\mathbf{r}^2\otimes\mathbf{Q}^{-1}&=\mathbf{r}^1\\ \mathbf{P}\otimes\mathbf{r}^1\otimes\mathbf{P}^{-1}&=\mathbf{r}^0\end{aligned} \tag{4}$$

  其中⊗符号表示四元数与四元数的乘法，在这里的具体过程为先将三维矢量转换成实部为0的四元数，再进行四元数乘法。由(4)式可推得

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\otimes\mathbf{Q}\otimes\mathbf{r}^2\otimes\mathbf{Q}^{-1}\otimes\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{r}^0\\ &\Rightarrow\left(\mathbf{P}\otimes\mathbf{Q}\right)\otimes\mathbf{r}^2\otimes\left(\mathbf{P}\otimes\mathbf{Q}\right)^{-1}=\mathbf{r}^0\end{aligned}$$

  再次参考旋转四元数的自然定义，可得

$$\mathbf{P}\otimes\mathbf{Q}={}_0^2\mathbf{q}$$

  代入映射$C_S\left(\bullet\right)$中，有

$$C_S(\mathbf{P}\otimes\mathbf{Q}) = C_S\left({}_0^2\mathbf{q}\right) = \mathbf{R}_0^2$$

这时我们发现，$C_S(\mathbf{P}\otimes\mathbf{Q}) \neq C_S(\mathbf{P})\cdot C_S(\mathbf{Q})$，而是$C_S(\mathbf{P}\otimes\mathbf{Q}) = C_S(\mathbf{Q})\cdot C_S(\mathbf{P})$，也就是说在采用四元数的Hamilton Notation时，映射$C_S(\bullet)$不是homomorphy的。
Shuster这个人为了得到形如$C_S(\mathbf{P}\otimes\mathbf{Q}) = C_S(\mathbf{P})\cdot C_S(\mathbf{Q})$的homomorphy形式，改变了四元数基本的虚部乘法规则，一举创立了“邪教”Shuster Notation，为如今的四元数notation混乱埋下了祸根。

- 事实上，只要我们按照Rodrigues Rotation Formula来定义旋转四元数到方向余弦阵（或旋转矩阵Rotation Matrix）的映射，就可以直接得到HN四元数体系下所谓homomorphy的形式，即

$$C_H\left({}_R^b\mathbf{q}\right) = \mathbf{R}_b^R \tag{5}$$

这即是秦永元《惯性导航》一书中的做法，也是Hannes的paper中所提倡的映射关系。
下面我们来分析为何这样的映射$C_H(\bullet)$就是homomorphy的。
仍然采用式(2)的假设，此时根据式(5)给出的映射有

$$\begin{aligned} C_H(\mathbf{Q}) &= \mathbf{R}_2^1 \\ C_H(\mathbf{P}) &= \mathbf{R}_1^0 \end{aligned}$$

同时，由于仍然采用HN四元数体系，式(1.4)的特性仍然得到保留。此时仍然有

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\otimes\mathbf{Q}\otimes\mathbf{r}^2\otimes\mathbf{Q}^{-1}\otimes\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{r}^0 \\ &\Rightarrow (\mathbf{P}\otimes\mathbf{Q})\otimes\mathbf{r}^2\otimes(\mathbf{P}\otimes\mathbf{Q})^{-1} = \mathbf{r}^0 \\ &\Rightarrow \mathbf{P}\otimes\mathbf{Q} = {}_0^2\mathbf{q} \end{aligned}$$

但注意到此时有

$$C_H(\mathbf{P}\otimes\mathbf{Q}) = C_H\left({}_0^2\mathbf{q}\right) = \mathbf{R}_2^0$$

可以发现，映射$C_H(\bullet)$具有homomorphy的形式，即

$$\begin{aligned} &C_H(\mathbf{P}\otimes\mathbf{Q}) = C_H\left({}_0^2\mathbf{q}\right) = \mathbf{R}_2^0 \\ &= \mathbf{R}_1^0\cdot\mathbf{R}_2^1 = C_H\left({}_0^1\mathbf{q}\right)\cdot C_H\left({}_1^2\mathbf{q}\right) = C_H(\mathbf{P})\cdot C_H(\mathbf{Q}) \end{aligned}$$

根据上述的分析，我发现只要完全按照秦永元的书中的叙述来分析姿态，就完全够用了。该书中定义的旋转四元数采用HN体系，其与方向余弦阵之间的映射采用Rodrigues Rotation Formula，即$C_H(\bullet)$形式。

2. INS误差状态微分方程

下面开始基于HN四元数体系重新推导MSCKF1.0中的INS误差状态的微分方程。

2.1 符号说明以及常用公式

2.1.1 姿态四元数及其与方向余弦阵的映射

这里的推导基于static world assumption[2]，即认为在载体运动范围内地球表面是一个平面，且不考虑地球自转，即可认为初始时刻的水平地理系（n）是一个惯性系，选择这个坐标系作为为世界坐标系（w）。
于是根据第1节中的符号规则，描述载体系（b）相对于世界系姿态的旋转四元数可表示为${}_w^b\mathbf{q}$。在进行INS误差状态分析时，为节省篇幅和简明符号，暂时以符号$\mathbf{q}$直接表示前述旋转四元数。
同时，定义旋转四元数到方向余弦阵的映射如式(5)，即

$$C(\mathbf{q}) = C_H\left({}_w^b\mathbf{q}\right) = \mathbf{R}_b^w \tag{6}$$

2.1.2 误差四元数

误差四元数由下式确定（与秦永元《惯性导航》书中一致）：

$$\mathbf{q}=\delta\mathbf{q}\otimes\hat{\mathbf{q}} \tag{7}$$

由上式可知，误差四元数为

$$\delta\mathbf{q}=\mathbf{q}\otimes\hat{\mathbf{q}}^{-1} \tag{8}$$

由于$\mathbf{q}$映射为$\mathbf{R}_b^w$，根据homomorphy性质，可知上式对应于

$$\mathbf{R}_{w'}^{w}=\mathbf{R}_b^w\cdot\left(\mathbf{R}_b^{w'}\right)^T \tag{9}$$

即，误差四元数$\delta\mathbf{q}$经过映射$C(\bullet)$得到的方向余弦阵为$\mathbf{R}_{w'}^{w}$，其中w'表示摄动世界坐标系（即存在误差的世界坐标系）。
参考式(1)，可得

$$\delta\mathbf{q}=\cos\frac{|\delta\boldsymbol{\theta}|}{2}+\frac{\delta\boldsymbol{\theta}^w}{|\delta\boldsymbol{\theta}|}\cdot\sin\frac{|\delta\boldsymbol{\theta}|}{2} \tag{10}$$

其中$\delta\boldsymbol{\theta}^w$表示$w$系下的误差角旋转矢量（称之为姿态误差角），其模值$|\delta\boldsymbol{\theta}|$表示误差四元数对应的旋转矢量旋转角度大小，其对应的单位向量$\delta\boldsymbol{\theta}^w/|\delta\boldsymbol{\theta}|$表示$w$系下的摄动旋转轴。
由于$|\delta\boldsymbol{\theta}|$往往是一个小角度，因此有一阶近似如下

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{q}&\approx 1+\tfrac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}^w\\&=1+\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}\mathbf{i}^w & \mathbf{j}^w & \mathbf{k}^w\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\theta_x\\ \delta\theta_y\\ \delta\theta_z\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{11}$$

2.1.3 $C(\bullet)$的具体形式及$\mathbf{R}_{w'}^{w}$

下面给出由旋转四元数$\mathbf{q}$到方向余弦矩阵$\mathbf{R}_b^w$的具体表达式，并由此给出$\mathbf{R}_{w'}^{w}$和$\mathbf{R}_{w}^{w'}$的近似表达式。这部分内容与秦永元的《惯性导航》一书中相关内容完全一致。
设表示b系相对于w系姿态的旋转四元数$\mathbf{q}$为

$$\mathbf{q}=q_0+q_1\mathbf{i}+q_2\mathbf{j}+q_3\mathbf{k} \tag{12}$$

则映射$C(\bullet)$的具体表达式为

$$\mathbf{R}_b^w=C(\mathbf{q})=\begin{bmatrix}q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2)\\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1)\\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2\end{bmatrix} \tag{13}$$

