# 第十一章时间序列分析方法

授课教师：吴翔
wuhsiang@hust.edu.cn

OCT 15 - 18, 2019

1. 时间序列分析概述（2 个课时）
2. 时间序列经典分析方法（3 个课时）
3. 时间序列案例分析（1 个课时）
4. 时间序列分析实习（2 个课时）

# 时间序列分析概述（2 个课时）

# 课程存储地址

- 课程存储地址：https://github.com/wuhsiang/Courses
- 资源：课件、案例数据及代码

图 1：课程存储地址

# 参考教材

- James D. Hamilton 著. 时间序列分析（2 册）. 北京: 人民卫生出版社. 2015.
- Jonathan D. Cryer & Kung-Sik Chan 著. 时间序列分析及应用（R 语言）(原书第 2 版）. 北京：机械工业出版社. 2011.
- Robert I. Kabacoff 著. R 语言实战（第二版）. 北京: 人民邮电出版社. 2016.
- David Salsburg 著. 女士品茶：统计学如何变革了科学和生活. 南昌: 江西人民出版社. 2016.

# 本节知识点

- 时间序列分析方法起源
- 时间序列基本概念
- 时间序列分析要素
- 时间序列分析建模

# 11.1 时间序列分析方法起源

时间序列分析的方法，起源于英国统计学家 Ronald Fisher 在英国洛桑试验站（1919-1933）的**农作物收成变动研究。**这一研究产生了统计史上的三个重要方法：

- **时间序列分析思想**
- **随机对照实验**
- **方差分析**

我们通过回顾这一研究，以深入理解时间序列分析的思想。

# Fisher 与洛桑试验站

英国**洛桑试验站（Rothamsted Experimental Station）**，现为洛桑研究所（Rothamsted Research），在漫长的历史中 (1843-1919) 积累了大量的“实验数据”和其它记录，包括：

- 降水量和温度的每日精确记录
- 施肥量与土壤检测数据的每周记录
- 农作物收成的每年记录
- 人造肥料和不同农作物（小麦、黑麦、大麦、马铃薯等）的组合实验方案

# 洛桑试验站的农作物

图 2: 洛桑试验站

# 收成变动研究

Fisher 考虑特定年份（$t$）的特定田地（$i$）上的农作物产量 ($Y_{it}$)，并试图回答以下问题:

- **降水量**对小麦产量有何影响?
- 不同**肥料**对不同品种的马铃薯产量有何影响?

**课堂讨论**：第一个问题（5min）

# 如何预测小麦产量?

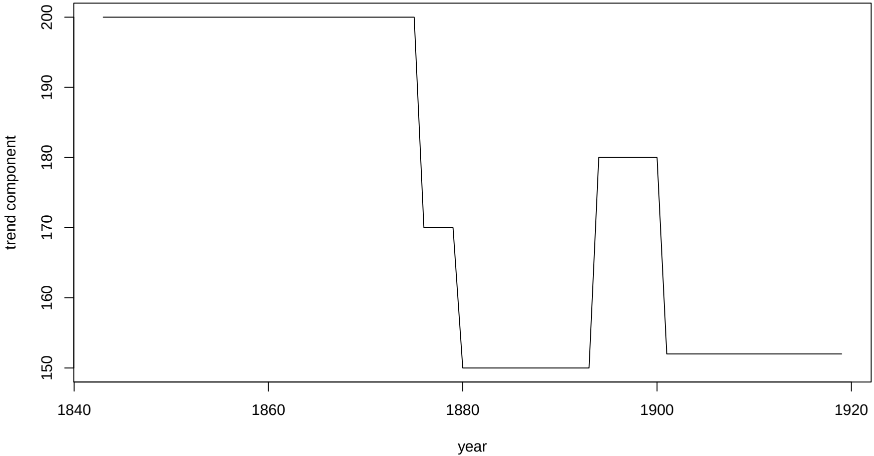
选定一块田地（名曰：“宽埂”），这块田地**只使用过**动物粪便作为肥料，考虑**降水量如何影响小麦产量。**

- 降水量和小麦均是**时变**的，即考虑不同年份（$t$）的降水量（$X_t$）和小麦产量（$Y_t$）。
- 探讨降水量 $X_t$ 与小麦产量 $Y_t$ 的关系，即属于**时间序列分析**范畴。
- 问题演变为，如何**预测**小麦产量 $Y_t$?

