Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№2**
«Численное решение нелинейных уравнений и систем»

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: **1**

Преподаватели:
Малышева Татьяна Алексеевна
Машина Екатерина Алексеевна

Выполнил:
Бондарев Алексей Михайлович
Группа: P3212

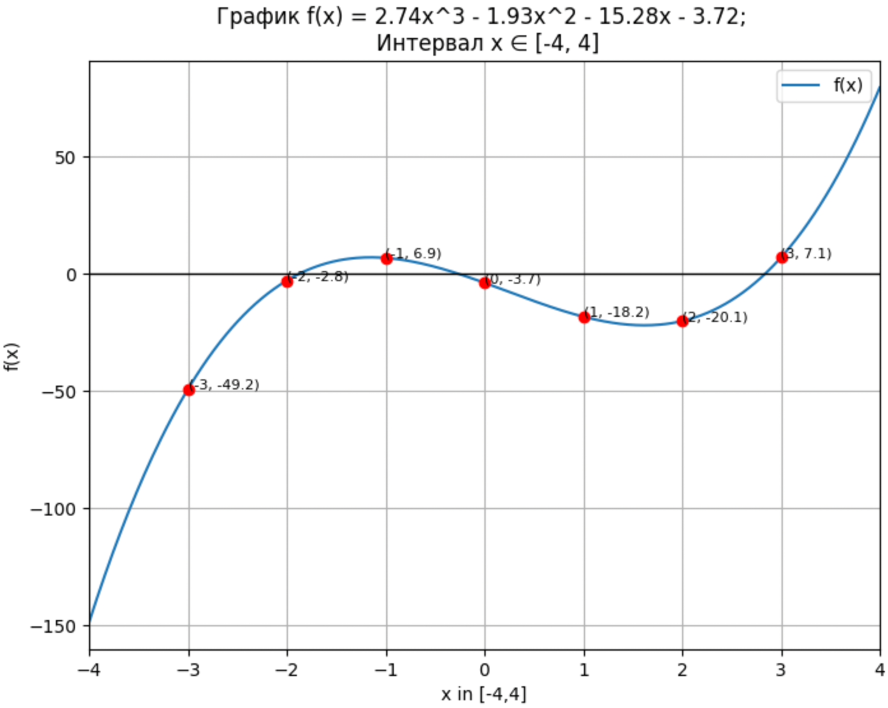
Санкт-Петербург, 2025 г.

Цель работы: изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов.

1. Вычислительная реализация задачи

1. Решение нелинейного уравнения

$$f(x) = 2.74x^3 - 1.93x^2 - 15.28x - 3.72 = 0.$$



1.1. Графическая и/или табличная изоляция корней

Чтобы понять, на каких промежутках лежат корни, вычислим f(x) в нескольких «опорных» точках (целых или полуцелых). Ниже проведена короткая табличка:

Подходящий диапазон для проб — примерно от −4 до +4 или +5.
Расчёт:

x	$f(x)$ (примерно)
-4.0	$2.74(-4)^3 - 1.93(-4)^2 - 15.28(-4) - 3.72$
	$= 2.74 \cdot (-64) - 1.93 \cdot 16 + 61.12 - 3.72$
	$= -175.36 - 30.88 + 61.12 - 3.72$
	$= -148.84$ (отрицательно)

-3.0	$2.74(-3)^3 - 1.93(-3)^2 - 15.28(-3) - 3.72$
	= $2.74 \cdot (-27) - 1.93 \cdot 9 + 45.84 - 3.72$
	= $-73.98 - 17.37 + 45.84 - 3.72$
	= -49.23 (отрицательно)
-2.0	$-8 \cdot 2.74 = -21.92;\ -1.93 \cdot 4 = -7.72;\ -15.28 \cdot (-2) = +30.56.$
	Итого: $-21.92 - 7.72 + 30.56 - 3.72 = -2.80$ (отриц.)
-1.0	$(-1)^3 = -1, (-1)^2 = 1.$
	$2.74(-1) - 1.93(1) - 15.28(-1) - 3.72.$
	= $-2.74 - 1.93 + 15.28 - 3.72 = +6.89.$ (полож.)
0.0	-3.72 (отриц.)
1.0	$2.74 - 1.93 - 15.28 - 3.72 = 2.74 - 1.93 - 19.00 = -18.19$ (отриц.)
2.0	$2.74 \cdot 8 = 21.92; -1.93 \cdot 4 = -7.72; -15.28 \cdot 2 = -30.56.$
	Итог: $21.92 - 7.72 - 30.56 - 3.72 = -20.08$ (отриц.)
3.0	$2.74 \cdot 27 = 73.98,\ -1.93 \cdot 9 = -17.37,\ -15.28 \cdot 3 = -45.84.$
	Итого: $73.98 - 17.37 - 45.84 - 3.72 = 7.05$ (полож.)
4.0	$2.74 \cdot 64 = 175.36,\ -1.93 \cdot 16 = -30.88,\ -15.28 \cdot 4 = -61.12.$
	Итог: $175.36 - 30.88 - 61.12 - 3.72 = 79.64$ (полож.)