代入式(11)，并且忽略高阶小量（如$\delta\theta_x\delta\theta_y$等），则有

$$\mathbf{R}_{w'}^{w}\approx\begin{bmatrix}1 & -\delta\theta_z & \delta\theta_y\\ \delta\theta_z & 1 & -\delta\theta_x\\ -\delta\theta_y & \delta\theta_x & 1\end{bmatrix}=\mathbf{I}+[\delta\boldsymbol{\theta}^w\times] \tag{14}$$

其中$[\delta\boldsymbol{\theta}^w\times]$表示由三维向量$\delta\boldsymbol{\theta}^w$求反对称阵，具体的求法可由式(14)体会。
由式(14)可推得$\mathbf{R}_{w}^{w'}$的近似表达式如下

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{w}^{w'}&=\mathbf{R}_{w'}^{w\,T}\\&\approx\begin{bmatrix}1 & \delta\theta_z & -\delta\theta_y\\ -\delta\theta_z & 1 & \delta\theta_x\\ \delta\theta_y & -\delta\theta_x & 1\end{bmatrix}=\mathbf{I}-[\delta\boldsymbol{\theta}^w\times]\end{aligned} \tag{15}$$

2.1.4 陀螺和加计测量模型

在static world assumption下，且针对MEMS器件，陀螺仪无法敏感到地球自转角速度，重力加速度矢量方向恒定。则陀螺测量值为

$$\boldsymbol{\omega}_m^b = \boldsymbol{\omega}_{wb}^b + \mathbf{b}_g + \mathbf{n}_g \tag{16}$$

其中ω_{wb}^b为b系相对于w系的旋转角速度在b系下的投影；$\mathbf{b}_g$为b系下的陀螺bias；$\mathbf{n}_g$为陀螺测量白噪声。后文中为简化符号，在不特殊说明时一般省去右上标b，将陀螺测量记作$\boldsymbol{\omega}_m$。
加计测量模型为

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_m^b &= \mathbf{a}^b - \mathbf{R}_w^b \cdot \mathbf{g}^w + \mathbf{b}_a + \mathbf{n}_a \\ &= \mathbf{R}_w^b \cdot (\mathbf{a}^w - \mathbf{g}^w) + \mathbf{b}_a + \mathbf{n}_a \end{aligned} \tag{17}$$

其中$\mathbf{a}^b$和$\mathbf{a}^w$分别为载体实际加速度在b系下和w系下的投影；$\mathbf{R}_w^b$表示w系到b系的方向余弦阵；$\mathbf{g}^w$表示w系下的重力加速度矢量；$\mathbf{b}_a$为b系下的加计bias；$\mathbf{n}_a$为加计测量白噪声。后文中为简化符号，在不特殊说明时一般省去右上标b，将加计测量记作$\mathbf{f}_m$。
$\mathbf{b}_g$和$\mathbf{b}_a$满足随机游走（维基百科：random walk），即

$$\dot{\mathbf{b}}_g = \mathbf{n}_{wg} \tag{18}$$

$$\dot{\mathbf{b}}_a = \mathbf{n}_{wa} \tag{19}$$

2.1.5 其他误差状态定义

描述载体INS状态的变量包括姿态四元数$\mathbf{q}$、载体系下陀螺漂移$\mathbf{b}_g$、世界系下速度$\mathbf{v}^w$、载体系下加计漂移$\mathbf{b}_a$和世界系下位置$\mathbf{p}^w$。
姿态误差四元数不直接由矢量加减法定义，比较特殊，在2.1节中已经给出了其定义式（式(8)），这里再给出其他由矢量加减法定义的INS误差状态的定义式。

- 载体系陀螺bias误差

$$\delta\mathbf{b}_g = \mathbf{b}_g - \hat{\mathbf{b}}_g \tag{20}$$

  除非特殊说明，一般不写右上标b。
- 世界系速度误差

$$\delta\mathbf{v} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} \tag{21}$$

  除非特殊说明，一般不写右上标w。
- 载体系加计bias误差

$$\delta\mathbf{b}_a = \mathbf{b}_a - \hat{\mathbf{b}}_a \tag{22}$$

  除非特殊说明，一般不写右上标b。
- 世界系位置误差

$$\delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}} \tag{23}$$

  除非特殊说明，一般不写右上标w。

2.2 姿态误差角$\delta\boldsymbol{\theta}$微分方程

姿态误差角即(11)中的$\delta\boldsymbol{\theta}^w$，后文中为保持符号简洁，省去标识坐标系的右上标，即记作$\delta\boldsymbol{\theta}$。
关于姿态的误差方程中，一般习惯用姿态误差角的微分方程，而非采用误差四元数微分方程。但在推导姿态误差角微分方程时，需要先推导误差四元数的微分方程。

2.2.1 $\delta\mathbf{q}$的微分方程

根据秦永元《惯性导航》（第一版P299式(9.2.48)），姿态四元数$\mathbf{q}$的微分方程为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\left(\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}\right)\mathbf{q} \\ &= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}{}^{T} \\ \boldsymbol{\omega}_{wb}^{b} & -\left[\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}\times\right]\end{bmatrix}\mathbf{q} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{q}\otimes\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}\end{aligned} \tag{24}$$

类似的，有姿态四元数估计值$\hat{\mathbf{q}}$的微分方程如下

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{q}}} &= \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\left(\boldsymbol{\omega}_{m}-\hat{\mathbf{b}}_{g}\right)\hat{\mathbf{q}} \\ &= \tfrac{1}{2}\hat{\mathbf{q}}\otimes\left(\boldsymbol{\omega}_{m}-\hat{\mathbf{b}}_{g}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\hat{\mathbf{q}}\otimes\hat{\boldsymbol{\omega}}_{wb}^{b}\end{aligned} \tag{25}$$

于是可得误差四元数$\delta\mathbf{q}$的微分方程如下

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathbf{q}} &= \dot{\mathbf{q}}\otimes\hat{\mathbf{q}}^{-1}+\mathbf{q}\otimes\dot{\hat{\mathbf{q}}}^{-1} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{q}\otimes\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}\otimes\hat{\mathbf{q}}^{-1}+\tfrac{1}{2}\mathbf{q}\otimes\left(\hat{\mathbf{q}}\otimes\hat{\boldsymbol{\omega}}_{wb}^{b}\right)^{-1} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{q}\otimes\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}\otimes\hat{\mathbf{q}}^{-1}+\tfrac{1}{2}\mathbf{q}\otimes\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{wb}^{b}\right)^{-1}\otimes\hat{\mathbf{q}}^{-1} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{q}\otimes\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}\otimes\hat{\mathbf{q}}^{-1}-\tfrac{1}{2}\mathbf{q}\otimes\hat{\boldsymbol{\omega}}_{wb}^{b}\otimes\hat{\mathbf{q}}^{-1} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{q}\otimes\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}\otimes\hat{\mathbf{q}}^{-1}-\tfrac{1}{2}\mathbf{q}\otimes\left(\boldsymbol{\omega}_{wb}^{b}+\mathbf{b}_{g}-\hat{\mathbf{b}}_{g}+\mathbf{n}_{g}\right)\otimes\hat{\mathbf{q}}^{-1} \\ &= -\tfrac{1}{2}\mathbf{q}\otimes\left(\delta\mathbf{b}_{g}+\mathbf{n}_{g}\right)\otimes\hat{\mathbf{q}}^{-1} \\ &= -\tfrac{1}{2}\mathbf{q}\otimes\hat{\mathbf{q}}^{-1}\otimes\hat{\mathbf{q}}\otimes\left(\delta\mathbf{b}_{g}+\mathbf{n}_{g}\right)\otimes\hat{\mathbf{q}}^{-1} \\ &= -\tfrac{1}{2}\delta\mathbf{q}\otimes\left[\mathbf{R}_{b}^{w'}\cdot\left(\delta\mathbf{b}_{g}+\mathbf{n}_{g}\right)\right]\end{aligned} \tag{26}$$

