试题十一

一. (12%)设复数域上线性空间 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的子空间

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix} x & y\\ y & x\end{pmatrix}\middle|\, x,y\in\mathbb{C}\right\},\quad V_2=\left\{\begin{pmatrix} x & x\\ y & y\end{pmatrix}\middle|\, x,y\in\mathbb{C}\right\}.$$

分别求 V_1, V_2, $V_1\cap V_2$, V_1+V_2 的一组基及它们的维数.

解: (1) 由 $\begin{pmatrix} x & y\\ y & x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 可见 V_1 的一组基为 $\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}$, $\boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21}$, $\dim V_1=2$.

(2) 由 $\begin{pmatrix} x & x\\ y & y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 可见 V_2 的一组基为 $\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}$, $\boldsymbol{E}_{21}+\boldsymbol{E}_{22}$, $\dim V_2=2$.

(3) 因为 $\begin{pmatrix} x & y\\ y & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & x\\ y & y\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=y$,

所以 $V_1\cap V_2=\left\{x\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\middle|\, x\in\mathbb{C}\right\}$ 的一组基为 $\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21}+\boldsymbol{E}_{22}$,

$\dim(V_1\cap V_2)=1$.

(4) $(\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}, \boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}+\boldsymbol{E}_{22})$

$$=(\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-1)\\ \times(-1)\\ \\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \times(-1)\\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

由此可见 V_1+V_2 的一组基为 $\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}$, $\boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21}$, $\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}$,
$\dim(V_1+V_2)=3$.

二. (12%) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{C}^4$ 的子空间 $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^4 \mid \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\}$, $\boldsymbol{\eta} = (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. 求 W 在 $\mathbb{C}^4$ 的正交补空间 $W^{\perp}$的一标准正交基; 并求$\boldsymbol{\eta}$在 $W^{\perp}$中的正投影.

解: 因为 $W = \mathrm{K}(\boldsymbol{A})$, 所以 $W^{\perp} = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$.

令$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$, 且$\langle\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\rangle = 0$, 即$\boldsymbol{\alpha}_1 \perp \boldsymbol{\alpha}_2$.

令$\boldsymbol{\beta}_1 = \dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \dfrac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{\eta}$在 $W^{\perp}$中的正投影$\boldsymbol{\eta}_0 = \langle\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\beta}_1\rangle\boldsymbol{\beta}_1 + \langle\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\beta}_2\rangle\boldsymbol{\beta}_2 = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

三. (16%) 复数域上线性空间$\mathbb{C}^{2\times2}$ 上的线性变换 f 定义如下:

对任意的 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times2}$, $f(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}$.

1. 分别求 f 在$\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 以及基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{B}$, 并给出一矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$.

解: $f(\boldsymbol{E}_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}_{11} + \boldsymbol{E}_{12}$, $f(\boldsymbol{E}_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}_{11} + \boldsymbol{E}_{12}$,

$f(\boldsymbol{E}_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}_{21} + \boldsymbol{E}_{22}$, $f(\boldsymbol{E}_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}_{21} + \boldsymbol{E}_{22}$,

$$(f(\boldsymbol{E}_{11}), f(\boldsymbol{E}_{12}), f(\boldsymbol{E}_{21}), f(\boldsymbol{E}_{22})) = (\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

可见 f 在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$(f(\boldsymbol{E}_{11}), f(\boldsymbol{E}_{21}), f(\boldsymbol{E}_{12}), f(\boldsymbol{E}_{22})) = (\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

可见 f 在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

因为$(\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{22}) = (\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

即从基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 到基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{22}$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

于是有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$.

2. 求 f 的特征值及相应的特征子空间的基.

解: $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-2)^2$.

可见 f 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \lambda_4 = 2$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \times(-1) \\ \\ \times(-1) \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由此可得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为: $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

因而对应于 f 的特征值 0 的特征子空间的一组基为

$$\boldsymbol{A}_1=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\xi_1=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\xi_2=\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}.$$

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由此可得$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为: $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\xi_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$.

因而对应于 f 的特征值 2 的特征子空间的一组基为

$$\boldsymbol{A}_3=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\xi_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_4=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\xi_4=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

3. 问: 是否存在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基使得 f 的矩阵是对角阵? 如存在, 请给出这样的一组基及相应的对角阵, 如不存在, 说明理由.

解: 因为 f 的每个特征值的几何重数与其代数重数相等,

所以存在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基使得 f 的矩阵是对角阵.

事实上, 在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 下 f 的矩阵为对角阵 $\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

四. (10%)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&1\\1&-1&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&1&2\\0&2&b\\0&0&3\end{pmatrix}$.

1. 求 $\boldsymbol{A}$ 的若当标准形.

解: $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3)^2.$

可见 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 3.$

$3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{r}(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = 2$,

由此可得 $\boldsymbol{A}$ 的若当标准形为 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. 问: 参数 a, b 取什么值时, 矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似?

解: 若矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似,

则 $\boldsymbol{B}$ 的特征值也是$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$, 而且 $\mathrm{r}(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = 2$.

由 $a + 2 + 3 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 8$ 或 $6a = |\boldsymbol{B}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 18$ 可得 $a = 3$.

当 $a = 3$ 时, $3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2-b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

于是矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{B}$ 的若当标准形也是 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \mathrm{r}(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}) = 2 \Leftrightarrow -2-b \neq 0 \Leftrightarrow b \neq -2.$

五. (15%) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式, 以及多项式 $f(x)$,

使得 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = f(\boldsymbol{A})$, 并求行列式 $\det \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 的值.

解: $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)^3.$

可见 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1.$

$$-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\-1&1&1&0\\-2&-1&-1&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\times(-\tfrac{1}{2}) \to \begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&1&0\\-2&-1&-1&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\-2&-1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times 2 \to \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&-1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

由此可见 $r(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$, 因而 $\boldsymbol{A}$ 的若当标准形为 $\boldsymbol{J}=\left(\begin{array}{c:c:cc}1&0&0&0\\ \hdashline 0&-1&0&0\\ \hdashline 0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{array}\right)$,

故 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$.

设 $f(x)=ax^2+bx+c$, 则 $f(1)=a+b+c$, $f(-1)=a-b+c$, $f'(-1)=-2a+b$.

$$e^{\boldsymbol{A}t}=f(\boldsymbol{A})\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)=e^{xt}\,|_{x=1}=e^{t}\\ f(-1)=e^{xt}\,|_{x=-1}=e^{-t}\\ f'(-1)=(e^{xt})'\,|_{x=-1}=te^{-t}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=e^{t}\\ a-b+c=e^{-t}\\ -2a+b=te^{-t}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\tfrac{1}{4}(e^{t}-e^{-t}-2te^{-t})\\ b=\tfrac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})\\ c=\tfrac{1}{4}(e^{t}+3e^{-t}+2te^{-t})\end{cases},$$

即多项式 $f(x)=\dfrac{1}{4}(e^{t}-e^{-t}-2te^{-t})x^2+\dfrac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})x+\dfrac{1}{4}(e^{t}+3e^{-t}+2te^{-t})$满足

$e^{\boldsymbol{A}t}=f(\boldsymbol{A})$.

$e^{\boldsymbol{A}t}=f(\boldsymbol{A})$的特征值为 $f(1)=e^{t}$, $f(-1)=e^{-t}$ (三重),

故行列式 $\det e^{\boldsymbol{A}t}=\det f(\boldsymbol{A})=e^{t}e^{-t}e^{-t}e^{-t}=e^{-2t}$.

六. (10%) 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\1&-1&0&0\\-1&1&0&0\end{pmatrix}$ 的广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{+}$.

解: 令 $\boldsymbol{B}=(1,2)$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$,

则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}^+=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}^+=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{A}^+=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^+\\ \boldsymbol{B}^+ & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1/4 & -1/4\\ 0 & -1/4 & 1/4\\ 1/5 & 0 & 0\\ 2/5 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

七. (25%) 证明下列命题:

1. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶 Hermite 矩阵, 并且 $\boldsymbol{A}$ 是正定的, 证明: 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AC}, \boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BC}$ 都是对角阵.

证明: 因为 n 阶 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的,

所以存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{I}$.

又因为 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶 Hermite 矩阵, 从而 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BP}$ 也是 n 阶 Hermite 矩阵,

于是存在 n 阶酉矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BP})\boldsymbol{Q}$ 为对角阵.

令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PQ}$, 则 $\boldsymbol{C}$ 为可逆矩阵, 而且

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AC}=(\boldsymbol{PQ})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{APQ}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{IQ}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I},$$
$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BC}=(\boldsymbol{PQ})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BPQ}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BP})\boldsymbol{Q}$$

都是对角阵.

2. 已知 V 是 n 维线性空间, f 是 V 上的线性变换, $\mathrm{R}(f)$, $\mathrm{K}(f)$分别是 f 的值域和核空间. 证明: $V=\mathrm{R}(f)+\mathrm{K}(f)$的充分必要条件是 $\mathrm{R}(f)\cap\mathrm{K}(f)=\{\mathbf{0}\}$.

证明: 因为 V 是 n 维线性空间, f 是 V 上的线性变换, 所以

$$\dim\mathrm{R}(f)+\dim\mathrm{K}(f)=\dim V=n,$$
$$\dim\mathrm{R}(f)+\dim\mathrm{K}(f)=\dim(\mathrm{R}(f)+\mathrm{K}(f))+\dim(\mathrm{R}(f)\cap\mathrm{K}(f)),$$

由此可得

$$\dim(\mathrm{R}(f)+\mathrm{K}(f))=n-\dim(\mathrm{R}(f)\cap\mathrm{K}(f)).$$

于是有

$$\begin{aligned} V=\mathrm{R}(f)+\mathrm{K}(f) &\Leftrightarrow \dim(\mathrm{R}(f)+\mathrm{K}(f))=n\\ &\Leftrightarrow \dim(\mathrm{R}(f)\cap\mathrm{K}(f))=0\\ &\Leftrightarrow \mathrm{R}(f)\cap\mathrm{K}(f)=\{\mathbf{0}\}.\end{aligned}$$

3. 设$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$是 n 维相互正交的单位列向量, p, q 是实数, 矩阵 $\boldsymbol{A}=p\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{H}}+q\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{H}}$. 证明: 关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的范数, $\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}=\sqrt{p^2+q^2}$, $\|\boldsymbol{A}\|_2=\max\{|p|, |q|\}$.

证明: 因为$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$是 n 维相互正交的单位列向量,

故可将$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 扩充为$\mathbb{C}^n$ 的一组标准正交基$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}_3, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_n$.

