Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№6**
«Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений»

по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант: 1

Преподаватель:
Малышева Татьяна Алексеевна
Машина Екатерина Алексеевна

Выполнил:
Бондарев Алексей Михайлович
Группа: P3212

Санкт-Петербург, 2025 г.

Цель работы: решить задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений численными методами.

Алгоритм:
Задача Коши
Найти функцию y(x), удовлетворяющую ОДУ
$y'(x)=f(x,y)$, $y(x0)=y0$, $x\in[x0,xn]$ с требуемой точностью ε.
Алгоритм, реализованный в lab6, выполняет шаги:

1. Выбор ОДУ
   Пользователь выбирает одно из трёх уравнений с аналитическим решением.
2. Ввод исходных данных
   x0, xn, y0, h0, ε вводятся с клавиатуры.
3. Численные методы
   - Одношаговые:
     • Метод Эйлера (порядок p=1)
     • Метод Рунге–Кутта 4-го порядка (p=4)
   - Многошаговый:
     • Метод Адамса (предиктор AB-4 + корректор AM-4)
4. Адаптивный подбор шага (только для Эйлера и РК-4)
   - Строятся две сетки: шаг h и половинный шаг h/2.
   - Правило Рунге оценяет глобальную погрешность:
     $$R = \frac{|y_{h/2}(x_n) - y_h(x_n)|}{2^p - 1}$$
     Пока R>ε и число делений шага < max_halvings, h ← h/2.
5. Запуск метода Адамса
   Первые три точки вычисляются РК-4 с найденным шагом hhh; далее идёт цикл предиктор-корректор.
6. Оценка точности Адамса
   max |yАдамс(xi)−yточн(xi)|.
7. Вывод результатов
   - сводка по шагу/ошибке;
   - таблица x, yЭйл,yРК4,yАдамс,yточнx;
   - график всех решений.
8. Защита от “зависаний”
   - Проверки на h≤0, xn≤x0, ε≤0;
   - лимиты max_steps и max_halvings — исключают бесконечное деление шага.

Формулы:

Метод	Формула перехода $y_n \to y_{n+1}$	Порядок	Лок. погр.
Эйлер (Euler)	$y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$	1	$O(h^2)$
Рунге–Кутта 4	$k_1 = f(x_n, y_n)$ $k_2 = f(x_n + \frac{h}{2},\, y_n + \frac{h}{2} k_1)$ $k_3 = f(x_n + \frac{h}{2},\, y_n + \frac{h}{2} k_2)$ $k_4 = f(x_n + h,\, y_n + h\, k_3)$ $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$	4	$O(h^5)$
Адамса–Башфорта 4 (предиктор)	$y^{\mathrm{p}}_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{24}(55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3})$	4	$O(h^5)$
Адамса–Моултона 4 (корректор)	$y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{24}(9 f^{\mathrm{p}}_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2})$	4	$O(h^5)$

где $f_k = f(x_k, y_k)$, h — шаг сетки.

Правило Рунге (оценка глобальной погрешности)

Для одношагового метода порядка p:

$$R = \frac{|y_{h/2}(x_n) - y_h(x_n)|}{2^p - 1}, \qquad \text{если } R > \varepsilon, \text{ уменьшить } h.$$

Инициализация метода Адамса:

Требуются первые 4 узла. Их вычисляем Рунге–Кутта 4-го порядка:

$$x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ x_3 = x_0 + 3h.$$

Программная реализация задачи

Исходный код:

https://github.com/666Daredevil666/calmath/tree/main/lab6

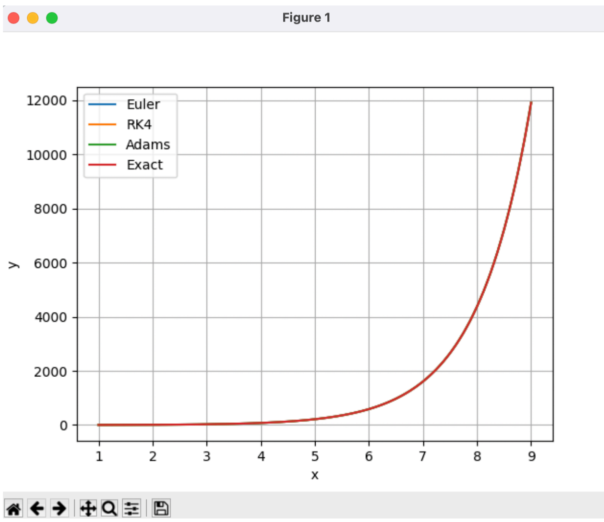
Результаты выполнения программы при различных исходных данных:

```
Выберите одно из уравнений:
1: y' = x + y
2: y' = y - x^2 + 1
3: y' = x·y
Номер уравнения: 1
x0: 1
xn: 9
y0: 2
Начальный шаг h: 1
Точность ε для одношаговых методов: 0.1

Метод Эйлера: h = 3.814697265625e-06  |ε| ≈ 0.09097022864989412
Рунге-Кутта 4: h = 0.125 |ε| ≈ 0.010892385183130198
Адамса      : h = 0.125 |ε| ≈ 0.21333639465956367

Таблица значений
```