式中利用了“单位四元数的逆（共轭）与求导可交换次序”的性质，利用了“实部为0的四元数的逆（共轭）为该四元数取负”，并依次代入了式(24)、式(25)、式(16)和式(20)等。

2.2.2 $\delta\boldsymbol{\theta}$的微分方程

对式(11)两边同时关于时间t求偏导，有

$$\delta\dot{\mathbf{q}} = 0+\frac{1}{2}\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{27}$$

将式(11)和式(27)代入式(26)，有

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} &= -\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}\right)\otimes\left[\mathbf{R}_{b}^{w'}\cdot\left(\delta\mathbf{b}_{g}+\mathbf{n}_{g}\right)\right] \\ \Rightarrow\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} &= -\mathbf{R}_{b}^{w'}\cdot\left(\delta\mathbf{b}_{g}+\mathbf{n}_{g}\right)-\tfrac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}\otimes\left[\mathbf{R}_{b}^{w'}\cdot\left(\delta\mathbf{b}_{g}+\mathbf{n}_{g}\right)\right]\end{aligned}$$

注意到$\delta\boldsymbol{\theta}\otimes\left[\mathbf{R}_{b}^{w'}\cdot\left(\delta\mathbf{b}_{g}+\mathbf{n}_{g}\right)\right]$为高阶小量，可以忽略，则有

$$\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{R}_{b}^{w'}\delta\mathbf{b}_{g}-\mathbf{R}_{b}^{w'}\mathbf{n}_{g} \tag{28}$$

2.3 陀螺bias误差$\delta\mathbf{b}_{g}$的微分方程

由于$\mathbf{b}_{g}$在进行估计时认为是缓变量，因此有

$$\dot{\hat{\mathbf{b}}}_g = \mathbf{0} \tag{29}$$

再根据式(18)，则有

$$\delta\dot{\mathbf{b}}_g = \dot{\mathbf{b}}_g - \dot{\hat{\mathbf{b}}}_g = \mathbf{n}_{wg} \tag{30}$$

2.4 载体速度误差$\delta\mathbf{v}$的微分方程

载体速度$\mathbf{v}$的微分方程为

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}^w = \mathbf{R}_b^w \cdot (\mathbf{f}_m - \mathbf{b}_a - \mathbf{n}_a) + \mathbf{g}^w \tag{31}$$

而其估计值$\hat{\mathbf{v}}$的微分方程为

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}} = \hat{\mathbf{a}}^w = \mathbf{R}_b^{w'} \cdot \left(\mathbf{f}_m - \hat{\mathbf{b}}_a\right) + \mathbf{g}^w \tag{32}$$

将式(31)与式(32)作差，则有$\delta\mathbf{v}$的微分方程为

$$\begin{aligned}
&\delta\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}} - \dot{\hat{\mathbf{v}}} \\
&= \mathbf{R}_b^w \cdot (\mathbf{f}_m - \mathbf{b}_a - \mathbf{n}_a) - \mathbf{R}_b^{w'} \cdot \left(\mathbf{f}_m - \hat{\mathbf{b}}_a\right) \\
&= \mathbf{R}_{w'}^w \cdot \mathbf{R}_b^{w'} \cdot \left(\mathbf{f}_m - \hat{\mathbf{b}}_a - \delta\mathbf{b}_a - \mathbf{n}_a\right) - \mathbf{R}_b^{w'} \cdot \left(\mathbf{f}_m - \hat{\mathbf{b}}_a\right)
\end{aligned}$$

将式(14)代入上式，有

$$\begin{aligned}
&\delta\dot{\mathbf{v}} = (\mathbf{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}\times]) \cdot \mathbf{R}_b^{w'} \cdot \left(\mathbf{f}_m - \hat{\mathbf{b}}_a - \delta\mathbf{b}_a - \mathbf{n}_a\right) - \mathbf{R}_b^{w'} \cdot \left(\mathbf{f}_m - \hat{\mathbf{b}}_a\right) \\
&= \mathbf{R}_b^{w'} \cdot \left(\mathbf{f}_m - \hat{\mathbf{b}}_a - \delta\mathbf{b}_a - \mathbf{n}_a\right) - \mathbf{R}_b^{w'} \cdot \left(\mathbf{f}_m - \hat{\mathbf{b}}_a\right) + [\delta\boldsymbol{\theta}\times] \cdot \mathbf{R}_b^{w'} \cdot (\hat{\mathbf{a}} - \delta\mathbf{b}_a - \mathbf{n}_a) \\
&= -\mathbf{R}_b^{w'} \cdot (\delta\mathbf{b}_a + \mathbf{n}_a) + [\delta\boldsymbol{\theta}\times] \cdot \mathbf{R}_b^{w'} \cdot \hat{\mathbf{a}} - [\delta\boldsymbol{\theta}\times] \cdot \mathbf{R}_b^{w'} \cdot (\delta\mathbf{b}_a + \mathbf{n}_a)
\end{aligned}$$

注意到$[\delta\boldsymbol{\theta}\times] \cdot \mathbf{R}_b^{w'} \cdot (\delta\mathbf{b}_a + \mathbf{n}_a)$是高阶小量，可忽略不计，则有

$$\begin{aligned}
\delta\dot{\mathbf{v}} &\approx -\mathbf{R}_b^{w'} \cdot (\delta\mathbf{b}_a + \mathbf{n}_a) + [\delta\boldsymbol{\theta}\times] \cdot \mathbf{R}_b^{w'} \cdot \hat{\mathbf{a}} \\
&= -\left[\left(\mathbf{R}_b^{w'} \cdot \hat{\mathbf{a}}\right)\times\right] \cdot \delta\boldsymbol{\theta} - \mathbf{R}_b^{w'} \cdot \delta\mathbf{b}_a - \mathbf{R}_b^{w'} \cdot \mathbf{n}_a
\end{aligned} \tag{33}$$

2.5 加计bias误差$\delta\mathbf{b}_a$的微分方程

由于$\mathbf{b}_a$在进行估计时认为是缓变量，因此有

$$\dot{\hat{\mathbf{b}}}_a = \mathbf{0} \tag{34}$$

再根据式(19)，则有

$$\delta\dot{\mathbf{b}}_a = \dot{\mathbf{b}}_a - \dot{\hat{\mathbf{b}}}_a = \mathbf{n}_{wa} \tag{35}$$

2.6 载体位置误差$\delta\mathbf{p}$的微分方程

载体位置$\mathbf{p}$的微分方程为

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \tag{36}$$

而其估计值$\hat{\mathbf{p}}$的微分方程为

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = \hat{\mathbf{v}} \tag{37}$$

将式(36)与式(37)作差，则有$\delta\mathbf{p}$的微分方程为

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{\mathbf{p}} &= \dot{\mathbf{p}} - \dot{\hat{\mathbf{p}}} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} \\
&= \delta\mathbf{v}
\end{aligned} \tag{38}
$$

2.7 INS误差状态的微分方程

综合式(28)、(30)、(33)、(35)和(38)，有

$$
\begin{cases}
\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{R}_b^{w'} \cdot \delta\mathbf{b}_g - \mathbf{R}_b^{w'} \cdot \mathbf{n}_g \\
\delta\dot{\mathbf{v}} = -\left[\left(\mathbf{R}_b^{w'} \cdot \hat{\mathbf{a}}\right) \times\right] \cdot \delta\boldsymbol{\theta} - \mathbf{R}_b^{w'} \cdot \delta\mathbf{b}_a - \mathbf{R}_b^{w'} \cdot \mathbf{n}_a \\
\delta\dot{\mathbf{p}} = \delta\mathbf{v} \\
\delta\dot{\mathbf{b}}_g = \mathbf{n}_{wg} \\
\delta\dot{\mathbf{b}}_a = \mathbf{n}_{wa}
\end{cases} \tag{39}
$$

