第四章 典型优化问题

典型优化问题简介

先回顾一下最优化问题的基本形式:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
\text{s.t.} \quad & c_i(x) \le 0,\ i = 1, \cdots, m \\
& c_i(x) = 0,\ i = m+1, \cdots, m+l.
\end{aligned}
$$

- 按照目标和约束函数的简易程度分，可以分为线性规划和非线性规划;
- 线性规划是指所有的目标函数和约束函数都是线性的，非线性规划是指目标函数和约束函数中至少有一个是非线性的;

典型优化问题简介

先回顾一下最优化问题的基本形式：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(x) \le 0, \ i = 1, \cdots, m \\ & c_i(x) = 0, \ i = m+1, \cdots, m+l. \end{aligned}$$

- 另外也可按照问题最优解的性质，分为凸优化问题与非凸优化问题；
- 凸优化问题的任何稳定点都是全局极小点，非凸优化问题的稳定点则可能是局部极小点，全局极小点甚至是鞍点；

典型优化问题简介

- 在实际中优化问题的形式多种多样。对于不同种类的优化问题，需要根据问题的具体形式，来分析其理论性质以及设计最有效的算法。
- 本节将会列举一些重要的优化问题并根据优化建模进一步给出相关的应用背景和应用举例。
- 对于同一个实际问题，使用不同的建模手段可能获得形式不同的优化问题。这些问题的求解难度以及解的性质可能有非常大的差别，因此将实际问题转化为何种优化问题是优化建模中需要重点考虑的。

目录

§ 4.1 线性规划

§4.1 线性规划

- **基本形式和应用背景**
- 应用举例

§4.1 线性规划

线性规划问题的一般形式如下：

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & c^{\mathrm{T}}x, \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & Gx \le e, \end{aligned}$$

其中，

$c \in \mathbb{R}^n$，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$b \in \mathbb{R}^m$，$G \in \mathbb{R}^{p\times n}$和$e \in \mathbb{R}^p$是给定的矩阵和向量；

$x \in \mathbb{R}^n$是决策变量。

§4.1 线性规划

- 线性规划最先在第二次世界大战时被提出，用于最大化资源的利用效率。
- 在1947 年，著名的单纯形方法被提出，使得线性规划问题可以被有效地求解。之后，线性规划用到了更多其他领域当中，如农业、石油、钢铁、运输、通信和运筹学等。
- 线性规划的有效应用节省了大量的人力、物力和财力。随着计算机以及求解算法的快速发展，我们可以求解更大规模的线性规划问题，保证了线性规划问题的应用前景。

§4.1 线性规划

- 基本形式和应用背景
- 应用举例

§4.1 线性规划

生产决策问题：

某工厂生产两种产品：A 和 B；

每生产 1 单位 A，需要 2 小时劳动和 3 kg 原料；

每生产 1 单位 B，需要 4 小时劳动和 2 kg 原料；

工厂共有：

100 小时劳动时间；

90 kg 原料；

产品 A 每单位利润 30 元，产品 B 每单位利润 20 元；

求：

应生产多少 A 和 B，使利润最大？

§4.1 线性规划

设：

x_1 =生产产品A的数量， x_2 =生产产品B的数量

目标函数：

$$max\ Z = 30x_1 + 20x_2$$

约束条件（限制）：

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leqslant 100 \text{（劳动时间约束）} \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 90 \text{（原料约束）} \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \text{（非负约束）} \end{cases}$$

§4.1 线性规划

资源分配问题

某公司有 3 万元预算，可投入到两个项目：P1 和 P2；

每万元投资在 P1 上，可带来 3 万元收益，但需要 2 单位人力；

每万元投资在 P2 上，可带来 4 万元收益，但需要 4 单位人力；

公司最多有 10 单位人力；

求：

如何分配投资，才能收益最大?

