

# 线性回归分析

授课教师：吴翔

邮箱：wuhsiang@hust.edu.cn

March 16, 2019

1 线性回归概述

2 线性回归原理

3 线性回归案例

4 线性回归诊断

5 线性回归高阶议题 (\*)

# 线性回归概述

## 简单案例

考虑智力测验成绩  $x$ 、教育年限  $z$  和年收入  $y$  (万元) 之间的关系。数据生成过程 (data generating process, DGP)  $y = -0.5 + 0.2 \cdot x$  得到的样本。

```
# generate dataset
x <- rnorm(n = 200, mean = 110, sd = 10)
beta <- c(-0.5, 0.2)
y <- beta[1] + beta[2] * x + rnorm(n = 200, mean = 0, sd = 0.5)
z <- round(-2 + 0.1 * x + rnorm(n = 200, mean = 0, sd = 0.4))
dat <- data.frame(x = x, y = y, z = z)
```

# 回归分析

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
## (Intercept)	-0.32	0.4138	-0.77	4.4e-01
## x	0.20	0.0038	52.93	8.0e-119

考虑  $x$  对  $y$  的效应, 线性模型  $R^2 = 0.93$ , 预测值  $\hat{\beta} = (-0.32, 0.2)$  接近实际值  $\beta = (-0.5, 0.2)$ 。

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
## (Intercept)	7.6	0.63	12	3.1e-25
## z	1.5	0.07	22	1.6e-55

考虑  $z$  对  $y$  的效应,  $y = 7.58 + 1.55z$ , 且  $R^2 = 0.71$ 。

## 虚假 vs 真实效应

```
# linear regression
fit3 <- lm(y ~ x + z, data = dat)
summary(fit3)$coef
```

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
## (Intercept)	-0.356	0.4332	-0.82	4.1e-01
## x	0.201	0.0078	25.71	7.3e-65
## z	-0.021	0.0697	-0.30	7.6e-01

考虑模型  $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 z$ 。结果显示,  $y = -0.36 + 0.2x$ , 且  $R^2 = 0.93$ 。

**课堂思考: z 对 y 的效应, 是否显著?**

## 正效应 vs 负效应?

```
# add a sample
dat1 <- rbind(dat, c(160, -100, 10))
fit4 <- lm(y ~ x, data = dat1)
summary(fit4)$coef
```

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
## (Intercept)	34.76	6.784	5.1	7.1e-07
## x	-0.13	0.061	-2.1	4.2e-02

增加一个样本  $c(160, -100, 10)$ , 重新考虑  $x$  对  $y$  的效应,  $R^2 = 0.02$ , 预测值  $\hat{\beta} = (34.76, -0.13)$  大幅偏离实际值  $\beta = (-0.5, 0.2)$ 。

**课堂思考:  $x$  对  $y$  的效应, 到底是正还是负?**

# 如何学习线性回归?



图 1: Master & PhD students who are learning regression models

## 理念:

- 方便有多门，归元无二路
- 挽弓当挽强，用箭当用长



## 课程存储地址

- 课程存储地址: <https://github.com/wuhsiang/Courses>
- 资源: 课件、案例数据及代码



图 2: 课程存储地址

## 参考教材

- 谢宇. 回归分析. 北京: 社会科学文献出版社. 2010.
- 威廉·贝里. 理解回归假设. 上海: 格致出版社. 2012.
- 欧文·琼斯. R 语言的科学编程与仿真. 西安: 西安交通大学出版社. 2014.

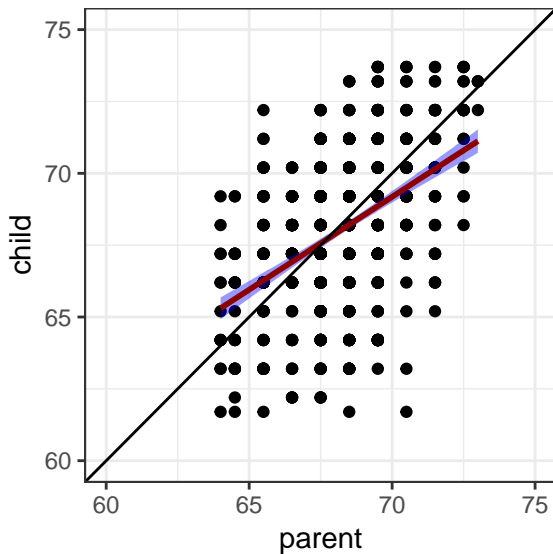
# 线性回归原理

# 缘起

## 变异与个体差异

- 随着物种的变异，其个体差异是否会一直增大？
- 个体差异上的**两极分化**是否是一般规律？

# Galton 的身高研究



# 什么是“回归”？

Galton 的身高研究发现：

- 父代的身高增加时，子代的身高也倾向于增加
- 当父代高于平均身高时，子代身高比他更高的概率要小于比他更矮的概率；父代矮于平均身高时，子代身高比他更矮的概率要小于比他更高的概率。
- 同一族群中，子代的身高通常介于其父代的身高和族群的平均身高之间。