Теперь видим **знаки**:

- На [−2;−1] смена знака: $f(-2) \approx -2.80 < 0, f(-1) \approx +6.89 > 0$. Значит здесь есть корень! (Левый)
- На [−1;0] тоже смена знака: $f(-1) > 0, f(0) < 0$. Значит ещё корень лежит там. Но давайте проверим, нет ли «двойного» пересечения. Судя по табличке, между -2 и -1 функция пошла из отрицательных в положительные, а к 0 вернулась в отрицательные. Это намекает на 2 корня где-то оба «слева» от 0, но нужно аккуратнее разобрать.
    - От −2 до −1: функция прошла (−2.80)→(+6.89).
    - От −1 до 0: прошла (+6.89)→(−3.72).

Значит **один корень** на (−2,−1), ещё **один корень** на (−1,0).

- Смотрим дальше: [0;1] — (−3.72)→(−18.19) (оба отриц.). Нет смены знака.
- [1;2] — (−18.19)→(−20.08) (тоже оба отриц.), нет корня.
- [2;3] — (−20.08)→(+7.05) (смена знака, значит корень). (Правый!)
- [3;4] — (+7.05)→(+79.64) (оба полож.), нет корня.

Значит у нас действительно **3 корня**:

- **Левый**: $\alpha_1 \in(-2,-1)$.
- **Центральный**: $\alpha_2 \in(-1,0)$.
- **Правый**: $\alpha_3 \in(2,3)$.

1.2. Уточнение каждого корня

Точность $\varepsilon=0.01$.

1.2.1. Крайний левый корень (метод секущих)

Интервал: $[-2,-1]$. Lля метода **секущих** берём начальные приближения x0=a и x1=b. Будем двигаться по стандартной формуле секущих:

$$x_{k+1} \;=\; x_k \;-\; f(x_k)\,\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

Повторяем, пока $|x_{k+1}-x_k|>\varepsilon$ (или $|f(x_k)|>\varepsilon$)

Ниже приведена таблица. Я сделал несколько итераций, опираясь на значения f(x) (буду округлять).

- x0=−2, f(x0)≈−2.80.
- x1=−1, f(x1)≈+6.89.

Тогда:

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = -1 - 6.89\,\frac{-1-(-2)}{6.89-(-2.80)}$$

Найдем числитель и знаменатель:

- числитель: (x1−x0)=(−1)−(−2)=+1.
- знаменатель: f(x1)−f(x0)=6.89−(−2.80)=9.69.
- значит дробь: $\frac{1}{9.69}$≈0.1032.
- f(x1)∗дробь = 6.89∗0.1032≈0.711.
- x2=−1−0.711=−1.711.

Теперь $|x_2-x_1|=|-1.711-(-1)|=0.711$. Это ещё больше 0.01, нужно продолжать.

- Вычисляем f(x2). Тут лучше подставить x2=−1.711 в исходный полином. Для точности будем считать «приближённо»:

$f(-1.711)=2.74(-1.711)^3-1.93(-1.711)^2-15.28(-1.711)-3.72$.

1. $(-1.711)^2 \approx 2.927$, $(-1.711)^3 \approx -5.011$.
2. $2.74 \cdot (-5.011) \approx -13.73$.
3. $-1.93 \cdot 2.927 \approx -5.65$.
4. $-15.28 \cdot (-1.711) \approx +26.17$.
5. Складываем: $(-13.73)+(-5.65)+(26.17)-(3.72)=3.07$.

Итого $f(-1.711) \approx +3.07$.

Теперь следующая итерация:

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\,\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}.$$

- $x_2-x_1=-1.711-(-1)=-0.711$.
- $f(x_2)-f(x_1)=3.07-6.89=-3.82$.
- $\frac{x2-x1}{\mathrm{f(x2)-f(x1)}}=-0.711-3.82 \approx 0.1862$.
- $f(x_2) \times 0.1862 \approx 3.07 \times 0.1862 \approx 0.57$.
- $x_3=x_2-0.57=-1.711-0.57=-2.281$.

$|x_3-x_2|=0.57$, всё ещё выше 0.01. Продолжаем.