# 小麦产量的影响因素分解

- 土壤退化导致的产量总体稳步减小
- 长期缓慢变化，每个变化周期为期数年
- 不同年份的气候因素（例如降水量）导致的变化

# 长期缓慢的变化


trend component
200
190
180
170
160
150
1840
1860
1880
1900
1920
year

# 理解长期而缓慢的变化

- 难以解释的长期缓慢变化：产量从 1876 年开始剧烈下降，从 1880 年开始下降更加剧烈，至 1894 年产量开始改善，从 1901 年开始又剧烈下降
- 小麦田地中杂草的生长情况与之相反
- 最终解释：1876 年前，人们雇佣小男孩到田里除草 −> 1876 年《教育法》规定适龄儿童必须上学−>1880 年法律处罚不让适龄儿童上学的家庭−>1894 年洛桑附近的女子寄宿学校校长认为，高强度户外运动有助于儿童健康−>1901 年校长去世

# 肥料使用对马铃薯产量的影响研究

- 洛桑试验站的早期方案：在不同片田地上（或者 Fisher 的田地分块），针对不同马铃薯品种，使用不同化肥，并记录其产量
- 潜在问题
  - **田地**相关的混淆因素，例如土壤、排水方式、营养物质、杂草等
  - **年份**相关的混淆因素，例如气候变化等

# Fisher 开创的统计方法

- 随机对照实验
  - 每片田地分块之后，进一步把每块田地分为若干排
  - 采用**随机化**方案，对每块地的每一排实施不同的处理
- 方差分析

# 分解思想

Fisher 在洛桑试验站研究农作物收成变动时，采用了**分解(decomposition)的思想**：

- 时间序列中的**要素分解**
- 方差分析中的**效应分解**

# 11.1.2 时间序列基本概念

- **时间序列（time series)**
  - 定义：一组在特定时刻的观测值 $Y_t$，例如特定田地上的小麦收成
  - 领域：广泛存在于宏观经济、金融财务以及医疗领域
- **时间序列分析（time series analysis)**
  - 数据：时间序列数据，与横截面数据、面板数据，为三类主要的观测数据类型
  - 分析方法：通常基于宏观经济学理论建模，并被视作宏观计量经济学的主要方法

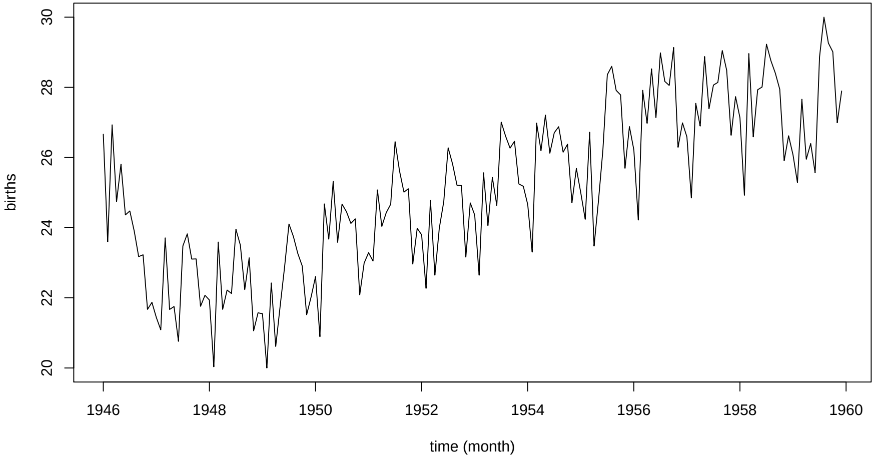
# 横截面 vs 时间序列数据

- 横截面数据（cross sectional data）
  - 定义：不同**研究对象**在某一时点的变量观测数据
  - 例子：通常的问卷调查
- 时间序列数据（time series data）
  - 定义：也称为纵剖面 (longitudinal sectional) 数据，是某一研究对象在不同**时点**的变量观测数据
  - 例子：股票价格数据

# 面板数据

- 定义：不同研究对象在不同时点的变量观测数据
- 特征：具有“横截面”和“时间序列”两个维度
- 例子：中国健康与养老追踪调查（China Health and Retirement Longitudinal Study, CHARLS）、中国健康与营养调查（China Health and Nutrition Survey, CHNS）等

# 时间序列数据


births
30
28
26
24
22
20
1946
1948
1950
1952
1954
1956
1958
1960
time (month)