§4.1 线性规划

设：

x_1 = 生产产品P1的数量，x_2 = 生产产品P2的数量

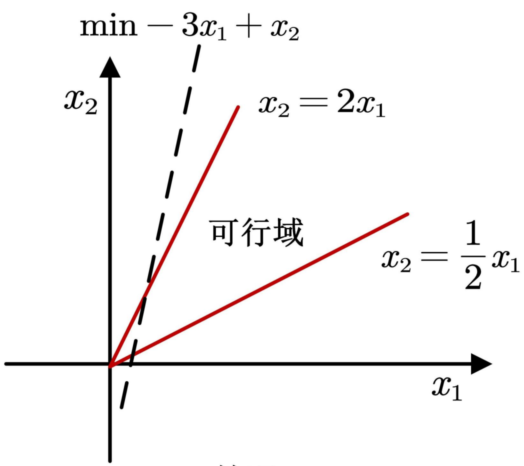
目标函数：

$$max\ Z = 3x_1 + 4x_2$$

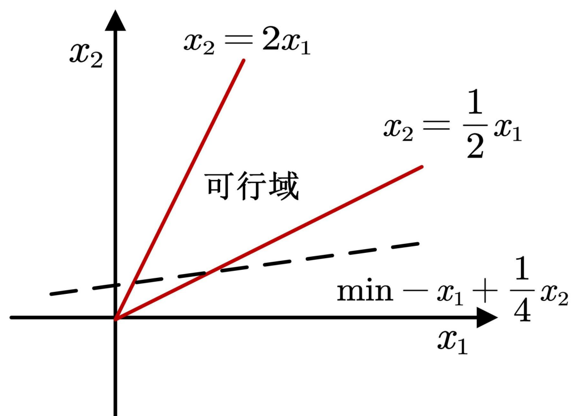
约束条件（限制）：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 3 \text{（预算不超过3万元）} \\ 2x_1 + 4x_2 \leqslant 10 \text{（人力限制）} \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \text{（非负约束）} \end{cases}$$

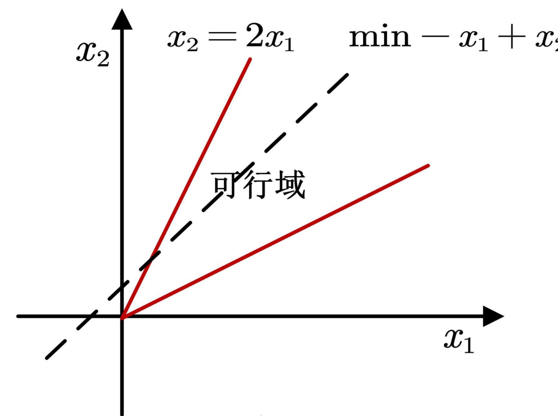
§4.1 线性规划



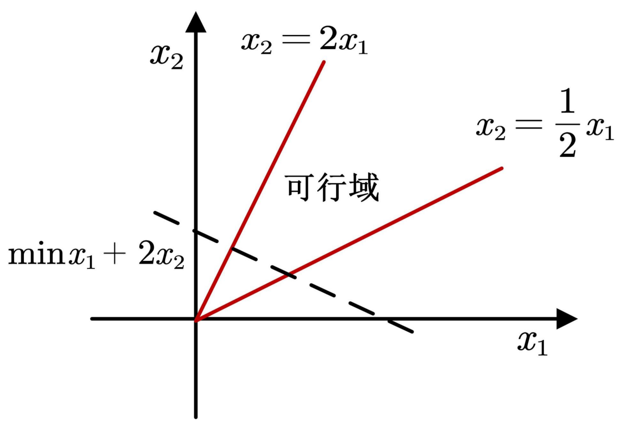
情况A



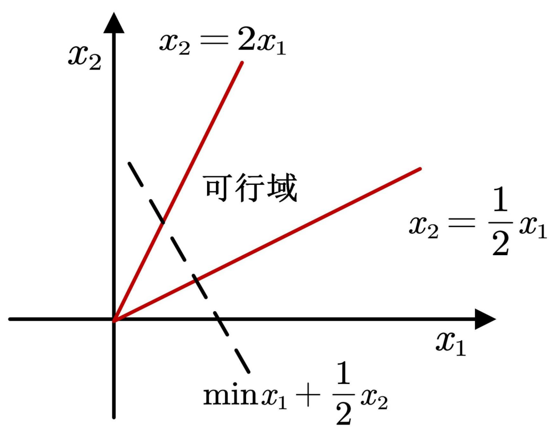
情况B



情况C



情况D



情况E

§4.1 线性规划

线性规划指目标函数与约束条件函数**均为线性函数**的优化问题。

- **问题**：

$$\min 3x_1 + 5x_2$$

$$s.t. \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1 + 3x_2 \leq 90 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **候选顶点**：(0,0), (50,0), (0,30), (42,16)
- **对应目标函数值**：0, 150, 150, 206
- **最优解**：$x^* = (0,0), f^* = 0$； $*$表示最优解