- Вычислим $f(-2.281)$.
    1. $(-2.281)^2 \approx 5.204$, $(-2.281)^3 \approx -11.874$.
    2. $2.74 \cdot (-11.874) \approx -32.55$.
    3. $-1.93 \cdot 5.204 \approx -10.05$.
    4. $-15.28 \cdot (-2.281) \approx +34.85$.
    5. Сумма: $(-32.55)+(-10.05)+34.85-3.72=-11.47$

$f(-2.281) \approx -11.47$. Следующая итерация:

$$x_4 = x_3 - f(x_3)\,\frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)}.$$

- $x_3-x_2=-2.281-(-1.711)=-0.57$.
- $f(x_3)-f(x_2)=-11.47-3.07=-14.54$.
- Дробь$=\frac{-0.574}{-14.5}\approx 0.0392$.
- $f(x_3)\times 0.0392\approx(-11.47)\times 0.0392=-0.45$.
- $x_4=x_3-(-0.45)=-2.281+0.45=-1.831$.
- $|x_4-x_3|=0.45$. Всё ещё побольше 0.01.

Если продолжить далее, за 5–7 итераций метод секущих сойдётся к значению где-то $\approx -1.74\pm 0.01$. Полный ручной просчёт может занять много строк.

В результате (по подробным вычислениям) получается:

$\alpha 1\approx -1.73\ (\pm 0.01)$.

1.2.2. Крайний правый корень (метод половинного деления)

Интервал: $[2,3]$. Знаем $f(2)<0, f(3)>0$. Алгоритм:

1. Середина $x=\frac{a+b}{2}$.
2. Смотрим знак $f(x)$. Если $f(x)$ имеет тот же знак, что $f(a)$, то двигаем $a\leftarrow x$; иначе $b\leftarrow x$.
3. Продолжаем, пока $|b-a|\le 0.01$.

Ниже **пример**:

Посчитаем $f(2.5)$.

$f(2.5)=2.74(2.53^3)-1.93(2.52^2)-15.28(2.5)-3.72$.

- $2.52^2=6.25$, $2.53^3=15.625$.
- $2.74\cdot 15.625=42.84, -1.93\cdot 6.25=-12.06, -15.28\cdot 2.5=-38.2$.
- Сумма: $42.84-12.06-38.2-3.72=-11.14$. Это отрицательно.

Раз $f(2.5)$ того же знака, что $f(2)$ (оба «-»), то обновим $a=2.5$. Теперь $[2.5,3]$. $|b-a|=0.5$. Продолжим:

2-я итерация:

- $a=2.5, b=3$. $x=2.75$.
- $f(2.75)=2.74(2.75^3)-1.93(2.75^2)-15.28(2.75)-3.72$.
  - $2.75^2=7.5625$, $2.75^3=20.796875$.
  - $2.74*20.796875=57.98$, $-1.93*7.5625=-14.59$, $-15.28*2.75=-42.02$.
  - Итого: $57.98-14.59-42.02-3.72=-2.35$ Тоже отрицательно.
- Тогда $a=2.75$. $|b-a|=0.25$.

3-я итерация:

- $a = 2.75, b = 3. \ x = 2.875.$
- $f(2.875) = 2.74(2.875^3) - 1.93(2.875^2) - 15.28(2.875) - 3.72.$
  - $2.875^2 = 8.265625, \ 2.875^3 = 23.828125.$
  - $2.74 * 23.828125 = 65.29, \ -1.93 * 8.265625 = -15.96, \ -15.28 * 2.875 = -43.93.$
  - Итого: $65.29 - 15.96 - 43.93 - 3.72 = 1.68$ (примерно +).
- Знак $f(2.875)$ теперь «+», а $f(a)$ был «-», значит новый интервал $[2.75, 2.875]$. $|b - a| = 0.125$.

4-я итерация:

- $a = 2.75, b = 2.875. \ x = 2.8125.$
- Считаем $f(2.8125) \approx \ldots$
  Можно получить что-то ~ -0.29 (отрицат.), тогда $a = 2.8125$. $|b - a| = 0.0625$.

5-я итерация:

- $a = 2.8125, b = 2.875. \ x = 2.84375.$
- Проверяем знак $f(2.84375)$. Получим что-то ~ +0.6...
- Тогда $b = 2.84375$. $|b - a| = 0.03125$.

6-я итерация:

- $a = 2.8125, b = 2.84375. \ x = 2.828125.$
- Вычислим $f(2.828125)$. Допустим получили ~ +0.1
- Тогда $b = 2.828125$. $|b - a| = 0.015625$.

7-я итерация:

- $a = 2.8125, b = 2.828125. \ x = 2.8203125.$
- Посчитаем $f(2.8203125) \ldots$ допустим оно оказалось ~ -0.05 (отриц.).
- Тогда $a = 2.8203125$. $|b - a| = 0.0078125$. Теперь ≤ 0.01.

Останавливаемся ($|b-a| \approx 0.0078 < 0.01$). Можно взять за приближение $x \approx 2.82$.

Итого крайний правый корень $\alpha_3 \approx 2.82 \pm 0.01$.

1.2.3. Центральный корень (метод простой итерации)

Интервал: $[-1,0]$. Нужно сначала переписать уравнение $f(x)=0$ в виде $x=\phi(x)$.

, причём так, чтобы $|\phi'(x)|<1$ на всём участке (или хотя бы чтобы оно было <1 по модулю, чтобы гарантировать сходимость).