# 11.1.3 时间序列分析要素

影响时间序列观测值的因素，可以分为以下几类：

1. **趋势因素（trend component）**：观测值的长期的趋势，通常是非线性的
2. 循环因素（cyclical component）：非季节因素引起的波动，通常也被归入趋势因素中
3. **季节因素（seasonal component）**：在一定时期内呈现的规律变化，例如一年内随着自然季节的更替而发生的变化
4. **不规则因素（irregular component）**：诸如随机因素

通常将趋势因素和循环因素合并在一起考虑，成为趋势-循环因素(trend-cycle)，或简称**趋势因素。**

# 课堂讨论

讨论以下情境中，趋势因素（trend component）和季节因素（seasonal component）的**含义**是什么

- 京东 & 淘宝上某一产品的销售量
- 某一医院在过去十年的每日门诊病人数量

# 11.1.4 时间序列建模

时间序列可以分解为趋势因素、季节因素和随机因素

$$Y_t = f(T_t, S_t, E_t)$$

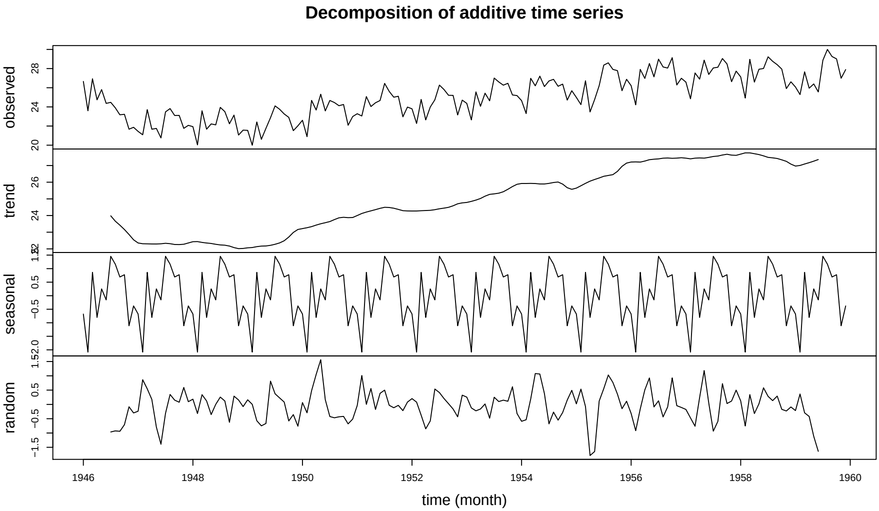
常用的函数类型 $f(\cdot)$ 有两种：累加、累乘。

# 加法模型

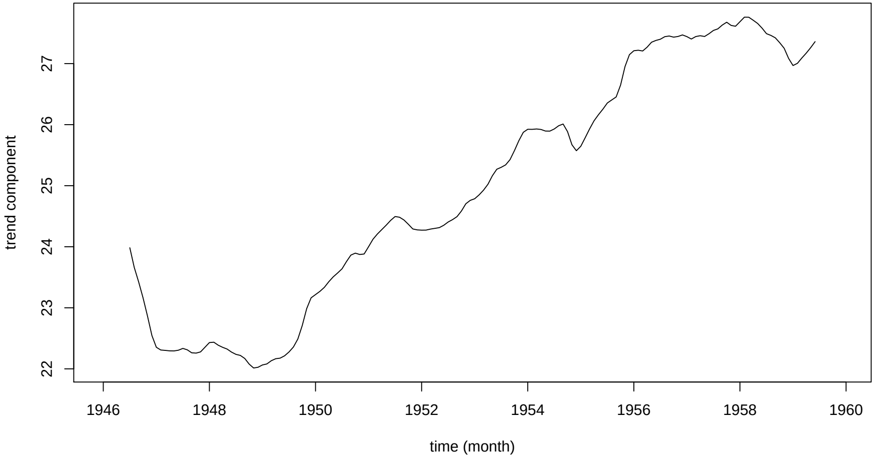
假定趋势因素、季节因素和随机因素**相互独立**，则可以用**加法模型（additive model）**来分解各个因素