习题1

§4.1 线性规划

非线性规划指**目标函数或约束条件函数**中至少有一个是**非线性函数**的优化问题。

- **定义：**

$$\min \ f(x)$$
$$s.t. \ \ g_i(x) \geq 0, i \in I; \mathrm{h}_j(x) = 0, j \in E$$

- **求解方法：** 梯度法、牛顿法、内点法、序列二次规划

- **示例：**

$$\min \ f(x, y) = x^2 + y^2$$
$$s.t. x^2 + y \leq 1, x \geq 0$$

可行域是曲线和区域的交集，解通常在边界。

习题2

§4.1 线性规划

- **定义**：

$$\min\ f(x)$$
$$s.t.\ \ g_i(x) \geq 0, i \in I; \mathrm{h}_j(x) = 0, j \in E$$

- **求解方法**：梯度法、牛顿法、内点法、序列二次规划

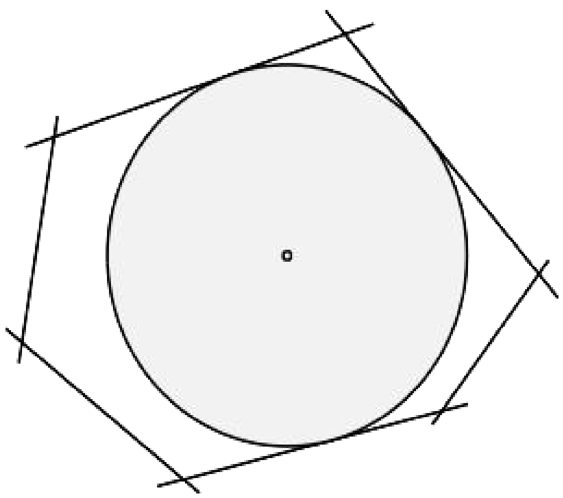
- **示例**：

$$\min\ f(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2$$
$$s.t. x^2 + y^2 \geq 4, x + y \geq 3$$

习题3

§4.1 线性规划

- 在线性规划中，可行域通常是由若干线性不等式构成的多面体;
- 一个自然的问题是：在这个多面体内，能放下的最大圆（或球）中心在哪里?
- 这个圆心就叫 切比雪夫中心（Chebyshev Center）；



§4.1 线性规划

给定线性不等式集合:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \le b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m\}$$

$$B(c, r) = \{x \mid \|x - c\|_2 \le r\}$$

c: 球心(切比雪夫中心);
r: 半径(到最近约束面的距离);

找到离所有约束边界“最远”的点c。

§4.1 线性规划

对于每个约束平面：

$$a_i^T x \leq b_i$$

若球心为c，半径为r，则需满足：

$$a_i^T c + \|a_i\|_2 r \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

§4.1 线性规划

线性规划形式：

$$\max_{c,\, r} \quad r$$

$$s.t. \quad a_i^T c + r \le b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

- 这是一个标准的线性规划（Linear Programming, LP）模型；
- 目标是最大化半径 r，使得球体完全位于多面体 P 内；

§ 4.2 最小二乘问题

§ 4.2 最小二乘问题

- 基本形式和应用背景
- 应用举例

§ 4.2 最小二乘问题

最小二乘问题的一般形式如下:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \sum_{i=1}^{m} r_i^2(x),$$

其中:

r_i: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为线性函数，则称问题为线性最小二乘问题，否则称其为非线性最小二乘问题。

最小二乘问题是线性回归和非线性回归的基础。

§ 4.2 最小二乘问题

- 线性最小二乘问题是回归分析中的一个基本模型，它可以表示为

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \sum_{i=1}^{m}(a_i^{\mathrm{T}}x-b_i)^2,$$

即$r_i(x)=a_i^{\mathrm{T}}x-b_i,\ i=1,2,\cdots,m$.

