

# 线性回归分析

授课教师：吴翔  
邮箱：wuhsiang@hust.edu.cn

March 16, 2019

- 1 线性回归概述
- 2 线性回归原理
- 3 线性回归诊断

# 线性回归概述

## 简单案例

考虑由数据生成过程 (**data generating process**, DGP)  $y = -5 + 2 \cdot x$  得到的样本。另外有变量  $z$ , 它受  $x$  影响, 但不受  $y$  影响。

```
# generate dataset
x <- rnorm(n = 200, mean = 10, sd = 8)
beta <- c(-5, 2)
y <- beta[1] + beta[2] * x + rnorm(n = 200, mean = 0, sd = 2)
z <- 6 - 5 * x + rnorm(n = 200, mean = 0, sd = 4)
dat <- data.frame(x = x, y = y, z = z)
```

# 回归分析

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
## (Intercept)	-4.8	0.234	-21	1.7e-51
## x	2.0	0.019	106	1.4e-176

考虑  $x$  对  $y$  的效应, 线性模型  $R^2 = 0.98$ , 预测值  $\hat{\beta} = (-4.84, 1.99)$  接近实际值  $\beta = (-5, 2)$ 。

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
## (Intercept)	-2.18	0.2637	-8.3	1.9e-14
## z	-0.39	0.0046	-86.2	6.1e-159

考虑  $z$  对  $y$  的效应,  $y = -2.18 + -0.39z$ , 且  $R^2 = 0.97$ 。

## 虚假 vs 真实效应

```
# linear regression
fit3 <- lm(y ~ x + z, data = dat)
summary(fit3)$coef
```

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
## (Intercept)	-4.674	0.329	-14.23	4.7e-32
## x	1.857	0.185	10.03	2.2e-19
## z	-0.027	0.037	-0.74	4.6e-01

考虑模型  $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 z$ 。结果显示,  $y = -4.67 + 1.86x$ , 且  $R^2 = 0.98$ 。

**Q1: z 对 y 的效应, 是否显著?**

## 正效应 vs 负效应?

```
# add a sample
dat1 <- rbind(dat, c(164, -500, 200))
fit4 <- lm(y ~ x, data = dat1)
summary(fit4)$coef
```

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
## (Intercept)	29.6	3.01	9.8	7.1e-19
## x	-1.6	0.18	-9.1	9.8e-17

增加一个样本  $c(164, -500, 200)$ , 重新考虑  $x$  对  $y$  的效应,  $R^2 = 0.29$ , 预测值  $\hat{\beta} = (29.64, -1.61)$  大幅偏离实际值  $\beta = (-5, 2)$ 。

**Q2:  $x$  对  $y$  的效应, 到底是正还是负?**

# 如何学习线性回归?



图 1: Master & PhD students who are learning regression models



# 理念

- 方便有多门，归元无二路
- 挽弓当挽强，用箭当用长

## 课程存储地址

- 课程存储地址: <https://github.com/wuhsiang/Courses>
- 资源: 课件、案例数据及代码



图 2: 课程存储地址

## 参考教材

- 谢宇. 回归分析. 北京: 社会科学文献出版社. 2010.
- 威廉·贝里. 理解回归假设. 上海: 格致出版社. 2012.
- 欧文·琼斯. R 语言的科学编程与仿真. 西安: 西安交通大学出版社. 2014.

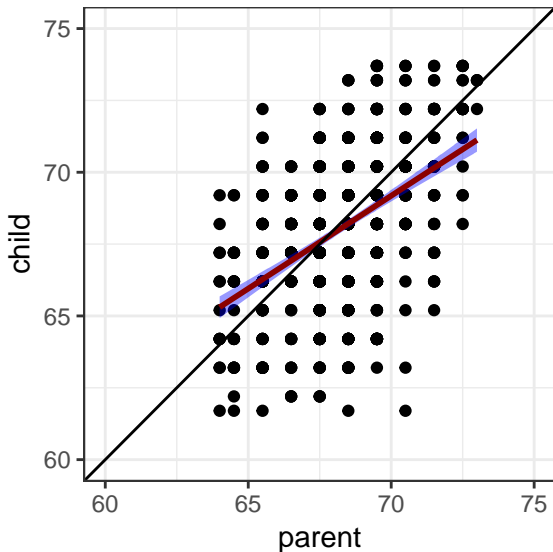
# 线性回归原理

# 缘起

## 变异与个体差异

- 随着物种的变异，其个体差异是否会一直增大？
- 个体差异上的**两极分化**是否是一般规律？

# Galton 的身高研究



# 什么是“回归”？

Galton 的身高研究发现：

- 父代的身高增加时，子代的身高也倾向于增加
- 当父代高于平均身高时，子代身高比他更高的概率要小于比他更矮的概率；父代矮于平均身高时，子代身高比他更矮的概率要小于比他更高的概率。
- 同一族群中，子代的身高通常介于其父代的身高和族群的平均身高之间。

**回归效应：**

- 向平均数方向的回归 (regression toward mediocrity)
- 天之道，损有余而补不足

# Galton 的开创性研究

## Francis Galton (以及 Karl Pearson) 研究

- 个体差异：确立了社会科学研究与自然科学研究的根本区别
- 遗传与个体差异的关系：倡导“优生学”
- 双生儿法 (twin method): 匹配方法 (matching) 之先河



