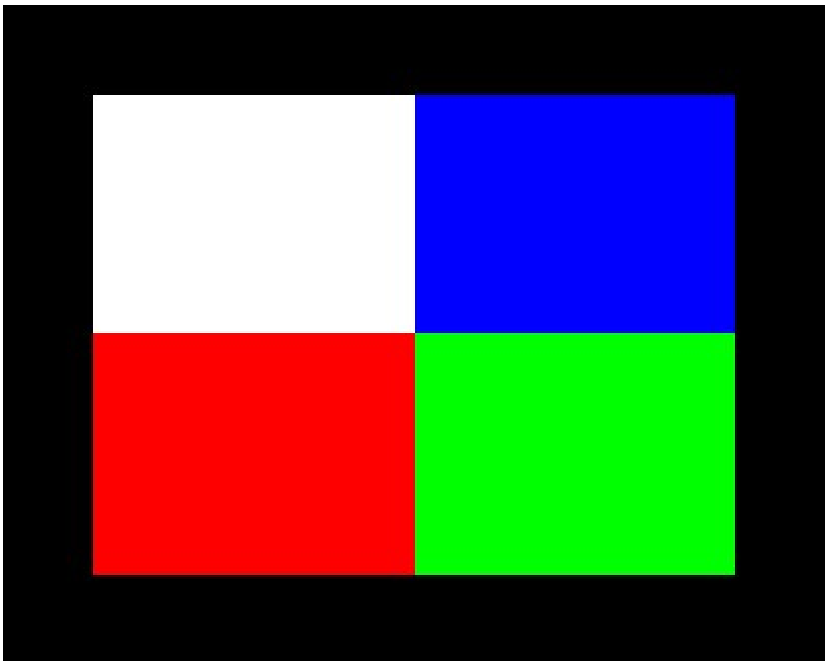
七、透视校正插值

在绘制了三角形之后，我们有时候可能会想往三角形上面绘制出纹理来，这样可以使三角形表现出更加的丰富东西。还记得我们在第四章中介绍的纹理插值吗？本章我们将会使用同样的技术给三维的三角形绘制纹理。

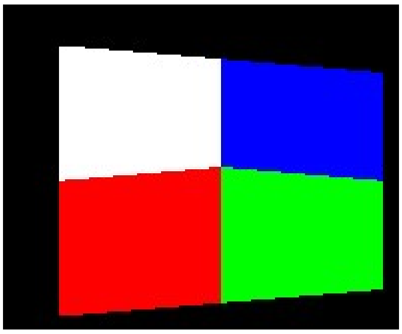
1. 在屏幕空间插值导致的纹理变形

现在我们已经基本能绘制一个三维空间的三角形了，我们在第六章的代码中使用颜色作为顶点属性对三角形绘制，如果我们把顶点颜色改为纹理坐标，是不是就能给三角形贴图了呢？赶紧试试。

我们先看代码 chapter7/WithoutCorrent，这次我们绘制两个三角形，代码就是把第六章的 ClipSpace 和第四章的 Texture 结合了一下，把第六章的颜色插值改成纹理坐标插值，同时在 main 函数中多绘制了一个三角形，所以代码就没什么可以说的了。运行结果如下:



我们可以发现效果挺好的，似乎没什么问题。实际上真的没有问题吗？答案当然是否定的，因为我们绘制的三角形和 near 平面平行，所以才看起来正确，下面我们把三角形稍微做点旋转，让三角形和 near 平面不再平行，我们再来看看结果。按回车键将会调用 clear 清空之前绘制的内容重新绘制新的图案。这次绘制的图案是把两个三角形旋转了一度，和 near 平面稍微有了一点点夹角，我们再来看看结果:

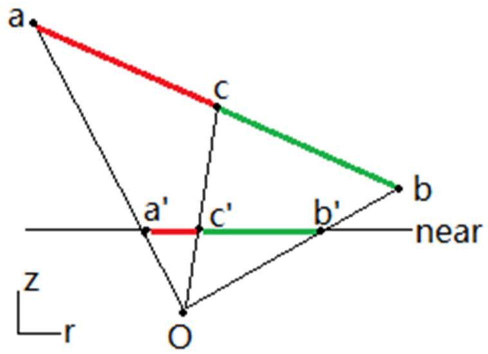


我们可以发现纹理出现了变形。为什么会出现这样的结果呢？请看下节透视校正插值。

2. 透视校正插值(perspective correct interpolation)