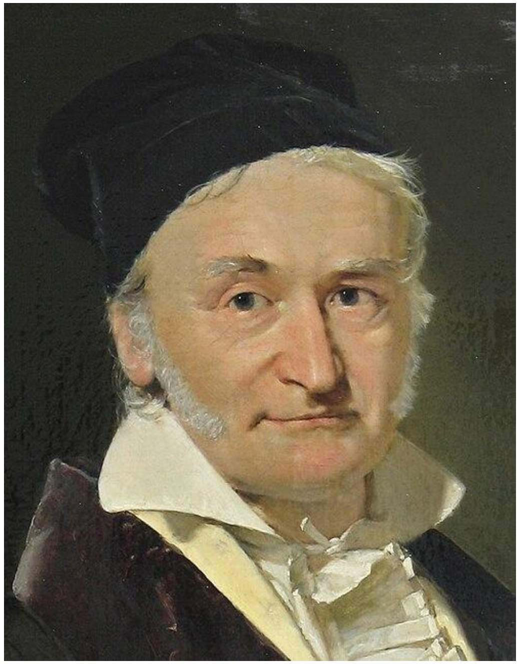
- 记$A=[a_1,a_2,\cdots,a_m]^{\mathrm{T}}$，那么线性最小二乘问题可以等价地写成如下形式：

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad f(x)\xlongequal{\text{def}}\frac{1}{2}\|Ax-b\|_2^2,$$

这是一个无约束二次目标函数的优化问题.

§ 4.2 最小二乘问题

- 1801年，意大利天文学家朱塞普·皮亚齐发现了第一颗小行星谷神星。
- 经过40天的追踪观测后，由于谷神星运行至太阳背后，使得皮亚齐失去了谷神星的位置。
- 随后全世界的科学家利用皮亚齐的观测数据开始寻找谷神星，但是根据大多数人计算的结果来寻找谷神星都没有结果。
- 当年24岁的高斯也计算了谷神星的轨道。奥地利天文学家海因里希·奥伯斯根据高斯计算出来的轨道重新发现了谷神星。



§ 4.2 最小二乘问题

- 基本形式和应用背景
- 应用举例

§ 4.2 最小二乘问题

数据插值问题：

- 给定数据集$\{a_i \in \mathbb{R}^p, b_i \in \mathbb{R}^q, i = 1, 2, \cdots, m\}$，插值是求一个映射$f$，使得
$$b_i = f(a_i), \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$
- 在实际中，出于计算上的可行性，我们一般会限制在一个特定函数空间上来求f的一个逼近解．如果利用线性函数逼近，即$f(a) = Xa + y$，其中$X \in \mathbb{R}^{q\times p}$，$y \in \mathbb{R}^q$，则为了求解$X, y$，可以建立如下最小二乘问题：
$$\min_{X\in\mathbb{R}^{q\times p}} \quad \sum_{i=1}^{m} \|Xa_i + y - b_i\|^2.$$
- 一般地，假设$\{\phi_i(a)\}_{i=1}^n (n \le m)$ 为插值空间的一组基，数据插值问题可以写成
$$b_j = f(a_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i\phi_i(a_j), \quad j = 1, 2, \cdots, m,$$

§ 4.2 最小二乘问题

数据插值问题：

除了这种基函数的和的方式，深度学习也通过一些简单函数的复合来逼近原未知函数.