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}_3, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_n)$, 则 $\boldsymbol{Q}$ 为酉矩阵而且

$$\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}_3, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_n)=(\boldsymbol{A\alpha}, \boldsymbol{A\beta}, \boldsymbol{A\gamma}_3, \ldots, \boldsymbol{A\gamma}_n)=(p\boldsymbol{\alpha}, q\boldsymbol{\beta}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \gamma_3, \dots, \gamma_n)\begin{pmatrix} p & & \\ & q & \\ & & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}\Lambda,$$

故 $\mathbf{Q}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\mathbf{Q} = \Lambda = \begin{pmatrix} p & & \\ & q & \\ & & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{\mathrm{H}}$,

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} = (\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}(\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{\mathrm{H}}) = \mathbf{Q}\Lambda^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{\mathrm{H}} = \mathbf{Q}\Lambda^2\mathbf{Q}^{\mathrm{H}}.$$

于是有 $\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})} = \sqrt{\mathrm{tr}(\Lambda^2)} = \sqrt{p^2+q^2}$,

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})} = \sqrt{\rho(\Lambda^2)} = \sqrt{\max\{p^2, q^2\}} = \max\{|p|, |q|\}.$$

4. 已知 V 是内积空间, V_1, V_2 是 V 的子空间, 证明: $(V_1 + V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$.

证明: 一方面, 对于任意的

$$\boldsymbol{\alpha} \in (V_1 + V_2)^{\perp},\ \boldsymbol{\beta}_1 \in V_1 \subseteq V_1 + V_2,\ \boldsymbol{\beta}_2 \in V_2 \subseteq V_1 + V_2,$$

有 $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_1\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_2\rangle = 0$, 故 $\boldsymbol{\alpha} \in V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$.

可见 $(V_1 + V_2)^{\perp} \subseteq V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$.

另一方面, 对于任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$, $\boldsymbol{\beta} \in V_1 + V_2$,

存在 $\boldsymbol{\beta}_1 \in V_1$, $\boldsymbol{\beta}_2 \in V_2$, 使得 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$, 于是有

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_1\rangle + \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_2\rangle = 0,$$

故 $\boldsymbol{\alpha} \in (V_1 + V_2)^{\perp}$.

可见 $V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp} \subseteq (V_1 + V_2)^{\perp}$.

综上所述, $(V_1 + V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$.

5. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 证明: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}$ 当且仅当 $\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^+) = \mathrm{K}(\boldsymbol{A})$.

证明: $(\Rightarrow)$设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}$, 则对于任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$, 有

① $\boldsymbol{x} \in \mathrm{K}(\boldsymbol{A}^+) \Rightarrow \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \mathrm{K}(\boldsymbol{A})$;

② $\boldsymbol{x} \in \mathrm{K}(\boldsymbol{A}) \Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \mathrm{K}(\boldsymbol{A}^+)$,

由①可见 $\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^+) \subseteq \mathrm{K}(\boldsymbol{A})$, 由②可见 $\mathrm{K}(\boldsymbol{A}) \subseteq \mathrm{K}(\boldsymbol{A}^+)$,

综上可得 $\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^+) = \mathrm{K}(\boldsymbol{A})$.

$(\Rightarrow)$设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^+) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$,

因而 $\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^+) = \mathrm{K}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A})^{\perp} = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{\perp} = \mathrm{K}(\boldsymbol{A})$.

$(\Leftarrow)$设 $\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^+) = \mathrm{K}(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵.

由 $\boldsymbol{A}^+(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+) = \boldsymbol{A}^+ - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{O}$ 可得

$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+$的列向量都属于 $\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^+) = \mathrm{K}(\boldsymbol{A})$,

因而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+) = \boldsymbol{O}$.

类似地, 由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ 可得

$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}$ 的列向量都属于 $\mathrm{K}(\boldsymbol{A})=\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^{+})$,

因而 $\boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

于是有

$(\boldsymbol{AA}^{+}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{AA}^{+}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{AA}^{+}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{AA}^{+}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})$

$=\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{AA}^{+}-\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{AAA}^{+}+\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{A}$

$=\boldsymbol{AA}^{+}-\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{AAA}^{+}+\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^{+}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AA}^{+})=\boldsymbol{O}$.

由此可得 $\boldsymbol{AA}^{+}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 即 $\boldsymbol{AA}^{+}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}$.

($\Leftarrow$)设 $\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^{+})=\mathrm{K}(\boldsymbol{A})$, 则 $\mathrm{R}((\boldsymbol{A}^{+})^{\mathrm{H}})=\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^{+})^{\perp}=\mathrm{K}(\boldsymbol{A})^{\perp}=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$,

因而$(\boldsymbol{A}^{+})^{\mathrm{H}}$的列向量组与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的列向量组等价,

于是 $\boldsymbol{A}^{+}$的行向量组与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价,

故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{PA}$,

从而 $\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{APAA}^{+}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{APA}=\boldsymbol{AA}^{+}$;

同时由 $\boldsymbol{P}$ 可逆以及 $\boldsymbol{PAAPA}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{AA}^{+}=\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{PA}$ 得 $\boldsymbol{AAA}^{+}=\boldsymbol{AAPA}=\boldsymbol{A}$.

于是有

$(\boldsymbol{AA}^{+}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{AA}^{+}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{AA}^{+}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{AA}^{+}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})$

$=\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{AA}^{+}-\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{AAA}^{+}+\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{A}$

$=\boldsymbol{AA}^{+}-\boldsymbol{AA}^{+}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

由此可得 $\boldsymbol{AA}^{+}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 即 $\boldsymbol{AA}^{+}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}$.

($\Leftarrow$)设 $\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^{+})=\mathrm{K}(\boldsymbol{A})$, 即 $\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解,

因而 $\boldsymbol{A}^{+}$的行向量组与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价,

故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{PA}$, ...

($\Leftarrow$)设 $\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^{+})=\mathrm{K}(\boldsymbol{A})$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^{+})^{\perp}=\mathrm{K}(\boldsymbol{A})^{\perp}=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{+})$.

对于任意的$\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{+})$, 有 $\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A\alpha}$;

对于任意的$\boldsymbol{\beta}\in\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^{+})=\mathrm{K}(\boldsymbol{A})$, 有 $\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A\beta}$.

又因为$\mathbb{C}^{n}=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\oplus\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^{+})$,

故对于任意的$\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{C}^{n}$, 存在$\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{\beta}\in\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^{+})$使得$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$,

于是 $\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{AA}^{+}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{AA}^{+}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A\alpha}+\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A\xi}$,

从而$(\boldsymbol{AA}^{+}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$.

由此可得 $\boldsymbol{AA}^{+}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, 即 $\boldsymbol{AA}^{+}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}$.

试题十二

一. (12%) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 2, -1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 1, 0, 2)$, $\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 2, 0, 1)$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (1, -1, 2, -1)$, $\mathbb{C}^4$ 的子空间 $V_1 = \mathrm{L}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$, $V_2 = \mathrm{L}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$. 分别求 V_1+V_2, $V_1\cap V_2$ 的一组基及它们的维数.

解: $V_1+V_2 = \mathrm{L}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$,

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-2) \quad \times 1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times 4 \quad \times(-4) \\ \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times 1 \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可见 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 的极大无关组,

因而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1$ 为 V_1+V_2 的一组基, $\dim(V_1+V_2) = 3$.

$\boldsymbol{\xi} \in V_1\cap V_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\xi} \in V_1$ 同时 $\boldsymbol{\xi} \in V_2$

$\Leftrightarrow$ 存在 $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$, 使得 $\boldsymbol{\xi} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$,
同时存在 $k_3, k_4 \in \mathbb{C}$, 使得 $\boldsymbol{\xi} = k_3\boldsymbol{\beta}_1 + k_4\boldsymbol{\beta}_2$

$\Leftrightarrow$ 存在 $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{C}$, 使得 $\boldsymbol{\xi} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = k_3\boldsymbol{\beta}_1 + k_4\boldsymbol{\beta}_2$

$\Leftrightarrow$ 存在 $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{C}$, 使得 $\boldsymbol{\xi} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 并且
$k_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} + k_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} - k_3\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}} - k_4\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow$ 存在 $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{C}$, 使得 $\boldsymbol{\xi} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 并且
$(k_1, k_2, -k_3, -k_4)^{\mathrm{T}}$ 为齐次线性方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$
的解向量.

用初等行变换把 $\left(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\right)$ 化为行最简形 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

由此可得 $(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系 $(3, 1, -2, -3)^{\mathrm{T}}$.

因而 $(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的通解为 $(3k, k, -2k, -3k)^{\mathrm{T}}$, 其中 $k \in \mathbb{C}$.

可见 $\boldsymbol{\xi} \in V_1\cap V_2 \Leftrightarrow$ 存在 $k \in \mathbb{C}$ 使得 $\boldsymbol{\xi} = 3k\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_2 = k(3\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)$,

其中 $3\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 = (5, 1, 6, -1) \neq \mathbf{0}$,

故 $3\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 = (5, 1, 6, -1)$ 为 $V_1\cap V_2$ 的一组基, $\dim(V_1\cap V_2) = 1$.

二. (12%) 已知 V 是 n 维欧氏空间($n \ge 2$), $a, b \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\eta} \in V$, 并且$\|\boldsymbol{\eta}\| = \sqrt{2}$. V 上的线性变换 f 定义如下: 对任意$\boldsymbol{\alpha} \in V$, $f(\boldsymbol{\alpha}) = a\boldsymbol{\alpha} - b\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta}\rangle\boldsymbol{\eta}$. 求参数 a, b 的值, 使得 f 是 V 上的正交变换.

解: 令 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{\eta}\|}\boldsymbol{\eta}$, 并把它扩充为 V 的一组标准正交基$\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$,

则 f 在$\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a-2b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$.

f 是正交变换 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 是正交阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0,1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-1, \\ b=0,-1. \end{cases}$

解: 在 V 中取一个与正交的非零向量$\boldsymbol{\alpha}$, 由$\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta}\rangle = 0$ 可得

$a^2\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}\rangle = \langle a\boldsymbol{\alpha}, a\boldsymbol{\alpha}\rangle = \langle f(\boldsymbol{\alpha}), f(\boldsymbol{\alpha})\rangle = \langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}\rangle > 0$, 因而 $a = \pm 1$.

