海文考研届钻石卡学员基础阶段·高数上期末测试

（分值 150 分，考试时间：180 分钟）

学员姓名:__________　　　班主任:________　　分数：________

一、选择题（每小题 5 分，共 10 小题）

1、下列命题正确的是（　）

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$

（B）设 $\{x_n\}$ 为任意数列，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$

【答案】（D）

【解析】（A）选项，取 $u_n=(-1)^n a$

（B）选项，取 $x_n=n^2$，$y_n=\dfrac{1}{n}$

（C）选项，取 $x_n=1,0,1,0\cdots$，$y_n=0,1,0,1\cdots$

2、当 $x\to0^+$ 时，若 $\ln^{\alpha}(1+2x),(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围是（　）

(A) $(2,+\infty)$.　　(B) $(1,2)$.　　(C) $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.　　(D) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

【答案】（B）

【解析】当 $x\to0^+$ 时，$\ln^{\alpha}(1+2x)\sim(2x)^{\alpha},(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}\sim\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{\alpha}}$，所以 $\alpha>1,\dfrac{2}{\alpha}>1$，选 (B).

3、函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为（ ）.

(A) 0 .　　(B) 1 .　　(C) 2 .　　(D) 3 .

【答案】（C）

【解析】注意到 $|x|^x-1=\mathrm{e}^{x\ln|x|}-1$，$x\to0,e^x-1\sim x$，

$$\lim_{x\to-1}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to-1}\frac{\mathrm{e}^{|\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=-\lim_{x\to-1}\frac{x\ln|x|}{(x+1)\ln|x|}=\infty,$$

$$\lim_{x\to1}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to1}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=1,$$

所以 $x=1,x=0$ 是可去间断点，选（C）.

4、函数 $f(x)=\left(x^2-x-2\right)\left|x^3-x\right|$ 有（ ）个不可导点.

（A）3． （B）2． （C）1． （D）0．

【答案】（B）

【解析】下面利用性质来判断 $f(x)$ 在 $x=0,1,-1$ 是否可导.

$f(x)=\left(x^2-x-2\right)\left|x^3-x\right|=\left(x^2-x-2\right)|x-0||x-1||x-(-1)|$. 在 $x=0$ 处,

$g(x)=\left(x^2-x-2\right)|x-1||x-(-1)|, f(x)=g(x)|x-0|, g(0)=-2\neq0$， $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导;

在 $x=1$ 处, $g(x)=\left(x^2-x-2\right)|x||x-(-1)|, g(1)=-4\neq0, f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导;

在 $x=-1$ 处, $g(x)=\left(x^2-x-2\right)|x||x-1|, g(-1)=0, f(x)$ 在 $x=-1$ 处可导, 选(B).

5、已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $f(0)=0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{e^{x^2}-1}=2$，则在 $x=0$ 处 $f(x)$（ ）

(A)不可导. （B）可导但 $f'(0)\neq0$.

（C）取得极小值. （D）取得极大值.

【答案】（C）

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\dfrac{1}{x}=2$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$，即 $f'(0)=0$，故排除(A)(B).

又因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2>0$，由极限的局部保号性，知存在 $\delta>0$，当 $0<|x|<\delta$ 时，$\dfrac{f(x)}{x^2}>0$, 故当 $0<|x|<\delta$ 时， $f(x)>0=f(0)$. $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值。

6、函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是（　　）

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{2x}$ 存在.　　(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)-f(0)}{\mathrm{e}^{x}-1}$ 存在.

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}$ 存在.　　(D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x-\sin x)-f(0)}{x}$ 存在.

【答案】(B)

【解析】由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{2x}$ 存在不能得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ 存在，取反例：当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\cos x, f(0)=0$ ，故 (A) 错误.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(e^{x}-1\right)-f(0)}{e^{x}-1}$ 存在，设 $e^{x}-1=t$，则 $x\to 0$ 时 $t\to 0, \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)-f(0)}{t}$ 存在，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，(B) 正确.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}$ 存在，设 $1-\cos x=t$，则 $x\to 0$ 时 $t\to 0^{+}$，只能得到 $\lim\limits_{t\to 0^{+}}\dfrac{f(t)-f(0)}{t}$ 存在，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右导数存在，(C) 错误.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x-\sin x)-f(0)}{x}$ 存在不能得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ 存在，取反例 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^{3}$ ，(D) 错误. 所以应该选 (B).

7、设 $f(x)$ 连续且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得（　）

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.　　(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

(C) $\forall x\in(0,\delta)$，有 $f(x)>f(0)$.　　(D) $\forall x\in(-\delta,0)$，有 $f(x)>f(0)$.