- 具体地，假设有一些简单的非线性向量函数$\phi_i(\theta):\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$，并构造如下复合函数：

$$f(\theta) = \phi_n\left(X_n\phi_{n-1}(X_{n-1}\cdots\phi_1(X_1\theta + y_1)\cdots + y_{n-1}) + y_n\right).$$

- 在实际中常用的简单非线性函数有ReLU，即

$$\phi_i(\theta) = (\mathrm{ReLU}(\theta_1), \mathrm{ReLU}(\theta_2), \cdots, \mathrm{ReLU}(\theta_q))^{\mathrm{T}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

且

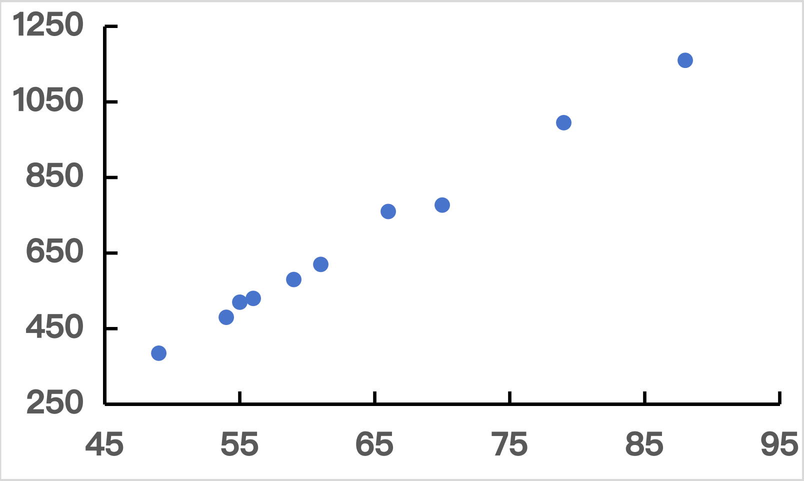
$$\mathrm{ReLU}(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

§ 4.2 最小二乘问题

练习题

某小区房价与面积样本数据如下表所示，请选择一些数据样本（如序号1-5）建立房价与面积的**线性回归模型**，并计算其均方误差MSE。

某小区房价		
序号	价格/万	面积
1	385	49
2	480	54
3	520	55
4	530	56
5	580	59
6	620	61
7	760	66
8	777	70
9	995	79
10	1160	88



§ 4.2 最小二乘问题

练习题

某小区房价与面积样本数据如下表所示，请选择一些数据样本（如序号1-5）建立房价与面积的**线性回归预测模型**，并计算其均方误差MSE。

某小区房价		
序号	价格/万	面积
1	385	49
2	480	54
3	520	55
4	530	56
5	580	59

解：

利用前5组数据，基于最小二乘法，线性模型的系数为：

$$\tilde{w} = (\tilde{D}^T\tilde{D})^{-1}\tilde{D}y$$

$$D = \begin{bmatrix} 49 & 1 \\ 54 & 1 \\ 55 & 1 \\ 56 & 1 \\ 59 & 1 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 385 \\ 480 \\ 520 \\ 530 \\ 580 \end{bmatrix}$$

由此计算出：

$w = 19.89, b =- 586.84$,MSE=7.5

线性回归模型为：

$$y = 19.89x - 586.84$$

习题4

§ 4.3 复合优化问题

§ 4.3 复合优化问题

- 基本形式和应用背景
- 应用举例

§ 4.3 复合优化问题

复合优化问题一般可以表示为如下形式:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \psi(x)=f(x)+h(x),$$

其中:

f(x)是光滑函数（比如数据拟合项），h(x)可能是非光滑的，比如L1范数正则项

- 从已经介绍的各种各样的应用问题不难发现，复合优化问题在实际中有着重要的应用，并且其中的函数一般都是凸的。
- 由于应用问题的驱动，复合优化问题的算法近年来得到了大量的研究，比如次梯度法，近似点梯度法，Nesterov加速算法和交替方向乘子法，等等。