$$Y_t = T_t + S_t + E_t.$$

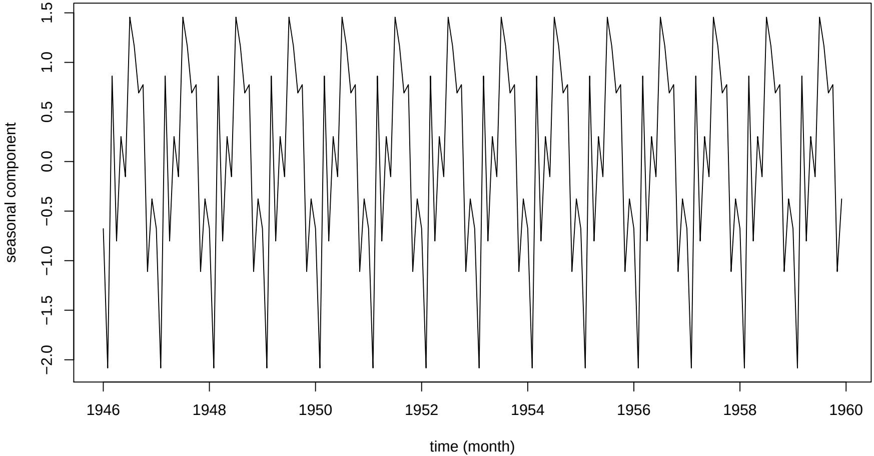
# 因素分解：加法模型


Decomposition of additive time series
observed
trend
seasonal
random
20
24
28
22
24
26
−1.5
−0.5
0.5
1.5
1946
1948
1950
1952
1954
1956
1958
1960
time (month)

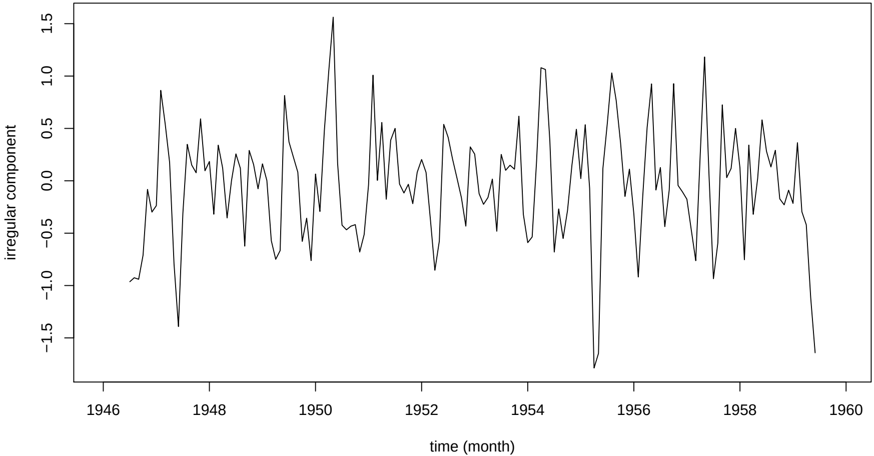
# 加法模型之趋势因素


trend component
22
23
24
25
26
27
1946
1948
1950
1952
1954
1956
1958
1960
time (month)

# 加法模型之季节因素


seasonal component
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
1946
1948
1950
1952
1954
1956
1958
1960
time (month)

# 加法模型之随机因素

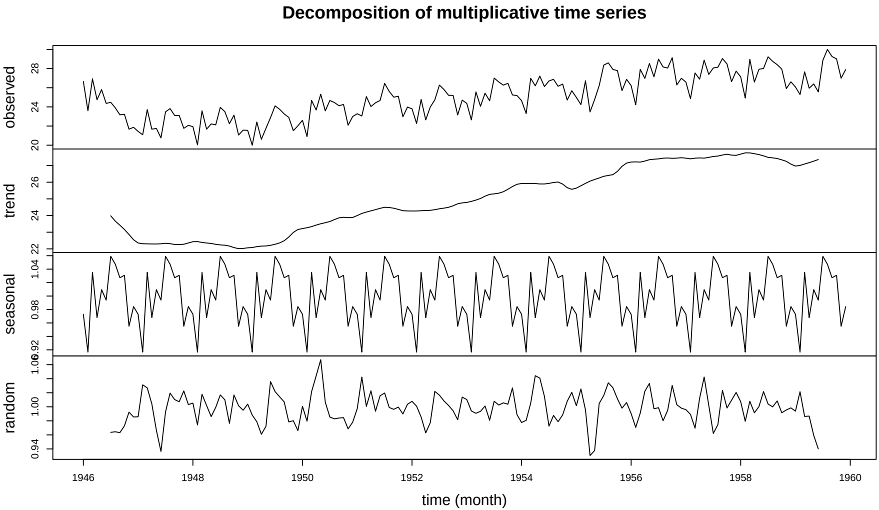

irregular component
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
1946
1948
1950
1952
1954
1956
1958
1960
time (month)