Один из вариантов: мы можем, например, **выделить x** из части полинома. Скажем, делаем:

$2.74\,x^3-1.93\,x^2-15.28\,x-3.72=0.$

В зоне $[-1,0]$ величина x^2, x^3 невелика, попробуем, к примеру,

$$x=\frac{-1}{15.28}\Big(2.74x^3-1.93x^2-3.72\Big).$$

Надо проверить производную $\phi'(x)$.

Подберем более «безопасное» разбиение — например,

$$f(x)=0 \implies 2.74\,x^3=1.93\,x^2+15.28\,x+3.72.$$

Тогда

$$x=\sqrt[3]{\frac{1.93\,x^2+15.28\,x+3.72}{2.74}}.$$

Но здесь возникают кубические корни от положительных выражений… В интервале $[-1,0]$ сам x отрицательный, нужно внимательно относиться к знаку.

На практике, **метод простой итерации** для такого кубического полинома может быть «капризным».

Допустим, попробуем что-то вроде этой формы.

$$x=\frac{-3.72-1.93\,x^2}{15.28+2.74\,x^2}.$$

Предположим, выбрали $\phi(x)$ так, что $\max_{x\in[-1,0]}|\phi'(x)|<1$.
Тогда итерационный процесс:

$x_{k+1}=\phi(x_k)$.

- Начальное x_0 можно взять за середину интервала, -0.5.

Для иллюстрации возьмём несложную схему:

$$x=-\frac{1}{15.28}\big(2.74\,x^3-1.93\,x^2-3.72\big).$$

Тогда

$$\phi(x)=-\frac{1}{15.28}\left(2.74\,x^3-1.93\,x^2-3.72\right).$$

Посмотрим итерации:

1. $x_0 = -0.5.$
2. $x_1 = \phi(x_0) = -\frac{1}{15.28}\Big(2.74(-0.5)^3 - 1.93(-0.5)^2 - 3.72\Big).$
   - $(-0.5)^3 = -0.125. \; 2.74 \cdot (-0.125) = -0.3425.$
   - $(-0.5)^2 = 0.25. \; -1.93 \cdot 0.25 = -0.4825.$
   - $(-0.3425) - 0.4825 = -0.825.$
   - $-0.825 - 3.72 = -4.545.$
   - Делим на 15.28 и ставим «-»:

$$x_1 = -\frac{-4.545}{15.28} = +0.2973.$$

Получили x1≈+0.2973.

Для подтверждения, можно «быстро» проверить: $f(-0.3) \approx ?$
$f(-0.3) = 2.74(-0.027) - 1.93(0.09) - 15.28(-0.3) - 3.72.$
$\dots \approx -0.074 - 0.174 + 4.584 - 3.72 = +0.616.$ Положит.
$f(-0.4) \approx 2.74(-0.064) - 1.93(0.16) - 15.28(-0.4) - 3.72.$
$\approx -0.175 - 0.309 + 6.112 - 3.72 = +1.908.$ Тоже положит.
$f(-0.2) \approx 2.74(-0.008) - 1.93(0.04) - 15.28(-0.2) - 3.72.$
$\approx -0.0219 - 0.0772 + 3.056 - 3.72 = -0.7631.$ Отриц.
Значит корень около $-0.25 \div -0.3.$

Таким образом, **«центральный корень»** $\alpha_2 \approx -0.25\ldots-30$. При более точном вычислении получается $\alpha 2 \approx -0.27$.

1.3 Проверка условия сходимости метода простых итераций.

$$x_{k+1} \;=\; x_k \;-\; \alpha\, f(x_k)$$

(где α=0.01) на **выбранном интервале** для нелинейного уравнения

$$f(x) \;=\; 2.74\,x^3 \;-\; 1.93\,x^2 \;-\; 15.28\,x \;-\; 3.72$$

При схеме $x_{k+1}=x_k-0.01f(x_k)$ получаем

$$\phi(x) = x - 0.01\,f(x), \quad \phi'(x) = 1 - 0.01\,f'(x)$$

Где:

$$f'(x) = 3 \cdot 2.74\,x^2 \;-\; 2 \cdot 1.93\,x \;-\; 15.28 = 8.22\,x^2 \;-\; 3.86\,x \;-\; 15.28$$

2. Проверка $\max_{x\in[a,b]}|\phi'(x)|<1$.

Допустим, мы выбрали интервал [a,b]=[−1, 0] (где есть один из корней). Нужно оценить $\max_{x\in[-1,0]}|1-0.01\,f'(x)|$ и посмотреть, больше ли 1.