我们在前一小节中是在屏幕上面使用线性插值，也就是把三维的三角形经过透视变换到屏幕上面之后，在屏幕上对纹理的 UV 属性使用线性插值。这种插值方式只有在空间三角形

和 near 平面平行的时候才是正确的，一旦三角形和 near 平面不平行，就会出现错误的结果。因为 UV 属性在三维空间中的三角形上面是线性变化的，但是在屏幕上面就不一定是线性变化的了。我们考虑一下下面的情况:



我们假设空间中有一条直线 ab，现在我们从某个方向往原点观察(让直线和我们观察者眼睛的 near 平面平行，此时直线在我们视网膜上面的投影最大，并且让 near 平面在我们眼中成一条直线)，可以看到如同上图一样的情景。其中 ab 不平行于 near 平面。我们可以很明显的看出$\frac{ac}{cb} \neq \frac{a'c'}{c'b'}$(假设有$\frac{ac}{cb} = \frac{a'c'}{c'b'}$，那么则有△aoc 和△a'oc'相似，具体推导就像节，则 ac //a'c' ，与已知条件：ab 不平行于 near 平面不符，故$\frac{ac}{cb} \neq \frac{a'c'}{c'b'}$)。因此可以知道在直线 ab 上面线性变化的值到了 a'b'上面之后就不一定线性变化了(只有在平行的时候才线性变化)。所以我们直接在 a'b'上面使用线性插值，得到的结果就不一定正确。

为了不混淆，我们把在相机坐标系中的线段两个顶点记为 A、B，经过透视乘法之后在裁剪空间综合的点记为 a、b，经过透视除法之后在屏幕空间上的点记为 a'、b'，同样把相机坐标系中的待插值点记为 C，在裁剪空间中记为 c，在屏幕空间记为 c'。设点 C 在 AB 上的插值比例为 T，即$C = A + (B - A)T$，这里包含了$C_x = A_x + (B_x - A_x)T$、$C_y = A_y + (B_y - A_y)T$、$C_z = A_z + (B_z - A_z)T$、$C_\omega = A_\omega + (B_\omega - A_\omega)T$。我们在上一章介绍裁剪空间的时证明过裁剪空间和相机空间中的插值比例是一样的，即:T=t。现在假设已知 t'(我们在前一节示范的错误插值就是直接使用 t'计算纹理的 UV 值)，我们只需要求出 t 和 t'的关系即可正确插值。我们已知${c'}_x = \frac{c_x}{c_\omega}$、${c'}_y = \frac{c_y}{c_\omega}$、${c'}_z = \frac{c_z}{c_\omega}$，则:

$$c'_x = \frac{c_x}{c_\omega} = \frac{a_x + (b_x - a_x)t}{a_\omega + (b_\omega - a_\omega)t}$$

$$c'_x = a'_x + (b'_x - a'_x)t' = \frac{a_x}{a_\omega} + \left(\frac{b_x}{b_\omega} - \frac{a_x}{a_\omega}\right)t'$$

同理${c'}_y$和${c'}_z$也类似。

因为${c'}_x = \frac{a_x+(b_x-a_x)t}{a_\omega+(b_\omega-a_\omega)t} = \frac{a_x}{a_\omega} + \left(\frac{b_x}{b_\omega} - \frac{a_x}{a_\omega}\right)t'$，这里面就包含了 t 和 t'的关系，我们可以解出:

$$\frac{a_x + (b_x - a_x)t}{a_\omega + (b_\omega - a_\omega)t} = \frac{a_x}{a_\omega} + \left(\frac{b_x}{b_\omega} - \frac{a_x}{a_\omega}\right)t'$$