# 乘法模型

趋势因素、季节因素和随机因素不满足相互独立的条件，则可以用**乘法模型（multiplicative model）**来分解各个因素

$$Y_t = T_t \times S_t \times E_t.$$

# 因素分解：乘法模型


Decomposition of multiplicative time series
observed
20
24
28
trend
22
24
26
seasonal
0.92
0.98
1.04
random
0.94
1.00
1.06
1946
1948
1950
1952
1954
1956
1958
1960
time (month)

# 时间序列分析步骤

1. 搜集数据，绘制时间序列图
2. 因素分解，得到趋势因素、季节因素和随机因素
3. 对特定情境建模，分别预测趋势因素和季节因素的时间序列值
4. 获得最终的预测模型

# 时间序列经典分析方法（3 个课时）

# 本节知识点

- 预测方法与精度
- 移动平均法
- 指数平滑法
- 生长曲线法
- 灰色系统预测法（略）

# 11.2.1 预测方法与精度

参数方法 vs 非参数方法

- **参数方法**
  - 分析问题情境
  - 设定统计模型
  - 估计参数并给出预测值
- **非参数方法**
  - 不依赖于具体的统计模型

# 衡量预测精度

定义预测误差 $e_t$ 为实际观测值 $Y_t$ 与预测值 $\hat{Y}_t$ 之差，

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t.$$

由此得到两个衡量预测精度的指标，**均方误差（mean square error，MSE）**和**平均绝对离差（mean absolute deviation，MAD）**

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{n}, \text{MAD} = \frac{\sum_{t=1}^{n} |e_t|}{n}.$$

# 11.2.2 移动平均法

**移动平均（moving average)**

- 思路：计算最近 m 个连续观测值的平均值，作为时间序列的预测值
- 假设：（1）趋势因素是线性的；（2）不规则因素有明确的节奏波动模式

# 移动平均法：模型

预测 $Y_{t+1}$ 的算法为，

$$Y_{t+1} = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \ldots + Y_{t-m+1}}{m}$$

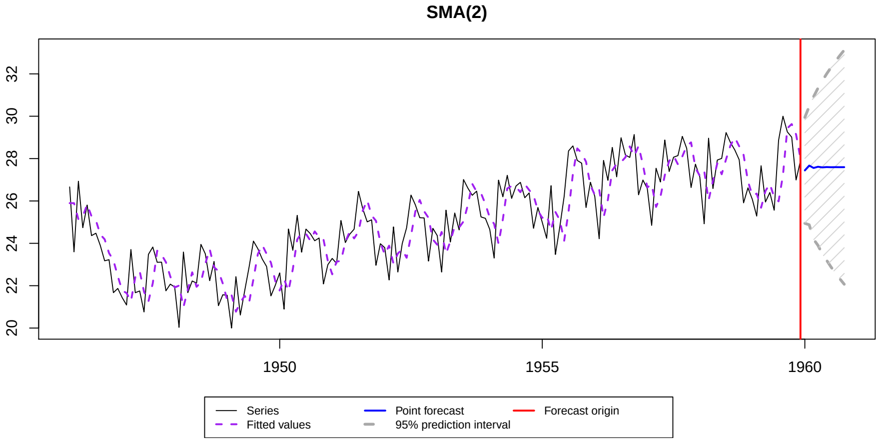
而可以通过**最小化误差**选取适当的 $m$ 值。具体步骤，可以使用 R 中的smooth包来完成。

# 移动平均法：案例

```
ma.ts <- sma(births, h = 20)
ma.ts
```

```
## Time elapsed: 0.72 seconds
## Model estimated: SMA(2)
## Initial values were produced using backcast
##
## Loss function type: MSE; Loss function valu
## Error standard deviation: 1.3
## Sample size: 168
## Number of estimated parameters: 2
```

# 移动平均法：案例（续）



SMA(2)
32
30
28
26
24
22
20
1950
1955
1960
Series
Fitted values
Point forecast
95% prediction interval
Forecast origin

