Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№4**
«Аппроксимация функции методом наименьших квадратов»

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: **1**

Преподаватели:
Малышева Татьяна Алексеевна
Машина Екатерина Алексеевна

Выполнил:
Бондарев Алексей Михайлович
Группа: P3212

Санкт-Петербург, 2025 г.

Цель работы: найти функцию, являющуюся наилучшим приближением заданной табличной функции по методу наименьших квадратов.

1. Вычислительная реализация задачи

Линейная аппроксимация:

$y = \frac{12x}{x^4+1}$

$x \in [0; 2]$
$h = 0.2$

i	xi	xi^2	xi^3	xi^4	yi	xi yi	xi^2 yi
1	0.0	0.000	0.000	0.0000	0.000	0.0000	0.0000
2	0.2	0.040	0.008	0.0016	2.396	0.4792	0.0958
3	0.4	0.160	0.064	0.0256	4.680	1.8720	0.7488
4	0.6	0.360	0.216	0.1296	6.374	3.8244	2.2946
5	0.8	0.640	0.512	0.4096	6.810	5.4480	4.3584
6	1.0	1.000	1.000	1.0000	6.000	6.0000	6.0000
7	1.2	1.440	1.728	2.0736	4.685	5.6220	6.7704
8	1.4	1.960	2.744	3.8416	3.470	4.8577	6.8008
9	1.6	2.560	4.096	6.5536	2.542	4.0672	6.5075
10	1.8	3.240	5.832	10.4976	1.879	3.3819	6.0874
11	2.0	4.000	8.000	16.0000	1.412	2.8240	5.6480
∑	**11.000**	**15.400**	**24.200**	**40.5328**	**40.248**	**38.376**	**45.287**

Нормальные уравнения:

$$\begin{cases} a\,n + b\sum x_i = \sum y_i, \\ a\sum x_i + b\sum x_i^2 = \sum x_i y_i. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11a \;+\; 11.000\,b \;=\; 40.248, \\ 11.000\,a \;+\; 15.400\,b \;=\; 38.376. \end{cases}$$

Определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 11 & 11.000 \\ 11.000 & 15.400 \end{vmatrix} = 11 \cdot 15.400 - 11.000^2 = 169.4 - 121.0 = 48.4$$

Крамер:

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 40.248 & 11.000 \\ 38.376 & 15.400 \end{vmatrix} = 40.248 \cdot 15.400 - 38.376 \cdot 11.000 = 620. + (-422.) = 197.6.$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 11 & 40.248 \\ 11.000 & 38.376 \end{vmatrix} = 11 \cdot 38.376 - 40.248 \cdot 11.000 = 422.1 - 442.7 = -20.6.$$

Коэффициенты:

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{197.6}{48.4} = 4.084, \qquad b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{-20.6}{48.4} = -0.425.$$

$$\varphi_{\text{lin}}(x) = 4.084 - 0.425\,x$$

Проверочные значения и ошибки:

i	**xi**	**yi**	$\varphi_{\text{lin}}(x_i)$	$\varepsilon_i = y_i - \varphi$	ε_i^2
1	0.000	0.000	4.084	–4.084	16.679
2	0.200	2.396	3.999	–1.603	2.570
3	0.400	4.680	3.914	0.766	0.587
4	0.600	6.374	3.829	2.545	6.477
5	0.800	6.810	3.744	3.066	9.400
6	1.000	6.000	3.659	2.341	5.480
7	1.200	4.685	3.574	1.111	1.234
8	1.400	3.470	3.489	–0.019	0.000
9	1.600	2.542	3.404	–0.862	0.743
10	1.800	1.879	3.319	–1.440	2.074
11	2.000	1.412	3.234	–1.822	3.320
Σ					**48.569**

$$S_{\text{lin}} = \sum \varepsilon_i^2 = 48.569, \quad \sigma_{\text{lin}} = \sqrt{\frac{S}{n}} = \sqrt{\frac{48.569}{11}} = 2.101.$$

Квадратичная аппроксимация:

$y = \frac{12x}{x^4+1}$

$x \in [0; 2]$
$h = 0.2$

i	xi	xi^2	xi^3	xi^4	yi	xi yi	xi^2 yi
1	0.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	0.0000
2	0.200	0.0400	0.0080	0.0016	2.396	0.4792	0.0958
3	0.400	0.1600	0.0640	0.0256	4.680	1.8720	0.7488
4	0.600	0.3600	0.2160	0.1296	6.374	3.8244	2.2946
5	0.800	0.6400	0.5120	0.4096	6.810	5.4480	4.3584
6	1.000	1.0000	1.0000	1.0000	6.000	6.0000	6.0000
7	1.200	1.4400	1.7280	2.0736	4.685	5.6220	6.7464
8	1.400	1.9600	2.7440	3.8416	3.470	4.8580	6.8012
9	1.600	2.5600	4.0960	6.5536	2.542	4.0672	6.5075
10	1.800	3.2400	5.8320	10.4976	1.879	3.3822	6.0880
11	2.000	4.0000	8.0000	16.0000	1.412	2.8240	5.6480
Σ	**11.000**	**15.4000**	**24.2000**	**40.5328**	**40.248**	**38.3760**	**45.287**

Нормальные уравнения:

$$\begin{cases} a\,n + b\sum x_i + c\sum x_i^2 = \sum y_i, \\ a\sum x_i + b\sum x_i^2 + c\sum x_i^3 = \sum x_i y_i, \\ a\sum x_i^2 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11a + 11.000b + 15.400c = 40.248, \\ 11.000a + 15.400b + 24.200c = 38.376, \\ 15.400a + 24.200b + 40.533c = 45.287. \end{cases}$$

Гаус:

1. Умножаем первую строку на $\frac{11}{11}$=1 и вычитаем её из второй:

$$(15.400-11.000)b+(24.200-15.400)c=38.376-40.248 \implies 4.400\,b+8.800\,c=-1.872$$

2. Аналогично для третьей строки:

$$(24.200-15.400)b+(40.533-24.200)c=45.287-15.400\cdot(40.248)/11$$

Получаем:

$$8.800\,b+17.681\,c=6.693$$

3. Решаем систему:

$$\begin{cases}4.400\,b+8.800\,c=-1.872,\\ 8.800\,b+17.681\,c=6.693.\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}c=-5.330,\\ b=10.234.\end{matrix}$$

4. Подставляем b,c в первое исходное уравнение — получаем a=0.886.

$$\varphi_{\text{quad}}(x)=0.886+10.234\,x-5.330\,x^2$$

Вычисление ошибок:

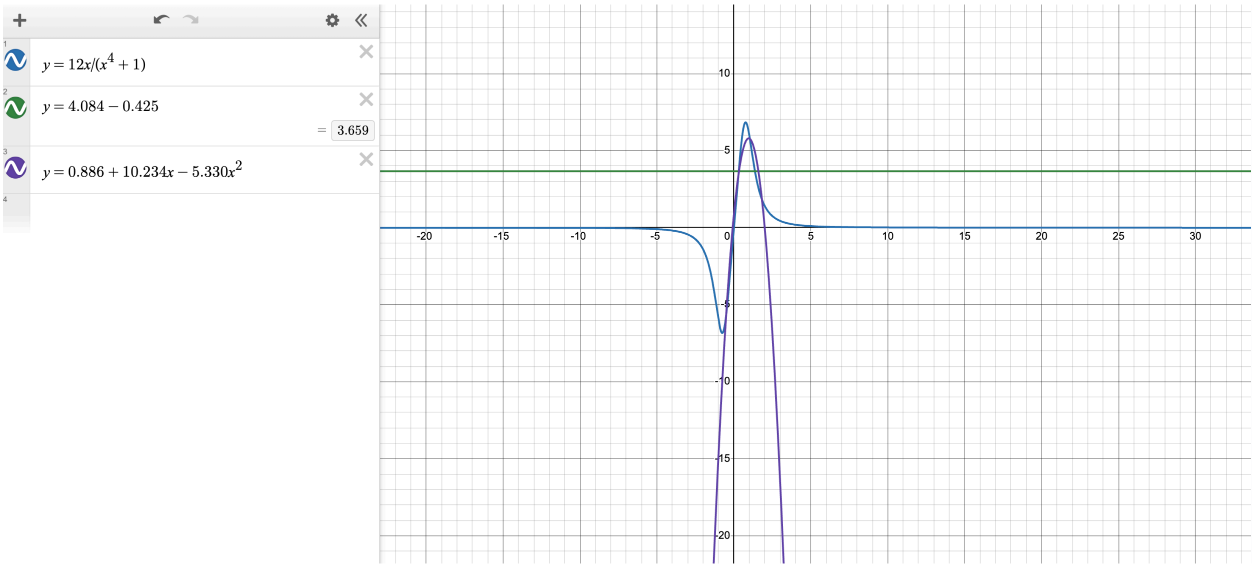
i	**xi**	**yi**	$\varphi_{\text{quad}}(x_i)$	$\varepsilon_i=y_i-\varphi$	ε_i^2
1	0.000	0.000	0.886	–0.886	0.785
2	0.200	2.396	2.720	–0.324	0.105
3	0.400	4.680	4.127	0.553	0.306
4	0.600	6.374	5.108	1.266	1.604
5	0.800	6.810	5.662	1.148	1.318
6	1.000	6.000	5.790	0.210	0.044
7	1.200	4.685	5.492	–0.807	0.651
8	1.400	3.470	4.767	–1.297	1.682
9	1.600	2.542	3.616	–1.074	1.153
10	1.800	1.879	2.038	–0.159	0.025
11	2.000	1.412	0.034	1.378	1.899