由这个式子我们可以得到:

$$t = \frac{t'}{\frac{b_\omega}{a_\omega} + (1 - \frac{b_\omega}{a_\omega})t'}$$

具体计算过程可以看下面(不想看的同学可以略过):

$$a_x+(b_x-a_x)t=(\frac{a_x}{a_\omega}+\frac{b_x}{b_\omega}t'-\frac{a_x}{a_\omega}t')(a_\omega+b_\omega t-a_\omega t)$$

$$=\frac{a_x}{a_\omega}a_\omega+\frac{a_x}{a_\omega}b_\omega t-\frac{a_x}{a_\omega}a_\omega t+\frac{b_x}{b_\omega}t'a_\omega+\frac{b_x}{b_\omega}t'b_\omega t-\frac{b_x}{b_\omega}t'a_\omega t-\frac{a_x}{a_\omega}t'a_\omega-\frac{a_x}{a_\omega}t'b_\omega t+\frac{a_x}{a_\omega}t'a_\omega t$$

$$=a_x+\frac{a_x}{a_\omega}b_\omega t-a_xt+\frac{b_x}{b_\omega}t'a_\omega+b_xt't-\frac{b_x}{b_\omega}t'a_\omega t-a_xt'-\frac{a_x}{a_\omega}t'b_\omega t+a_xt't$$

$$b_xt-\frac{a_x}{a_\omega}b_\omega t-b_xt't+\frac{b_x}{b_\omega}t'a_\omega t+\frac{a_x}{a_\omega}t'b_\omega t-a_xt't=\frac{b_x}{b_\omega}t'a_\omega-a_xt'$$

$$t\left(b_x-\frac{a_x}{a_\omega}b_\omega-b_xt'+\frac{b_x}{b_\omega}a_\omega t'+\frac{a_x}{a_\omega}b_\omega t'-a_xt'\right)=\frac{b_x}{b_\omega}t'a_\omega-a_xt'$$

$$t=\frac{t'}{\dfrac{b_x-\frac{a_x}{a_\omega}b_\omega}{\frac{b_x}{b_\omega}a_\omega-a_x}+\dfrac{\frac{b_x}{b_\omega}a_\omega-b_x}{\frac{b_x}{b_\omega}a_\omega-a_x}t'+\dfrac{\frac{a_x}{a_\omega}b_\omega-a_x}{\frac{b_x}{b_\omega}a_\omega-a_x}t'}$$

$$t=\frac{t'}{\dfrac{\frac{a_\omega b_x-a_xb_\omega}{a_\omega}}{\frac{a_\omega b_x-a_xb_\omega}{b_\omega}}+\dfrac{b_xa_\omega-b_\omega b_x}{b_xa_\omega-b_\omega a_x}t'+\dfrac{\frac{a_xb_\omega-a_\omega a_x}{a_\omega}}{\frac{b_xa_\omega-b_\omega a_x}{b_\omega}}t'}$$

$$t=\frac{t'}{\frac{b_\omega}{a_\omega}+(\frac{b_xa_\omega a_\omega-b_\omega b_xa_\omega+b_\omega b_\omega a_x-b_\omega a_\omega a_x}{b_xa_\omega a_\omega-b_\omega a_\omega a_x})t'}$$

$$t=\frac{t'}{\frac{b_\omega}{a_\omega}+(\frac{b_xa_\omega a_\omega-b_\omega a_\omega a_x-b_\omega b_xa_\omega+b_\omega b_\omega a_x}{b_xa_\omega a_\omega-b_\omega a_\omega a_x})t'}$$

$$t=\frac{t'}{\frac{b_\omega}{a_\omega}+(\frac{b_xa_\omega a_\omega-b_\omega a_\omega a_x}{b_xa_\omega a_\omega-b_\omega a_\omega a_x}+\frac{b_\omega b_\omega a_x-b_\omega b_xa_\omega}{b_xa_\omega a_\omega-b_\omega a_\omega a_x})t'}$$

$$t=\frac{t'}{\frac{b_\omega}{a_\omega}+(1\ +\frac{b_\omega b_\omega a_x-b_\omega b_xa_\omega}{b_xa_\omega a_\omega-b_\omega a_\omega a_x})t'}$$