令

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{x}_{INS} &= \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\theta}^T & \delta\mathbf{v}^T & \delta\mathbf{p}^T & \delta\mathbf{b}_g^T & \delta\mathbf{b}_a^T \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{n}_{INS} &= \begin{bmatrix} \mathbf{n}_g^T & \mathbf{n}_a^T & \mathbf{n}_{wg}^T & \mathbf{n}_{wa}^T \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{40}
$$

则有$\delta\mathbf{x}_{INS}$的微分方程为

$$
\delta\dot{\mathbf{x}}_{INS} = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{x}_{INS} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}_{INS} \tag{41}
$$

其中两个系数矩阵分别为

$$
\mathbf{F} = \begin{bmatrix}
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & -\mathbf{R}_b^{w'} & \mathbf{0}_{3\times3} \\
-\left[\left(\mathbf{R}_b^{w'} \cdot \hat{\mathbf{a}}\right) \times\right] & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & -\mathbf{R}_b^{w'} \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3}
\end{bmatrix} \tag{42}
$$

$$
\mathbf{G} = \begin{bmatrix}
-\mathbf{R}_b^{w'} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\
\mathbf{0}_{3\times3} & -\mathbf{R}_b^{w'} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} \\
\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{I}_{3\times3}
\end{bmatrix} \tag{43}
$$

3. INS误差状态转移方程

3.1 概述

式(41)给出了INS误差状态的微分方程，但要运用到EKF中时，需要使用状态递推方程，一种做法是对微分方程进行离散化[3]，Kumar Robotics的开源方案msckf_vio采用的就是这种方式，但李明扬在MSCKF2.0中提出了一种新的状态转移阵推导思路。
在求取状态转移方程时，参考MSCKF2.0中的方法，采用欧拉积分进行积分近似。因此当推导$l+1$时刻的状态关于l时刻状态的转移阵时，应当从l时刻状态的微分方程着手。

3.2 符号简化

为了节约篇幅，进行一些符号简化。但在必要时，会重新采用其完全表达式进行论述。

在式(6)中，描述了$\mathbf{q}$到$\mathbf{R}_b^w$的映射，但这一节我们将从其转置$\mathbf{R}_w^b$入手，并且进行符号简化，记$\mathbf{R}=\mathbf{R}_w^b$以及$\hat{\mathbf{R}}=\mathbf{R}_{w'}^b$。此外，还对角速度$\boldsymbol{\omega}_{wb}^b$进行符号简化，记$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_{wb}^b$。对INS误差状态进行简化，记$\delta\mathbf{x}=\delta\mathbf{x}_{INS}$。
参照秦永元《惯性导航》第1版P238页式(8.1.19)和式(8.1.20)，有

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}}_w^b &= -\left[\boldsymbol{\omega}_{wb}^b\times\right]\cdot\mathbf{R}_w^b \\ \dot{\mathbf{R}}_{w'}^b &= -\left[\hat{\boldsymbol{\omega}}_{wb}^b\times\right]\cdot\mathbf{R}_{w'}^b\end{aligned}$$

其中$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{wb}^b=\boldsymbol{\omega}_m-\hat{\mathbf{b}}_g=\boldsymbol{\omega}_{wb}^b+\mathbf{b}_g+\mathbf{n}_g-\hat{\mathbf{b}}_g=\boldsymbol{\omega}_{wb}^b+\delta\mathbf{b}_g+\mathbf{n}_g$。
根据前述的符号简化，则有

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}} &= -\left[\boldsymbol{\omega}\times\right]\cdot\mathbf{R} \\ \dot{\hat{\mathbf{R}}} &= -\left[\hat{\boldsymbol{\omega}}\times\right]\cdot\hat{\mathbf{R}}\end{aligned} \tag{44}$$

根据式(9)有

$$\mathbf{R}_w^b=\mathbf{R}_{w'}^b\cdot\mathbf{R}_w^{w'}$$

再根据式(15)，则有

$$\mathbf{R}=\hat{\mathbf{R}}\cdot(\mathbf{I}-[\delta\boldsymbol{\theta}\times]) \tag{45}$$

考虑上一步EKF完成了测量更新，即已经使用t_l时刻的测量对t_l时刻的INS状态进行了测量更新，因此记$\hat{\mathbf{R}}\Rightarrow\hat{\mathbf{R}}_{l|l}$、$\delta\boldsymbol{\theta}\Rightarrow\delta\boldsymbol{\theta}_{l|l}$，则式$(45)$可写作

$$\mathbf{R}_{l|l}=\hat{\mathbf{R}}_{l|l}\cdot\left(\mathbf{I}-\left[\delta\boldsymbol{\theta}_{l|l}\times\right]\right) \tag{46}$$

3.3 $\delta\boldsymbol{\theta}_{l+1|l}$的状态转移方程

对式(46)等式两边同时求微分，有

$$\dot{\mathbf{R}}_{l|l}=\dot{\hat{\mathbf{R}}}_{l|l}-\dot{\hat{\mathbf{R}}}_{l|l}\cdot\left[\delta\boldsymbol{\theta}_{l|l}\times\right]-\hat{\mathbf{R}}_{l|l}\cdot\left[\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}_{l|l}\times\right] \tag{47}$$

将式(44)代入上式，有

$$-\left[\boldsymbol{\omega}_l\times\right]\cdot\mathbf{R}_{l|l}=-\left[\hat{\boldsymbol{\omega}}_l\times\right]\cdot\hat{\mathbf{R}}_{l|l}+\left[\hat{\boldsymbol{\omega}}_l\times\right]\cdot\hat{\mathbf{R}}_{l|l}\cdot\left[\delta\boldsymbol{\theta}_{l|l}\times\right]-\hat{\mathbf{R}}_{l|l}\cdot\left[\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}_{l|l}\times\right] \tag{48}$$

根据式(25)，可定义

$$\delta\boldsymbol{\omega}_l=\boldsymbol{\omega}_l-\hat{\boldsymbol{\omega}}_l=-\left(\delta\mathbf{b}_g+\mathbf{n}_g\right) \tag{49}$$

将式(46)和式(49)代入式(48)，有其左边为

$$\begin{aligned}leftside &= -\left([\hat{\boldsymbol{\omega}}_l\times]+[\delta\boldsymbol{\omega}_l\times]\right)\cdot\hat{\mathbf{R}}_{l|l}\cdot\left(\mathbf{I}-\left[\delta\boldsymbol{\theta}_{l|l}\times\right]\right) \\ &= -\left[\hat{\boldsymbol{\omega}}_l\times\right]\cdot\hat{\mathbf{R}}_{l|l}+\left[\hat{\boldsymbol{\omega}}_l\times\right]\cdot\hat{\mathbf{R}}_{l|l}\cdot\left[\delta\boldsymbol{\theta}_{l|l}\times\right]-\left[\delta\boldsymbol{\omega}_l\times\right]\cdot\hat{\mathbf{R}}_{l|l}+\left[\delta\boldsymbol{\omega}_l\times\right]\cdot\hat{\mathbf{R}}_{l|l}\cdot\left[\delta\boldsymbol{\theta}_{l|l}\times\right]\end{aligned}$$

忽略高阶无穷小量$[\delta\boldsymbol{\omega}_l\times]\cdot\hat{\mathbf{R}}_{l|l}\cdot\left[\delta\boldsymbol{\theta}_{l|l}\times\right]$，并和式$(48)$右边合并同类项，有

$$\hat{\mathbf{R}}_{l|l}\cdot\left[\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}_{l|l}\times\right]=\left[\delta\boldsymbol{\omega}_l\times\right]\cdot\hat{\mathbf{R}}_{l|l} \tag{50}$$

这里先介绍一个关于反对称阵的运算法则：设$\mathbf{v}$为三维矢量，$\mathbf{R}$为正交矩阵（它可以是一个方向余弦矩阵），则有

$$[\mathbf{v}\times]\cdot\mathbf{R}=\mathbf{R}\cdot\left[\left(\mathbf{R}^T\mathbf{v}\right)\times\right] \tag{51}$$