x	Euler	RK4	Adams	Exact
1.000000	2.000000	2.000000	2.000000	2.000000
1.125000	2.000011	2.407593	2.407593	2.407594
1.250000	2.000023	2.886099	2.886099	2.886102
1.375000	2.000034	3.444962	3.444962	3.444966
1.500000	2.000046	4.094879	4.094883	4.094885
1.625000	2.000057	4.847975	4.847983	4.847984
1.750000	2.000069	5.717988	5.718002	5.718000
1.875000	2.000080	6.720486	6.720506	6.720501
2.000000	2.000092	7.873107	7.873136	7.873127
2.125000	2.000103	9.195842	9.195881	9.195867
2.250000	2.000114	10.711340	10.711392	10.711372
2.375000	2.000126	12.445267	12.445334	12.445307
2.500000	2.000137	14.426707	14.426793	14.426756
2.625000	2.000149	16.688616	16.688724	16.688676
2.750000	2.000160	19.268337	19.268472	19.268411
2.875000	2.000172	22.208187	22.208354	22.208276
3.000000	2.000183	25.556116	25.556321	25.556224
3.125000	2.000195	29.366459	29.366710	29.366590
3.250000	2.000206	33.700787	33.701090	33.700943
3.375000	2.000217	38.628865	38.629233	38.629053
3.500000	2.000229	44.229752	44.230194	44.229976
3.625000	2.000240	50.593031	50.593561	50.593297
3.750000	2.000252	57.820212	57.820846	57.820528
3.875000	2.000263	66.026323	66.027079	66.026696
4.000000	2.000275	75.341706	75.342606	75.342148
4.125000	2.000286	85.914059	85.915127	85.914580
4.250000	2.000298	97.910745	97.912011	97.911360
4.375000	2.000309	111.521412	111.522909	111.522135
4.500000	2.000320	126.960958	126.962725	126.961808
4.625000	2.000332	144.472895	144.474978	144.473893
4.750000	2.000343	164.333159	164.335609	164.334328
4.875000	2.000355	186.854424	186.857304	186.855793
5.000000	2.000366	212.390998	212.394378	212.392600
5.125000	2.000378	241.344365	241.348327	241.346237
5.250000	2.000389	274.169464	274.174104	274.171649
5.375000	2.000401	311.381809	311.387236	311.384358
5.500000	2.000412	353.565554	353.571896	353.568525
5.625000	2.000423	401.382632	401.390036	401.386092
5.750000	2.000435	455.583112	455.591748	455.587138
5.875000	2.000446	517.016930	517.026996	517.021613
6.000000	2.000458	586.647194	586.658917	586.652636
6.125000	2.000469	665.565245	665.578888	665.571567
6.250000	2.000481	755.007736	755.023603	755.015074
6.375000	2.000492	856.375977	856.394417	856.384489
6.500000	2.000504	971.257859	971.279277	971.267729
6.625000	2.000515	1101.452699	1101.477561	1101.464138
6.750000	2.000526	1248.999391	1249.028235	1249.012641
6.875000	2.000538	1416.208302	1416.241746	1416.223643
7.000000	2.000549	1605.697421	1605.736180	1605.715174