Σ					**9.571**

$$S_{\text{quad}} = 9.571, \qquad \sigma_{\text{quad}} = \sqrt{\frac{9.571}{11}} = 0.933.$$

Модель	**a**	**b**	**c**	**σ**
Линейная	4.084	–0.425	—	2.101
Квадратичная	0.886	10.234	–5.330	**0.933**

Квадратичная модель даёт минимальное среднеквадратичное отклонение, следовательно **является лучшим приближением**.



2. Программная реализация задачи

https://github.com/666Daredevil666/calmath/tree/main/lab4

Результаты выполнения программы при различных исходных данных:
Пример №1 ввода с клавиатуры:

```
Введите пары x y (пустая строка — конец ввода):
1 2
3 4
5 6
7 8
9 10
11 12
13 14
15 16

Принято 8 точек.

Результаты:
Линейная         σ=1.8039e-15  R²=1 (отличное согласие)  coef=[1, 1]  r=1
Полином 2-й ст.  σ=3.61984e-14  R²=1 (отличное согласие)  coef=[1, 1, 9.372e-17]
Полином 3-й ст.  σ=2.4371e-13  R²=1 (отличное согласие)  coef=[1, 1, -4.0746e-16, -5.9064e-17]
Экспоненциальная σ=1.6216  R²=0.874782 (хорошее согласие)  coef=[2.5034, 0.13763]
Логарифмическая  σ=1.64881  R²=0.870543 (хорошее согласие)  coef=[-0.1848, 5.0598]
Степенная        σ=0.452539  R²=0.990248 (отличное согласие)  coef=[1.841, 0.77587]

Лучшее приближение → Линейная
Отчёт сохранён в /Users/alexb/PycharmProjects/pythonProject6/results.txt
```

