五、投影

前面说了这么多 2D 图形的知识，现在总算进入 3D 计算的内容了，在讲 3D 图形学的相关知识之前，我需要介绍一个东西叫做“齐次坐标“。

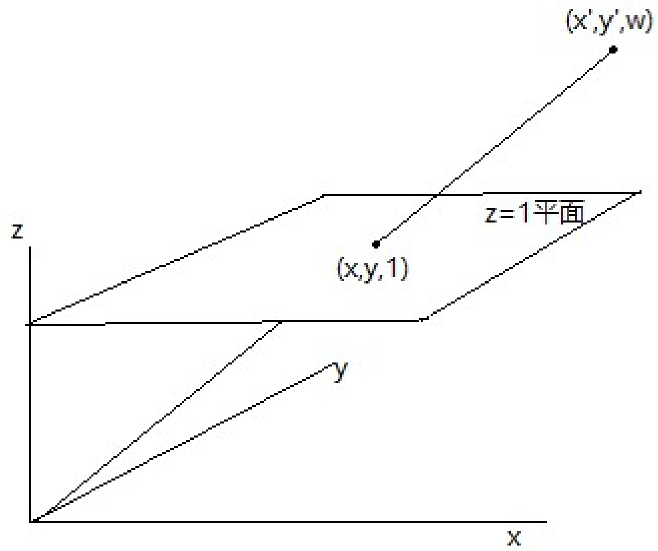
1：齐次坐标:

齐次坐标就是在原来的坐标上面增加了一个额外信息，与原来坐标的变换规则为:

$$(x,y) \Longleftrightarrow (wx,wy,w)$$

例如：坐标(1,2)可以表示为齐次坐标(1,2,1), (2,4,2), (3,6,3)，这有什么用呢?

齐次坐标可以很方便的把点加入矩阵中进行一些运算, 并且它既能够用来明确区分向量和点，同时也更易用于进行仿射（线性）几何变换(这里面具体的运算我就不讲了，有兴趣的同学可以看看使用矩阵来计算一个点的旋转、平移、缩放等)。当齐次坐标的最后一个分量等于 0 时，它可以表示一个无穷远的点，如(1,2,0)换成普通的二维坐标就是$(\frac{1}{0},\frac{2}{0})$,这时候 x,y 都是无穷大，同时还可以表示一个向量(1,2)，因为虽然 x,y 都是无穷大，但是他们不是同阶的，并且$\lim_{n\to 0}\frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}$=2,所以还可以表示一个 y 是 x 两倍的向量，并且(1,2,0)参与矩阵的平移、缩放、旋转计算之后，里面的平移没有任何效果，这也和向量可以缩放、旋转，但是没有平移运算的事实一致。二维坐标的齐次坐标还可以理解为三维空间连接原点和一个点(x',y',w),该直线与平面 z=1 的交点的(x,y)值就是原是值，如下图:

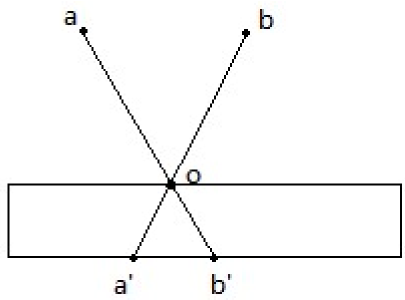


2：投影变换

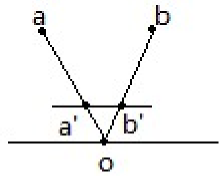
上目前主要使用的两种投影是透视投影和正交投影，正交投影类似于三视图，没有进大远小这种透视变化。

2.1 透视投影:

透视投影运用的是类似小孔成像的原理，如下图:

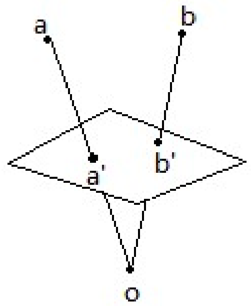


ab 两点经过小孔 o 之后投影成 a'和 b'，这种投影得到的像上下左右是颠倒的，所以有一个改进方案是按照下面的方式进行投影：



这种投影方式把底片放在小孔的前面，成的像是上下左右都是正的。

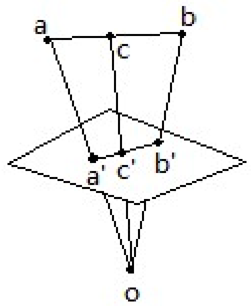
前面举的例子都是 2D 投影的情况，现在考虑一下 3D 投影的情况：



这里也用了改进的小孔成像法，把底片放在小孔的前面，这时候 ab 两点在底片上面的投影就是将小孔和被投影点连接起来，然后求出连线和底片平面的交点。也就是说投影一个点需要三个东西：被投影点的坐标、小孔坐标、底片平面的方程，使用上面三个数据按照如下步骤即可解出投影点坐标：

1. 将被投影点和小孔使用空间直线的两点式确定一个方程 A
2. 得到底片方程 B
3. 联立方程 AB 即可解出交点位置。

现在假设空间中有一线段<ab>，两端点 ab 在底片上面的投影点分别是 a'b'，那么线段<ab>在底片上面的投影也是<a'b'>吗？看下面的图：

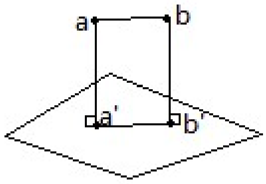


现在假设线段<ab>上面有一点 c，连接 oc，因为通过直线<ab>和直线外的一点 o 可以确定一个平面 abo，则线段<oc>必定在在平面 abo 上面，又因为两不平行平面相较于