回归效应：

- 向平均数方向的回归 (regression toward mediocrity)
- 天之道，损有余而补不足

# Galton 的开创性研究

## Francis Galton (以及 Karl Pearson) 研究

- 个体差异：确立了社会科学研究与自然科学研究的根本区别
- 遗传与个体差异的关系：倡导“优生学”
- 双生儿法 (twin method): 匹配方法 (matching) 之先河

# 自然科学 vs 社会科学研究



## 理解回归的三种视角

回归模型考虑解释变量  $x$  与结果变量  $y$  的关系,

$$y_i = f(X_i) + \epsilon_i = \beta X_i + \epsilon_i$$

将观测值  $y_i$  分为结构部分  $f(X_i)$  和随机部分  $\epsilon_i$ , 并可以从**三个视角**来理解:

- **因果性** (计量经济领域): 观测项 = 机制项 + 干扰项
- **预测性** (机器学习领域): 观测项 = 预测项 + 误差项
- **描述性** (统计领域): 观测项 = 概括项 + 残差项

# 回归模型设定

考虑收入  $x$  与中老年人抑郁水平  $y$  的关系, 回归模型为:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i.$$

**隐含的假设:**

- A1. 线性假设 ( $E(y|x) = \beta x$ ): 非线性模型、结构模型
- A2. 同质性假设: 随机参数/效应模型、分层线性模型

## 总体回归方程

给定  $x = x^k$ , 在的  $\epsilon_i$  i.i.d  $\sim N(0, \sigma^2)$  假定下, 对回归模型求条件期望得到如下**总体回归方程**,

$$E(y|x = x^k) = \mu_{y|x^k} = \alpha + \beta x^k.$$

含义:

- 给定任意  $x^k$ , 对应的  $y^k \sim N(\mu_{y|x^k}, \sigma^2)$ 。
- 回归线穿过  $(x^k, \mu_{y|x^k})$ 。
- 参数  $\beta$  刻画了  $x$  的变化对  $y$  的**条件期望**的影响。

# 总体回归线

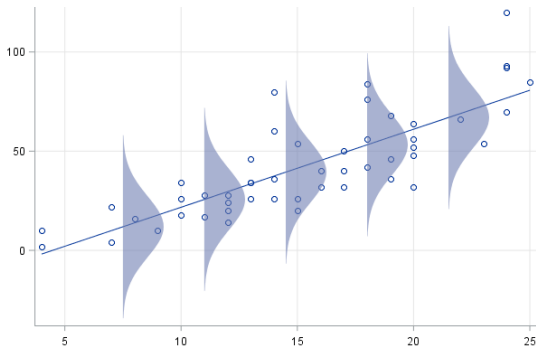


图 3: 总体回归线

## 暗含的假设

- A3. 独立同分布假设：
  - $E(\epsilon_i) = 0$ : 随机效应模型中的随机截距参数
  - $Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$ : 时间序列模型、空间计量模型、嵌套模型
  - $\sigma_i = \sigma$ : 异方差问题
- A4. 关于  $y$  的假设：
  - $y$  应是连续变量: 广义线性模型
  - $y$  的条件期望  $\mu_{y|x^k} = E(y|x = x^k)$  符合正态分布: 分位数回归
- A5. 正交 (严格外生) 假设
  - 误差项  $\epsilon$  和  $x$  不相关, 即  $Cov(x, \epsilon) = 0$
  - 内生性问题

## 参数估计

普通最小二乘法 (ordinary least squares, OLS) 通过最小化残差平方和 (扩展到多元回归的情境  $y = \beta X + \epsilon$ ) 估计参数:

$$\min SSE = \min \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta X_i)^2$$

由偏导公式

$$\frac{\partial SSE}{\partial \beta} = 0$$

得到参数估计值

$$\hat{b} = (X'X)^{-1}X'y.$$

**课堂思考: (1) 如何在熟悉的编程语言中, 撰写函数估计多元线性模型? (2) 在实践中, OLS 会造成什么缺陷?**

## 衡量估计方法

评判估计的黄金准则 (Fisher):

- **无偏性**: 在总体中进行  $M$  次抽样,  $E[\hat{b}_m] = \beta$ 。
- **有效性**: 在众多估计量中,  $b$  的抽样分布的方差最小。
- **一致性**: 样本量增大时,  $b$  趋近于  $\beta$ 。