对式(50)等号右边应用式(51)的性质，则有

$$\hat{\mathbf{R}}_{l|l}\cdot\left[\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}_{l|l}\times\right]=\hat{\mathbf{R}}_{l|l}\cdot\left[\left(\hat{\mathbf{R}}_{l|l}^{T}\delta\boldsymbol{\omega}_{l}\right)\times\right] \tag{52}$$

式(52)两边同时左乘$\hat{\mathbf{R}}_{l|l}^{T}$，同时考虑到$[\bullet\times]$是一个线性算子（参见式(14)），则有

$$\delta\dot{\boldsymbol{\theta}}_{l|l}=\hat{\mathbf{R}}_{l|l}^{T}\delta\boldsymbol{\omega}_{l} \tag{53}$$

由于在式(53)中，$\delta\boldsymbol{\theta}_{l|l}$的微分与$\delta\boldsymbol{\theta}_{l|l}$无关，因此可知状态转移矩阵中$\delta\boldsymbol{\theta}_{l+1|l}$关于$\delta\boldsymbol{\theta}_{l|l}$的部分为单位阵，即

$$\boldsymbol{\Phi}_{qq}\left(\delta\mathbf{x}_{l+1|l},\delta\mathbf{x}_{l|l}\right)=\mathbf{I}_{3\times 3} \tag{54}$$

参照秦永元《卡尔曼滤波与组合导航原理》第2版P58页相关内容，有

$$\delta\boldsymbol{\theta}_{l+1|l}=\delta\boldsymbol{\theta}_{l|l}+\int_{t_l}^{t_{l+1}}\hat{\mathbf{R}}_{\tau|l}^{T}\delta\boldsymbol{\omega}_{\tau|l}d\tau \tag{55}$$

由于$\hat{\mathbf{R}}_{\tau|l}^{T}={}_{b_\tau}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{\tau|l}={}_{b_l}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{l|l}\cdot{}_{b_\tau}^{b_l}\hat{\mathbf{R}}_{\tau|l}$，则式(55)可变形为

$$\delta\boldsymbol{\theta}_{l+1|l}=\delta\boldsymbol{\theta}_{l|l}+{}_{b_l}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{l|l}\int_{t_l}^{t_{l+1}}{}_{b_\tau}^{b_l}\hat{\mathbf{R}}_{\tau|l}\delta\boldsymbol{\omega}_{\tau|l}d\tau \tag{56}$$

记

$$\boldsymbol{\Delta}=-\int_{t_l}^{t_{l+1}}{}_{b_\tau}^{b_l}\hat{\mathbf{R}}_{\tau|l}\delta\boldsymbol{\omega}_{\tau|l}d\tau$$

根据式(49)，有

$$\boldsymbol{\Delta}=\int_{t_l}^{t_{l+1}}{}_{b_\tau}^{b_l}\hat{\mathbf{R}}_{\tau|l}\cdot\left(\delta\mathbf{b}_{g_{\tau|l}}+\mathbf{n}_{g\tau}\right)d\tau \tag{57}$$

在t_{l+1}与t_l时刻之间，对于$\mathbf{b}_g$的估计值$\hat{\mathbf{b}}_{g\tau|l}$，由于没有测量值，因此无法进行测量更新，则有

$$\hat{\mathbf{b}}_{g\tau|l}=\hat{\mathbf{b}}_{gl|l} \tag{58}$$

而根据式(19)，对于真值，有

$$\mathbf{b}_{g\tau}=\mathbf{b}_{gl}+\int_{t_l}^{\tau}\mathbf{n}_{wgs}ds \tag{59}$$

根据式(58)和式(59)有

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{b}_{g\tau|l}&=\mathbf{b}_{g\tau}-\hat{\mathbf{b}}_{g\tau|l}\\&=\mathbf{b}_{gl}+\textstyle\int_{t_l}^{\tau}\mathbf{n}_{wgs}ds-\hat{\mathbf{b}}_{gl|l}\\&=\delta\mathbf{b}_{gl|l}+\textstyle\int_{t_l}^{\tau}\mathbf{n}_{wgs}ds\end{aligned} \tag{60}$$

将上式代回式(57)，则有

$$\boldsymbol{\Delta}=\int_{t_l}^{t_{l+1}}{}_{b_\tau}^{b_l}\hat{\mathbf{R}}_{\tau|l}\cdot\left(\delta\mathbf{b}_{gl|l}+\int_{t_l}^{\tau}\mathbf{n}_{wgs}ds+\mathbf{n}_{g\tau}\right)d\tau \tag{61}$$

再将式(61)代回式(56)，则有

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\theta}_{l+1|l}&=\delta\boldsymbol{\theta}_{l|l}-{}_{b_l}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{l|l}\textstyle\int_{t_l}^{t_{l+1}}{}_{b_\tau}^{b_l}\hat{\mathbf{R}}_{\tau|l}\cdot\left(\delta\mathbf{b}_{gl|l}+\int_{t_l}^{\tau}\mathbf{n}_{wgs}ds+\mathbf{n}_{g\tau}\right)d\tau\\&=\delta\boldsymbol{\theta}_{l|l}-\left[{}_{b_l}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{l|l}\textstyle\int_{t_l}^{t_{l+1}}{}_{b_\tau}^{b_l}\hat{\mathbf{R}}_{\tau|l}d\tau\right]\cdot\delta\mathbf{b}_{gl|l}+{}_{b_l}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{l|l}\textstyle\int_{t_l}^{t_{l+1}}{}_{b_\tau}^{b_l}\hat{\mathbf{R}}_{\tau|l}\cdot\left(\int_{t_l}^{\tau}\mathbf{n}_{wgs}ds+\mathbf{n}_{g\tau}\right)d\tau\end{aligned} \tag{62}$$

将上式写成状态转移方程的形式如下

$$\delta\boldsymbol{\theta}_{l+1|l}=\boldsymbol{\Phi}_{qq}\left(l+1,l\right)\cdot\delta\boldsymbol{\theta}_{l|l}+\boldsymbol{\Phi}_{qb_g}\left(l+1,l\right)\cdot\delta\mathbf{b}_{gl|l}+\mathbf{n}_{\theta l+1} \tag{63}$$

其中

$$\mathbf{\Phi}_{qq}\left(l+1,l\right)=\mathbf{I}_{3\times3} \tag{64}$$

$$\mathbf{\Phi}_{qb_g}\left(l+1,l\right)=-{}_{b_l}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{l|l}\int_{t_l}^{t_{l+1}}{}_{b_\tau}^{b_l}\hat{\mathbf{R}}_{\tau|l}d\tau \tag{65}$$

$$\mathbf{n}_{\theta l+1}={}_{b_l}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{l|l}\int_{t_l}^{t_{l+1}}{}_{b_\tau}^{b_l}\hat{\mathbf{R}}_{\tau|l}\cdot\left(\int_{t_l}^{\tau}\mathbf{n}_{wgs}ds+\mathbf{n}_{g\tau}\right)d\tau \tag{66}$$

3.4 $\delta\mathbf{b}_{gl+1|l}$的状态转移方程

根据3.2节中的式(60)，可得$\delta\mathbf{b}_{gl+1|l}$的状态转移方程如下

$$\delta\mathbf{b}_{gl+1|l}=\delta\mathbf{b}_{gl|l}+\int_{t_l}^{t_{l+1}}\mathbf{n}_{wg\tau}d\tau$$

其可写作

$$\delta\mathbf{b}_{gl+1|l}=\mathbf{\Phi}_{b_gb_g}\left(l+1,l\right)\cdot\delta\mathbf{b}_{gl|l}+\mathbf{n}_{b_gl+1} \tag{67}$$

其中

$$\mathbf{\Phi}_{b_gb_g}\left(l+1,l\right)=\mathbf{I}_{3\times3} \tag{68}$$

$$\mathbf{n}_{b_gl+1}=\int_{t_l}^{t_{l+1}}\mathbf{n}_{wg\tau}d\tau \tag{69}$$

3.5 $\delta\mathbf{v}_{l+1|l}$的状态转移方程

根据2.4节中的内容可知$\delta\mathbf{v}_{l+1|l}=\mathbf{v}_{l+1}-\hat{\mathbf{v}}_{l+1|l}$，其中

$$\mathbf{v}_{l+1}=\mathbf{v}_l+\int_{t_l}^{t_{l+1}}\mathbf{R}_{b_\tau}^{w}\cdot\mathbf{a}_\tau d\tau \tag{70}$$