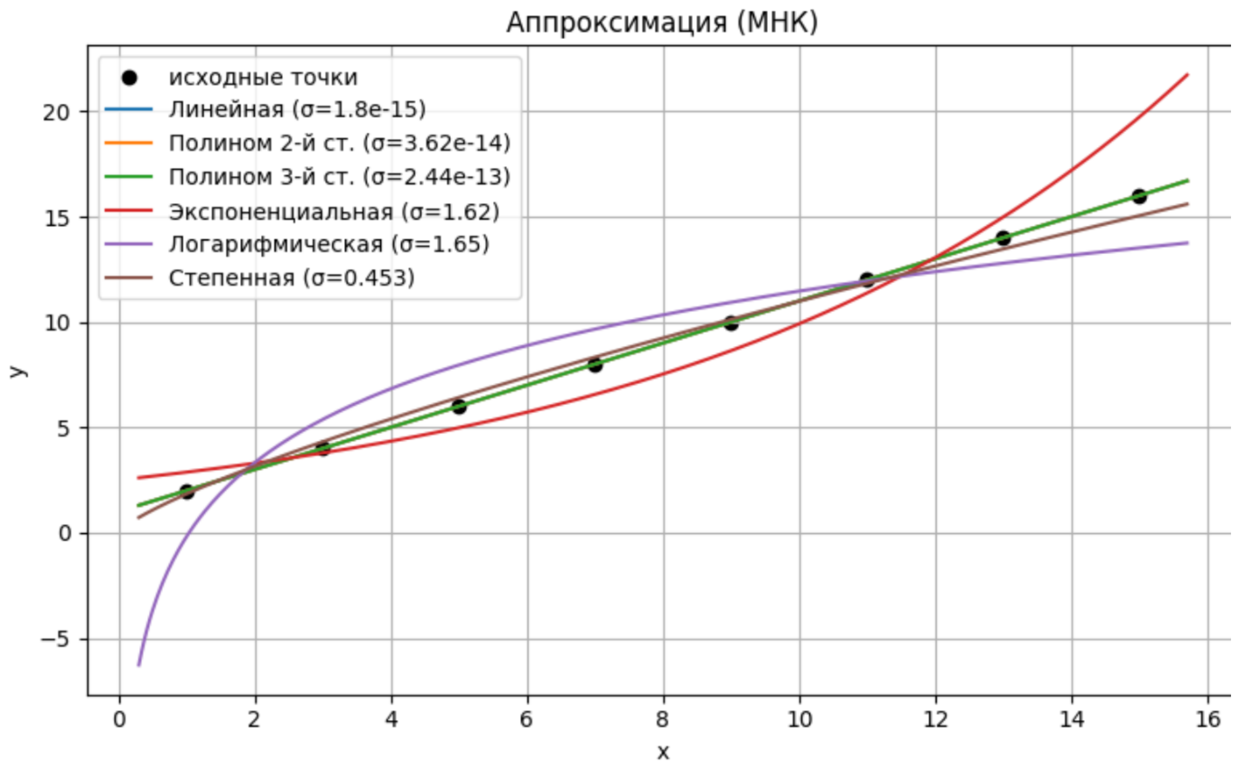
Results.txt

```
Аппроксимация методом наименьших квадратов
============================================================
Линейная         σ=1.8039e-15  R²=1 (отличное согласие)  coef=[1, 1]  r=1
Полином 2-й ст.  σ=3.61984e-14  R²=1 (отличное согласие)  coef=[1, 1, 9.372e-17]
Полином 3-й ст.  σ=2.4371e-13  R²=1 (отличное согласие)  coef=[1, 1, -4.0746e-16, -5.9064e-17]
Экспоненциальная σ=1.6216  R²=0.874782 (хорошее согласие)  coef=[2.5034, 0.13763]
Логарифмическая  σ=1.64881  R²=0.870543 (хорошее согласие)  coef=[-0.1848, 5.0598]
Степенная        σ=0.452539  R²=0.990248 (отличное согласие)  coef=[1.841, 0.77587]
------------------------------------------------------------
Лучшее приближение → Линейная

Линейная
 i      x_i        y_i      φ(x_i)       ε_i
 1        1          2           2  -8.8818e-16
 2        3          4           4            0
 3        5          6           6            0
 4        7          8           8   1.7764e-15
 5        9         10          10   1.7764e-15
 6       11         12          12   1.7764e-15
 7       13         14          14   1.7764e-15
 8       15         16          16   3.5527e-15

Полином 2-й ст.
 i      x_i        y_i      φ(x_i)       ε_i
 1        1          2           2  -4.0412e-14
 2        3          4           4  -3.8192e-14
 3        5          6           6  -3.6415e-14
 4        7          8           8  -3.5527e-14
 5        9         10          10  -3.3751e-14
 6       11         12          12  -3.3751e-14
 7       13         14          14  -3.5527e-14
 8       15         16          16  -3.5527e-14
```

```
Полином 3-й ст.
 i      x_i        y_i      φ(x_i)       ε_i
 1         1         2           2  -3.8725e-13
 2         3         4           4  -3.4639e-13
 3         5         6           6  -2.9843e-13
 4         7         8           8  -2.3981e-13
 5         9        10          10   -1.652e-13
 6        11        12          12   -7.816e-14
 7        13        14          14   2.8422e-14
 8        15        16          16   1.5632e-13