§ 4.3 复合优化问题

- 基本形式和应用背景

- 应用举例

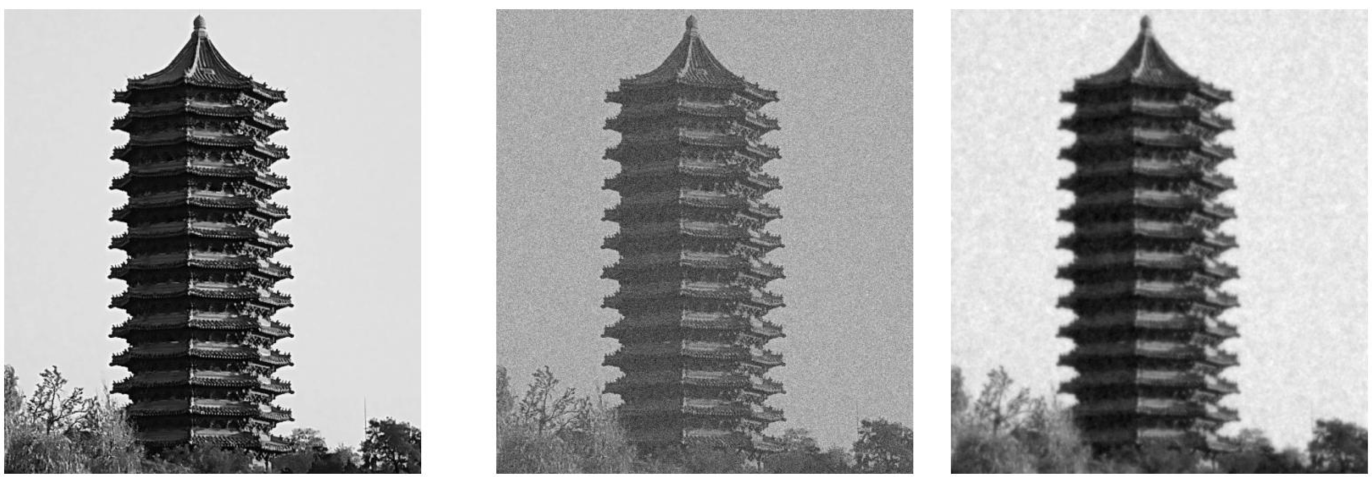
§ 4.3 复合优化问题

图像去噪

- 图像去噪问题是指从一个带噪声的图像中恢复出不带噪声的原图．记带噪声的图像为y，噪声为ε，那么

$$y = x + \varepsilon,$$

其中x为要恢复的真实图像．



(a) 原始图像u　(b) 添加噪声后的图像　(c) 恢复后的图像

Figure: 图像去噪的例子

§ 4.3 复合优化问题

- 由全变差模型，去噪问题可表示为

$$\min_{x\in\mathbb{R}^{n\times n}} \quad \|x-y\|_F^2+\lambda\|x\|_{TV}.$$

  这里，离散的线性算子为单位矩阵.

- 也可以利用小波框架. 小波变换可以很好地保护信号尖峰和突变信号，并且噪声对应的小波系数往往很小. 因此，去噪问题的小波分解模型可以写为

$$\min_{x} \quad \|\lambda\odot(Wx)\|_1+\frac{1}{2}\|x-y\|_F^2,$$

  其中 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)^{\mathrm{T}}$ 是给定的.

§ 4.3 复合优化问题

图像去模糊——盲反卷积

盲反卷积是图像处理中的一个基本问题，其目的是从一个模糊的图像恢复出原来清晰的图像.

- 为了简化问题，假设模糊是线性的以及空间不变的. 线性且空间不变的模糊可以表示成一个卷积. 令x 为原始的清晰图像，a 为未知的卷积核对应的矩阵，y 为观测到的模糊图像以及ε 为观测噪声. 盲反卷积问题可以表示成