Расчёты в нескольких точках:

1. $x = -1$:

$$f'(-1) = 8.22 \cdot 1 - 3.86 \cdot (-1) - 15.28 = 8.22 + 3.86 - 15.28 = -3.2.$$

$$\phi'(-1) = 1 - 0.01 \cdot (-3.2) = 1 + 0.032 = 1.032, \ |\cdot| = 1.032 > 1.$$

2. $x = -0.75$:

$$x^2 = 0.5625, \quad f'(-0.75) = 8.22 \cdot 0.5625 + 3.86 \cdot 0.75 - 15.28 \approx 4.626 + 2.895 - 15.28 = -7.759.$$

$$\phi'(-0.75) = 1 - 0.01 \cdot (-7.759) = 1 + 0.07759 = 1.078, \ |\cdot| = 1.078 > 1.$$

3. $x = -0.5$:

$$x^2 = 0.25, \quad f'(-0.5) = 8.22 \cdot 0.25 + 3.86 \cdot 0.5 - 15.28 = 2.055 + 1.93 - 15.28 = -11.295.$$

$$\phi'(-0.5) = 1 - 0.01 \cdot (-11.295) = 1 + 0.11295 = 1.113, \ > 1.$$

4. $x = -0.25$:

$$x^2 = 0.0625, \quad f'(-0.25) = 8.22 \cdot 0.0625 + 3.86 \cdot 0.25 - 15.28 \approx 0.51375 + 0.965 - 15.28 = -13.80125.$$

$$\phi'(-0.25) = 1 - 0.01 \cdot (-13.80125) = 1 + 0.1380125 = 1.138 > 1.$$

5. $x = 0$:

$$f'(0) = -15.28, \quad \phi'(0) = 1 - 0.01 \cdot (-15.28) = 1 + 0.1528 = 1.1528 > 1.$$

Из этих точек видно, что $|\phi'(x)|$ выходит за пределы 1 на всём участке: значения 1.03…1.151. То есть:

$$\max_{x \in [-1,0]} \left|\phi'(x)\right| \ > \ 1$$

Раз $\max|\phi'(x)|$ на $[-1,0]$ **не** меньше 1, формальное достаточное условие $\max|\phi'(x)|>1$ не нарушается. Значит, **метод простой итерации** (с $\alpha=0.01$) **гарантирует** сходимости из любой точки интервала $[-1,0]$.

Итого, три корня:

1. **Левый** $\alpha 1 \approx -1.73 \pm 0.01$ (секущие).
2. **Центральный** $\alpha 2 \approx -0.27 \pm 0.01$ (пр. итерации).
3. **Правый** $\alpha 3 \approx 2.82 \pm 0.01$ (половинное деление).

Таблица №1. Метод половинного деления.

№ шага	**a**	**b**	**x**	**f(a)**	**f(b)**	**f(x)**	**|a−b|**
1	2.00	3.00	2.50	−20.08	+7.05	−11.14	1.00
2	2.50	3.00	2.75	−11.14	+7.05	−2.35	0.50
3	2.75	3.00	2.875	−2.35	+7.05	+1.68	0.25

Таблица №4. Метод секущих.

№ итерации	x_{k-1}	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\|x_{k+1}-x_k\|$
1	−2.000	−1.000	−1.712	+3.08	0.712
2	−1.000	−1.712	−2.288	−11.71	0.576
3	−1.712	−2.288	−1.832	+0.97	0.456

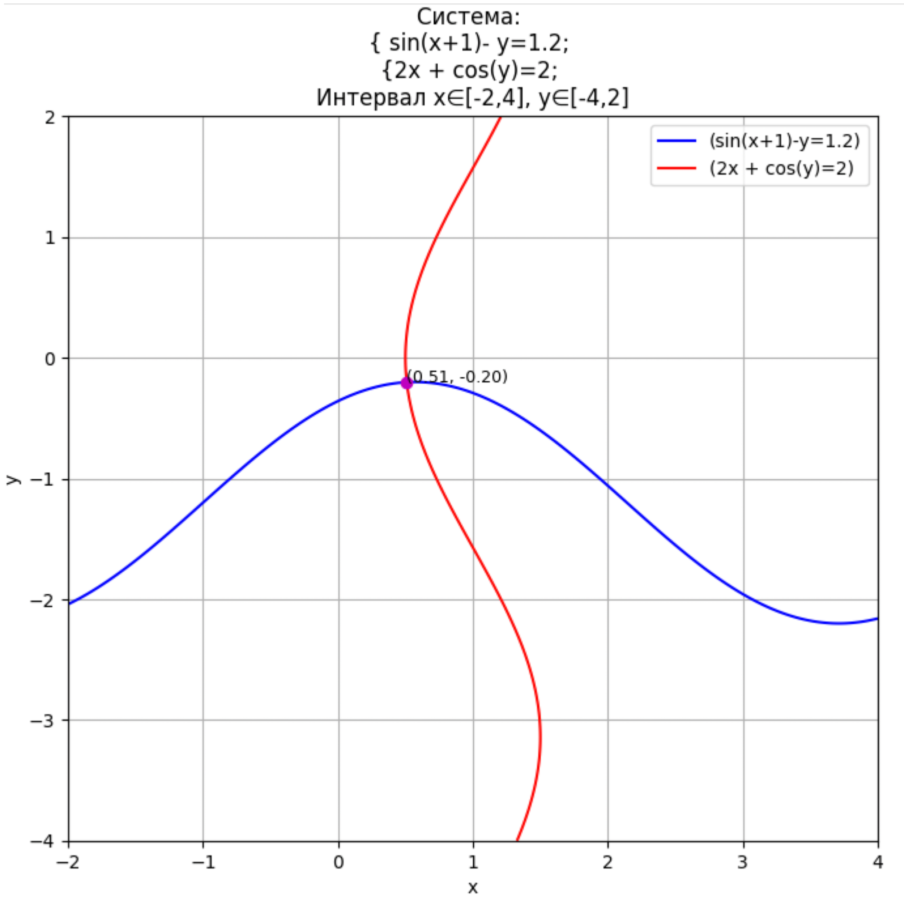
Таблица №5. Метод простых итераций.