# 移动平均法：其它实践

除了简单移动平均法以外，还有一些改进的预测方法：

- 加权移动平均法：给予近期数据更大的权重，但维持权系数 $\sum_{\tau=1}^{m} w_\tau = 1$。
- 趋势移动平均法：同时使用一次和二次移动平均法。

# 11.2.3 指数平滑法

**指数平滑法（exponential smoothing)**

- 思想：介于全期平均法和移动平均法之间。（1）使用**全期数据**，而非部分近期数据；（2）给予近期数据更大的权重，而远期数据的权重则呈**指数衰减**
- 假设：时间序列的态势具有稳定性或规则性，因而过去的态势会在某种程度上持续到未来

# 指数平滑法：模型

定义初始平滑值 $S_0 = Y_0$，则指数平滑模型可以表示为：

- 任一期 $t$ 的平滑值 $S_t$，均是本期观测值 $Y_t$ 和上期平滑值 $S_{t-1}$ 的加权平均

$$S_t = \alpha Y_t + (1-\alpha) S_{t-1}, \alpha \in [0,1].$$

- 平滑参数 $\alpha$ 决定了近期或远期数据的权重。$\alpha \to 1$ 时，赋予近期观测值更大的权重
- 可以通过预测精度确定最佳平滑参数 $\alpha^*$

# 何为“指数平滑”？

推导可知，

$$S_t = \alpha[Y_t + (1-\alpha)Y_{t-1} + \ldots + (1-\alpha)^{t-1}Y_1] + (1-\alpha)^t Y_0.$$

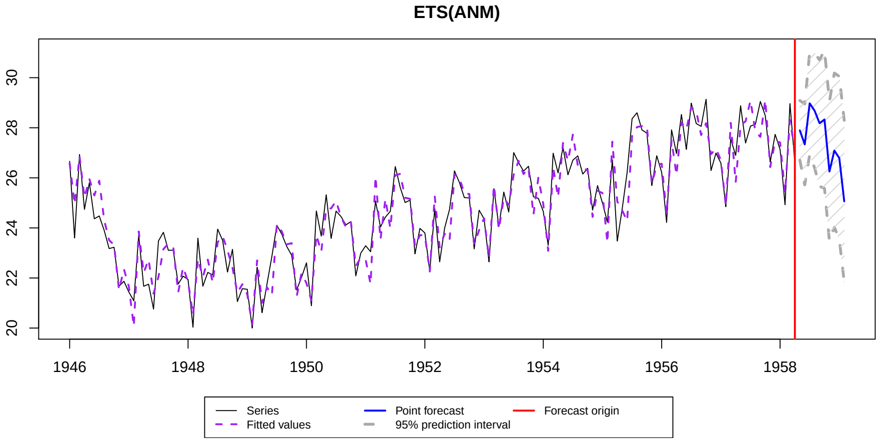
远期数据权重呈几何级数衰减，而几何级数衰减是指数衰减的离散版本，因此得名“指数平滑”。

# 指数平滑法：案例

```
es.ts <- es(births, h = 20, holdout = T)
es.ts
```

```
## Time elapsed: 2.71 seconds
## Model estimated: ETS(ANM)
## Persistence vector g:
## alpha gamma
##  0.94  0.00
## Initial values were optimised.
##
## Loss function type: MSE; Loss function valu
```

# 指数平滑法：案例（续）


ETS(ANM)
30
28
26
24
22
20
1946
1948
1950
1952
1954
1956
1958
Series
Fitted values
Point forecast
95% prediction interval
Forecast origin

# 指数平滑法：其它实践

- 二次指数平滑法：对（一次）指数平滑法的再次平滑处理

# 非参数模型小结

- 不考虑问题的具体特征，而将其视作**黑箱**
- 通常仅使用历史数据 $Y_\tau(1 \leq \tau < t)$ 进行预测
- 与 K 最近邻（k-nearest neighbors, KNN）等非参数模型类似，采用**直观逻辑**进行预测
- **调节参数（tuning parameter）**通常依据预测误差最小化原则来确定

# 其它模型?

我们也可以自行建模，例如

$$Y_t = a + b \cdot t + Month_t + \epsilon_t.$$

其中线性函数 $(a + b \cdot t)$ 刻画了**趋势因素**，虚拟变量集合 $Month_t$ 刻画了**季节因素**。

# 数据准备

```r
nlength <- length(births)
year <- 0:(nlength - 1) %/% 12 + 1946
month <- as.factor(1:nlength %% 12)
dat <- data.frame(births, year, month)
lm.ts <- lm(births ~ year + month, data = dat)
```