式中$\mathbf{a}_\tau=\mathbf{f}_{m\tau}-\mathbf{b}_{a\tau}-\mathbf{n}_{a\tau}+\mathbf{g}^{b_\tau}$，则有

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{l+1}&=\mathbf{v}_l+\int_{t_l}^{t_{l+1}}\left[\mathbf{R}_{b_\tau}^{w}\cdot\mathbf{f}_{m\tau}+\mathbf{g}^{w}-\mathbf{R}_{b_\tau}^{w}\cdot\left(\mathbf{b}_{a\tau}+\mathbf{n}_{a\tau}\right)\right]d\tau\\&=\mathbf{v}_l+\int_{t_l}^{t_{l+1}}\mathbf{R}_{b_\tau}^{w}\cdot\left(\mathbf{f}_{m\tau}-\mathbf{b}_{a\tau}-\mathbf{n}_{a\tau}\right)d\tau+\Delta t\cdot\mathbf{g}^{w}\end{aligned} \tag{71}$$

其中$\Delta t=t_{l+1}-t_l$表示采样步长。
同理，有

$$\hat{\mathbf{v}}_{l+1|l}=\hat{\mathbf{v}}_{l|l}+\int_{t_l}^{t_{l+1}}\hat{\mathbf{R}}_{b_\tau}^{w}\cdot\left(\mathbf{f}_{m\tau}-\hat{\mathbf{b}}_{a\tau}\right)d\tau+\Delta t\cdot\mathbf{g}^{w} \tag{72}$$

分别在式(71)和式(72)中，令

$$\mathbf{s}_l=\int_{t_l}^{t_{l+1}}\mathbf{R}_{b_\tau}^{w}\cdot\left(\mathbf{f}_{m\tau}-\mathbf{b}_{a\tau}-\mathbf{n}_{a\tau}\right)d\tau \tag{73}$$

$$\hat{\mathbf{s}}_l=\int_{t_l}^{t_{l+1}}\hat{\mathbf{R}}_{b_\tau}^{w}\cdot\left(\mathbf{f}_{m\tau}-\hat{\mathbf{b}}_{a\tau}\right)d\tau \tag{74}$$

根据式(73)和(74)，定义误差$\delta\mathbf{s}_l$如下

$$\begin{aligned}&\delta\mathbf{s}_l=\mathbf{s}_l-\hat{\mathbf{s}}_l\\&=\int_{t_l}^{t_{l+1}}\mathbf{R}_{b_\tau}^{w}\cdot\left(\mathbf{f}_{m\tau}-\mathbf{b}_{a\tau}-\mathbf{n}_{a\tau}\right)d\tau-\int_{t_l}^{t_{l+1}}\hat{\mathbf{R}}_{b_\tau}^{w}\cdot\left(\mathbf{f}_{m\tau}-\hat{\mathbf{b}}_{a\tau}\right)d\tau\end{aligned} \tag{75}$$

根据式(9)和式(14)，有

$$\mathbf{R}_b^w=(\mathbf{I}+[\delta\boldsymbol{\theta}\times])\,\hat{\mathbf{R}}_b^w \tag{76}$$

代入式(75)，则有

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{s}_l&=\int_{t_l}^{t_{l+1}}\left(\mathbf{I}+\left[\delta\theta_{\tau|l}\times\right]\right)\cdot\hat{\mathbf{R}}_{b_\tau}^w\cdot(\mathbf{f}_{m\tau}-\mathbf{b}_{a\tau}-\mathbf{n}_{a\tau})\,d\tau-\int_{t_l}^{t_{l+1}}\hat{\mathbf{R}}_{b_\tau}^w\cdot\left(\mathbf{f}_{m\tau}-\hat{\mathbf{b}}_{a\tau}\right)d\tau\\&=\int_{t_l}^{t_{l+1}}\hat{\mathbf{R}}_{b_\tau}^w\cdot\left(\mathbf{f}_{m\tau}-\mathbf{b}_{a\tau}-\mathbf{n}_{a\tau}-\mathbf{f}_{m\tau}+\hat{\mathbf{b}}_{a\tau}\right)d\tau+\int_{t_l}^{t_{l+1}}\left[\delta\theta_{\tau|l}\times\right]\cdot\hat{\mathbf{R}}_{b_\tau}^w\cdot(\mathbf{f}_{m\tau}-\mathbf{b}_{a\tau}-\mathbf{n}_{a\tau})\,d\tau\\&=\int_{t_l}^{t_{l+1}}\hat{\mathbf{R}}_{b_\tau}^w\cdot(-\delta\mathbf{b}_{a\tau|l}-\mathbf{n}_{a\tau})\,d\tau+\int_{t_l}^{t_{l+1}}\left[\delta\theta_{\tau|l}\times\right]\cdot\hat{\mathbf{R}}_{b_\tau}^w\cdot\left(\mathbf{f}_{m\tau}-\hat{\mathbf{b}}_{a\tau|l}-\delta\mathbf{b}_{a\tau|l}-\mathbf{n}_{a\tau}\right)d\tau\end{aligned} \tag{77}$$

上式中，记

$$\delta\mathbf{s}_A=\int_{t_l}^{t_{l+1}}\hat{\mathbf{R}}_{b_\tau}^w\cdot(-\delta\mathbf{b}_{a\tau|l}-\mathbf{n}_{a\tau})\,d\tau \tag{78}$$

$$\delta\mathbf{s}_B=\int_{t_l}^{t_{l+1}}\left[\delta\theta_{\tau|l}\times\right]\cdot\hat{\mathbf{R}}_{b_\tau}^w\cdot\left(\mathbf{f}_{m\tau}-\hat{\mathbf{b}}_{a\tau|l}-\delta\mathbf{b}_{a\tau|l}-\mathbf{n}_{a\tau}\right)d\tau \tag{79}$$

即$\delta\mathbf{s}_l=\delta\mathbf{s}_A+\delta\mathbf{s}_B$，下面分别推导$\delta\mathbf{s}_A$和$\delta\mathbf{s}_B$。

- $\delta\mathbf{s}_A$：

  参考式(60)，有

$$\delta\mathbf{b}_{a\tau|l}=\delta\mathbf{b}_{al|l}+\int_{t_l}^{\tau}\mathbf{n}_{was}\,ds \tag{80}$$

  则有

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{s}_A&=\int_{t_l}^{t_{l+1}}\hat{\mathbf{R}}_{b_\tau}^w\cdot\left(-\delta\mathbf{b}_{al|l}-\int_{t_l}^{\tau}\mathbf{n}_{was}\,ds-\mathbf{n}_{a\tau}\right)d\tau\\&=-\int_{t_l}^{t_{l+1}}\hat{\mathbf{R}}_{b_\tau}^w\,d\tau\cdot\delta\mathbf{b}_{al|l}+\int_{t_l}^{t_{l+1}}\hat{\mathbf{R}}_{b_\tau}^w\cdot\left(-\int_{t_l}^{\tau}\mathbf{n}_{was}\,ds-\mathbf{n}_{a\tau}\right)d\tau\end{aligned} \tag{81}$$

  上式中，记

$$\mathbf{n}_{vl+1A}=\int_{t_l}^{t_{l+1}}\hat{\mathbf{R}}_{b_\tau}^w\cdot\left(-\int_{t_l}^{\tau}\mathbf{n}_{was}\,ds-\mathbf{n}_{a\tau}\right)d\tau \tag{82}$$

- $\delta\mathbf{s}_B$：

  首先，忽略高阶小量$\left[\delta\theta_{\tau|l}\times\right]\cdot\hat{\mathbf{R}}_{b_\tau}^w\cdot(-\delta\mathbf{b}_{a\tau|l}-\mathbf{n}_{a\tau})$，则有

$$\delta\mathbf{s}_B\approx\int_{t_l}^{t_{l+1}}\left[\delta\theta_{\tau|l}\times\right]\cdot\hat{\mathbf{R}}_{b_\tau}^w\cdot\left(\mathbf{f}_{m\tau}-\hat{\mathbf{b}}_{a\tau|l}\right)d\tau \tag{83}$$