Экспоненциальная
 i      x_i        y_i      φ(x_i)       ε_i
 1         1         2      2.8728      -0.8728
 2         3         4      3.7831      0.21686
 3         5         6      4.9819       1.0181
 4         7         8      6.5606       1.4394
 5         9        10      8.6396       1.3604
 6        11        12      11.377      0.62265
 7        13        14      14.983     -0.98264
 8        15        16       19.73      -3.7304

Логарифмическая
 i      x_i        y_i      φ(x_i)       ε_i
 1         1         2     -0.1848       2.1848
 2         3         4      5.3739      -1.3739
 3         5         6      7.9586      -1.9586
 4         7         8      9.6611      -1.6611
 5         9        10      10.933     -0.93265
 6        11        12      11.948     0.051999
 7        13        14      12.793       1.2067
 8        15        16      13.517       2.4827
```


```
 4         7         8      6.5606       1.4394
 5         9        10      8.6396       1.3604
 6        11        12      11.377      0.62265
 7        13        14      14.983     -0.98264
 8        15        16       19.73      -3.7304

Логарифмическая
 i      x_i        y_i      φ(x_i)       ε_i
 1         1         2     -0.1848       2.1848
 2         3         4      5.3739      -1.3739
 3         5         6      7.9586      -1.9586
 4         7         8      9.6611      -1.6611
 5         9        10      10.933     -0.93265
 6        11        12      11.948     0.051999
 7        13        14      12.793       1.2067
 8        15        16      13.517       2.4827
```


```
Степенная
 i      x_i        y_i      φ(x_i)       ε_i
 1         1         2       1.841      0.15899
 2         3         4      4.3176     -0.31759
 3         5         6      6.4175     -0.41752
 4         7         8      8.3319     -0.33189
 5         9        10      10.126     -0.12571
 6        11        12      11.832      0.16842
 7        13        14      13.469      0.53108
 8        15        16      15.051      0.94948
```