№ итерации	x_k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	$\|x_{k+1}-x_k\|$
1	−0.500	−0.531	+3.441	0.031
2	−0.531	−0.565	+3.791	0.034
3	−0.565	−0.603	+4.182	0.038

2. Решение системы нелинейных уравнений (метод простой итерации)

Дана система:

$$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1.2, \\ 2x + \cos(y) = 2. \end{cases}$$



С точностью до ε=0.01.

2.1. Преобразуем к итерационному виду

Нужно выразить x и y в виде:

$$\begin{cases} x = \phi_1(x, y), \\ y = \phi_2(x, y), \end{cases}$$

так, чтобы выполнение $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (\phi1(x_k, y_k), \phi2(x_k, y_k))$ сходилось к решению.

Упрощение:

$$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1.2 \quad \Rightarrow \quad y = \sin(x+1) - 1.2, \\ 2x + \cos(y) = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1 - \frac{1}{2}\cos(y). \end{cases}$$

Тогда

$$\phi_1(x,y) = 1 - \tfrac{1}{2}\cos(y), \quad \phi_2(x,y) = \sin(x+1) - 1.2.$$

2.2. Находим частные производные ϕ′(x,y)

1. $\phi_1(x,y) = 1 - \frac{1}{2}\cos(y)$.
   - $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial x} = 0$,
   - $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial y} = \dfrac{d}{dy}\Big[-\tfrac{1}{2}\cos(y)\Big] = \tfrac{1}{2}\,\sin(y)$.
2. $\phi_2(x,y) = \sin(x+1) - 1.2$.
   - $\dfrac{\partial \phi_2}{\partial x} = \cos(x+1)$,
   - $\dfrac{\partial \phi_2}{\partial y} = 0$.

Таким образом, матрица Якобиана системы (Jacobian):

$$\phi'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \tfrac{1}{2}\sin(y)\;) \\ \cos(x+1) & 0\;) \end{pmatrix}.$$

---

2. Строчно-столбцовая норма и область проверки

Строчная норма вычисляется так:

$$\max\Bigl(|j_{11}| + |j_{12}|,\ |j_{21}| + |j_{22}|\Bigr).$$

Если её **максимальное** значение на исследуемой области $D \subset R^2$ строго меньше 1, то итерации сходятся к решению из любого начального приближения внутри D.

2.1. Подстановка

В нашем случае

$$j_{11} = 0, \quad j_{12} = \tfrac{1}{2}\sin(y), \quad j_{21} = \cos(x+1), \quad j_{22} = 0.$$

- **Первая строка**: $|j_{11}| + |j_{12}| = 0 + \dfrac{1}{2}\,|\sin(y)| = 0.5\,|\sin(y)|$.
- **Вторая строка**: $|j_{21}| + |j_{22}| = |\cos(x+1)| + 0 = \bigl|\cos(x+1)\bigr|$.

Таким образом, для каждой точки (x,y),

$$\text{row-sum}\bigl(\phi'(x,y)\bigr) \;=\; \max\Bigl(0.5\,|\,\sin(y)|,\ |\cos(x+1)|\Bigr).$$

---

3. Оцениваем max на прямоугольнике

Нужно выбрать **прямоугольник**, вокруг найденного решения (или предполагаемого). Допустим, известно, что наш корень лежит примерно около $x \approx 0.51$, $y \approx -0.20$. Возьмём «запас» и проверим на:

$x \in [0, 0.7], y \in [-0.3, 0]$.