再由 $2(a-2b)^2 = \langle(a-2b)\boldsymbol{\eta}, (a-2b)\boldsymbol{\eta}\rangle = \langle f(\boldsymbol{\eta}), f(\boldsymbol{\eta})\rangle = \langle\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}\rangle = \|\boldsymbol{\eta}\|^2 = 2$

可得 $a - 2b = \pm 1$, 于是可得$\begin{cases} a=1 \\ b=0,1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-1, \\ b=0,-1. \end{cases}$

当$\begin{cases} a=1 \\ b=0,1 \end{cases}$ 或$\begin{cases} a=-1 \\ b=0,-1 \end{cases}$时, 均有$\begin{cases} a^2=1, \\ (a-b)b=0, \end{cases}$

因而对任意$\boldsymbol{\alpha} \in V$, 有

$$\langle f(\boldsymbol{\alpha}), f(\boldsymbol{\alpha})\rangle = \langle a\boldsymbol{\alpha} - b\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta}\rangle\boldsymbol{\eta}, a\boldsymbol{\alpha} - b\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta}\rangle\boldsymbol{\eta}\rangle = a^2\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}\rangle - 2(a-b)b\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta}\rangle^2$$
$$= \langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}\rangle,$$

可见此时 f 是正交变换.

综上所述, f 是正交变换 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a=1 \\ b=0,1 \end{cases}$ 或$\begin{cases} a=-1, \\ b=0,-1. \end{cases}$

三. (16%) 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, 复数域上的线性空间 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 上的变换 f 定义如下: 对任意 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{AX} - \boldsymbol{XA}$.

1. 证明: f 是 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 上的线性变换.

证明: 对于任意的 $a, b \in \mathbb{C}$ 以及任意的 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, 有

$$f(a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{A}(a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y}) - (a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y})\boldsymbol{A} = a(\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{XA}) + b(\boldsymbol{AY} - \boldsymbol{YA})$$
$$= af(\boldsymbol{X}) + bf(\boldsymbol{Y}) \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

故 f 是 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 上的线性变换.

2. 求 f 在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解: $f(\boldsymbol{E}_{11}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{11} - \boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\boldsymbol{E}_{11} - 2\boldsymbol{E}_{12} + 0\boldsymbol{E}_{21} + 0\boldsymbol{E}_{22}$;

$f(\boldsymbol{E}_{12}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{12} - \boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\boldsymbol{E}_{11} - 2\boldsymbol{E}_{12} + 0\boldsymbol{E}_{21} + 0\boldsymbol{E}_{22}$;

$f(\boldsymbol{E}_{21}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{21} - \boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{E}_{11} + 0\boldsymbol{E}_{12} + 2\boldsymbol{E}_{21} - 2\boldsymbol{E}_{22}$;

$f(\boldsymbol{E}_{22}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{22} - \boldsymbol{E}_{22}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\boldsymbol{E}_{11} + 2\boldsymbol{E}_{12} + 0\boldsymbol{E}_{21} + 0\boldsymbol{E}_{22}$,

由此可见 f 在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. 分别求 f 的值域 $\mathrm{R}(f)$及核子空间 $\mathrm{K}(f)$的基，并指出它们的维数.

解: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

由此可见 $f(\boldsymbol{E}_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{E}_{21}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ 为 f 的值域 $\mathrm{R}(f)$基,

$\dim\mathrm{R}(f) = 2$.

同时 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为: $\xi_1 = (-1, 1, 0, 0)^T$, $\xi_2 = (1, 0, 0, 1)^T$.

因而 $\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为 f 的核子空间 $\mathrm{K}(f)$的基, $\dim\mathrm{K}(f) = 2$.

4. 判断 $\mathbb{C}^{2\times2} = \mathrm{R}(f) + \mathrm{K}(f)$是否成立，并说明理由.

解: 上题中 $f(\boldsymbol{E}_{11}), f(\boldsymbol{E}_{21}), \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ 在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的坐标向量构成

的矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

由此可见 $f(\boldsymbol{E}_{11}), f(\boldsymbol{E}_{21}), \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ 线性无关,

因而 $\mathbb{C}^{2\times2} = \mathrm{L}(f(\boldsymbol{E}_{11}), f(\boldsymbol{E}_{21}), \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2) = \mathrm{R}(f) + \mathrm{K}(f)$成立.

四. (15%) 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 复数域上的线性空间 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 上的变换 f 定义如下: 对任意 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^{2\times2}$, $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{AX} - \boldsymbol{XA}$.

1. 计算 $\boldsymbol{A}^2$, 并求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形.

解: $\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

若 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 λ^2 为 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$ 的特征值, 因而$\lambda^2 = 0$, 即$\lambda = 0$.
可见 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为 0.

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2$.

所以 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. 求 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{100}$ 的 Jordan 标准形, 其中 $\boldsymbol{I}$ 为 4 阶单位矩阵.

解: 因为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{J}$, 所以 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{100} \sim (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{J})^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 100\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 1, $\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{B})=1$，可见 $\boldsymbol{B}\sim\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

于是可得 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{100}\sim\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

故 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{100}$ 的 Jordan 标准形为$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

3. 判断 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{100}$ 与 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$ 是否相似，并说明理由.

解: 令 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，则 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{N}}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\sim\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\boldsymbol{N}} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \mathrm{e}^{\boldsymbol{N}}\end{pmatrix}\sim(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{100}$.

可见$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{100}$ 与 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$ 是相似.

五. (10%)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&0\\3&-2&1\end{pmatrix}$，求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$.

解: $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ -3 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)^2$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&-1&0\\3&-2&0\end{pmatrix}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2$.

可见特征值$\lambda=1$ 的代数重数为 2，几何重数为 1.

从而可得 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为$\lambda(\lambda-1)^2$.

设 $f(x)=\mathrm{e}^x$, $g(x)=a+bx+cx^2$,

则 $f(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})\Leftrightarrow\begin{cases}f(0)=g(0)\\ f(1)=g(1)\\ f'(1)=g'(1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ a+b+c=\mathrm{e}\\ b+2c=\mathrm{e}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1,\\ b=\mathrm{e}-2,\\ c=1.\end{cases}$

于是可得 $e^{A} = f(A) = g(A) = I + (e-2)A + A^2 = \begin{pmatrix} e & 2e-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3e & -2e+8 & e \end{pmatrix}$.

由此可得 $c_0(t) = 0$, $c_1(t) = (1t)e^t$, $c_2(t) = te^t$, 于是有 $Ae^{At} = (1-t)e^tA + te^tA^2$.

六. (10%)已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 $M = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的广义逆矩阵 M^+.

解: $A^+ = A^H(AA^H)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/3 \\ -1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$.

$$B^+ = (B^HB)^{-1}B^H = 5^{-1}(1, 2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}, \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

$$M^+ = \begin{pmatrix} O & B^+ \\ A^+ & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/5 & 2/5 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

七. (25%) 证明题.

1. 设$\|\cdot\|$是$\mathbb{C}^{n\times n}$ 上相容矩阵范数, A 为 n 阶可逆阵..

   证明: $\|X\|_A = \|A^{-1}XA\|$ $(\forall X \in \mathbb{C}^{n\times n})$ 是$\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的矩阵范数,
   并且这个范数是相容的.

证明: ①正定性

A 为 n 阶可逆矩阵, X 为 n 阶非零矩阵

$\Rightarrow A^{-1}XA$ 为 n 阶非零矩阵 $\Rightarrow \|X\|_A = \|A^{-1}XA\| > 0$.

②齐次性

$\|kX\|_A = \|A^{-1}(kX)A\| = \|k(A^{-1}XA)\| = |k|\cdot\|A^{-1}XA\| = |k|\cdot\|X\|_A$.

③三角不等式

$\|X + Y\|_A = \|A^{-1}(X + Y)A\| = \|A^{-1}XA + A^{-1}YA\| \le \|A^{-1}XA\| + \|A^{-1}YA\|$

$= \|X\|_A + \|Y\|_A$.

④相容性

$\|XY\|_A = \|A^{-1}(XY)A\| = \|(A^{-1}XA)(A^{-1}YA)\| \le \|A^{-1}XA\|\cdot\|A^{-1}YA\|$

$= \|\boldsymbol{X}\|_A \cdot \|\boldsymbol{Y}\|_A$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶 Hermite 矩阵, λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值, 集合 $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$, 其中 $\|\boldsymbol{x}\|$ 表示通常内积下向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度, 证明: $\lambda_0 = \max_{x\in S} \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

证明: 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶 Hermite 矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为实数.

设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值由大到小依次为 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge \lambda_n$,

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 为标准正交向量组, 而且 $\boldsymbol{A}\xi_1 = \lambda_1\xi_1, \dots, \boldsymbol{A}\xi_n = \lambda_n\xi_n$.

对于任意的 $\boldsymbol{x} \in S$, 设 $\boldsymbol{x} = k_1\xi_1 + \dots + k_n\xi_n$,

则 $|k_1|^2 + \dots + |k_n|^2 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\| = 1$,

$\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\xi_1 + \dots + k_n\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\xi_n = \lambda_1 k_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\xi_1 + \dots + \lambda_n k_n\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\xi_n$

$= \lambda_1|k_1|^2 + \dots + \lambda_n|k_n|^2 \le \lambda_1(|k_1|^2 + \dots + |k_n|^2) = \lambda_1 = \lambda_0$,

而且当 $\boldsymbol{x} = \xi_1$ 时, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \xi_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\xi_1 = \lambda_1\xi_1^{\mathrm{H}}\xi_1 = \lambda_1 = \lambda_0$.

综上所述, $\lambda_0 = \max_{x\in S} \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $s\times n$ 矩阵, 若 $n\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{G}_2$ 满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{A}, \quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_1)^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_1, \quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_2)^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_2,$$

证明: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_2$.

证明: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_1 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_2)^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_1)^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{G}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_1)^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{G}_2^{\mathrm{H}}[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_1)\boldsymbol{A}]^{\mathrm{H}}$

$= \boldsymbol{G}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_2)^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_2$.

4. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正规矩阵, 并且 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值. 如果矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, 证明: $\boldsymbol{B}$ 也是正规矩阵.

证明: 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正规矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}$ 酉相似于对角矩阵.

又因为 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值,

所以存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$,

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个互异的特征值.

于是由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 可得 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$, 因而 $\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}$.

令 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n\times n}$, 则由 $\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}$ 可得

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_1 c_{12} & \cdots & \lambda_1 c_{1n} \\ \lambda_2 c_{21} & \lambda_2 c_{22} & \cdots & \lambda_2 c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n c_{n1} & \lambda_n c_{n2} & \cdots & \lambda_n c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}\lambda_1 & c_{12}\lambda_2 & \cdots & c_{1n}\lambda_n \\ c_{21}\lambda_1 & c_{22}\lambda_2 & \cdots & c_{2n}\lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}\lambda_1 & c_{n2}\lambda_2 & \cdots & c_{nn}\lambda_n \end{pmatrix}.$$

故对于任意的 $1 \le i \ne j \le n$, 有$\lambda_i c_{ij} = c_{ij}\lambda_j$, 即 $(\lambda_i - \lambda_j)c_{ij} = 0$,

于是由$\lambda_i \ne \lambda_j$可得 $c_{ij} = 0$.