Аппроксимация (МНК)
исходные точки
Линейная (σ=1.8e-15)
Полином 2-й ст. (σ=3.62e-14)
Полином 3-й ст. (σ=2.44e-13)
Экспоненциальная (σ=1.62)
Логарифмическая (σ=1.65)
Степенная (σ=0.453)
y
x

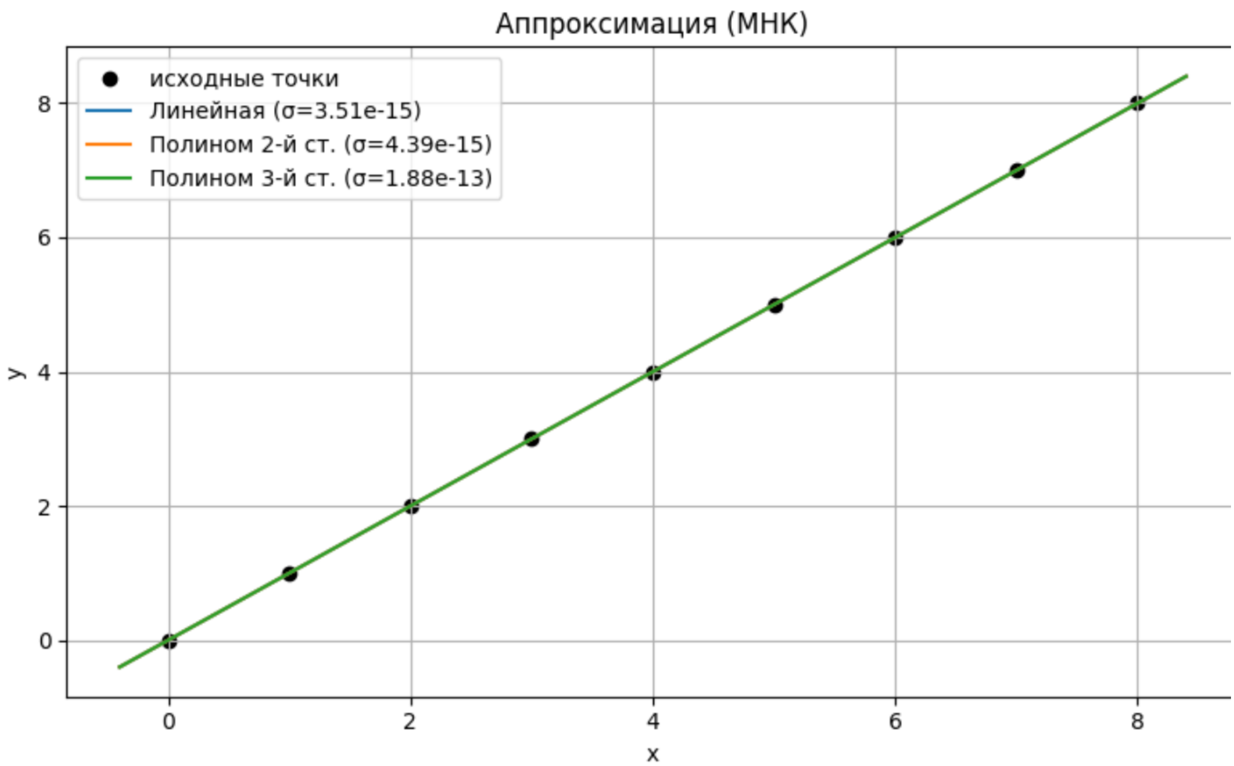
Пример №2 ввода с клавиатуры.

```
Введите пары x y (пустая строка — конец ввода):
0 0
1 1
2 2
3 3
4 4
5 5
6 6
7 7
8 8

Принято 9 точек.
→ exponential пропущена: Экспоненциальная модель требует y > 0
→ logarithmic пропущена: Логарифмическая модель требует x > 0
→ power пропущена: Степенная модель требует x, y > 0

Результаты:
Линейная         σ=3.51471e-15  R²=1 (отличное согласие)  coef=[4.2809e-16, 1]  r=1
Полином 2-й ст.  σ=4.38999e-15  R²=1 (отличное согласие)  coef=[1.1312e-15, 1, 2.0269e-16]
Полином 3-й ст.  σ=1.88411e-13  R²=1 (отличное согласие)  coef=[1.6572e-14, 1, -1.1613e-15, -6.9669e-16]

Лучшее приближение → Линейная
Отчёт сохранён в /Users/alexb/PycharmProjects/pythonProject6/results.txt
```

Result.txt

```
Аппроксимация методом наименьших квадратов
============================================================
Линейная         σ=3.51471e-15  R²=1 (отличное согласие)  coef=[4.2809e-16, 1]  r=1
Полином 2-й ст.  σ=4.38999e-15  R²=1 (отличное согласие)  coef=[1.1312e-15, 1, 2.0269e-16]
Полином 3-й ст.  σ=1.88411e-13  R²=1 (отличное согласие)  coef=[1.6572e-14, 1, -1.1613e-15, -6.9669e-16]
------------------------------------------------------------
Лучшее приближение → Линейная

Линейная
 i      x_i        y_i      φ(x_i)       ε_i
 1         0          0   4.2809e-16  -4.2809e-16
 2         1          1            1   3.3307e-16
 3         2          2            2   1.1102e-15
 4         3          3            3   1.7764e-15
 5         4          4            4   2.6645e-15
 6         5          5            5   3.5527e-15
 7         6          6            6   4.4409e-15
 8         7          7            7   5.3291e-15
 9         8          8            8   6.2172e-15

Полином 2-й ст.
 i      x_i        y_i      φ(x_i)       ε_i
 1         0          0   1.1312e-15  -1.1312e-15
 2         1          1            1  -8.8818e-16
 3         2          2            2  -8.8818e-16
 4         3          3            3  -1.3323e-15
 5         4          4            4  -2.6645e-15
 6         5          5            5  -3.5527e-15
 7         6          6            6  -4.4409e-15
 8         7          7            7  -7.1054e-15
 9         8          8            8  -8.8818e-15
```

```
 7          6          6           6   4.4409e-15
 8          7          7           7   5.3291e-15
 9          8          8           8   6.2172e-15

Полином 2-й ст.
 i      x_i        y_i      φ(x_i)       ε_i
 1          0          0   1.1312e-15  -1.1312e-15
 2          1          1           1  -8.8818e-16
 3          2          2           2  -8.8818e-16
 4          3          3           3  -1.3323e-15
 5          4          4           4  -2.6645e-15
 6          5          5           5  -3.5527e-15
 7          6          6           6  -4.4409e-15
 8          7          7           7  -7.1054e-15
 9          8          8           8  -8.8818e-15

Полином 3-й ст.
 i      x_i        y_i      φ(x_i)       ε_i
 1          0          0   1.6572e-14  -1.6572e-14
 2          1          1           1  -1.3101e-14
 3          2          2           2  -2.6645e-15
 4          3          3           3   1.8208e-14
 5          4          4           4   5.3291e-14
 6          5          5           5   1.0836e-13
 7          6          6           6   1.8563e-13
 8          7          7           7   2.9132e-13
 9          8          8           8   4.2988e-13
```