【答案】(C)

【解析】由 $f'(0)>0$ 即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$ ，存在 $\delta>0$ ，使得 $\forall x\in(0,\delta), f(x)>f(0)$，应该选 (C).

8、设 $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$ ，$J=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\mathrm{d}x$ ，$K=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$ ，则 I,J,K 的大小关系为（　）

(A) $I<J<K$.　　(B) $I<K<J$.

(C) $J<I<K$.　　(D) $K<J<I$.

【答案】(B)

【解析】由于当$0<x<\frac{\pi}{4}$时，$\cot x>\cos x>\sin x$，故$\ln\cot x>\ln\cos x>\ln\sin x$.

9、设$f(x)$是可导函数，则（ ）.

(A) $\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$.　　(B) $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)$.

(C) $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$.　　(D) $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)+C$.

【答案】(C).

【解析】先积分后求导函数表达式保持不变,先求导后积分函数表达式相差常数.

10、微分方程 $y''-2y'+5y=\mathrm{e}^x\sin x\cos x$ 的特解形式$y^*=($ $)$.

(A) $x\mathrm{e}^x(a\sin x\cos x+b\cos 2x)$.　　(B) $\mathrm{e}^x(a\sin x\cos x+b\cos 2x)$.

(C) $ax\mathrm{e}^x\sin x\cos x$.　　(D) $a\mathrm{e}^x\sin x\cos x$.

（其中a,b为任意常数）

【答案】(A)

【解析】微分方程的特征方程是$r^2-2r+5=0,r_{1,2}=1\pm 2\mathrm{i}$，而$e^x\sin x\cos x=\frac{1}{2}e^x\sin 2x,1\pm 2\mathrm{i}$是特征根，应选(A).

二、**填空题（每小题 5 分，共 6 小题）**

11、设$f(x)$连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{\left(\mathrm{e}^{x^3}-1\right)f(x)}=1$，则$f(0)=$______.

【答案】0

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{\left(\mathrm{e}^{x^3}-1\right)f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}[xf(x)]^2}{x^3f(x)}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，由于函数$f(x)$连续，所以$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

12、曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^y$ 在点$(0,0)$处的切线方程为=______.

【答案】$y=-2x$

【解析】方程两边对x求导，把y看作x的函数，则有$\sec^2(x+y+\frac{\pi}{4})\cdot(1+y')=e^y y'$.

当 $x=0$，$y=0$时，$y'=-2$，所以切线方程为 $y=-2x$.

13、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)=$ ______.

【答案】$\dfrac{\pi}{6}$

【解析】原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{\sqrt{4n^2-i^2}}\cdot\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{4-\left(\dfrac{i}{n}\right)^2}}\cdot\dfrac{1}{n}$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{2}\bigg|_0^1=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}。$$

14、设 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}，则 $\int xf'(x)dx=$ ______.

【答案】$-2x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}+C$

【解析】$\int xf'(x)dx=\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx$，由于 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}，$\int f(x)dx=e^{-x^2}+C_1$, $f(x)=\left(e^{-x^2}\right)'=-2xe^{-x^2}$，故

$\int xf'(x)dx=-2x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}+C.$

15、$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin^3x\cdot e^{\cos x}+\sin^4\dfrac{x}{2}\right)dx=$ ______.

【答案】$\dfrac{3\pi}{4}$

【解析】

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin^3x\cdot e^{\cos x}+\sin^4\frac{x}{2}\right)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4\frac{x}{2}dx=2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4\frac{x}{2}d\frac{x}{2}$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 tdt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 tdt=4\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}.$$

16、$\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx=$ ______.

【答案】 1 .

【解析】因为$\int\dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx=\int\ln(1+x)d\left(-\dfrac{1}{1+x}\right)=-\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}+\int\dfrac{1}{1+x}d(\ln(1+x))$

$$=-\frac{\ln(1+x)}{1+x}+\int\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln(1+x)}{1+x}-\frac{1}{1+x}+C,$$

所以 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\left[-\frac{\ln(1+x)}{1+x}-\frac{1}{1+x}\right]\Big|_0^{+\infty}=1$.

三、解答题（第 17 题 10 分，第 18-22 题每题 12 分）

17、求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=$

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$x\to+\infty\Rightarrow\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x}$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right].$$

解法一 作变量代换，令 $x=\frac{1}{t},x\to+\infty\Rightarrow t\to0^+$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{2t}=\frac{1}{2}.$$

解法二 由泰勒公式知 $e^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left\{x^2\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]-x\right\}=\frac{1}{2}$$

18、设 $x\in(0,1)$，证明 $(1+x)\ln^2(1+x)-x^2<0$.