# 理解回归的三种视角

考虑回归模型

$$y_i = f(X_i) + \epsilon_i = \beta X_i + \epsilon_i$$

- **因果性** (计量经济领域): 观测项 = 机制项 + 干扰项
- **预测性** (机器学习领域): 观测项 = 预测项 + 误差项
- **描述性** (统计领域): 观测项 = 概括项 + 残差项

# 回归模型设定

考虑教育程度  $x$  与收入  $y$  的关系，回归模型为：

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i.$$

**隐含的假设：**

- A1. 线性假设 ( $E(y|x) = \beta x$ )：非线性模型、结构模型
- A2. 同质性假设：随机参数/效应模型、分层线性模型

# 总体回归方程

给定  $x = x^k$ , 在的  $\epsilon_j$  i.i.d  $\sim N(0, \sigma^2)$  假定下, 对回归模型求条件期望得到如下**总体回归方程**,

$$E(y|x = x^k) = \mu_{y|x^k} = \alpha + \beta x^k.$$

含义:

- 给定任意  $x^k$ , 对应的  $y^k \sim N(\mu_{y|x^k}, \sigma^2)$ 。
- 回归线穿过  $(x^k, \mu_{y|x^k})$ 。
- 参数  $\beta$  刻画了  $x$  的变化对  $y$  的**条件期望**的影响。

# 总体回归线

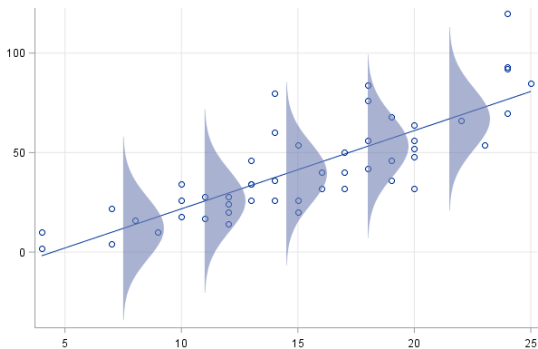


图 3: 总体回归线

# 暗含的假设

- A3. 独立同分布假设：
  - $E(\epsilon_i) = 0$ : 随机效应模型中的随机截距参数
  - $Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$ : 时间序列模型、空间计量模型、嵌套模型
  - $\sigma_i = \sigma$ : 异方差问题
- A4. 关于  $y$  的假设：
  - $y$  应是连续变量: 广义线性模型
  - $y$  的条件期望  $\mu_{y|x^k} = E(y|x = x^k)$  符合正态分布: 分位数回归
- A5. 正交 (严格外生) 假设
  - 误差项  $\epsilon$  和  $x$  不相关, 即  $Cov(x, \epsilon) = 0$
  - 内生性问题

# 变异分解逻辑

样本观测值  $y_i$ 、均值  $\bar{y}$ 、预测值  $\hat{y}$  之间的关系

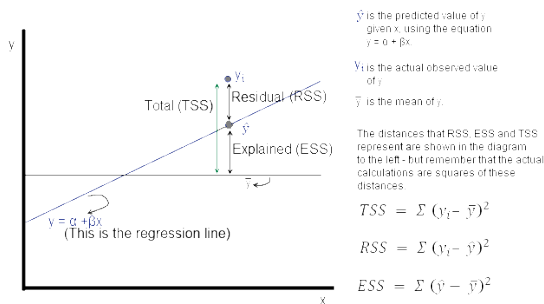


图 4: 变异的分解

## 变异分解公式

总平方和 (sum of squares total, SST) 可以分解为回归平方和 (sum of squares regression, SSR) 和残差平方和 (sum of squares error, SSE) 之和,

具体而言:

$$\begin{aligned} SST &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [(y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \bar{y})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \\ &= SSE + SSR \end{aligned}$$

$$R^2 = SSE/SST.$$

## 参数估计

最小化残差平方和（扩展到多元回归的情境  $y = \beta X + \epsilon$ ）:

$$\min SSE = \min \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta X_i)^2$$

由偏导公式

$$\frac{\partial SSE}{\partial \beta} = 0$$

得到参数估计值

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y.$$

**Q3: 如何在熟悉的编程语言中，撰写函数估计多元线性模型？**



## 多元线性回归与方差分析

假定多元线性模型中，待估计的参数个数为  $p$ ，那么方差和自由度的分解如下：

- SST: 自由度为  $n - 1$
- SSE: 自由度为  $n - p$
- SSR: 自由度为  $p - 1$

因而，自由度的分解为：

$$n - 1 = (n - p) + (p - 1)$$

**Q4:** 假设模型有两个解释变量，其中  $x_1$  是连续变量， $x_2$  是包含 5 个分类的分类变量，SSR 的自由度为多少？

# 方差分析表

表 1: 多元线性回归的方差分析表

变异来源	平方和	自由度	均方
回归模型	SSR	$p - 1$	$MSR = SSR / (p - 1)$
误差	SSE	$n - p$	$MSE = SSE / (n - p)$
总变异	SST	$n - 1$	$MST = SST / (n - 1)$

相应地, 可以构造  $F$  检验:

$$F(df_{SSR}, df_{SSE}) = \frac{MSR}{MSE}$$

# Gauss–Markov 定理

## 线性回归诊断