**课堂思考: 统计显著性与样本量有无关系?**

# 变异分解逻辑

样本观测值  $y_i$ 、均值  $\bar{y}$ 、预测值  $\hat{y}$  之间的关系

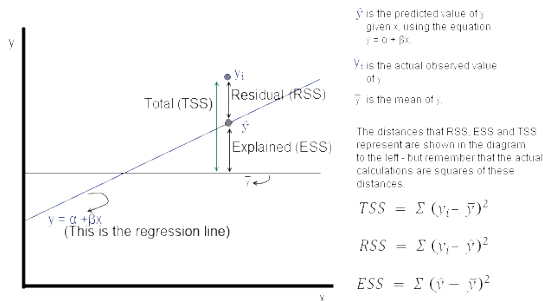


图 4：变异的分解

板书演示：变异分解逻辑



## 变异分解公式

总平方和 (sum of squares total, SST) 可以分解为回归平方和 (sum of squares regression, SSR) 和残差平方和 (sum of squares error, SSE) 之和,

具体而言:

$$\begin{aligned} SST &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [(y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \bar{y})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \\ &= SSE + SSR \end{aligned}$$

判定系数 (coefficient of determination)  $R^2 = SSE/SST$ .

## 多元线性回归与方差分析

假定多元线性模型中，待估计的参数个数为  $p$ ，那么方差和自由度的分解如下：

- SST: 自由度为  $n - 1$
- SSE: 自由度为  $n - p$
- SSR: 自由度为  $p - 1$

因而，自由度的分解为：

$$n - 1 = (n - p) + (p - 1)$$

**课堂思考：**假设模型有两个解释变量，其中  $x_1$  是连续变量， $x_2$  是包含 5 个分类的分类变量，SSR 的自由度为多少？

# 方差分析表

表 1: 多元线性回归的方差分析表

变异来源	平方和	自由度	均方
回归模型	SSR	$p - 1$	$MSR = SSR / (p - 1)$
误差	SSE	$n - p$	$MSE = SSE / (n - p)$
总变异	SST	$n - 1$	$MST = SST / (n - 1)$

相应地, 可以构造  $F$  检验:

$$F(df_{SSR}, df_{SSE}) = \frac{MSR}{MSE} ? > F_{\alpha}$$

## 延伸内容: 聚类分析

# 模型选择

- 模型选择：**精确性原则** vs **简约性原则**
- 情境：假定在线性回归模型  $A$  的基础上，加了几个变量得到模型  $B$ ，应当如何在模型  $A$  和  $B$  之间选择？

构造  $F$  检验：

$$F(\Delta df, df_{SSE}) = \frac{\Delta SSR / \Delta df}{MSE_B} ? > F_{\alpha}$$

## 线性回归案例

## 中老年精神健康案例

从 CHARLS 数据中随机抽取样本  $n = 488$ , 考虑中老年抑郁水平。income 为个人收入, 以万元计; educ 表示教育水平是否在初中及以上, hukou 表示是否是城市户口。

表 2: 描述性统计量

变量	均值	标准差	最小值	最大值
cesd10	6.62	5.95	0	30
income	2.12	2.12	0.01	20
educ	0.76	0.43	0	1
hukou	0.28	0.45	0	1

# 收入与精神健康

表 3: 不同线性回归模型比较

变量	模型 1	模型 2	模型 3
常数项	7.67 (0.38)	9.1 (0.56)	9.1 (0.56)
income	-0.5 (0.13)	-0.4 (0.13)	-0.34 (0.13)
educ	-	-2.15 (0.63)	-1.92 (0.65)
hukou	-	-	-1.05 <sup>ns</sup> (0.63)
$R^2$	0.03	0.05	0.06

课堂讨论：应选择哪个模型？

## 变异分解与模型选择

```
##              Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
## income         1     543      543    16.20 6.6e-05 ***
## educ           1     386      386    11.51 0.00075 ***
## hukou          1      95       95     2.82 0.09356 .
## Residuals    484   16218       34
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```



# 最终模型

权衡**精确性原则**与**简约性原则**，选择模型 2。

```
> summary(fit2)

Call:
lm(formula = cesd10 ~ income + educ, data = charlswh)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-9.09  -3.96  -1.28   2.29  24.45

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    9.097      0.561   16.21  < 2e-16 ***
income        -0.398      0.128   -3.12  0.00190 **
educ          -2.147      0.634   -3.39  0.00076 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 5.8 on 485 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.0539,    Adjusted R-squared:  0.05
F-statistic: 13.8 on 2 and 485 DF,  p-value: 1.48e-06
```

图 5: 模型估计结果

# 显著性与效应大小

- 统计显著性 (statistical significance)
- 效应大小 (effect size)

**课堂讨论：二者有何区别？**

## 变异分解：编程计算