$$t=\frac{t'}{\frac{b_\omega}{a_\omega}+(1\ +\frac{b_\omega(b_\omega a_x-b_xa_\omega)}{a_\omega(b_xa_\omega-b_\omega a_x)})t'}$$

$$t=\frac{t'}{\frac{b_\omega}{a_\omega}+(1\ +\frac{b_\omega(b_\omega a_x-b_xa_\omega)}{a_\omega(b_xa_\omega-b_\omega a_x)})t'}$$

$$t=\frac{t'}{\frac{b_\omega}{a_\omega}+(1-\frac{b_\omega(b_xa_\omega-b_\omega a_x)}{a_\omega(b_xa_\omega-b_\omega a_x)})t'}$$

$$t=\frac{t'}{\frac{b_\omega}{a_\omega}+(1-\frac{b_\omega}{a_\omega})t'}$$

并且使用$c'_y=\frac{c_y}{c_\omega}$和$c'_z=\frac{c_z}{c_\omega}$得到同样的结果。我们可以看到在$b_\omega=a_\omega$(即线段两点的原

始 z 值一样，该线段平行于 near 平面)时，t=t'，其余情况只有 t'=0 和 t'=1 的时候,t=t'。已知:

$$c_\omega = a_\omega + (b_\omega - a_\omega)t$$

我们把$t = \frac{t'}{\frac{b_\omega}{a_\omega}+(1-\frac{b_\omega}{a_\omega})t'}$带入上式得到:

$$c_\omega = a_\omega + (b_\omega - a_\omega)\frac{t'}{\frac{b_\omega}{a_\omega}+(1-\frac{b_\omega}{a_\omega})t'}$$

化简得到:

$$c_\omega = \frac{a_\omega b_\omega - a_\omega b_\omega t' + a_\omega b_\omega t'}{b_\omega + a_\omega t' - b_\omega t'}$$

然后分子分母同时除以$a_\omega b_\omega$得到:

$$c_\omega = \frac{1}{\frac{1}{a_\omega}+(\frac{1}{b_\omega}-\frac{1}{a_\omega})t'}$$

我们可以发现:

$$\frac{1}{c_\omega} = \frac{1}{a_\omega}+(\frac{1}{b_\omega}-\frac{1}{a_\omega})t'$$

直线在裁剪空间中的$\frac{1}{\omega}$和投影到屏幕空间上面的直线成线性关系，则可以在屏幕空间上使用重心坐标插值或者双线性插值方法对$\frac{1}{c_\omega}$进行插值，并且用重心坐标表示待插值点 P 对应的$\frac{1}{p_\omega}$表达式为:

$$\frac{1}{p_\omega} = \frac{1}{a_\omega}w_a + \frac{1}{b_\omega}w_b + \frac{1}{c_\omega}w_c$$

其中w_a、w_b、w_c为屏幕空间上三角形三个顶点 adc 的权值。

设在裁剪空间中有一线性变化的属性 v,我们可以得到:

$$\frac{c_v - a_v}{b_v - a_v} = \frac{c_\omega - a_\omega}{b_\omega - a_\omega}$$

又因为:

$$c_\omega = \frac{1}{\frac{1}{a_\omega}+(\frac{1}{b_\omega}-\frac{1}{a_\omega})t'}$$

得到:

$$\frac{c_v - a_v}{b_v - a_v} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{a_\omega}+(\frac{1}{b_\omega}-\frac{1}{a_\omega})t'} - a_\omega}{b_\omega - a_\omega}$$

$$\frac{c_v - a_v}{b_v - a_v} = \frac{\frac{a_\omega b_\omega}{b_\omega + a_\omega t' - b_\omega t'} - a_\omega}{b_\omega - a_\omega}$$

$$\frac{c_v - a_v}{b_v - a_v} = \frac{\frac{a_\omega b_\omega - a_\omega b_\omega - a_\omega a_\omega t' + a_\omega b_\omega t'}{b_\omega + a_\omega t' - b_\omega t'}}{b_\omega - a_\omega}$$