Пример ввода с dataset`a:

data.csv

```
0.0,0.0
0.2,2.396
0.4,4.680
0.6,6.374
0.8,6.810
1.0,6.000
1.2,4.685
1.4,3.470
1.6,2.542
1.8,1.879
2.0,1.412
```

```
(venv) alexb@AmNym pythonProject6 % python main.py -i data.csv

Принято 11 точек.
→ exponential пропущена: Экспоненциальная модель требует y > 0
→ logarithmic пропущена: Логарифмическая модель требует x > 0
→ power пропущена: Степенная модель требует x, y > 0

Результаты:
Линейная         σ=2.10117  R²=0.0161184 (слабое согласие)  coef=[4.0841, -0.42523]  r=-0.126958
Полином 2-й ст.  σ=0.932766  R²=0.806105 (хорошее согласие)  coef=[0.88639, 10.234, -5.3296]
Полином 3-й ст.  σ=0.335814  R²=0.974869 (отличное согласие)  coef=[-0.43557, 20.736, -19.1, 4.5901]

Лучшее приближение → Полином 3-й ст.
Отчёт сохранён в /Users/alexb/PycharmProjects/pythonProject6/results.txt
```

Results.txt

data.csv results.txt

```
Аппроксимация методом наименьших квадратов
============================================================
Линейная         σ=2.10117  R²=0.0161184 (слабое согласие)  coef=[4.0841, -0.42523]  r=-0.126958
Полином 2-й ст.  σ=0.932766  R²=0.806105 (хорошее согласие)  coef=[0.88639, 10.234, -5.3296]
Полином 3-й ст.  σ=0.335814  R²=0.974869 (отличное согласие)  coef=[-0.43557, 20.736, -19.1, 4.5901]
------------------------------------------------------------
Лучшее приближение → Полином 3-й ст.

Линейная
 i      x_i        y_i      φ(x_i)       ε_i
 1        0          0       4.0841     -4.0841
 2      0.2      2.396       3.9991     -1.6031
 3      0.4       4.68        3.914     0.76595
 4      0.6      6.374        3.829       2.545
 5      0.8       6.81        3.744       3.066
 6        1          6       3.6589      2.3411
 7      1.2      4.685       3.5739      1.1111
 8      1.4       3.47       3.4888   -0.018818
 9      1.6      2.542       3.4038    -0.86177
10      1.8      1.879       3.3187     -1.4397
11        2      1.412       3.2337     -1.8217

Полином 2-й ст.
 i      x_i        y_i      φ(x_i)       ε_i
 1        0          0      0.88639    -0.88639
 2      0.2      2.396         2.72    -0.32399
 3      0.4       4.68       4.1272     0.55277
```

