Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№3** **«Численное интегрирование»**

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: **1**

Преподаватель:
Машина Екатерина Алексеевна
Малышева Татьяна Алексеевна

Выполнил:
Бондарев Алексей Михайлович
Группа: P3212

Санкт-Петербург, 2024 г.

Цель работы: найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

1. Вычислительная реализация задачи

1. **Вычислить интеграл**, приведенный в таблице 1, **точно:**

$$I = \int_0^2 \left(-x^3 - x^2 - 2x + 1\right) dx$$

$$F(x) = \int (-x^3 - x^2 - 2x + 1)\, dx = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + x$$

$$I = F(2) - F(0) = \left(-\tfrac{16}{4} - \tfrac{8}{3} - 4 + 2\right) - 0 = -\frac{26}{3} \approx -8.666\,666\,667$$

2. **Вычислить интеграл по формуле Ньютона–Котеса** при $n = 6$:

Шаг h=$\frac{b-a}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Узлы x_i=a+i h, i=0.6.
Нормированные веса (таблица НК-6):

$$\omega = \left[\frac{41}{840}, \frac{9}{35}, \frac{9}{280}, \frac{34}{105}, \frac{9}{280}, \frac{9}{35}, \frac{41}{840}\right], \qquad \sum \omega_i = 1$$

$$I_{NC6} = (b-a)\sum_{i=0}^{6} \omega_i\, f(x_i) = 2(\ldots) = -\frac{26}{3} = -8.666\,666\,667$$

i	x_i	вес ω_i	$f(x_i)$	вклад $2\omega_i f(x_i)$
0	0.000	41/84041/84041/840	1.000000	**0.097619**
1	0.333	9/359/359/35	0.185185	**0.095238**
2	0.667	9/2809/2809/280	–1.074074	**–0.069048**
3	1.000	34/10534/10534/105	–3.000000	**–1.942857**
4	1.333	9/2809/2809/280	–5.814815	**–0.373810**
5	1.667	9/359/359/35	–9.740741	**–5.009524**
6	2.000	41/840	-15.00000	**-1.464286**

$$I_{NC6} = 2\sum \omega_i f(x_i) = \boxed{-8.666\,666\,667} \quad (\Delta = 0)$$

Метод точен для кубического полинома, погрешность 0.

3. **Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона** при $n = 10$:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(0)}{10} = \frac{1}{5}$$

- **Метод средних прямоугольников**:

$$I_{\text{ср.прям}} = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}}$$

i	**середина x**$(\mathrm{i}+\frac{1}{2})$	**f(x**$(\mathrm{i}+\frac{1}{2})$**)**	**вклад** hf
0	0.100	0.789000	0.157800
1	0.300	0.283000	0.056600
2	0.500	–0.375000	–0.075000
3	0.700	–1.233000	–0.246600
4	0.900	–2.339000	–0.467800
5	1.100	–3.811000	–0.762200
6	1.300	–5.665000	–1.133000
7	1.500	–7.917000	–1.583400
8	1.700	–10.583000	–2.116600
9	1.900	-13.679000	-2.735800

$$I_{\text{mid}} = \sum hf = \boxed{-8.640000} \qquad \varepsilon_{\text{отн}} = 0.00308$$

- **Метод трапеций**:

$$I_{\text{trap}} = \frac{h}{2}\Big[f_0 + 2(f_1 + \cdots + f_9) + f_{10}\Big]$$

i	**x_i**	**вес**	**f(x_i)**	**вклад** hwf
0	0.0	½	1.000000	0.100000
1	0.2	1	0.552000	0.110400
2	0.4	1	–0.024000	–0.004800
3	0.6	1	–0.776000	–0.155200
4	0.8	1	–1.752000	–0.350400
5	1.0	1	–3.000000	–0.600000
6	1.2	1	–4.568000	–0.913600
7	1.4	1	–6.504000	–1.300800
8	1.6	1	–8.856000	–1.771200
9	1.8	1	–11.672000	–2.334400
10	2.0	½	-15.000000	-1.500000

$$I_{\text{trap}} = \sum hwf = \boxed{-8.720000} \qquad \varepsilon_{\text{отн}} = 0.00615$$

- **Метод Симпсона**:

$$I_S = \frac{h}{3}\Big[f_0 + 4\sum_{i\ \text{неч}} f_i + 2\sum_{i\ \text{чёт}} f_i + f_{10}\Big]$$

i	**x_i**	**вес (1-4-2)**	**f(x_i)**	**вклад $\frac{h}{3}wf$**
0	0.0	1	1.000000	0.066667
1	0.2	4	0.552000	0.147200
2	0.4	2	–0.024000	–0.003200
3	0.6	4	–0.776000	–0.206933
4	0.8	2	–1.752000	–0.233600
5	1.0	4	–3.000000	–0.800000
6	1.2	2	–4.568000	–0.304533
7	1.4	4	–6.504000	–1.734400
8	1.6	2	–8.856000	–0.590400
9	1.8	4	–11.672000	–3.112533
10	2.0	1	-15.000000	-1.000000

$$I_S = \sum \frac{h}{3}wf = \boxed{-8.666\,666\,667} \qquad \varepsilon_{\text{отн}} \approx 0$$