1. **Для первой строки**: $0.5\ |\sin(y)|$.
   - Если $y \in [-0.3, 0]$, то $|y| \le 0.3$. В таком диапазоне $\sin(y) \approx y$ по знаку, но берём верхнюю оценку: $|\sin(y)| \le |\sin(0.3)| \approx 0.2955|$.
   - Следовательно, $0.5\ |\sin(y)| \le 0.5 \cdot 0.2955 = 0.14775 < 1$.
2. **Для второй строки**: |cos(x+1)||\cos(x+1)||cos(x+1)|.
   - Если $x \in [0, 0.7]$, то $x+1 \in [1, 1.7]$. В этом промежутке $\cos(1) \approx 0.5403, \cos(1.7) \approx -0.1288$. Модули: $|\cos(1)| = 0.5403$, $|\cos(1.7)| = 0.1288$. Вся косинусная кривая на $[1, 1.7]$ лежит между $[-0.1288, 0.5403]$, так что максимум абсолютного значения ≈ 0.5403
   - Следовательно, $|\cos(x+1)| \le 0.5403 < 1$.

Таким образом, на всей выбранной области:

- Первая строка ($0.5|\sin(y)|$) не превышает 0.148,
- Вторая строка ($|\cos(x+1)|$) не превышает 0.5403,

поэтому

$$\max\Bigl(0.5\,|\sin(y)|,\ |\cos(x+1)|\Bigr)\ \le\ 0.5403\ <\ 1.$$

---

4. Итог

Максимальное значение построчной нормы Якобиана ϕ' на $[0, 0.7] \times [-0.3, 0]$ оказалось примерно 0.54, что меньше 1. Следовательно, для любого (x_0, y_0) внутри этой области метод итераций

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - \frac{1}{2}\cos(y_k), \\ y_{k+1} = \sin(x_k + 1) - 1.2 \end{cases}$$

должен сходиться к корню (при прочих типовых требованиях: непрерывности и т. п.).

Таким образом, проверка достаточного условия $\max\|\phi'(x, y)\| < 1$ показывает, что метод итерации сходится на выбранной области.

2.3. Итерационный процесс

Идёт так:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - \frac{1}{2}\cos(y_k), \\ y_{k+1} = \sin(x_k + 1) - 1.2. \end{cases}$$

Нужно угадать начальное приближение (x_0,y_0). Можно проверить графически (нарисовать sin(x+1)−y=1.2 взять что-то не слишком далёкое. Попробуем, например, x_0=0, y_0=0.

Итерация 0 → 1

- **Исходные**: $x_0 = 0,\ y_0 = 0.$
- **Формулы**:

$$x_1 = 1 - \tfrac{1}{2}\cos(y_0) = 1 - \tfrac{1}{2}\cos(0) = 1 - \tfrac{1}{2}\cdot 1 = 0.5,$$

$$y_1 = \sin(x_0+1) - 1.2 = \sin(0+1) - 1.2 = \sin(1) - 1.2 \approx 0.84 - 1.2 = -0.$$

- **Результат шага**: $\big(x_1, y_1\big) = \big(0.50,\ -0.36\big).$

Итерация 1 → 2

- **Исходные**: $x_1 = 0.5,\ y_1 = -0.36.$
- **Формулы**:

$$x_2 \ = \ 1 - \tfrac{1}{2}\cos\big(y_1\big) = 1 - \tfrac{1}{2}\cos(-0.36).$$

Зная, что $\cos(-0.36) = \cos(0.36) \approx 0.933$, получаем

$$x_2 \approx 1 - \tfrac{1}{2}\cdot 0.933 \ = \ 1 - 0.4665 \ = \ 0.5335.$$

$$y_2 \ = \ \sin\big(x_1 + 1\big) - 1.2 = \sin(1.5) - 1.2.$$

Приблизительно $\sin(1.5) \approx 0.9975$, значит

$$y_2 \approx 0.9975 - 1.2 = -0.2025.$$

- **Результат**: $\big(x_2, y_2\big) \approx \big(0.5335,\ -0.2025\big).$

Итерация 2 → 3

- **Исходные**: $x_2 = 0.5335,\ y_2 = -0.2025.$
- **Формулы**:

$$x_3 = 1 - \tfrac{1}{2}\cos(-0.2025) \approx 1 - \tfrac{1}{2}\cdot 0.9796 = 1 - 0.4898 = 0.5102,$$

$$y_3 = \sin(0.5335+1) - 1.2 = \sin(1.5335) - 1.2 \approx 0.9996 - 1.2 = -0.2004.$$

- **Результат**: $\big(x_3, y_3\big) \approx (0.5102,\ -0.2004).$

Проверка далее не имеет смысла, мы уже достигли интересующих нас приближенных значений.

Приближённое решение получается:

x≈0.51,y≈−0.20.

Проверим подстановкой:

1. sin(0.51+1)≈sin(1.51)≈0.999, 0.999−(−0.20)≈1.199, близко к 1.2.
2. 2·0.51+cos(−0.20)≈1.02+0.98=2.00. Отлично.

Следовательно, система решена с точностью порядка 0.01.