可见 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U} = (c_{ij})_{n\times n}$ 为对角矩阵, 因而 $\boldsymbol{B}$ 也是正规矩阵.

事实上, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{C}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} &= \boldsymbol{UCU}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{UCU}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{UCU}^{\mathrm{H}}[(\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}] = \boldsymbol{UCU}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{UC}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}) \\ &= \boldsymbol{UCC}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{UC}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} = (\boldsymbol{UC}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}})\boldsymbol{UCU}^{\mathrm{H}} \\ &= (\boldsymbol{UCU}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{UCU}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

5. 已知 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 n 阶正定矩阵, 并且矩阵方程 $\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$ 有唯一解. 如果矩阵 C 是这个矩阵方程的解, 证明: $\boldsymbol{C}$ 也是正定矩阵.

证明: 因为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是正定矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{B}$.

又因为 $\boldsymbol{AC} + \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{B}$,

所以 $\boldsymbol{AC}^{\mathrm{H}} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = (\boldsymbol{CA} + \boldsymbol{AC})^{\mathrm{H}} = (\boldsymbol{AC} + \boldsymbol{CA})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{B}$.

可见 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}$ 也是矩阵方程 $\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$ 的解.

由于矩阵方程 $\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$ 有唯一解, 所以 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{C}$.

设 λ_0 为 $\boldsymbol{C}$ 的特征值, $\boldsymbol{\eta}$ 为与之对应的特征向量, 即

$\boldsymbol{\eta} \ne \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{C\eta} = \lambda_0\boldsymbol{\eta}$.

于是有 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B\eta} &= \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{AC} + \boldsymbol{CA})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AC\eta} + \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A\eta} = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\lambda_0\boldsymbol{\eta}) + (\boldsymbol{C\eta})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A\eta} \\ &= \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\lambda_0\boldsymbol{\eta}) + (\lambda_0\boldsymbol{\eta})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A\eta} = 2\lambda_0\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A\eta},\end{aligned}$$

其中$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A\eta} > 0$, $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B\eta} > 0$, 因而 $\lambda_0 > 0$.

可见 $\boldsymbol{C}$ 也是正定矩阵.

试题十三

一. (20%) 设 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$,定义变换 $f:\mathbb{C}^{2\times2}\to\mathbb{C}^{2\times2}$, $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{XM}$.

1. 证明: f 是 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 上的线性变换.

证明: 对于任意的 $a, b\in\mathbb{C}$ 以及任意的 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\in\mathbb{C}^{2\times2}$, 有

$$f(a\boldsymbol{X}+b\boldsymbol{Y})=(a\boldsymbol{X}+b\boldsymbol{Y})\boldsymbol{M}=a\boldsymbol{XM}+b\boldsymbol{YM}=af(\boldsymbol{X})+bf(\boldsymbol{Y})\in\mathbb{C}^{2\times2}.$$

故 f 是 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 上的线性变换.

2. 求 f 在基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵.

解: $f(\boldsymbol{E}_{11})=\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}=1\boldsymbol{E}_{11}+2\boldsymbol{E}_{12}+0\boldsymbol{E}_{21}+0\boldsymbol{E}_{22}$;

$f(\boldsymbol{E}_{12})=\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}=2\boldsymbol{E}_{11}+4\boldsymbol{E}_{12}+0\boldsymbol{E}_{21}+0\boldsymbol{E}_{22}$;

$f(\boldsymbol{E}_{21})=\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}=0\boldsymbol{E}_{11}+0\boldsymbol{E}_{12}+1\boldsymbol{E}_{21}+2\boldsymbol{E}_{22}$;

$f(\boldsymbol{E}_{22})=\boldsymbol{E}_{22}\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\2&4\end{pmatrix}=0\boldsymbol{E}_{11}+0\boldsymbol{E}_{12}+2\boldsymbol{E}_{21}+4\boldsymbol{E}_{22}$,

由此可见 f 在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&4&0&0\\0&0&1&2\\0&0&2&4\end{pmatrix}$.

3. 分别求 $\mathrm{K}(f)$ 及 $\mathrm{R}(f)$ 的一组基.

解: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&4&0&0\\0&0&1&2\\0&0&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

由此可见 $f(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$ 为 f 的值域 $\mathrm{R}(f)$基.

同时, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为: $\xi_1=(-2, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_2=(0, 0, -2, 1)^{\mathrm{T}}$.

因而 $\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}-2&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}0&0\\-2&1\end{pmatrix}$为 f 的核子空间 $\mathrm{K}(f)$的基.

或者设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$, 则 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{XM}=\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u+2v & 2u+4v \\ x+2y & 2x+4y \end{pmatrix}$.

故 $\boldsymbol{X}\in \mathrm{K}(f) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u+2v & 2u+4v \\ x+2y & 2x+4y \end{pmatrix}=\boldsymbol{O} \Leftrightarrow \begin{cases} u+2v=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-2v \\ x=-2y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} -2v & v \\ -2y & y \end{pmatrix}=v\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

可见 $\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$为 f 的核子空间 $\mathrm{K}(f)$的基.

4. 问: $\mathbb{C}^{2\times 2}=\mathrm{K}(f)\oplus\mathrm{R}(f)$是否成立? 并说明理由.

解: 上题中 $f(\boldsymbol{E}_{11}), f(\boldsymbol{E}_{21}), \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ 在 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的坐标向量构成

的矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

由此可见 $f(\boldsymbol{E}_{11}), f(\boldsymbol{E}_{21}), \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ 线性无关,

因而 $\mathbb{C}^{2\times 2}=\mathrm{L}(f(\boldsymbol{E}_{11}), f(\boldsymbol{E}_{21}), \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2)=\mathrm{K}(f)\oplus\mathrm{R}(f)$ 成立.

二. (16%) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $W=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \mid \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\}$.

1. 求 $W^{\perp}$的一组基.

解: 因为 $W=\mathrm{K}(\boldsymbol{A})$, 所以 $W^{\perp}=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可见$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $W^{\perp}$的一组基.

2. 已知 $\boldsymbol{\eta}=(1, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^4$, 求$\boldsymbol{\eta}_0\in W$ 使 $\|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}_0\|=\min\limits_{\alpha\in W}\|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\alpha}\|$.

解: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

由此可见 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系为 $\xi_1 = (1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_2 = (0, 1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$,
这就是 W 的一组基.
注意到 $\langle\xi_1, \xi_2\rangle = 0$.

令 $\boldsymbol{\eta}_1 = \dfrac{\xi_1}{\|\xi_1\|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_2 = \dfrac{\xi_2}{\|\xi_2\|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$,

则 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 为 W 的一组标准正交基.

$$\boldsymbol{\eta}_0 \in W \text{ 使 } \|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0\| = \min_{\boldsymbol{\alpha}\in W}\|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\alpha}\|$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\eta}_0 = \langle\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\eta}_1\rangle\boldsymbol{\eta}_1 + \langle\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\eta}_2\rangle\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}.$$

或者令 $\boldsymbol{\eta}_0 = a\xi_1 + b\xi_2 = (a, b, a, b)^{\mathrm{T}}$,
则 $\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0 = (1-a, -b, -a, 1-b)^{\mathrm{T}}$, $\langle\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0, \xi_1\rangle = 1-2a$, $\langle\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0, \xi_2\rangle = 1-2b$,

$$\boldsymbol{\eta}_0 \in W \text{ 使 } \|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0\| = \min_{\boldsymbol{\alpha}\in W}\|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\alpha}\| \Leftrightarrow \langle\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0, \xi_1\rangle = \langle\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0, \xi_2\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow 1-2a = 1-2b = 0 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{\eta}_0 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}.$$

三. (12%) 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & -1\\3 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^+$.

解: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = 3$,

$$\boldsymbol{B}^+ = \boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}})^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3 & 0\\0 & 1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3 & 1/2\\1/3 & 0\\1/3 & -1/2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}^+ = \boldsymbol{C}^{-1} = 1/3, \boldsymbol{A}^+ = \begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^+\\\boldsymbol{B}^+ & \boldsymbol{O}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1/3\\1/3 & 1/2 & 0\\1/3 & 0 & 0\\1/3 & -1/2 & 0\end{pmatrix}.$$

四. (12%) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\-1&1&-2\end{pmatrix}$, 求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$ 及 $\det(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}})$.

解: $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\0&\lambda&0\\1&-1&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)^2$, $-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&-1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$, $\mathrm{r}(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=2$.

由此可得 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为$\lambda(\lambda+1)^2$.

设 $f(x)=\mathrm{e}^x$, $g(x)=a+bx+cx^2$,

则 $f(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})\Leftrightarrow\begin{cases}f(0)=g(0)\\f(-1)=g(-1)\\f'(-1)=g'(-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\a-b+c=\mathrm{e}^{-1}\\b-2c=\mathrm{e}^{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1,\\b=2-3\mathrm{e}^{-1},\\c=1-2\mathrm{e}^{-1},\end{cases}$

于是可得

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}=f(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}+(2-3\mathrm{e}^{-1})\boldsymbol{A}+(1-2\mathrm{e}^{-1})\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{-1}&3-5\mathrm{e}^{-1}&\mathrm{e}^{-1}\\0&1&0\\-\mathrm{e}^{-1}&3\mathrm{e}^{-1}-1&0\end{pmatrix},$$

$\det(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}})=\mathrm{e}^{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})}=\mathrm{e}^{-2}$.

五. (14%) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维列向量, 记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{H}}$, $a=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha}$.

1. 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式.

解: $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{H}})\le\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha})\le1$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{H}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha})=a$,
$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n-\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\lambda^{n-1}=\lambda^n-a\lambda^{n-1}$.

2. 讨论 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形.

解: 当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{O}$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\boldsymbol{O}$.
当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{H}}\ne\boldsymbol{O}$, $a=0$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$, $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n$,

$$\boldsymbol{A}\text{ 的 Jordan 标准形为}\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

当 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{H}} \neq \boldsymbol{O}$, $a \neq 0$ 时, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$, $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \lambda^n - a\lambda^{n-1}$.

$$\boldsymbol{A} \text{ 的 Jordan 标准形为} \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

六. (26%)证明题.

1. 设 V 是欧式空间且 $\boldsymbol{\omega}\,(\neq \boldsymbol{0}) \in V$, 定义 V 上的线性变换 f 为

$$f(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} - 2\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega}\rangle \boldsymbol{\omega}.$$

证明: 若 f 是 V 上的正交变换, 则 $\|\boldsymbol{\omega}\| = 1$.