$$y = a * x + \varepsilon,$$

其中$*$ 为卷积算子. 假设噪声为高斯噪声，则转化为求解优化问题

$$\min_{a,x} \quad \|y - a * x\|_2^2.$$

- 再假设原始图像信号在小波变换下是稀疏的，进一步得到如下复合优化问题：

$$\min_{a,x} \quad \|y - a * x\|_2^2 + \|\lambda \odot (Wx)\|_1,$$

§ 4.3 复合优化问题

求下列目标函数的最小值：

$$F(x) = (x-3)^2 + |x|$$

① 写出光滑项和非光滑项；

② 分段讨论$x > 0$与$x < 0$的导数表达式；

③ 求出使F(x)最小的x以及最小值；

习题5

§ 4.3 复合优化问题

求解：

$$\min_x (x-2)^2,\ s.t.\ x \geq 1$$

① 写出目标函数与约束集C；

② 说明其等价的复合形式并计算最优解；

③ 若去掉约束，会得到什么结果？比较两者区别；

习题6

§ 4.3 复合优化问题

给定函数：

$$F(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + |x_1 + x_2 - 3|$$

① 写出光滑项与非光滑项；

② 分析绝对值项对最优解位置的影响；

③ 计算最优解；

习题7

§ 4.4 随机优化问题

§ 4.4 随机优化问题

- **基本形式和应用背景**
- 应用举例

§ 4.4 随机优化问题

- 随机优化问题可以表示成以下形式：

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \quad \mathbb{E}_\xi[F(x,\xi)] + h(x),$$

其中$\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ 表示决策变量x 的可行域，ξ 是一个随机变量．对于每个固定的ξ，$F(x,\xi)$ 表示样本ξ 上的损失或者奖励．正则项$h(x)$ 用来保证解的某种性质．

- 变量ξ 的数学期望$\mathbb{E}_\xi[F(x,\xi)]$一般是不可计算的．为了得到目标函数值的一个比较好的估计，在实际问题中往往利用ξ 的经验分布来代替其真实分布．具体地，假设有N 个样本$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N$，令$f_i(x)=F(x,\xi_i)$，得到优化问题

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \quad f(x) \xlongequal{\text{def}} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f_i(x) + h(x),$$

并称其为经验风险极小化问题或者采样平均极小化问题．

- 该问题通常是难以求解的，一方面是因为样本数N 比较多，另一方面是因为优化问题的可行域所在空间维数n 比较大．

§ 4.4 随机优化问题

- 基本形式和应用背景
- 应用举例

§ 4.4 随机优化问题

随机库存管理

超市或仓库每天的需求量不确定，若订货过多会造成积压，过少则会缺货；

希望在不确定需求下，确定合理的订货量 x；

$$\min_{x} \ \mathbb{E}_D[\, h(x-D)^+ + p(D-x)^+ \,]$$

- D: 随机需求量；
- h: 单位库存成本；
- p: 单位缺货成本；
- $(z)^+ = max(z, 0)$；

§ 4.4 随机优化问题

随机投资组合优化

投资者在面对波动的市场收益时，需要确定资产权重，使风险与收益之间达到平衡。

$$\min_{w} \mathbb{E}_r\left[(w^T r - \mu)^2\right] \quad \text{s.t.} \quad \sum_i w_i = 1,\ w_i \geq 0$$

- r：资产收益率的随机向量；
- μ：期望目标收益；
- w：投资权重；

§ 4.4 随机优化问题

随机生产调度

工厂生产中，机器可能发生故障、原料到货时间随机，如何安排生产顺序以最小化期望延迟或成本?

$$\min_{x} \ \mathbb{E}_{\xi}[\,C(x,\xi)\,]$$

- x: 生产计划（任务排序、开机时间等）；
- ζ: 随机扰动（故障时间、原料延误等）；
- $C(x,\zeta)$: 给定场景下的生产成本;

§ 4.4 随机优化问题

商店每天的需求量D可能为10或20，概率分别为0.6和0.4。单位商品进价为2元，售价为5元，未出售部分无残值。

求应进货量x，使期望利润最大。

习题8

§ 4.4 随机优化问题

投资方案 A、B 的随机收益如下表所示（单位：万元）：

情景	概率	A 收益	B 收益
好	0.5	10	4
差	0.5	-2	2

求使得期望收益最大的x；

习题9

§ 4.4 随机优化问题

某机器可能出现两种状态：

正常工作：概率为0.8，成本$C_1(x) = (x-3)^2$

故障状态：概率为0.2，成本$C_2(x) = (x-7)^2$

求使期望成本最小的决策变量x；

习题10

§ 4.5 半定规划

§ 4.5 半定规划

- 基本形式和应用背景
- 应用举例

§ 4.5 半定规划

半定规划问题的一般形式如下：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^{\mathrm{T}} x, \\
\text{s.t.} \quad & x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n + B \preceq 0, \\
& Gx = h,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

其中$c \in \mathbb{R}^n, A_i \in \mathcal{S}^m, i = 1, 2, \cdots, m, B \in \mathcal{S}^m, G \in \mathbb{R}^{p \times n}, h \in \mathbb{R}^p$ 为已知的向量和矩阵，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$是自变量.

