第一节 定义随机网络

2022年12月12日　　8:55

真实世界的网络往往具有随机性，它的结构性和观赏性可能并不强。
在当前我们主要用来定义一个随机网络的方法有两种：
一种是G（N,L）方法：N个节点通过L个随机路径链接
另一种是G（N，p）方法：N个节点中彼此相连的概率为p

我们一般使用更具备操作性的方法2，也就是G（N，p）方法，那么我们建立一个随机网络的步骤是：

（1）从 N 个孤立节点开始。

（2）选择一对节点，产生一个 0 到 1 之间的随机数。如果该随机数小于 p，在这对节点之间放置一条链接；否则，该节点对保持不连接。

（3）对所有 $N(N-1)/2$ 个节点对，重复步骤（2）。

这样我们就建立了随机网络。
随机网络又叫埃尔德什-雷尼网络

第二节 链接数

2022年12月27日　　10:05

对于产生的随机网络，我们有如下数学表示链接数：

（1）L 个点对之间存在链接的概率，即 p^L。

（2）剩余 $N(N-1)/2-L$ 个点对之间没有链接的概率，即 $(1-p)^{N(N-1)/2-L}$。

（3）在所有 $N(N-1)/2$ 个点对中选择 L 个点对放置链接，所有可能的选择方式数为：

$$\binom{\frac{N(N-1)}{2}}{L} \tag{2.0}$$

因此，随机网络恰好有 L 条链接的概率为：

$$p_L=\binom{\frac{N(N-1)}{2}}{L}p^L(1-p)^{\frac{N(N-1)}{2}-L} \tag{2.1}$$

因此我们可以根据上式来计算期望：随机网络的期望连接数：

$$\langle L\rangle=\sum_{L=0}^{\frac{N(N-1)}{2}}Lp_L=p\frac{N(N-1)}{2} \tag{2.2}$$

随机网络平均度是：

$$\langle k\rangle=\frac{2\langle L\rangle}{N}=p(N-1)$$

我们可以看到随机网络的相关性质满足二项分布：
我们会常用到二项分布的式子：

二项分布的形式为：

$$p_x = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}$$

分布的均值（一阶矩）为：

$$x = \sum_{x=0}^{N} x p_x = Np \tag{2.4}$$

其二阶矩为：

$$x^2 = \sum_{x=0}^{N} x^2 p_x = p(1-p)N + p^2 N^2 \tag{2.5}$$

因此，二项分布的标准差为：

$$\sigma_x = \left(x^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left[p(1-p)N\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.6}$$

一阶矩：指的是期望，
二阶矩：指的是变量的平方的期望
二阶中心距：方差
三阶中心矩指的是随机变量的偏度
四阶中心矩指的是随机变量的峰度

第三节 随机网络的度分布

2022年12月28日 9:15

在随机网络中，有一些节点很重要，他有很多的链接数，但是有一些节点可能存在于网络的边缘，链接数极少。
所以我们可以通过分析一个随机网络的度分布来查看，节点链接分布情况。

第一个常见的是二项分布：

（1）k 个链接出现的概率，即 p^k。

（2）剩下 $(N-1-k)$ 个链接不出现的概率，即 $(1-p)^{N-1-k}$。

（3）节点 i 的 $N-1$ 个可能存在的链接中选出 k 个，选择方式的总数为：

$$\binom{N-1}{k}$$

此，随机网络的度分布服从二项分布：

$$p_k = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \qquad (2.7)$$

其次大部分真实网络都是极其稀疏的，因此**网络平均度的大小远远小于节点数N**，此时会形成泊松分布的情况：

$$p_k = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!} \qquad (2.8)$$

公式 2.8 和公式 2.7 通常被称为随机网络的度分布。

注意，我们所说的满足泊松分布的条件是平均度<k><<N，所以小网络更可能是二项分布的，

大网络更可能是泊松分布的。

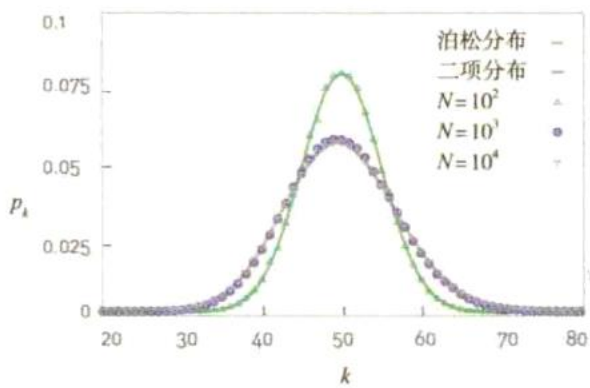

图 2-5

度分布与网络大小无关

平均度 $\langle k\rangle=50$，大小分别为 $N=10^2$、$N=10^3$、$N=10^4$ 的三个随机网络的度分布。

小网络：二项分布

对于小网络（$N=10^2$），由于不满足泊松近似的条件 $N \gg \langle k\rangle$，该网络的度分布明显偏离泊松分布（公式 2.8）。因此，小网络的度分布需要使用精确的二项分布形式（公式 2.7）（绿线）。

大网络：泊松分布

对于大网络（$N=10^3$，$N=10^4$），其度分布与灰线所示的泊松分布（公式 2.8）相差无几。因此，当网络大小 N 很大时，度分布和网络大小无关。为了避免随机性带来的噪声，图中所示的结果是在 1 000 个独立生成的随机网络上平均得到的。

第四节 真实网络不是泊松分布的

2022年12月28日　　9:26

我们通过书中的社会网络的假设可以得到一个结论：
在大的随机网络中，大多数的度节点分布在平均度的极小且狭窄的范围内。

为什么没有度很大的节点?
根据斯特林近似：

有：

$$k! \sim \left[\sqrt{2\pi k}\right]\left(\frac{k}{e}\right)^{k}$$

因此，公式 2.8 可以重写为：

$$p_k = \frac{e^{-\langle k \rangle}}{\sqrt{2\pi k}}\left(\frac{e\langle k \rangle}{k}\right)^{k} \quad (2.9)$$

我们发现，随着k的增大，p会急速缩小，这个速度比指数级更快，因此我们机会没有足够大的概率观测到一个k极大的节点。

但是在现实生活的网络中，我们确实会观测到一些度很大的节点，这也说明真实网络并不完全是随机网络。

第五节 随机网络的演化

2022年12月28日 9:37