证明: $f(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} - 2\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}\rangle\boldsymbol{\omega} = (1 - 2\|\boldsymbol{\omega}\|^2)\boldsymbol{\omega}$, $\quad \|f(\boldsymbol{\omega})\| = |1 - 2\|\boldsymbol{\omega}\|^2| \cdot \|\boldsymbol{\omega}\|$.

若 f 是正交变换, 则由 $\|f(\boldsymbol{\omega})\| = \|\boldsymbol{\omega}\|$ 以及 $\boldsymbol{\omega} \neq \boldsymbol{0}$ 可得

$$|1 - 2\|\boldsymbol{\omega}\|^2| = 1,\ 1 - 2\|\boldsymbol{\omega}\|^2 = \pm 1,\ \|\boldsymbol{\omega}\| = 1.$$

当 $\|\boldsymbol{\omega}\| = 1$ 时, 对于任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 有

$$\begin{aligned} \|f(\boldsymbol{\alpha})\|^2 &= \langle \boldsymbol{\alpha} - 2\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega}\rangle\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha} - 2\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega}\rangle\boldsymbol{\omega}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}\rangle - 2\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega}\rangle\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega}\rangle - 2\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega}\rangle\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}\rangle + 4\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega}\rangle^2\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}\rangle = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2, \end{aligned}$$

因而 $\|f(\boldsymbol{\alpha})\| = \|\boldsymbol{\alpha}\|$, 此时 f 确实是正交变换.

2. 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r$ 且 $\boldsymbol{A}^+$是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆, 证明: $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$, 且矩阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+$相似于

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

证明: 一方面, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$; 另一方面, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)$,

所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

由 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}$ 可得 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+$.

令 $\varphi(x) = x^2 - x$, λ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+$ 的特征值,

则 $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$ 为 $\varphi(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)^2 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{O}$ 的特征值,

因而 $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = 0$,

可见 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+$ 的特征值只能等于 0 或 1.

又因为 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+$,

所以存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使得 $\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非零方阵, 证明: $\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}} = \|\boldsymbol{A}\|_2$ 的充分必要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$.

证明: 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非零方阵,

所以 $r(\boldsymbol{A}) \geq 1$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$,

而且对于任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$,

有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2 \geq 0$,

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

可见 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}$ 是 n 阶半正定的 Hermite 矩阵, $n - r(\boldsymbol{A}) = n - r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})$.

因而存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$,

使得 $\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Lambda}$, 其中 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$.

于是 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$, $\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = \lambda_1$,

并且由 $r(\boldsymbol{\Lambda}) = r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}) \geq 1$ 可得 $\lambda_1 > 0$.

故 $\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}} = \|\boldsymbol{A}\|_2 \Leftrightarrow \sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})} = \sqrt{\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})} \Leftrightarrow \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = \rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})$

$\Leftrightarrow \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0 \Leftrightarrow r(\boldsymbol{\Lambda}) = 1 \Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) = 1$.

4. 设 f 是 V 上的线性变换, 证明: $V = \mathrm{K}(f) \oplus \mathrm{K}(I - f) \Leftrightarrow f^2 = f$.

证明: $(\Rightarrow)$若 $V = \mathrm{K}(f) \oplus \mathrm{K}(\mathrm{I} - f)$,

则对于任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 存在 $\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{K}(f)$, $\gamma \in \mathrm{K}(I - f)$ 使得 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} + \gamma$,

因而由 $\gamma - f(\gamma) = (I - f)(\gamma) = \boldsymbol{0}$ 可得 $f(\gamma) = \gamma$,

进而有 $f(\boldsymbol{\alpha}) = f(\boldsymbol{\beta} + \gamma) = f(\boldsymbol{\beta}) + f(\gamma) = \boldsymbol{0} + \gamma = \gamma$,

$f^2(\boldsymbol{\alpha}) = f[f(\boldsymbol{\alpha})] = f(\gamma) = \gamma = f(\boldsymbol{\alpha})$.

可见 $f^2 = f$.

$(\Leftarrow)$若 $f^2 = f$, 则对于任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 有 $f^2(\boldsymbol{\alpha}) = f(\boldsymbol{\alpha})$,

因而 $f[\boldsymbol{\alpha} - f(\boldsymbol{\alpha})] = f(\boldsymbol{\alpha}) - f^2(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{0}$, 可见 $\boldsymbol{\alpha} - f(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathrm{K}(f)$;

同时, $(I - f)[f(\boldsymbol{\alpha})] = f(\boldsymbol{\alpha}) - f^2(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{0}$, 可见 $f(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathrm{K}(I - f)$.

于是可得$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha} - f(\boldsymbol{\alpha})] + f(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathrm{K}(f) + \mathrm{K}(I - f)$.

这就证明了 $V \subseteq \mathrm{K}(f) + \mathrm{K}(I - f)$.

又因为 $\mathrm{K}(f) + \mathrm{K}(I - f) \subseteq V$, 所以 $V = \mathrm{K}(f) + \mathrm{K}(I - f)$.

另一方面, 若 $\xi \in \mathrm{K}(f) \cap \mathrm{K}(I - f)$,

则 $f(\xi) = 0 = (I - f)(\xi) = \xi - f(\xi)$, 因而$\xi = f(\xi) = \boldsymbol{0}$.

可见 $\mathrm{K}(f) \cap \mathrm{K}(I - f) = \{\boldsymbol{0}\}$.

综上所述, $V = \mathrm{K}(f) \oplus \mathrm{K}(I - f)$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定阵, $\boldsymbol{\alpha}$为 n 维列向量, 证明: $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}| = |\boldsymbol{A}| \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$.

证明: $(\Rightarrow)$因为 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定阵, 所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$.

又因为$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}$,

而且对于任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$,

有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}) \ge 0$,

可见 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}$ 为 n 阶半正定矩阵,

因而存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{U} = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$,

其中$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_n \ge 0$.

令 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{U}$, 则 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}$,

$\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{U} = \Lambda$, $\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} + \Lambda$.

若 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}| = |\boldsymbol{A}|$, 则

$$(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\ldots(1+\lambda_n) = |\boldsymbol{I} + \Lambda| = |\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}})\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}|\cdot|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}|\cdot|\boldsymbol{C}|$$
$$= |\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}|\cdot|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{I}| = 1,$$

可见 $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}) = \mathrm{r}(\Lambda) = 0$, 由此可得 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$.

$(\Leftarrow)$若 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$, 则 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{H}}| = |\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O}| = |\boldsymbol{A}|$.

试题十四

一. (20%)设 $\boldsymbol{M}\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $V_{\boldsymbol{M}}=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^{n\times n}\mid \boldsymbol{MX}=\boldsymbol{XM}\}$.

1. 证明: $V_{\boldsymbol{M}}$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的子空间.

证明: 因为 $\boldsymbol{O}, \boldsymbol{I}\in V_{\boldsymbol{M}}$, 所以 $V_{\boldsymbol{M}}\neq\varnothing$.

对于任意的 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\in V_{\boldsymbol{M}}$, $a, b\in\mathbb{C}$, 有

$\boldsymbol{M}(a\boldsymbol{X}+b\boldsymbol{Y})=a\boldsymbol{MX}+b\boldsymbol{MY}=a\boldsymbol{XM}+b\boldsymbol{YM}=(a\boldsymbol{X}+b\boldsymbol{Y})\boldsymbol{M}$,

可见 $a\boldsymbol{X}+b\boldsymbol{Y}\in V_{\boldsymbol{M}}$.

故 $V_{\boldsymbol{M}}$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的子空间.

2. 设 $n=2$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$. 分别求 $V_{\boldsymbol{A}}, V_{\boldsymbol{B}}, V_{\boldsymbol{A}}\cap V_{\boldsymbol{B}}, V_{\boldsymbol{A}}+V_{\boldsymbol{B}}$ 的一组基.

解: (1) $\begin{pmatrix}u&v\\x&y\end{pmatrix}\in V_{\boldsymbol{A}}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u&v\\x&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u&v\\x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u+x&v+y\\2x&2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u&u+2v\\x&x+2y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=u+v\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u&v\\x&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u&v\\0&u+v\end{pmatrix}=u\boldsymbol{M}_1+v\boldsymbol{M}_2.$$

其中 $\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{M}_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$.

又因为 $u\boldsymbol{M}_1+v\boldsymbol{M}_2=\boldsymbol{O}\Leftrightarrow u=y=0$, 可见 $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2$ 线性无关.

而且由 $\boldsymbol{AM}_1=\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{AM}_2=\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{A}$ 可见 $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2\in V_{\boldsymbol{A}}$.

综上可得 $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2$ 为 $V_{\boldsymbol{A}}$ 的一组基.

(2) $\begin{pmatrix}u&v\\x&y\end{pmatrix}\in V_{\boldsymbol{B}}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u&v\\x&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u&v\\x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u&v\\u+2x&v+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u+v&2v\\x+y&2y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}v=0\\y=u+x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u&v\\x&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u&0\\x&u+x\end{pmatrix}=u\boldsymbol{M}_1+x\boldsymbol{M}_3.$$

其中 $\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{M}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

又因为 $u\boldsymbol{M}_1+x\boldsymbol{M}_3=\boldsymbol{O}\Leftrightarrow u=x=0$, 可见 $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_3$ 线性无关.

而且由 $\boldsymbol{BM}_1 = \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{BM}_3 = \boldsymbol{M}_3\boldsymbol{B}$ 可见 $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_3 \in V_{\boldsymbol{B}}$.

综上可得 $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_3$ 为 $V_{\boldsymbol{B}}$ 的一组基.

(3) $\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} \in V_{\boldsymbol{A}}\cap V_{\boldsymbol{B}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = v = 0 \\ y = u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} = u\boldsymbol{M}_1$.

又因为 $\boldsymbol{M}_1$ 线性无关, 而且 $\boldsymbol{M}_1 \in V_{\boldsymbol{A}}\cap V_{\boldsymbol{B}}$,

综上可得 $\boldsymbol{M}_1$ 为 $V_{\boldsymbol{A}}\cap V_{\boldsymbol{B}}$ 的一组基.

(4) 由(1)(2)可知 $V_{\boldsymbol{A}} + V_{\boldsymbol{B}} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3\}$.

又因为 $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3$ 线性无关,

可见 $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3$ 为 $V_{\boldsymbol{A}} + V_{\boldsymbol{B}}$ 的一组基.

二. (10%)设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 的广义逆矩阵 $\boldsymbol{M}^+$.

解: $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{B}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{M}^+ = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^+ \\ \boldsymbol{A}^+ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

三. (20%)已知 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 上的线性变换 f 定义如下:

对任意 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times2}$, $f(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} a+b & 2a+2b \\ c+2d & c+2d \end{pmatrix}$.