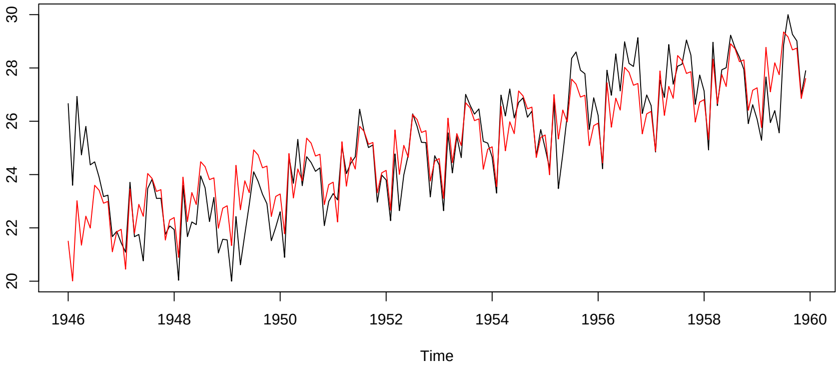
# 模型估计

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -839.288     40.935  -20.50  < 2e-16 ***
year           0.442      0.021   21.11  < 2e-16 ***
month1        -0.350      0.414   -0.85  0.39864
month2        -1.843      0.414   -4.45  1.6e-05 ***
month3         1.166      0.414    2.82  0.00549 **
month4        -0.501      0.414   -1.21  0.22849
month5         0.587      0.414    1.42  0.15846
month6         0.141      0.414    0.34  0.73299
month7         1.744      0.414    4.21  4.3e-05 ***
month8         1.558      0.414    3.76  0.00024 ***
month9         1.073      0.414    2.59  0.01046 *
month10        1.139      0.414    2.75  0.00666 **
month11       -0.751      0.414   -1.81  0.07179 .
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 1.1 on 155 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.793,     Adjusted R-squared:  0.777
F-statistic: 49.4 on 12 and 155 DF,  p-value: <2e-16
```

图 3: 模型估计结果

# 模型预测



# 预测模型比较

```r
# write a function to assess accuracy
accuracy.ts <- function(y, yhat){
    # calculate MSE and MAD
    mse <- sum((y - yhat)^2) / length(y)
    mad <- sum(abs(y - yhat)) / length(y)
    # return MSE and MAD
    res <- data.frame(mse = mse, mad = mad)
    return(res)
}
```

# 模型比较