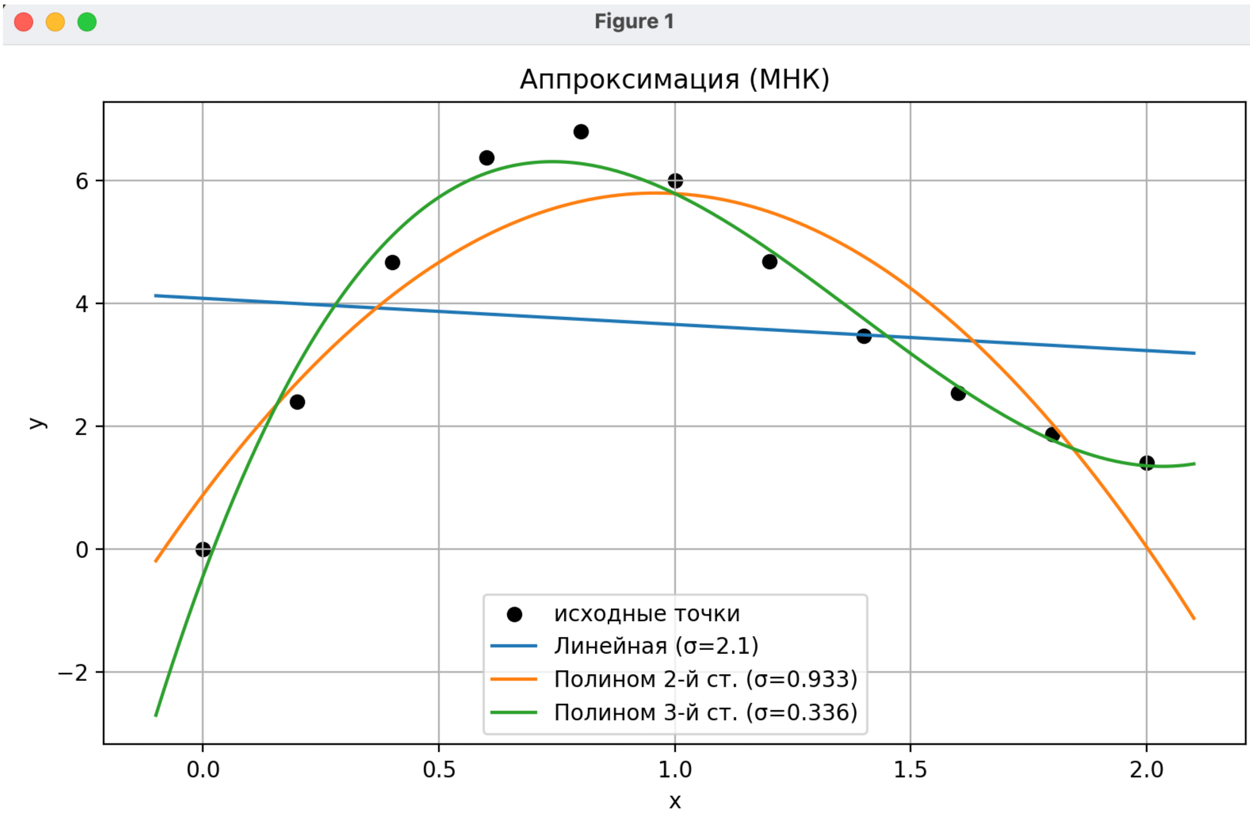
data.csv   results.txt

Полином 2-й ст.

i	x_i	y_i	φ(x_i)	ε_i
1	0	0	0.88639	-0.88639
2	0.2	2.396	2.72	-0.32399
3	0.4	4.68	4.1272	0.55277
4	0.6	6.374	5.1081	1.2659
5	0.8	6.81	5.6626	1.1474
6	1	6	5.7907	0.20926
7	1.2	4.685	5.4925	-0.80751
8	1.4	3.47	4.7679	-1.2979
9	1.6	2.542	3.617	-1.075
10	1.8	1.879	2.0396	-0.16063
11	2	1.412	0.035937	1.3761

Полином 3-й ст.

i	x_i	y_i	φ(x_i)	ε_i
1	0	0	-0.43557	0.43557
2	0.2	2.396	2.9844	-0.58838
3	0.4	4.68	5.0967	-0.41666
4	0.6	6.374	6.1216	0.2524
5	0.8	6.81	6.2795	0.53048
6	1	6	5.7907	0.20926
7	1.2	4.685	4.8756	-0.1906
8	1.4	3.47	3.7544	-0.28441
9	1.6	2.542	2.6475	-0.10552
10	1.8	1.879	1.7752	0.10376
11	2	1.412	1.3579	0.054105



Вывод

В ходе данной работы мною была выполнена аппроксимация функций с использованием линейного, квадратичного, кубического, экспоненциального и логарифмического приближений. Также на основе этих методов мною был реализован Python скрипт, который реализует метод наименьших квадратов и строит графики исходной функции и аппроксимаций. Исследование позволило определить наилучшее приближение, вычислить среднеквадратические отклонения и коэффициент корреляции Пирсона для линейной зависимости.