Étude d'une lunette astronomique
Comportement en flexion

Dans ce projet nous cherchons à pré-dimensionner une lunette astronomique en utilisant une modélisation issue de la théorie des poutres. Plus précisément nous nous intéressons à une lunette astronomique longue ($L_o + L_l = 6$m), dont l'axe de rotation est situé à $L_o = 2$m de l'oculaire. La lentille à une masse de 80kg. Le poids de cette lentille est équilibré par un contrepoids.

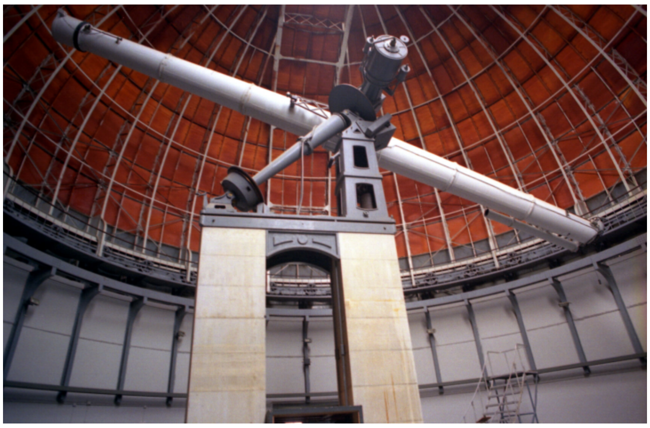
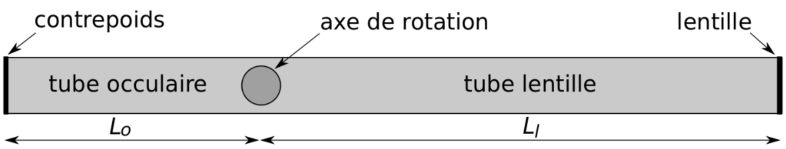
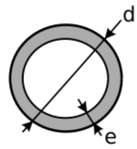


FIGURE 1: Grande lunette de l'observatoire de la côte d'azur (sources : Wikipedia)

La lunette est composée principalement d'un tube en acier (propriétés : module de Young : $E = 210$GPa, coefficient de poisson : $\nu = 0.3$, masse volumique : $\rho = 7800$kg/m^3). On cherche à concevoir cette lunette afin de minimiser la masse et d'avoir une image la plus nette possible. Pour ce faire, il faut s'assurer que l'erreur d'alignement soit minimale entre l'axe oculaire et l'axe lentille, ainsi que l'erreur de position de leurs foyers également. Dans le cahier des charges structures, cela se traduit par le fait que la **flèche** v (déplacement vertical) de la lentille et de l'oculaire soient **inférieures à 1mm**. Les dimensions extérieures (6m de long et $d = 550$mm de diamètre) sont fixées par la physique de l'appareil. Il nous reste à déterminer l'épaisseur e de la tôle qui permettra le meilleur compromis entre poids et précision. La section de la lunette est schématisée ci-après.



(a) Schéma de la lunette



(b) Section de la lunette

Nous considérons pour calculer le problème une modélisation de type poutre en flexion. La partie droite de la structure (c'est-à-dire le tube lentille entre l'axe de rotation et la lentille) est la plus critique pour le dimensionnement du fait de la longueur L_l qui est supérieure à L_o . Seule cette partie va donc être considérée pour l'étude. Le modèle de calcul associé est composé d'une poutre de longueur $L = L_l$ encastrée à gauche et soumise à un effort vertical F à droite. Il ne faut pas oublier l'effort réparti du à la pesanteur. En effet il n'est pas possible dans ce cas de négliger la masse du tube devant la masse de la lentille.

Une étude théorique peut montrer que la flèche s'exprime par l'équation suivante :

$$v(x,e) = \frac{1}{EI(e)}\left[-\frac{Fx^3}{6} + \frac{FLx^2}{2} + \rho S(e) g\left(\frac{L^2x^2}{4} - \frac{Lx^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right)\right] \text{ pour } x \in [0, L]$$

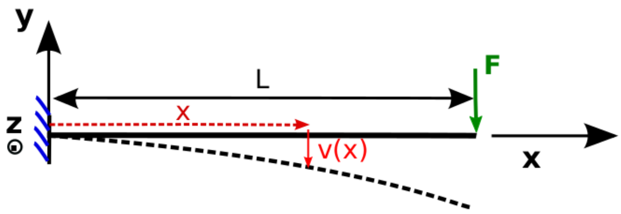


FIGURE 2: Modèle poutre de la lunette

avec le relation suivante :

$$S(e) = \pi\left(\frac{d^2}{4} - \left(\frac{d}{2} - e\right)^2\right) \qquad \text{et} \qquad I(e) = \frac{\pi\left(d^4 - (d-2e)^4\right)}{64}$$

Question 1. Créer un fonction `v` qui retourne la valeur de la flèche $v(x, e)$ en prenant en entrée une abscisse `x` et une épaisseur `e`.

Question 2. Créer un vecteur `x` qui va de 0 à L avec 200 éléments, puis visualiser la flèche le long de la poutre (pour cela, choisissez arbitrairement une épaisseur $e = 2.5cm$). Que pouvez-vous en déduire sur l'épaisseur limite qui nous permet de vérifier le critère de dimensionnement de flèche maximale ?

Question 3. D'après vous en quel abscisse x de la poutre la flèche maximale aura lieu ? En déduire l'équation non-linéaire que doit vérifier l'épaisseur limite du tube pour assurer le critère de dimensionnement, la mettre sous la forme $f(e) = 0$.

Question 4. Créer une fonction `newton` qui prend en argument l'initialisation `e0` et qui détermine la solution de l'équation $f(e) = 0$. Faites en sorte de tracer l'évolution de la solution au cours des itérations.

Question 5. A l'aide de la fonction `newton`, déterminer la solution de notre problème. Quelle initialisation choisissez-vous ? Quel problème pouvez-vous identifier ? Commenter les résultats.

Question 6. Tracer la convergence de l'algorithme de Newton dans un cas qui converge et commenter le résultat.