```
##                          mse  mad
## moving average          1.60 0.97
## exponential smoothing 0.32 0.41
## our model               1.11 0.74
```

# 11.2.4 生长曲线法

- 指数增长模型
- Logistic 增长模型
- 再论人口增长模型

# 指数增长模型

**指数增长模型**

- 性质：属于**参数方法**，即设定具体的统计模型
- 假设：时间序列（1）刻画了事物的**增长过程**（或发展演化过程），且（2）增长率恒定；（3）资源充足
- 例子：资源充足情况下的种群增长

# 指数增长模型：建模

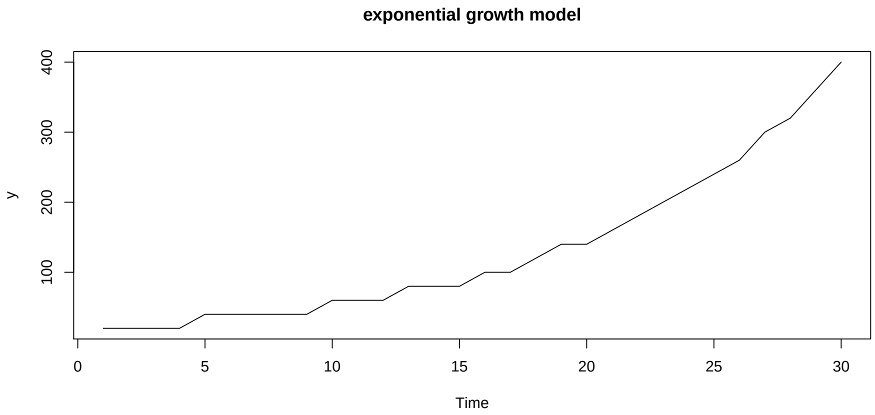
在资源充足的情况下，物种的固有增长率为 $r$（即繁殖率），种群数量 $Y_t$ 可以刻画为

$$\frac{\mathrm{d}Y_t}{\mathrm{d}t} = r \cdot Y_t.$$

由此求解得到种群数量

$$Y_t = Y_0 \cdot e^{rt}.$$

# 指数增长型时间序列


exponential growth model
y
100
200
300
400
0
5
10
15
20
25
30
Time

# 指数增长模型：估计

- 取对数，采用最小二乘法估计
- 采用非线性最小二乘法估计

# Logistic 增长模型

## Logistic 增长模型

- 性质：属于**参数方法**，即设定具体的统计模型
- 假设：时间序列刻画了事物的**增长过程**（或发展演化过程）
- 例子：(1）种群数量变化；(2）新产品销售量；(3）疾病感染人数

# 种群数量变化

在某个自然环境中，假定只有单一物种竞争资源，那么其种群数量 $Y_t$ 的变化可以描述为

$$\frac{\mathrm{d}Y_t}{\mathrm{d}t} = r \cdot Y_t \cdot (1 - \frac{Y_t}{N})$$

参数的含义：

- 种群的固有增长率 $r$，即繁殖率
- 环境资源容纳的最大种群数量 $N$
- $Y_t \ll N$ 时，近似为指数增长；$Y_t \to N$ 时，增长近似停滞

# 种群数量变化（续）

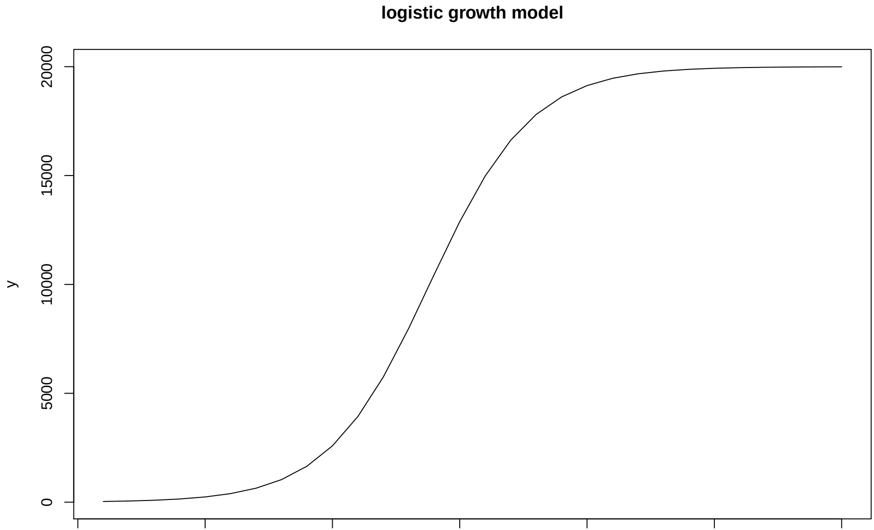
以上模型得到 Logistic 函数，即

$$Y_t = \frac{N}{1 + (N/Y_0 - 1) \cdot e^{-rt}}$$

由此得到 $S$ 型曲线，从而呈现以下特征：

- $Y_t \ll N$ 时，近似为指数增长
- $Y_t \to N$ 时，增长近似停滞

# Logistic 型时间序列



# 新产品销售量

假定完全创新的新产品（永久品），进入市场之后，其销售量 $Y_t$ 的变化可以描述为

$$\frac{y_t}{N - Y_t} = p + q \cdot \frac{Y_t}{N}$$

参数含义如下：

- $y_t$ 为第 $t$ 期的购买者，而 $Y_t$ 为第 $t$ 期初的累积购买者
- $N$ 为市场容量
- $p$ 为创新系数，$q$ 为模仿系数，分别刻画广告和口碑的效应

# 再论人口增长模型

- 马尔萨斯人口论与治乱循环
- 中国历史上的土地/人口比例议题
- 模型参数的变化
    - 固定增长率，如生育率的变化
    - 容量的变化，如技术进步带来的粮食增产等

# 时间序列案例分析（1 个课时）

# 本节知识点

- 时间序列分析建模与预测
- https://github.com/wuhsiang/Courses/blob/master/healthinfo/cases/case-outpatient.Rmd)

# 时间序列分析实习（2 个课时）