一直线，那么 oc 和底片平面的交点 c’也必定在<a’b’>上。所以空间直线的投影在底片上面仍然是一条直线。

2.2 正交投影：

对一个点进行正交投影就是将该点垂直投影到底片上面，如下图：

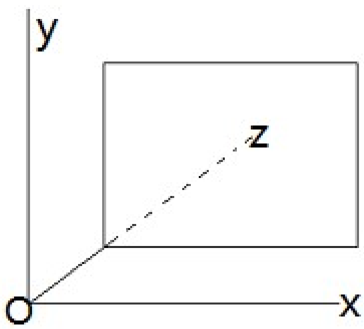


已知底片平面方程 B，先求出过被投影点(如 a)并且与底片垂直的直线方程 A，然后联立方程 AB 即可求出投影点，正交投影具有不改变大小的特点。

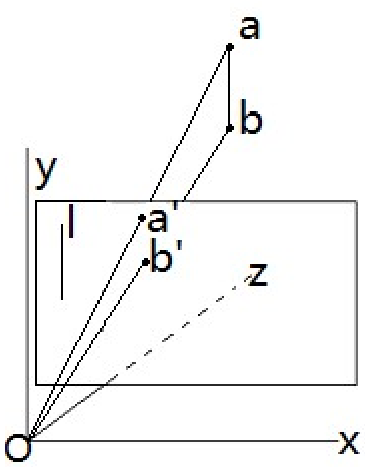
3：投影坐标系的优化：

前面的投影都是底片是任意平面，小孔(正交投影中没有)也是任意坐标，这样的话必须联立三个一元三次方程(直线可以看作两个平面的交线，Ax+By+Cz+D=0 是一个平面的一般式方程)才能解出结果，如果用克莱姆法则求解的话就需要计算 72 次乘法和 24 次加法和 4 次除法，这样的话运算量略微的大了一些。所以我们可以使用特殊的小孔和特殊的底片平面，这样将会大大的降低计算量。

通常会建立一个以小孔为原点，底片为平行于 XOY 平面的坐标系，这也叫做相机坐标系，如下图：

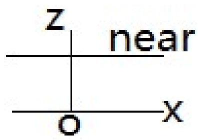


投影平面是 z=n 的一个平行于平面 xoy 的平面，也叫做近平面(near)，所有的投影运算都是在这个坐标系中计算的。同时可以证明:任意一个可以被投影的点(x,y,z)在 near 平面上的投影点为(x’,y’,n)，则 x’只和(x,z)相关,y’只和(y,z)相关。如下图：

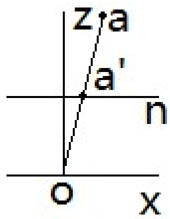


设空间中有两点 a、b，其中 a、b 两点的(x,z)值相等，y 值不相等。则可以得到线段<ab>

平行于坐标轴 oy，并且三角形 oab 和 near 平面相交于<a’b’>，此时在 near 平面作一条辅助线 l 平行于轴 oy，可以得到 l 平行于 a’b’平行于 ab(空间三线平行定理)，则点 a’、b’的 x 值相等，即(x,y,z)的投影点(x’,y’,n)的 x’只和(x,z)相关，同理 y’也只和(y,z)相关。如果我们从 Y 轴往原点 O 看过去，可以看到如下的图形：



near 平面只有一条线了，这时候如果要计算投影就简单了，不用像最开始说的那样列好几个方程，然后求直线和平面的交点，变成了求直线和直线的交点,其中一条直线甚至平行于坐标轴(这将大大简化方程的复杂度)，如下图：



a(x,z)的投影点 a’的坐标为(x’,n)，$x' = \frac{nx}{z}$ ，如果换个角度从 x 轴看向原点 O，同样的可以得到$y' = \frac{ny}{z}$。这时候可以在相机坐标系中得到如下公式：

$$x' = \frac{nx}{z}$$

$$y' = \frac{ny}{z}$$

这就是投影公式。也就是(x,y,z)的投影点坐标为($\frac{nx}{z}$,$\frac{ny}{z}$),注意，投影是一种降维操作，把一个三维点变成了二维点，降维操作会丢失很多信息，比如投影之后就再也无法还原出原来的顶点坐标(如果有至少两个放在不同位置的相机就能还原，这是一般的基于双目相机的三维重建技术)。如果我们把($\frac{nx}{z}$,$\frac{ny}{z}$)写成齐次坐标的形式，可以写成($\frac{nx}{z}$,$\frac{ny}{z}$,1),也可以写成(nx,ny,z)，通常我们把(nx,ny,z)变成($\frac{nx}{z}$,$\frac{ny}{z}$,1)的过程叫做透视除法。到目前为止齐次坐标的作用还是不太明显，后面我会简单的介绍一下它的妙用，现在读者可以认为齐次坐标就是普通坐标的另外一种表达，但是作者我偏偏喜欢用齐次坐标这种表达方式，希望读者能够先适应一下齐次坐标的表达。下面就是简单计算投影的函数，可以发现它是如此的简单。

/chapter5/projection/projection/main.cpp

```
void Projection(Point3& p,double n, Point3& result)
{
    result.X = n * p.X;
    result.Y = n * p.Y;
    result.Z = p.Z;
}
```