1. 求 f 在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解: $f(\boldsymbol{E}_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\boldsymbol{E}_{11} + 2\boldsymbol{E}_{12} + 0\boldsymbol{E}_{21} + 0\boldsymbol{E}_{22}$,

$f(\boldsymbol{E}_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\boldsymbol{E}_{11} + 2\boldsymbol{E}_{12} + 0\boldsymbol{E}_{21} + 0\boldsymbol{E}_{22}$,

$$f(\boldsymbol{E}_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0\boldsymbol{E}_{11} + 0\boldsymbol{E}_{12} + 1\boldsymbol{E}_{21} + 1\boldsymbol{E}_{22},$$

$$f(\boldsymbol{E}_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0\boldsymbol{E}_{11} + 0\boldsymbol{E}_{12} + 2\boldsymbol{E}_{21} + 2\boldsymbol{E}_{22}.$$

由此可得 f 在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. 求 f 的特征值及各个特征子空间的基.

解: $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-3)^2$.

由此可得 f 的特征值为 0(二重), 3(二重).

$$0\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由此可得 $(0\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系 $\xi_1 = (1, -1, 0, 0)^T$, $\xi_2 = (0, 0, 2, -1)^T$,

对应于 0 的特征子空间的一组基为 $\boldsymbol{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由此可得 $(3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系 $\xi_3 = (1, 2, 0, 0)^T$, $\xi_4 = (0, 0, 1, 1)^T$,

对应于 3 的特征子空间的一组基为 $\boldsymbol{M}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{M}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. 问: 是否存在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基, 使得 f 的矩阵为对角阵? 如存在, 请给出这样的一组基及相应的对角阵; 如不存在, 请给出理由.

答: 由第 2 小题可知 f 的各特征值的代数重数等于其几何重数,

故存在 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的基, 使得 f 的矩阵为对角阵.

事实上, f 在 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的基

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{M}_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}, \boldsymbol{M}_3=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{M}_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

下的矩阵为对角矩阵 $\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$.

四. (12%)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&2\\-2&0&2&1\end{pmatrix}$, 向量 $\boldsymbol{\eta}=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\mathbb{R}^4$ 的子空间

$$\boldsymbol{V}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \mid \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\}.$$

1. 求 $\boldsymbol{V}$ 在 $\mathbb{R}^4$ 中的正交补空间 $\boldsymbol{V}^{\perp}$的一组基.

解: 因为 $\boldsymbol{V}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \mid \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\}=\mathrm{K}(\boldsymbol{A})$, 所以 $\boldsymbol{V}^{\perp}=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&-2\\2&0\\0&2\\2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

由此可见 $(1,2,0,2)^{\mathrm{T}}, (-2,0,2,1)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量组的一个极大无关组,

因而 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,0,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}=(-2,0,2,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{W}^{\perp}$的一组基.

2. 求 $\boldsymbol{\eta}$ 在 $\boldsymbol{V}^{\perp}$ 中的正投影.

解: 设 $\boldsymbol{\eta}_0=a(1,2,0,2)^{\mathrm{T}}+b(-2,0,2,1)^{\mathrm{T}}$, 则

$\boldsymbol{\eta}_0$ 是 $\boldsymbol{\eta}=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 在 $\boldsymbol{V}^{\perp}$ 中的正投影 $\Leftrightarrow \langle\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\alpha}\rangle=0=\langle\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\beta}\rangle$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1-9a=0\\2+9b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1/9\\b=-2/9\end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{\eta}_0=(\frac{5}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{4}{9}, 0)^{\mathrm{T}}.$$

解: 因为 $\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle=0$, 令 $\boldsymbol{\eta}_1=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}=(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|}=(-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^{\mathrm{T}}.$$

于是$\boldsymbol{\eta}_0$是$\boldsymbol{\eta}$在 $\boldsymbol{V}^{\perp}$中的正投影 $\Leftrightarrow \boldsymbol{\eta}_0 = \langle\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}_1\rangle\boldsymbol{\eta}_1 + \langle\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}_2\rangle\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{5}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{4}{9}, 0)^{\mathrm{T}}$.

五. (20%) 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & a & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$相似.

1. 确定参数 a, b, c 的取值.

解: $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & -8 \\ -3 & \lambda-a & -6 \\ 2 & 0 & \lambda+5 \end{vmatrix} = (\lambda-a)(\lambda+1)^2$. $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}| = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-b)$.

可见 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $a, -1, -1$; $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $1, -1, b$.
由 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ 可得 $a = 1, b = -1$.

此时 $\mathrm{r}(-\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 2$, 因而 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\boldsymbol{J} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

因而 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{J} \Leftrightarrow \mathrm{r}(-\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) = 2 \Leftrightarrow c \neq 2$.
综上所述, $a = 1, b = -1, c \neq 2$.

2. 求一个多项式 $p(x)$ 使得 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} = p(\boldsymbol{A})$.

解: 设 $f(x) = \mathrm{e}^x$, $p(x) = a + bx + cx^2$,

$$\text{则 } f(\boldsymbol{A}) = p(\boldsymbol{A}) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = p(1) \\ f(-1) = p(-1) \\ f'(-1) = p'(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = \mathrm{e} \\ a-b+c = \mathrm{e}^{-1} \\ b-2c = \mathrm{e}^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4}(\mathrm{e}+5\mathrm{e}^{-1}) \\ b = \frac{1}{2}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}) \\ c = \frac{1}{4}(\mathrm{e}-3\mathrm{e}^{-1}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow p(x) = \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}+5\mathrm{e}^{-1}) + \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})x + \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}-3\mathrm{e}^{-1})x^2.$$

于是可得 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} = f(\boldsymbol{A}) = p(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{4}(\mathrm{e}+5\mathrm{e}^{-1})\boldsymbol{I} + \frac{1}{2}(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})\boldsymbol{A} + \frac{1}{4}(\mathrm{e}-3\mathrm{e}^{-1})\boldsymbol{A}^2$.

六. (18%) 证明题.

1. 已知$\|\cdot\|_{\mathrm{m}_\infty}$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上矩阵∞范数. 实数 $a \geq n$. 证明: 由

$$\|\boldsymbol{A}\|_a = a\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{m}_\infty} \ (\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n})$$

定义的$\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的范数是相容的.

证明: ①正定性

对于任意的 n 阶非零矩阵 $\boldsymbol{A}$, 由 $a \geq n$ 以及$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{m}_\infty} > 0$ 可得

$$\|A\|_a = a\|A\|_{m_\infty} > 0.$$

②齐次性

对于任意的 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $k \in \mathbb{C}$,

$\|kA\|_a = a\|kA\|_{m_\infty} = a|k|\cdot\|A\|_{m_\infty} = |k|\cdot a\|A\|_{m_\infty} = |k|\cdot\|A\|_a.$

③三角不等式

对于任意的 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$\|A + B\|_a = a\|A+B\|_{m_\infty} \le a(\|A\|_{m_\infty} + \|B\|_{m_\infty})$

$= a\|A\|_{m_\infty} + a\|B\|_{m_\infty} = \|A\|_a + \|B\|_a.$

④相容性

对于任意的 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

设 $\|A\|_{m_\infty} = \max\limits_{s.t}|a_{st}| = u$, $\|B\|_{m_\infty} = \max\limits_{s.t}|b_{st}| = v$, 则

$$\|AB\|_a = a\|AB\|_{m_\infty} = a\max_{i.j}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \le a\max_{i.j}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|$$

$$\le anuv \le au\cdot av = \|A\|_a\cdot\|B\|_a.$$

2. 已知 α, β 是 n 维非零列向量, 矩阵 $A = \alpha\beta^H$. 证明: $A^+ = [\mathrm{tr}(A^HA)]^{-1}A^H$.

证明: 因为 α, β 是 n 维非零列向量,

所以 $A = \alpha\beta^H$ 为 A 的满秩分解, 因而

$A^+ = \beta(\beta^H\beta)^{-1}(\alpha^H\alpha)^{-1}\alpha^H = (\beta^H\beta)^{-1}(\alpha^H\alpha)^{-1}\beta\alpha^H = (\beta^H\beta)^{-1}(\alpha^H\alpha)^{-1}A^H.$

又因为 $\mathrm{tr}(A^HA) = \mathrm{tr}(\beta\alpha^H\alpha\beta^H) = \alpha^H\alpha\,\mathrm{tr}(\beta\beta^H) = \alpha^H\alpha\cdot\beta^H\beta$,

所以 $A^+ = (\beta^H\beta)^{-1}(\alpha^H\alpha)^{-1}A^H = [\mathrm{tr}(A^HA)]^{-1}A^H.$

3. 设 A 是 n 阶 Hermite 矩阵, α 是 n 维列向量, 且 $\alpha^H\alpha < 1$. 证明 $I - \alpha\alpha^H$ 是正定阵, 且 $A - A\alpha\alpha^H$ 相似于实对角阵.

证明: 因为 α 是 n 维列向量,

所以 $\alpha\alpha^H$ 是 Hermite 阵, 其特征值为 $\lambda_1 = \alpha^H\alpha$, $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$,

因而 $I - \alpha\alpha^H$ 是 Hermite 阵, 其特征值为 $1-\lambda_1, 1-\lambda_2, \ldots, 1-\lambda_n$,

由 $\lambda_1 = \alpha^H\alpha < 1$ 可知 $I - \alpha\alpha^H$ 的特征值全为正数, 故 $I - \alpha\alpha^H$ 是正定阵.

于是存在可逆阵 P 使得 $I - \alpha\alpha^H = P^HP$, 从而

$P(A - A\alpha\alpha^H)P^{-1} = PA(I-\alpha\alpha^H)P^{-1} = PA(I-\alpha\alpha^H)P^{-1} = PAP^HPP^{-1} = PAP^H.$

可见 $A - A\alpha\alpha^H$ 与 PAP^H 相似.

又因为 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶 Hermite 矩阵，所以 $\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{H}}$ 也是 n 阶 Hermite 矩阵，
故 $\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{H}}$ 相似于实对角阵，
进而得到 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A\alpha\alpha}^{\mathrm{H}}$ 相似于实对角阵.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵. 证明：矩阵方程 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$ 有解当且仅当 $\mathbb{C}^n=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{K}(\boldsymbol{A})$.

证明: $(\Rightarrow)$设 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，则对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^n$，有

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{AB\alpha}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{\alpha},$$

其中 $\boldsymbol{AB\alpha}\in\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{K}(\boldsymbol{A})$,
可见 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{K}(\boldsymbol{A})$.
所以 $\mathbb{C}^n\subseteq\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{K}(\boldsymbol{A})\subseteq\mathbb{C}^n$，因而 $\mathbb{C}^n=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{K}(\boldsymbol{A})$.