4. Сравнить результаты с точным значением интеграла:

Точное значение интеграла на интервале вычислено как $\frac{-26}{3} = -8.666\,666\,667$

1. Для метода **Ньютона–Котеса** при $n = 6$: $I_{\text{точн}} = I_{cotes} = -8.666\,666\,667$, **значения совпадают**.
   $R = |I_{\text{точн}} - I_{cotes}| = \left|\frac{-26}{3} - (-8.666\,666\,667)\right| = 0$
2. Для метода **средних прямоугольников** при $n = 10$: $I_{\text{ср.прям}} = -8.6400$.
   $R = \left|I_{\text{точн}} - I_{\text{ср.прям}}\right| = \left|\frac{-26}{3} - (-8.6400)\right| = 0.00308$
3. Для метода **трапеций** при $n = 10$: $I_{\text{трапеция}} = -8.720000$.
   $R = \left|I_{\text{точн}} - I_{\text{трапеция}}\right| = \left|\frac{-26}{3} - (-8.720000)\right| = 0.00615$
4. Для метода **Симпсона** при $n = 10$: $I_{\text{точн}} = I_{\text{Симпсона}} = -8.666\,666\,667$, **значения совпадают**.
   $R = |I_{\text{точн}} - I_{cotes}| = \left|\frac{-26}{3} - (-8.666\,666\,667)\right| = 0$

5. Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода.

1. Для метода **Ньютона–Котеса**: $R = 0$ → **погрешности нет.**
2. Для метода **средних прямоугольников**: $\Delta \approx 0.308\%$
3. Для метода **трапеций**: $\Delta \approx 0.615\%$
4. Для метода **Симпсона**: $R = 0$ → **погрешности нет.**

Как видно из результатов, все методы дали относительно малую погрешность, особенно при использовании формулы Ньютона–Котеса и Симпсона. Наилучший результат был получен при использовании формулы Ньютона–Котеса с $n = 6$ и формулы Симпсона с $n = 10$, при которых значения интеграла полностью совпали.

2. Программная реализация задачи

https://github.com/666Daredevil666/calmath/tree/main/lab3

Результаты выполнения программы при различных исходных данных:

```
=== Численное интегрирование (включая несобственные) ===

Функции:
1) -x^3 - x^2 - 2x + 1
2) x^2
3) sin(x)
4) ln(x)/sqrt(x)            (разрыв в a)
5) 1/sqrt(1-x)              (разрыв в b)
6) 1/sqrt(|x-0.5|)          (разрыв внутри)
Выберите номер функции: 4

Нижний предел a: 1
Верхний предел b: 5
Требуемая точность eps (например 1e-6): 0.1

Методы:
1) Левые прямоугольники
2) Правые прямоугольники
3) Средние прямоугольники
4) Трапеции
5) Симпсон
Номер метода: 3

Несобственный интеграл? (y/N) y

-------- Результаты --------
Метод:          Средние прямоугольники
Алгоритм:       несобственный (с усечением хвоста)
Интервал:       [1.0, 5.0]
eps:            0.1
Значение I:     2.2631951996044446
Разбиений n:    8
----------------------------
```

```
Программа для численного интегрирования.
Доступные функции:
1) f(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 1
2) f(x) = x^2
3) f(x) = sin(x)
Выберите номер функции (1/2/3): 1
Введите нижний предел интегрирования a: 0
Введите верхний предел интегрирования b: 2
Введите требуемую точность (например, 0.1): 0.01

Доступные методы:
1) Левые прямоугольники
2) Правые прямоугольники
3) Средние прямоугольники
4) Трапеции
5) Симпсон
Выберите номер метода (1..5): 1

--- Результаты вычисления ---
Выбранная функция: №1
Пределы интегрирования: [0.0, 2.0]
Метод: Левые прямоугольники
Требуемая точность: 0.01
Приближённое значение интеграла: -8.658855438232422
Число разбиений для достижения точности: 2048
```

Вывод

В ходе выполнения данной лабораторной работы мною были изучены численные методы интегрирования с использованием Python. В результате работы мною были рассмотрены различные численные методы вычисления определенных интегралов: метод прямоугольников (левых, правых, средних), метод трапеций, метод Ньютона-Котеса и метод Симпсона. Была реализована программа, позволяющая выбрать одну из предложенных функций, задать пределы интегрирования, точность и начальное значение числа разбиения интервала интегрирования. Написав реализации всех трех методов решения интегралов, можно сделать вывод, что самым точным и быстрым является метод Симпсона. В ходе вычислительной реализации задачи были рассчитаны интегралы различными методами и проведено сравнение результатов с точными значениями интегралов. Также была выполнена дополнительная задача по установлению сходимости рассматриваемых несобственных интегралов 2 рода и их вычислению заданными численными методами в случаях, когда подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке a, в точке b или на отрезке интегрирования.