§ 4.5 半定规划

半定规划（SDP）是线性规划在矩阵空间中的一种推广。它的目标函数和等式约束均为关于矩阵的线性函数，而它与线性规划不同的地方是其自变量取值于半正定矩阵空间。

作为一种特殊的矩阵优化问题，半定规划在某些结构上和线性规划非常相似，很多研究线性规划的方法都可以作为研究半定规划的基础。

由于半定规划地位的特殊性，我们将在本节中单独讨论半定规划的形式和应用。

§ 4.5 半定规划

- 基本形式和应用背景
- 应用举例

§ 4.5 半定规划

在控制工程中，为验证系统的稳定性，需要寻找一个正定矩阵P:

$$\dot{x} = Ax$$

使得:

$$A^T P + PA \prec 0.$$

这就是一个半定规划问题:

$$\begin{aligned} \text{find} \quad & P \\ \text{s.t.} \quad & A^T P + PA \preceq -I, \\ & P \succeq I. \end{aligned}$$

§ 4.5 半定规划

判断是否存在对称矩阵:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

满足以下半定约束:

$$A^T P + PA \preceq -I, \quad P \succeq I,$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

习题11

§ 4.5 半定规划

证明以下非线性约束可等价地写成半定约束:

$$x^T Qx + 2q^T x + r \le 0,$$

其中:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad r = 1.$$

习题12

§ 4.6 矩阵优化

§ 4.6 矩阵优化

- **基本形式和应用背景**
- 应用举例

§ 4.6 矩阵优化

矩阵优化问题具有如下形式：

$$\min_{X\in\mathcal{X}} \quad \psi(X),$$

其中$\mathcal{X}$ 为特定的矩阵空间，$\psi(X):\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ 为给定的函数，可能是非光滑的．对于矩阵优化问题，如果决策变量为一个$n\times n$ 矩阵，那么我们可能需要确定n^2 个元素．因此，决策变量的维数过大往往是矩阵优化问题难以快速求解的一个重要原因．

- 矩阵优化是在近几十年发展起来的一类变量含有矩阵的优化问题．它广泛地出现在组合数学、材料科学、机器学习和统计学等各种各样的应用当中．
- 和向量相比，矩阵有许多新的性质：例如秩、特征值等．所以矩阵优化问题的求解通常要困难一些．

§ 4.6 矩阵优化

- 基本形式和应用背景
- 应用举例

§ 4.6 矩阵优化

矩阵优化在数据拟合中的应用

给定观测数据$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$b \in \mathbb{R}^m$

求模型参数x，使得误差最小

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2$$

§ 4.6 矩阵优化

矩阵优化在特征提取中的应用

希望找到方向向量w，使得数据在该方向上的方差最大。

$$\max_{w} \; w^T S w \quad \text{s.t. } \|w\|_2 = 1$$

§ 4.6 矩阵优化

矩阵优化在数据压缩中的应用

给定矩阵$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

希望用一个秩为k的矩阵X来逼近A

$$\min_{X:\,\mathrm{rank}(X)=k} \|A - X\|_F^2$$

§ 4.6 矩阵优化

求解下列最小二乘问题:

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2,$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

习题13

§ 4.6 矩阵优化

求线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的最小范数解：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}, \quad b=[6].$$

习题14

§ 4.6 矩阵优化

已知协方差矩阵：

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

求单位向量w，使方差$w^T S w$最大

习题15

§ 4.6 矩阵优化

设：

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix},$$

求解：

$$\min_{x_1, x_2} \operatorname{Tr}(AX) \quad \text{s.t. } X \succeq 0,\ \operatorname{Tr}(X) = 1,$$

其中：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

习题16

§ 4.6 矩阵优化

给定矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

求秩为1的矩阵X，使$\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{F}\|_{\boldsymbol{F}}^{\boldsymbol{2}}$最小

习题17