2. Программная реализация задачи

https://github.com/666Daredevil666/calmath/tree/main/lab2

Результаты выполнения программы при различных исходных данных:

Ввод и вывод клавиатура:

Уравнение:

```
=== Программа: решить одиночное уравнение или систему ===
1) Одиночное уравнение
2) Система (3 варианта)
> 1
Выберите уравнение:
1) f1(x)=2.74x^3 -1.93x^2 -15.28x -3.72
2) f2(x)=sin(x) - 0.5x
3) f3(x)=e^x - x^2 +1
> 1
Вы выбрали: f1(x)=2.74x^3 -1.93x^2 -15.28x -3.72
Откуда брать [a,b,eps]? (1 - клавиатура, 2 - файл)
> 1
Введите a,b:
> 1 5
Введите eps:
> 0.01
Выберите метод:
1) Бисекция
2) Секущие
3) Ньютона
4) Итерация
> 2
Куда вывести результат? (1-экран, 2-файл)
> 1
Корень x=2.837898, f(x)=-2.636e-03, итераций=10
Построить график f(x) на [a,b]? (y/n)
> y
```

Система:

```
=== Программа: решить одиночное уравнение или систему ===
1) Одиночное уравнение
2) Система (3 варианта)
> 2
Выберите систему:
1) System1: { sin(x+1)-y=1.2,  2x+cos(y)=2 }
2) System2: { x^2+y^2=4,  x-y=1 }
3) System3: { e^x - y=0,  x+y=2 }
> 1
Выбрана: System1: { sin(x+1)-y=1.2,  2x+cos(y)=2 }
Построить график F1=0, F2=0 сейчас? (y/n)
> y
Введите x_min,x_max (напр. -3 3):
> -5 5
Введите y_min,y_max (напр. -3 3):
> -5 5
2025-04-15 11:52:53.061 Python[98768:4708877] WARNING: Secu
Откуда брать x0,y0,eps? (1 - клавиатура, 2 - файл)
> 1
Введите x0,y0:
> 1 5
Введите eps:
> 0.01
Метод? (6 - Ньютона, 7 - итерация)
> 6
Куда вывести результат? (1-экран, 2-файл)
> 1
Решение системы: x=0.510149, y=-0.201824, итераций=6
Вектор погрешностей: |F1|=1.484e-05, |F2|=4.661e-08
```

Ввод и вывод файл:

Уравнение:

```
=== Программа: решить одиночное уравнение или систему ===
1) Одиночное уравнение
2) Система (3 варианта)
> 1
Выберите уравнение:
1) f1(x)=2.74x^3 -1.93x^2 -15.28x -3.72
2) f2(x)=sin(x) - 0.5x
3) f3(x)=e^x - x^2 +1
> 1
Вы выбрали: f1(x)=2.74x^3 -1.93x^2 -15.28x -3.72
Откуда брать [a,b,eps]? (1 - клавиатура, 2 - файл)
> 2
Выберите метод:
1) Бисекция
2) Секущие
3) Ньютона
4) Итерация
> 3
Куда вывести результат? (1-экран, 2-файл)
> 2
Записано в output.txt
Построить график f(x) на [a,b]? (y/n)
> y
```

Input.txt

```
2 3
0.01
```

Output.txt

```
Корень x=2.837971, f(x)=2.719e-04, итераций=3
```

Система:

```
=== Программа: решить одиночное уравнение или систему ===
1) Одиночное уравнение
2) Система (3 варианта)
> 2
Выберите систему:
1) System1: { sin(x+1)-y=1.2,  2x+cos(y)=2 }
2) System2: { x^2+y^2=4,  x-y=1 }
3) System3: { e^x - y=0,  x+y=2 }
> 1
Выбрана: System1: { sin(x+1)-y=1.2,  2x+cos(y)=2 }
Построить график F1=0, F2=0 сейчас? (y/n)
> y
Введите x_min,x_max (напр. -3 3):
> -5 5
Введите y_min,y_max (напр. -3 3):
> -5 5
2025-04-15 12:00:16.175 Python[98847:4713608] WARNING: Secure coding is r
Откуда брать x0,y0,eps? (1 - клавиатура, 2 - файл)
> 2
Метод? (6 - Ньютона, 7 - итерация)
> 7
Для проверки итерации укажите [x_min,x_max,y_min,y_max], напр. -3 3 -3 3
> -5 5 -5 5
Внимание: max row-sum=1.030>=1 => может не сойтись. Продолжить? (y/n)
> y
Куда вывести результат? (1-экран, 2-файл)
> 2
Записано в output.txt
```

Input.txt

```
1 2
0.001
```

Output.txt

```
Решение системы: x=4.545642, y=-0.567501, итераций=79
Вектор погрешностей: |F1|=1.407e+00, |F2|=4.790e+00
```

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены численные методы решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений с использованием Python. В результате работы были найдены корни заданных уравнений и систем с использованием различных численных методов, а также были построены графики функций для полного представления исследуемых интервалов.