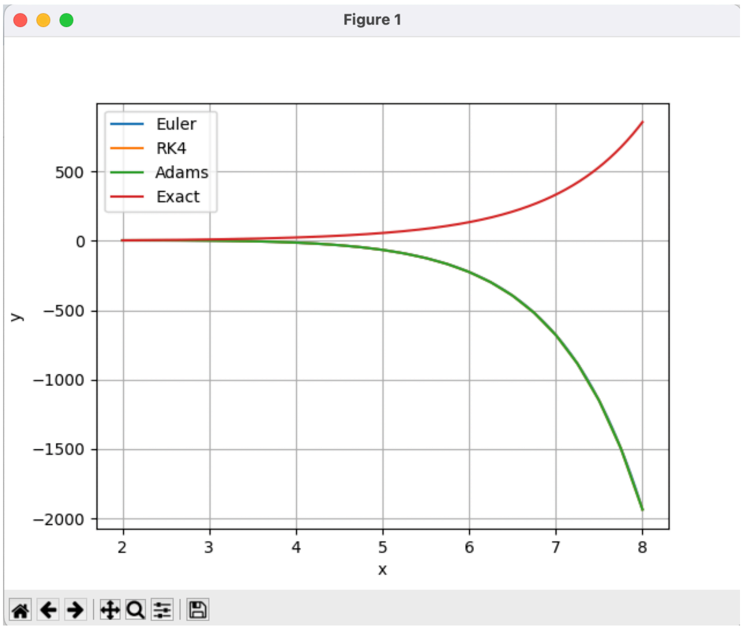
```
Выберите одно из уравнений:
1: y' = x + y
2: y' = y - x^2 + 1
3: y' = x·y
Номер уравнения: 2
x0: 2
xn: 8
y0: 4
Начальный шаг h: 0.5
Точность ε для одношаговых методов: 0.1

Метод Эйлера: h = 3.0517578125e-05  |ε| ≈ 0.08618863465017057
Рунге-Кутта 4: h = 0.25 |ε| ≈ 0.018064417086482838
Адамса      : h = 0.25 |ε| ≈ 2792.9548974655095

Таблица значений
         x        Euler         RK4       Adams       Exact
  2.000000     4.000000    4.000000    4.000000    4.000000
  2.250000     4.000031    4.142395    4.142395    5.130551
  2.500000     4.000061    4.006456    4.006456    6.547443
  2.750000     4.000092    3.477630    3.477630    8.296500
  3.000000     4.000122    2.408827    2.408767   10.436564
  3.250000     4.000153    0.611184    0.611019   13.043186
  3.500000     4.000183   -2.157806   -2.158134   16.213378
  3.750000     4.000214   -6.209522   -6.210099   20.071705
  4.000000     4.000244  -11.943784  -11.944729   24.778112
  4.250000     4.000275  -19.873964  -19.875447   30.537972
  4.500000     4.000305  -30.659244  -30.661498   37.614988
  4.750000     4.000336  -45.146020  -45.149371   46.347764
  5.000000     4.000366  -64.421084  -64.425979   57.171074
  5.250000     4.000397  -89.879892  -89.886944   70.643180
  5.500000     4.000427 -123.314234 -123.324279   87.480904
  5.750000     4.000457 -167.024800 -167.038973  108.604664
  6.000000     4.000488 -223.965712 -223.985555  135.196300
  6.250000     4.000518 -297.930115 -297.957712  168.773325
  6.500000     4.000549 -393.788470 -393.826630  211.284263
```

```
Метод Эйлера: h = 3.0517578125e-05  |ε| ≈ 0.08618863465017057
Рунге-Кутта 4: h = 0.25 |ε| ≈ 0.018064417086482838
Адамса      : h = 0.25 |ε| ≈ 2792.9548974655095

Таблица значений
         x        Euler          RK4        Adams       Exact
  2.000000     4.000000     4.000000     4.000000    4.000000
  2.250000     4.000031     4.142395     4.142395    5.130551
  2.500000     4.000061     4.006456     4.006456    6.547443
  2.750000     4.000092     3.477630     3.477630    8.296500
  3.000000     4.000122     2.408827     2.408767   10.436564
  3.250000     4.000153     0.611184     0.611019   13.043186
  3.500000     4.000183    -2.157806    -2.158134   16.213378
  3.750000     4.000214    -6.209522    -6.210099   20.071705
  4.000000     4.000244   -11.943784   -11.944729   24.778112
  4.250000     4.000275   -19.873964   -19.875447   30.537972
  4.500000     4.000305   -30.659244   -30.661498   37.614988
  4.750000     4.000336   -45.146020   -45.149371   46.347764
  5.000000     4.000366   -64.421084   -64.425979   57.171074
  5.250000     4.000397   -89.879892   -89.886944   70.643180
  5.500000     4.000427  -123.314234  -123.324279   87.480904
  5.750000     4.000457  -167.024800  -167.038973  108.604664
  6.000000     4.000488  -223.965712  -223.985555  135.196300
  6.250000     4.000518  -297.930115  -297.957712  168.773325
  6.500000     4.000549  -393.788470  -393.826630  211.284263
  6.750000     4.000579  -517.794534  -517.847036  265.231069
  7.000000     4.000610  -677.978233  -678.050153  333.826318
  7.250000     4.000640  -884.650132  -884.748268  421.195037
  7.500000     4.000671 -1151.049166 -1151.182617  532.633865
  7.750000     4.000701 -1494.174356 -1494.355270  674.943821
  8.000000     4.000732 -1935.852732 -1936.097310  856.857587
```



Вывод

В ходе выполнения данной лабораторной работы мною были рассмотрены и реализованы численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Реализация этих методов была написана на языке Python. Я также реализовал правило Рунге для оценки точности одношаговых методов. Визуализация результатов позволила продемонстрировать эффективность каждого из методов. Во время работы я поработал с численными методами в решении обыкновенных дифференциальных уравнений.