$(\Rightarrow)$设 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B})\le\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2)\le\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$，故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$,
$\dim\mathrm{K}(\boldsymbol{A})=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2)=\dim\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^2)$.
注意到由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 可推出 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ (其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$)，可见 $\mathrm{K}(\boldsymbol{A})\subseteq\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^2)$.
结合 $\dim\mathrm{K}(\boldsymbol{A})=\dim\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^2)$ 可得 $\mathrm{K}(\boldsymbol{A})=\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^2)$.
若 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\cap\mathrm{K}(\boldsymbol{A})$，则存在 $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{C}^n$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A\xi}$ 而且 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$,
因而由 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$ 可知 $\boldsymbol{\xi}\in\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^2)=\mathrm{K}(\boldsymbol{A})$，进而有 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{0}$.
由此可见 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\cap\mathrm{K}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{0}\}$.
于是 $\dim(\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{K}(\boldsymbol{A}))=\dim\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\dim\mathrm{K}(\boldsymbol{A})-\dim(\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\cap\mathrm{K}(\boldsymbol{A}))$

$$=\dim\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\dim\mathrm{K}(\boldsymbol{A})=\dim\mathbb{C}^n.$$

又因为 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{K}(\boldsymbol{A})\subseteq\mathbb{C}^n$，所以 $\mathbb{C}^n=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{K}(\boldsymbol{A})$.

$(\Leftarrow)$设 $\mathbb{C}^n=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{K}(\boldsymbol{A})$，则存在 $\boldsymbol{\xi}_i\in\mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{\eta}_i\in\mathrm{K}(\boldsymbol{A})$，使得 $\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{A\xi}_i+\boldsymbol{\eta}_i$,
于是 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A\xi}_i)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{\eta}_i)=\boldsymbol{Ae}_i-\boldsymbol{A\eta}_i=\boldsymbol{Ae}_i$,
其中 $i=1,2,\dots,n$; $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\dots,\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{I}$.
令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\dots,\boldsymbol{\xi}_n)$，则
$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_2,\dots,\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_n)=(\boldsymbol{Ae}_1,\boldsymbol{Ae}_2,\dots,\boldsymbol{Ae}_n)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\dots,\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{A}$.
可见矩阵方程 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$ 有解.

$(\Leftarrow)$设 $\mathbb{C}^n=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{K}(\boldsymbol{A})$，则有
$\dim(\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\cap\mathrm{K}(\boldsymbol{A}))=\dim\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\dim\mathrm{K}(\boldsymbol{A})-\dim(\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{K}(\boldsymbol{A}))=0$,
故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\cap\mathrm{K}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{0}\}$.
于是对于任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$,
若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，则由 $\boldsymbol{Ax}\in\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\cap\mathrm{K}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{0}\}$可得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$.
可见 $\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^2)\subseteq\mathrm{K}(\boldsymbol{A})$.

另一方面，若 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. 可见 $\mathrm{K}(\boldsymbol{A}) \subseteq \mathrm{K}(\boldsymbol{A}^2)$.
综上所述, $\mathrm{K}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{K}(\boldsymbol{A}^2)$.
故 $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \dim\mathrm{K}(\boldsymbol{A}) = \dim\mathrm{K}(\boldsymbol{A}^2) = n - \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2)$,
因而 $\dim\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2) = \dim\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^2)$.
再结合 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^2) \subseteq \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$ 可得 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \dim\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^2)$.
令 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，则由 $\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i \in \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^2)$ 可知,
存在 $\boldsymbol{\beta}_i \in \mathbb{C}^n$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}_i$，其中 $i = 1, 2, \dots, n$; $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{I}$.
令 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_n)$，则
$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n) = \boldsymbol{A}$.
可见矩阵方程 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$ 有解.

试题十五

一. (20%)已知矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$, $\mathbb{C}^{2\times2}$ 是复数域上的线性空间, 定义其上的变换为 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{MX}-\boldsymbol{XM}, \boldsymbol{X}\in\mathbb{C}^{2\times2}$.

1. 证明: f 是 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 上的线性变换.

证明: 对于任意的 $a, b\in\mathbb{C}$ 以及任意的 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\in\mathbb{C}^{2\times2}$, 有

$$
\begin{aligned}
f(a\boldsymbol{X}+b\boldsymbol{Y}) &= \boldsymbol{M}(a\boldsymbol{X}+b\boldsymbol{Y})-(a\boldsymbol{X}+b\boldsymbol{Y})\boldsymbol{M}=a(\boldsymbol{MX}-\boldsymbol{XM})+b(\boldsymbol{MY}-\boldsymbol{YM})\\
&= af(\boldsymbol{X})+bf(\boldsymbol{Y}).
\end{aligned}
$$

故 f 是 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 上的线性变换.

2. 求 f 在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵.

解: $f(\boldsymbol{E}_{11})=\boldsymbol{ME}_{11}-\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=0\boldsymbol{E}_{11}+0\boldsymbol{E}_{12}+1\boldsymbol{E}_{21}+0\boldsymbol{E}_{22}$;

$f(\boldsymbol{E}_{12})=\boldsymbol{ME}_{12}-\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}=-1\boldsymbol{E}_{11}-1\boldsymbol{E}_{12}+0\boldsymbol{E}_{21}+1\boldsymbol{E}_{22}$;

$f(\boldsymbol{E}_{21})=\boldsymbol{ME}_{21}-\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=0\boldsymbol{E}_{11}+0\boldsymbol{E}_{12}+1\boldsymbol{E}_{21}+0\boldsymbol{E}_{22}$;

$f(\boldsymbol{E}_{22})=\boldsymbol{ME}_{22}-\boldsymbol{E}_{22}\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}=0\boldsymbol{E}_{11}+0\boldsymbol{E}_{12}-1\boldsymbol{E}_{21}+0\boldsymbol{E}_{22}$,

由此可见 f 在 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&-1&0&0\\1&0&1&-1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$.

3. 分别求核空间 $\mathrm{K}(f)$及值域 $\mathrm{R}(f)$的一组基及维数.

解: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&-1&0&0\\1&0&1&-1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

由此可见 $f(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{E}_{12})=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}$为 f 的值域 $\mathrm{R}(f)$基,

$\dim\mathrm{R}(f)=2$.

同时 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系为: $\xi_1 = (-1, 0, 1, 0)^T$, $\xi_2 = (1, 0, 0, 1)^T$.

因而 $\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为 f 的核子空间 $\mathrm{K}(f)$的基, $\dim\mathrm{K}(f) = 2$.

4. 判断 $\mathbb{C}^{2\times 2} = \mathrm{R}(f)\oplus\mathrm{K}(f)$是否成立，并说明理由.

解: 上题中 $f(\boldsymbol{E}_{11})$, $f(\boldsymbol{E}_{12})$, $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ 在 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 下的坐标向量构成

的矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

由此可见 $f(\boldsymbol{E}_{11})$, $f(\boldsymbol{E}_{12})$, $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ 线性无关,

因而 $\mathbb{C}^{2\times 2} = \mathrm{L}(f(\boldsymbol{E}_{11}), f(\boldsymbol{E}_{12}), \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2) = \mathrm{R}(f) + \mathrm{K}(f)$成立.

二. (16%) 设 $\mathbb{R}[x]_3 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$关于多项式的加法和数乘构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 对于任意的 $r \in \mathbb{R}$, 记 $V_r = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(r) = 0\}$.

1. 证明: V_r 是 $\mathbb{R}[x]_3$ 的子空间.

证明: ①由 $0, x - r \in V_r$ 可知 $V_r \neq \varnothing$.

②对于任意的 $f(x), g(x) \in V_r$, $k, l \in \mathbb{R}$,

由 $f(r) = 0 = g(r)$可得 $kf(r) + lg(r) = 0$, 可见 $kf(x) + lg(x) \in V_r$.

综合①②可知 V_r 是 $\mathbb{R}[x]_3$ 的子空间.

2. 分别求 V_0, V_1, $V_0\cap V_1$, V_0+V_1 的一组基.

解: $f(x) = ax^2 + bx + c \in V_0 \Leftrightarrow c = f(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) = ax^2 + bx$.

由此可见 x^2, x 为 V_0 的一组基.

$f(x) \in V_1 \Leftrightarrow c = f(1) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \mid f(x) \Leftrightarrow f(x) = (x-1)(kx + l) = kx(x-1) + l(x-1)$.

由此可见 $x(x-1), x-1$ 为 V_1 的一组基.

$f(x) \in V_0\cap V_1 \Leftrightarrow f(0) = f(1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1) \mid f(x) \Leftrightarrow f(x) = kx(x-1)$.

由此可见 $x(x-1)$ 为 $V_0\cap V_1$ 的一组基.

$V_0+V_1 = \mathrm{span}\{x^2, x, x(x-1), x-1\} = \mathrm{span}\{x^2, x, 1\}$,

由此可见 $x^2, x, 1$ 为 V_0+V_1 的一组基.

3. 设 $\mathbb{R}[x]_3$ 上内积 $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$, $\forall f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]_3$.

求 $V_0^{\perp}$的一组基.

解: 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 则 $\langle f(x), x^2\rangle = \int_0^1 (ax^4 + bx^3 + cx^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{3}c$,

$$\langle f(x), x\rangle = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c,$$

于是 $f(x) \in V_0^{\perp} \Leftrightarrow \langle f(x), x^2\rangle = 0 = \langle f(x), x\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{3}c = 0 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{10}{3}c \\ b = -4c \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = c(\tfrac{10}{3}x^2 - 4x + 1),$$

由此可见 $\frac{10}{3}x^2 - 4x + 1$ 为 $V_0^{\perp}$ 的一组基.

三. (12%) 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ 的广义逆矩阵 $\boldsymbol{M}^+$.

解: $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{B}^+ = \boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}^+ = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^+ \\ \boldsymbol{A}^+ & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1/2 & 5/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

四. (12%) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$ 及 $\det(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}})$.

解: $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)^2$, $-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{r}(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = 1$.

由此可得 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为$\lambda(\lambda+1)$.

设 $f(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = a + bx$,

则 $f(\boldsymbol{A}) = g(\boldsymbol{A}) \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = g(0) \\ f(-1) = g(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a - b = \mathrm{e}^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 1 - \mathrm{e}^{-1}, \end{cases}$

于是可得 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} = f(\boldsymbol{A}) = g(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{I} + (1-\mathrm{e}^{-1})\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2-\mathrm{e}^{-1} & 0 & 2-2\mathrm{e}^{-1} \\ 0 & \mathrm{e}^{-1} & 0 \\ \mathrm{e}^{-1}-1 & 0 & 2\mathrm{e}^{-1}-1 \end{pmatrix}$,

$\det(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})} = \mathrm{e}^{-2}$.