  根据式(32)，有

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}_\tau=\hat{\mathbf{a}}_\tau^w=\hat{\mathbf{R}}_{b_\tau}^w\cdot\left(\mathbf{f}_{m\tau}-\hat{\mathbf{b}}_{a\tau|l}\right)+\mathbf{g}^w \tag{84}$$

  于是有

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{s}_B&=\int_{t_l}^{t_{l+1}}\left[\delta\boldsymbol{\theta}_{\tau|l}\times\right]\cdot\left(\dot{\hat{\mathbf{v}}}_\tau-\mathbf{g}^w\right)d\tau\\&=-\int_{t_l}^{t_{l+1}}\left[\left(\dot{\hat{\mathbf{v}}}_\tau-\mathbf{g}^w\right)\times\right]\cdot\delta\boldsymbol{\theta}_{\tau|l}\,d\tau\end{aligned} \tag{85}$$

  再根据式(62)，则有

$$
\begin{aligned}
\delta \mathbf{s}_B = & -\int_{t_l}^{t_{l+1}} \left[\left(\dot{\hat{\mathbf{v}}}_\tau - \mathbf{g}^w\right)\times\right] d\tau \cdot \delta \boldsymbol{\theta}_{l|l} \\
& + \int_{t_l}^{t_{l+1}} \left\{\left[\left(\dot{\hat{\mathbf{v}}}_\tau - \mathbf{g}^w\right)\times\right] \cdot {}_{b_l}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{l|l} \cdot \left(\int_{t_l}^{\tau} {}_{b_m}^{b_l}\hat{\mathbf{R}}_{m|l} dm\right)\right\} d\tau \cdot \delta \mathbf{b}_{gl|l} \\
& - \int_{t_l}^{t_{l+1}} \left\{\left[\left(\dot{\hat{\mathbf{v}}}_\tau - \mathbf{g}^w\right)\times\right] \cdot {}_{b_l}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{l|l} \cdot \left[\int_{t_l}^{\tau} {}_{b_m}^{b_l}\hat{\mathbf{R}}_{m|l} \cdot \left(\int_{t_l}^{m} \mathbf{n}_{wgs} ds + \mathbf{n}_{gm}\right) dm\right]\right\} d\tau
\end{aligned} \tag{86}
$$

上式中，即

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{n}_{vl+1B} = \\
& -\int_{t_l}^{t_{l+1}} \left\{\left[\left(\dot{\hat{\mathbf{v}}}_\tau - \mathbf{g}^w\right)\times\right] \cdot {}_{b_l}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{l|l} \cdot \left[\int_{t_l}^{\tau} {}_{b_m}^{b_l}\hat{\mathbf{R}}_{m|l} \cdot \left(\int_{t_l}^{m} \mathbf{n}_{wgs} ds + \mathbf{n}_{gm}\right) dm\right]\right\} d\tau
\end{aligned} \tag{87}
$$

根据式(71)~式(75)，有

$$
\begin{aligned}
\delta \mathbf{v}_{l+1|l} & = \mathbf{v}_{l+1} - \hat{\mathbf{v}}_{l+1|l} \\
& = \left(\mathbf{v}_l - \hat{\mathbf{v}}_{l|l}\right) + \left(\mathbf{s}_l - \hat{\mathbf{s}}_l\right) + \left(\Delta t \cdot \mathbf{g}^w - \Delta t \cdot \mathbf{g}^w\right) \\
& = \delta \mathbf{v}_{l|l} + \delta \mathbf{s}_l \\
& = \delta \mathbf{v}_{l|l} + \delta \mathbf{s}_A + \delta \mathbf{s}_B
\end{aligned} \tag{88}
$$

根据式(81)和式(86)，则有$\delta \mathbf{v}_{l+1|l}$的状态转移方程如下

$$
\begin{aligned}
\delta \mathbf{v}_{l+1|l} = & \boldsymbol{\Phi}_{vv}(l+1,l) \cdot \delta \mathbf{v}_{l|l} + \boldsymbol{\Phi}_{vq}(l+1,l) \cdot \delta \boldsymbol{\theta}_{l|l} \\
& + \boldsymbol{\Phi}_{vb_g}(l+1,l) \cdot \delta \mathbf{b}_{gl|l} + \boldsymbol{\Phi}_{vb_a}(l+1,l) \cdot \delta \mathbf{b}_{al|l} + \mathbf{n}_{vl+1}
\end{aligned} \tag{89}
$$

其中

$$
\boldsymbol{\Phi}_{vv}(l+1,l) = \mathbf{I}_{3\times 3} \tag{90}
$$

$$
\boldsymbol{\Phi}_{vq}(l+1,l) = -\int_{t_l}^{t_{l+1}} \left[\left(\dot{\hat{\mathbf{v}}}_\tau - \mathbf{g}^w\right)\times\right] d\tau = -\left[\left(\hat{\mathbf{v}}_{l+1|l} - \hat{\mathbf{v}}_{l|l} - \Delta t \cdot \mathbf{g}^w\right)\times\right] \tag{91}
$$

$$
\boldsymbol{\Phi}_{vb_g}(l+1,l) = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \left\{\left[\left(\dot{\hat{\mathbf{v}}}_\tau - \mathbf{g}^w\right)\times\right] \cdot {}_{b_l}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{l|l} \cdot \left(\int_{t_l}^{\tau} {}_{b_m}^{b_l}\hat{\mathbf{R}}_{m|l} dm\right)\right\} d\tau \tag{92}
$$

$$
\boldsymbol{\Phi}_{vb_a}(l+1,l) = -\int_{t_l}^{t_{l+1}} {}_{b_\tau}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{\tau|l} d\tau = -{}_{b_l}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{l|l} \cdot \int_{t_l}^{t_{l+1}} {}_{b_\tau}^{b_l}\hat{\mathbf{R}}_{\tau|l} d\tau \tag{93}
$$

$$
\mathbf{n}_{vl+1} = \mathbf{n}_{vl+1A} + \mathbf{n}_{vl+1B} \tag{94}
$$

3.6 $\delta \mathbf{b}_{al+1|l}$的状态转移方程

根据3.2节中的式(80)，可得$\delta \mathbf{b}_{al+1|l}$的状态转移方程如下

$$
\delta \mathbf{b}_{al+1|l} = \delta \mathbf{b}_{al|l} + \int_{t_l}^{t_{l+1}} \mathbf{n}_{wa\tau} d\tau
$$

其可写作

$$
\delta \mathbf{b}_{al+1|l} = \boldsymbol{\Phi}_{b_a b_a}(l+1,l) \cdot \delta \mathbf{b}_{al|l} + \mathbf{n}_{b_a l+1} \tag{95}
$$

其中

$$
\boldsymbol{\Phi}_{b_a b_a}(l+1,l) = \mathbf{I}_{3\times 3} \tag{96}
$$

$$
\mathbf{n}_{b_a l+1} = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \mathbf{n}_{wa\tau} d\tau \tag{97}
$$

3.7 $\delta \mathbf{p}_{l+1|l}$的状态转移方程

根据式(38)，有

$$\delta \mathbf{p}_{l+1|l} = \mathbf{p}_{l+1} - \hat{\mathbf{p}}_{l+1|l} \tag{98}$$

其中

$$\mathbf{p}_{l+1} = \mathbf{p}_l + \int_{t_l}^{t_{l+1}} \mathbf{v}_\tau d\tau \tag{99}$$

根据式(71)，有

$$\mathbf{v}_\tau = \mathbf{v}_l + \int_{t_l}^{\tau} {}_{b_s}^{w}\mathbf{R} \cdot (\mathbf{f}_{ms} - \mathbf{b}_{as} - \mathbf{n}_{as})\, ds + (\tau - t_l) \cdot \mathbf{g}^w \tag{100}$$