【解析】设 $F(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$，则

$$F'(x)=\ln^2(1+x)+2(1+x)\ln(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}-2x=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$$

$$F''(x)=2\ln(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2=2\frac{\ln(1+x)-x}{1+x}<0\quad(0<x<1)$$

故 $F'(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 上单调递减，$F'(x)<F'(0)=0$. 所以 $F(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 上单调递

减，$F(x)<F(0)=0$，得证。

19、证明方程$4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$恰有两个实根.

【解析】设$f(x)=4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$，则$f'(x)=\frac{4}{1+x^2}-1=\frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{1+x^2}$.

令$f'(x)=0$，解得驻点$x_1=\sqrt{3},x_2=-\sqrt{3}$，所以，当$x<-\sqrt{3}$时，$f'(x)<0$，故$f(x)$单调递减；当$-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$时，$f'(x)>0$，故$f(x)$单调递增；当$x>\sqrt{3}$时，$f'(x)<0$，故$f(x)$单调递减.

又当$x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},\sqrt{3})$时$f(x)>0$，且$f(-\sqrt{3})=0$，故$x\in(-\infty,\sqrt{3})$时只有一个零点；

又$f(\sqrt{3})=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)=-\infty<0$，

由零点定理可知，存在$x_0\in\left(\sqrt{3},+\infty\right)$，使$f\left(x_0\right)=0$；

所以，方程$4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$恰有两实根.

20、求不定积分$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

【解析】令$t=\sqrt{x}$，则$x=t^2$，$dx=2tdt$，所以

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{\arcsin t+\ln t^2}{t}\cdot 2tdt=2\int\left(\arcsin t+\ln t^2\right)dt$$

$$=2t\cdot\arcsin t-2\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt+2t\cdot\ln t^2-2\int t\cdot\frac{2t}{t^2}dt$$

$$=2t\cdot\arcsin t+\int\frac{d(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}+2t\cdot\ln t^2-4t$$

$$=2t\cdot\arcsin t+2\sqrt{1-t^2}+2t\cdot\ln t^2-4t+C$$

$$=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C.$$

21、设抛物线$y=\sqrt{x-2}$.

（1）求曲线、过$(1,0)$点的切线及x轴所围成的平面图形的面积；

（2）求（1）中图形绕x、y轴旋转所得旋转体的体积.

【解析】（1）设切点为$\left(x_0,\sqrt{x_0-2}\right)$，则切线方程为$y-\sqrt{x_0-2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-2}}\left(x-x_0\right)$.

由于过点$(1,0)$，所以$x_0=3,y_0=1$，切线方程为$y-1=\dfrac{1}{2}(x-3)$或$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

$S=\int_1^3\dfrac{1}{2}(x-1)\mathrm{d}x-\int_2^3\sqrt{x-2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$.

(2) $V_x=\pi\left[\int_1^3\dfrac{1}{4}(x-1)^2\mathrm{d}x-\int_2^3(x-2)\mathrm{d}x\right]=\dfrac{1}{6}\pi$，$V_y=\pi\int_0^1\left[\left(y^2+2\right)^2-(2y+1)^2\right]\mathrm{d}y=\dfrac{6}{5}\pi$.

22、设$f(x)=\cos 3x+\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$，求$f(x)$.

【解析】$f(x)=\cos 3x+\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t=\cos 3x+x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x t\cdot f(t)\mathrm{d}t, f(0)=1$,

求导得$f'(x)=-3\sin 3x+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)=-3\sin 3x+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$

$f'(0)=0$，再求导得$f''(x)=-9\cos 3x+f(x), f(x)=y$，即$y''-y=-9\cos 3x$，特征方程为$r^2-1=0\Rightarrow r_1=1,r_2=-1$，对应齐次方程的通解为$Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$.

设特解形式为$y^*=a\cos 3x+b\sin 3x$，则

$\left(y^*\right)'=-3a\sin 3x+3b\cos 3x,\left(y^*\right)''=-9a\cos 3x-9b\sin 3x$，代入微分方程得

$-10a\cos 3x-10b\sin 3x=-9\cos 3x$，故$a=\dfrac{9}{10},b=0$，所以

$y^*=\dfrac{9}{10}\cos 3x, f(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{9}{10}\cos 3x, f(0)=1, f'(0)=0$

得$C_1=C_2=\dfrac{1}{20}$，故$f(x)=\dfrac{1}{20}\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{20}\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{9}{10}\cos 3x$.