五. (20%) 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 6 & c & b \end{pmatrix}$.

1. 讨论 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形的可能形式.

解: $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = (\lambda-1)^2(\lambda-a)$.

当 $a = 1$ 时, $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = (\lambda-1)^3$, $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 2$,

此时 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

当 $a \neq 1$ 时, $|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = (\lambda-1)^2(\lambda-a)$,

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1-a & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times\tfrac{1}{2}(1-a) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \tfrac{3}{2}a - \tfrac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

若 $a = 11/3$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 1$,

此时 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11/3 \end{pmatrix}$;

若 $a \neq 1$ 而且 $a \neq 11/3$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = 2$,

此时 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$;

2. 问: a, b, c 为何值时, $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$?

解: $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| = (\lambda-1)^2(\lambda-a)$, $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}| = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-b)$.

若 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$, 则由 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| = |\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|$ 可得 $a = 2, b = 1$.

此时 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \\ -6 & -c & 0 \end{pmatrix}$, 进而由 $\mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = 2$ 可得 $c \neq 6/5$.

当 $a = 2, b = 1, c \neq 6/5$ 时, $\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \boldsymbol{B}$.

综上所述, 当且仅当 $a = 2, b = 1, c \neq 6/5$ 时, $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$.

六. (20%) 证明题.

1. 设 V 是 n 维欧氏空间($n \geq 2$)且 $\boldsymbol{\omega}$ 是 V 中非零向量. 定义 V 上的线性变换 f 为: $f(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} - \langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega}\rangle\boldsymbol{\omega}$. 证明: 若 f 是 V 上的正交变换, 则 $\|\boldsymbol{\omega}\| = \sqrt{2}$.

证明: 令$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\|\boldsymbol{\omega}\|}$, 并把$\boldsymbol{\varepsilon}_1$扩充为 V 的一组标准正交基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$,

则 $f(\boldsymbol{\varepsilon}_1) = \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \langle\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\omega}\rangle\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \|\boldsymbol{\omega}\|^2\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1-\|\boldsymbol{\omega}\|^2)\boldsymbol{\varepsilon}_1$,

$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = \boldsymbol{\varepsilon}_i - \langle\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\omega}\rangle\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\varepsilon}_i$, $\forall i = 2, 3, \ldots, n$.

可见 f 在 V 的标准正交基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}\{1-\|\boldsymbol{\omega}\|^2, 1, \ldots, 1\}.$$

故 f 是 V 上的正交变换 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ $1-\|\boldsymbol{\omega}\|^2 = \pm 1$.

又因为 $\boldsymbol{\omega} \neq \boldsymbol{0}$, 所以 f 是 V 上的正交变换 $\Leftrightarrow \|\boldsymbol{\omega}\|^2 = 2 \Leftrightarrow \|\boldsymbol{\omega}\| = \sqrt{2}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶 Hermite 阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵. 证明: 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 均为对角阵.

证明: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶 Hermite 阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵,

则存在 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{I}$.

由 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶 Hermite 阵可得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BC}$ 也是 n 阶 Hermite 阵,

故存在 n 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BC})\boldsymbol{U}$ 为对角阵.

令 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{CU}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶可逆阵, 而且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AP} = (\boldsymbol{CU})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{CU}) = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{ACU} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{IU} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I},$$

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BP} = (\boldsymbol{CU})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{CU}) = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BC})\boldsymbol{U}$$

均为对角阵.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是 n 维非零列向量, 记 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{H}}$, 证明: $\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}} = \|\boldsymbol{A}\|_2$.

证明: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{H}}) = (\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{H}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{H}}) = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{H}}$.

由 $\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\beta} = \|\boldsymbol{\beta}\|^2\boldsymbol{\beta}$ 可见 $\|\boldsymbol{\beta}\|^2$ 为 Hermite 阵 $\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{H}}$ 的非零特征值.

又因为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{H}}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{\beta}) = 1$, 所以 $\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{H}}$ 酉相似于 $\mathrm{diag}\{\|\boldsymbol{\beta}\|^2, 0, \ldots, 0\}$.

于是可得 $\rho(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{H}}) = \|\boldsymbol{\beta}\|^2 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{H}})$,

$\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2\rho(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{H}}) = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2\|\boldsymbol{\beta}\|^2$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2\mathrm{tr}(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{H}}) = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2\|\boldsymbol{\beta}\|^2$,

故 $\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})} = \|\boldsymbol{\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{\beta}\| = \sqrt{\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})} = \|\boldsymbol{A}\|_2$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 阵, 证明: 存在唯一的 Hermite 阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^3$.

证明: (**存在性**)

因为 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 阵,

所以存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 以及实对角矩阵 $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ 使得

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AU} = \Lambda,\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\Lambda\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}.$$

令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}\mathrm{diag}\{\sqrt[3]{\lambda_1}, \sqrt[3]{\lambda_2}, \ldots, \sqrt[3]{\lambda_n}\}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$,

则 $\boldsymbol{B}$ 为 Hermite 阵, 而且 $\boldsymbol{B}^3 = \boldsymbol{U}\Lambda\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}$.

(**唯一性**)

若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^3 = \boldsymbol{C}^3$, 其中 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 Hermite 阵,

则存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2$, 以及实对角矩阵 Λ_1, Λ_2, 使得

$$\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{BU}_1 = \Lambda_1,\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{H}}\boldsymbol{CU}_2 = \Lambda_2.$$

于是 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}_1\Lambda_1\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}_2\Lambda_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{H}}$, $\boldsymbol{U}_1\Lambda_1^3\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{B}^3 = \boldsymbol{C}^3 = \boldsymbol{U}_2\Lambda_2^3\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{H}}$,

$$\Lambda_1^3\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_2\Lambda_2^3.$$

记 $\Lambda_1 = \mathrm{diag}\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$, $\Lambda_2 = \mathrm{diag}\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n\}$, $\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_2 = (u_{ij})_{n\times n}$,

则由 $\Lambda_1^3\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_2\Lambda_2^3$ 可得

$$\begin{pmatrix} \mu_1^3 u_{11} & \mu_1^3 u_{12} & \cdots & \mu_1^3 u_{1n} \\ \mu_2^3 u_{21} & \mu_2^3 u_{22} & \cdots & \mu_2^3 u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n^3 u_{n1} & \mu_n^3 u_{n2} & \cdots & \mu_n^3 u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}\nu_1^3 & u_{12}\nu_2^3 & \cdots & u_{1n}\nu_n^3 \\ u_{21}\nu_1^3 & u_{22}\nu_2^3 & \cdots & u_{2n}\nu_n^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1}\nu_1^3 & u_{n2}\nu_2^3 & \cdots & u_{nn}\nu_n^3 \end{pmatrix}.$$

故对于任意的 $1 \le i, j \le n$，有 $\mu_i^3 u_{ij} = u_{ij}\nu_j^3$，即

$$(\mu_i - \nu_j)(\mu_i^2 + \mu_i\nu_j + \nu_j^2)u_{ij} = 0,$$

由于 μ_i, ν_j 都是实数, $\mu_i^2 + \mu_i\nu_j + \nu_j^2 = (\mu_i + \frac{1}{2}\nu_j)^2 + \frac{3}{4}\nu_j^2 \ge 0$,

可见 $\mu_i^2 + \mu_i\nu_j + \nu_j^2 = 0$ 当且仅当 $\mu_i = \nu_j = 0$.

故由 $(\mu_i - \nu_j)(\mu_i^2 + \mu_i\nu_j + \nu_j^2)u_{ij} = 0$ 可得 $(\mu_i - \nu_j)u_{ij} = 0$，即 $\mu_i u_{ij} = u_{ij}\nu_j$,

因而 $\boldsymbol{\Lambda}_1 \boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{\Lambda}_2$，进而有 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{U}_2\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{C}$.

(**唯一性**)

若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^3 = \boldsymbol{C}^3$，其中 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 Hermite 阵,

则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$，以及实对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_1, \boldsymbol{\Lambda}_2$，使得

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_1,\ \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{\Lambda}_2.$$

于是 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{P}_1^{-1}, \boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{P}_2^{-1}$, $\quad \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{\Lambda}_1^3\boldsymbol{P}_1^{-1} = \boldsymbol{B}^3 = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^3 = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{\Lambda}_2^3\boldsymbol{P}_2^{-1}$,

$$\boldsymbol{\Lambda}_1^3\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{\Lambda}_2^3.$$

记 $\boldsymbol{\Lambda}_1 = \mathrm{diag}\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$, $\boldsymbol{\Lambda}_2 = \mathrm{diag}\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n\}$, $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2 = (u_{ij})_{n\times n}$,

则由 $\boldsymbol{\Lambda}_1^3\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{\Lambda}_2^3$ 可得

$$\begin{pmatrix} \mu_1^3 u_{11} & \mu_1^3 u_{12} & \cdots & \mu_1^3 u_{1n} \\ \mu_2^3 u_{21} & \mu_2^3 u_{22} & \cdots & \mu_2^3 u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n^3 u_{n1} & \mu_n^3 u_{n2} & \cdots & \mu_n^3 u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}\nu_1^3 & u_{12}\nu_2^3 & \cdots & u_{1n}\nu_n^3 \\ u_{21}\nu_1^3 & u_{22}\nu_2^3 & \cdots & u_{2n}\nu_n^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1}\nu_1^3 & u_{n2}\nu_2^3 & \cdots & u_{nn}\nu_n^3 \end{pmatrix}.$$

故对于任意的 $1 \le i, j \le n$，有 $\mu_i^3 u_{ij} = u_{ij}\nu_j^3$，即

$$(\mu_i - \nu_j)(\mu_i^2 + \mu_i\nu_j + \nu_j^2)u_{ij} = 0,$$

由于 μ_i, ν_j 都是实数, $\mu_i^2 + \mu_i\nu_j + \nu_j^2 = (\mu_i + \frac{1}{2}\nu_j)^2 + \frac{3}{4}\nu_j^2 \ge 0$,

可见 $\mu_i^2 + \mu_i\nu_j + \nu_j^2 = 0$ 当且仅当 $\mu_i = \nu_j = 0$.

故由 $(\mu_i - \nu_j)(\mu_i^2 + \mu_i\nu_j + \nu_j^2)u_{ij} = 0$ 可得 $(\mu_i - \nu_j)u_{ij} = 0$，即 $\mu_i u_{ij} = u_{ij}\nu_j$,

因而 $\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{\Lambda}_2$，进而有 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{P}_1^{-1} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{P}_2^{-1} = \boldsymbol{C}$.