代入式(99)中，则有

$$\mathbf{p}_{l+1} = \mathbf{p}_l + \Delta t \cdot \mathbf{v}_l + \frac{1}{2}\Delta t^2 \mathbf{g}^w + \int_{t_l}^{t_{l+1}} \left[\int_{t_l}^{\tau} {}_{b_s}^{w}\mathbf{R} \cdot (\mathbf{f}_{ms} - \mathbf{b}_{as} - \mathbf{n}_{as})\, ds \right] d\tau \tag{101}$$

上式中，记

$$\mathbf{y}_l = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \left[\int_{t_l}^{\tau} {}_{b_s}^{w}\mathbf{R} \cdot (\mathbf{f}_{ms} - \mathbf{b}_{as} - \mathbf{n}_{as})\, ds \right] d\tau \tag{102}$$

对于$\hat{\mathbf{p}}_{l+1|l}$，同理有

$$\hat{\mathbf{p}}_{l+1|l} = \hat{\mathbf{p}}_{l|l} + \Delta t \cdot \hat{\mathbf{v}}_{l|l} + \frac{1}{2}\Delta t^2 \mathbf{g}^w + \int_{t_l}^{t_{l+1}} \left[\int_{t_l}^{\tau} {}_{b_s}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{s|l} \cdot \left(\mathbf{f}_{ms} - \hat{\mathbf{b}}_{as}\right) ds \right] d\tau \tag{103}$$

上式中，记

$$\hat{\mathbf{y}}_l = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \left[\int_{t_l}^{\tau} {}_{b_s}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{s|l} \cdot \left(\mathbf{f}_{ms} - \hat{\mathbf{b}}_{as}\right) ds \right] d\tau \tag{104}$$

记$\delta \mathbf{y}_l = \mathbf{y}_l - \hat{\mathbf{y}}_l$，则有

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{p}_{l+1|l} &= \mathbf{p}_{l+1} - \hat{\mathbf{p}}_{l+1|l} \\ &= \left(\mathbf{p}_l - \hat{\mathbf{p}}_{l|l}\right) + \Delta t \cdot \left(\mathbf{v}_l - \hat{\mathbf{v}}_{l|l}\right) + \mathbf{y}_l - \hat{\mathbf{y}}_l \\ &= \delta \mathbf{p}_{l|l} + \Delta t \cdot \delta \mathbf{v}_{l|l} + \delta \mathbf{y}_l \end{aligned} \tag{105}$$

下面分析$\delta \mathbf{y}_l$。根据式(102)和式(104)，有

$$\delta \mathbf{y}_l = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \left\{ \int_{t_l}^{\tau} \left[{}_{b_s}^{w}\mathbf{R} \cdot (\mathbf{f}_{ms} - \mathbf{b}_{as} - \mathbf{n}_{as}) - {}_{b_s}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{s|l} \cdot \left(\mathbf{f}_{ms} - \hat{\mathbf{b}}_{as}\right) \right] ds \right\} d\tau \tag{106}$$

注意到，根据式(75)，可知上式中

$$\delta \mathbf{s}_\tau = \int_{t_l}^{\tau} \left[{}_{b_s}^{w}\mathbf{R} \cdot (\mathbf{f}_{ms} - \mathbf{b}_{as} - \mathbf{n}_{as}) - {}_{b_s}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{s|l} \cdot \left(\mathbf{f}_{ms} - \hat{\mathbf{b}}_{as}\right) \right] ds$$

则利用式(81)和(86)中的结论，并进行积分，有

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{y}_l = &- \int_{t_l}^{t_{l+1}} \left[\left(\hat{\mathbf{v}}_{\tau|l} - \hat{\mathbf{v}}_{l|l} - (\tau - t_l)\, \mathbf{g}^w \right) \times \right] d\tau \cdot \delta \theta_{l|l} \\ &+ \int_{t_l}^{t_{l+1}} \left\{ \int_{t_l}^{\tau} \left(\left[\left(\dot{\hat{\mathbf{v}}}_s - \mathbf{g}^w \right) \times \right] \cdot {}_{b_l}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{l|l} \cdot \left[\int_{t_l}^{s} {}_{b_m}^{b_l}\hat{\mathbf{R}}_{m|l} dm \right] \right) ds \right\} d\tau \cdot \delta \mathbf{b}_{gl|l} \\ &- {}_{b_l}^{w}\hat{\mathbf{R}}_{l|l} \cdot \int_{t_l}^{t_{l+1}} \left(\int_{t_l}^{\tau} {}_{b_s}^{b_l}\hat{\mathbf{R}}_{s|l} ds \right) d\tau \cdot \delta \mathbf{b}_{al|l} \\ &+ \int_{t_l}^{t_{l+1}} \mathbf{n}_{v\tau} d\tau \end{aligned} \tag{107}$$

代入式(105)，则有$\delta \mathbf{p}_{l+1|l}$的状态转移方程如下

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{p}_{l+1|l} = &\, \mathbf{\Phi}_{pq}(l+1, l) \cdot \delta \boldsymbol{\theta}_{l|l} + \mathbf{\Phi}_{pb_g}(l+1, l) \cdot \delta \mathbf{b}_{gl|l} \\ &+ \mathbf{\Phi}_{pv}(l+1, l) \cdot \delta \mathbf{v}_{l|l} + \mathbf{\Phi}_{pb_a}(l+1, l) \cdot \delta \mathbf{b}_{al|l} + \mathbf{\Phi}_{pp}(l+1, l) \cdot \delta \mathbf{p}_{l|l} + \mathbf{n}_{pl+1} \end{aligned} \tag{108}$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}_{pq}(l+1,l) = -\int_{t_l}^{t_{l+1}} \left[\left(\hat{\mathbf{v}}_{\tau|l} - \hat{\mathbf{v}}_{l|l} - (\tau - t_l)\,\mathbf{g}^w\right)\times\right] d\tau = \\
-\left[\left(\hat{\mathbf{p}}_{l+1|l} - \hat{\mathbf{p}}_{l|l} - \Delta t \cdot \hat{\mathbf{v}}_{l|l} - \frac{1}{2}\Delta t^2 \mathbf{g}^w\right)\times\right]
\end{aligned}
\tag{109}
$$

$$
\mathbf{\Phi}_{pb_g}(l+1,l) = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \left\{\int_{t_l}^{\tau}\left(\left[\left(\dot{\hat{\mathbf{v}}}_s - \mathbf{g}^w\right)\times\right] \cdot {}^{w}_{b_l}\hat{\mathbf{R}}_{l|l} \cdot \left[\int_{t_l}^{s} {}^{b_l}_{b_m}\hat{\mathbf{R}}_{m|l}\,dm\right]\right) ds\right\} d\tau \tag{110}
$$

$$
\mathbf{\Phi}_{pv}(l+1,l) = \Delta t \cdot \mathbf{I}_{3\times 3} \tag{111}
$$

$$
\mathbf{\Phi}_{pb_a}(l+1,l) = -{}^{w}_{b_l}\hat{\mathbf{R}}_{l|l} \cdot \int_{t_l}^{t_{l+1}} \left(\int_{t_l}^{\tau} {}^{b_l}_{b_s}\hat{\mathbf{R}}_{s|l}\,ds\right) d\tau \tag{112}
$$

$$
\mathbf{\Phi}_{pp}(l+1,l) = \mathbf{I}_{3\times 3} \tag{113}
$$

$$
\mathbf{n}_{pl+1} = \int_{t_l}^{t_{l+1}} \mathbf{n}_{v\tau}\,d\tau \tag{114}
$$

3.8 小结

根据前文分析，已经推导得到了和MSCKF2.0中类似的close form的INS状态递推方程~~，但注意到该方程还有很多积分项未能展开，这仍然给编程实现带来了一些困难~~。

---

1. Why and How to Avoid the Flipped Quaternion Multiplication ↩
2. Visual-Inertial Monocular SLAM With Map Reuse ↩
3. 秦永元 《卡尔曼滤波与组合导航原理》第3版第P43页：“3. 一步转移阵和等效离散系统噪声方差阵的计算” ↩