```
# calculate predicted values
yhat <- predict.lm(fit2)
# calculate and print SST, SSR, and SSE
ybar <- mean(charlswh$cesd10)
sst <- sum((charlswh$cesd10 - ybar) ^ 2)
ssr <- sum((yhat - ybar) ^ 2)
sse <- sum((charlswh$cesd10 - yhat) ^ 2)
c(sst, ssr, sse)
```

```
## [1] 17241    929 16313
```

## 变异分解：系统输出

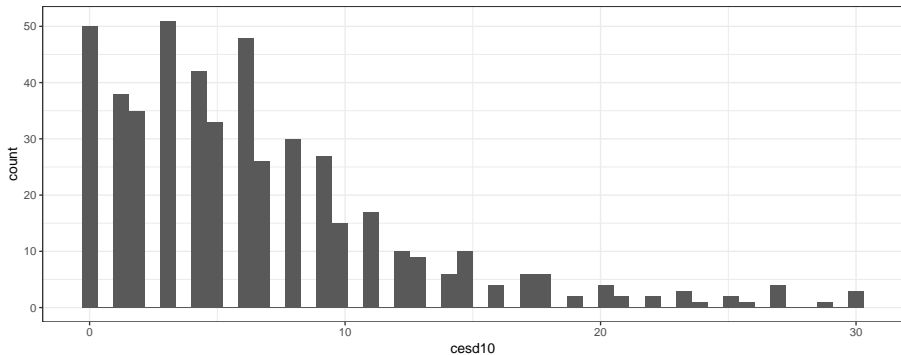
```
# variation decomposition
```

```
summary.aov(fit2)
```

##		Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
##	income	1	543	543	16.1	6.8e-05 ***
##	educ	1	386	386	11.5	0.00076 ***
##	Residuals	485	16313	34		
##	---					
##	Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1					

## 线性回归诊断

## 因变量分布



## Box-Cox 变换

Box & Cox (1964) 建议采用如下 Box-Cox 变换

$$y_i = \begin{cases} [(y_i + \lambda_2)^{\lambda_1} - 1]/\lambda_1 & \text{if } \lambda_1 \neq 0, \\ \ln(y_i + \lambda_2) & \text{if } \lambda_1 = 0. \end{cases}$$

将非正态的分布转换为正态分布。

**课堂思考：(1) 对数变换或 Box-Cox 变换是否合适？(2) 如何推导出“变化比例”这一含义？**

# 多重共线性

参数估计值

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

要求  $X'X$  是**可逆 (非奇异)** 的。

- 完全多重共线性：模型无法识别
- 严重多重共线性：不影响估计的无偏性和一致性，损害参数估计的**有效性**，及标准误会增大
- 判断标准：**方差膨胀因子** (variance inflation factor, VIF) 最大值超过 10，平均值明显大于 1



## 消除共线性

- $k$  水平分类变量：虚拟变量 (dummy variable) 化后, 只能有  $k - 1$  个虚拟变量
- 减少解释变量个数
- 维度规约：因子分析
- 变量选择：如 lasso 等统计机器学习方法, 尤其是  $n < p$  时模型无法识别的情形

```
suppressMessages(library(car))  
# calculate VIF  
vif(fit2)
```

```
## income    educ  
##      1.1    1.1
```

# 残差分布

## 纳入二次项

- 处理  $U$  型关系

## 纳入交互项（调节作用）

# 异常值处理

# 实践中的回归假设

- 正交假设 (需要检验)

## 线性回归高阶议题 (\*)

## 内生性与异质性

考虑是否上大学 ( $D_i = 0, 1$ ) 和收入的关系

$$y_i = \alpha_i + \beta_i D_i.$$

- **内生性**: 匹配法 (matching) vs 随机控制试验法 (RCT)
- **异质性**: 分层线性模型



# 贝叶斯视角

背景：

- Efron 提出的 bootstrapping 方法
- 大数据时代的统计推断
- 频率学派 vs 贝叶斯学派

案例思考：

- 射击选手 B, 999/1000
- 射击选手 A, 100/100

## 案例思考



图 6: 灵犀一指 (999/1000) vs 小李飞刀 (100/100)

# 先验的作用

情境一 (先验 8/10):

- A: 先验 (8/10) + 数据 (999/1000)  $\rightarrow$  后验 ( $1007/1010 = 0.9997$ ) [获胜]
- B: 先验 (8/10) + 数据 (100/100)  $\rightarrow$  后验 ( $108/110 = 0.9818$ )

情境二 (先验 9999/10000):

- A: 先验 (9999/10000) + 数据 (999/1000)  $\rightarrow$  后验 ( $10998/11000 = 0.9998$ )
- B: 先验 (9999/10000) + 数据 (100/100)  $\rightarrow$  后验 ( $10099/10100 = 0.9999$ ) [获胜]

# 回归分析总结