$$\frac{c_v - a_v}{b_v - a_v} = \frac{a_\omega b_\omega t' - a_\omega a_\omega t'}{(b_\omega + a_\omega t' - b_\omega t')(b_\omega - a_\omega)}$$

$$\frac{c_v - a_v}{b_v - a_v} = \frac{a_\omega t'(b_\omega - a_\omega)}{(b_\omega + a_\omega t' - b_\omega t')(b_\omega - a_\omega)}$$

$$\frac{c_v - a_v}{b_v - a_v} = \frac{a_\omega t'}{b_\omega + a_\omega t' - b_\omega t'}$$

$$c_v = \frac{a_\omega t'}{b_\omega + a_\omega t' - b_\omega t'}(b_v - a_v) + a_v$$

$$c_v = \frac{a_\omega b_v t' - a_\omega a_v t'}{b_\omega + a_\omega t' - b_\omega t'} + a_v$$

$$c_v = \frac{a_\omega b_v t' - a_\omega a_v t' + a_v b_\omega + a_\omega a_v t' - a_v b_\omega t'}{b_\omega + a_\omega t' - b_\omega t'}$$

$$c_v = \frac{a_\omega b_v t' + a_v b_\omega - a_v b_\omega t'}{b_\omega + a_\omega t' - b_\omega t'}$$

分子分母同时除以$a_\omega b_\omega$得到:

$$c_v = \frac{\frac{a_v b_\omega}{a_\omega b_\omega} + \frac{a_\omega b_v t'}{a_\omega b_\omega} - \frac{a_v b_\omega t'}{a_\omega b_\omega}}{\frac{b_\omega}{a_\omega b_\omega} + \frac{a_\omega t'}{a_\omega b_\omega} - \frac{b_\omega t'}{a_\omega b_\omega}}$$

$$c_v = \frac{\frac{a_v}{a_\omega} + (\frac{b_v}{b_\omega} - \frac{a_v}{a_\omega})t'}{\frac{1}{a_\omega} + (\frac{1}{b_\omega} - \frac{1}{a_\omega})t'}$$

已知$\frac{1}{c_\omega} = \frac{1}{a_\omega} + (\frac{1}{b_\omega} - \frac{1}{a_\omega})t'$，则上式可写为:

$$c_v = \frac{\frac{a_v}{a_\omega} + (\frac{b_v}{b_\omega} - \frac{a_v}{a_\omega})t'}{\frac{1}{c_\omega}}$$

$$\frac{c_v}{c_\omega} = \frac{a_v}{a_\omega} + (\frac{b_v}{b_\omega} - \frac{a_v}{a_\omega})t'$$

我们可以发现$\frac{c_v}{c_\omega}$在屏幕空间上面是线性变化的，所以我们同样可以在屏幕空间上使用重心坐标插值或者双线性插值方法对$\frac{c_v}{c_\omega}$进行插值，并且用重心坐标表示待插值点 P 对应的$\frac{p_v}{p_\omega}$表达式为:

$$\frac{p_v}{p_\omega} = \frac{a_v}{a_\omega} w_a + \frac{b_v}{b_\omega} w_b + \frac{c_v}{c_\omega} w_c$$

其中w_a、w_b、w_c为屏幕空间上三角形三个顶点 adc 的权值。

通过上述推理，可以知道透视校正的完整算法为:

①使用表达式

$\frac{1}{c_\omega} = \frac{1}{a_\omega} + (\frac{1}{b_\omega} - \frac{1}{a_\omega})t'$（在屏幕空间上的三角形使用双线性插值）

或者

$$p_\omega = \frac{1}{\frac{1}{a_\omega}w_a + \frac{1}{b_\omega}w_b + \frac{1}{c_\omega}w_c}$$（在屏幕空间上的三角形使用重心坐标插值）

求出p_ω的值。

②使用表达式

$$c_v = c_\omega(\frac{a_v}{a_\omega} + (\frac{b_v}{b_\omega} - \frac{a_v}{a_\omega})t')$$(在屏幕空间上的三角形使用双线性插值)

或者

$$p_v = p_\omega(\frac{a_v}{a_\omega}w_a + \frac{b_v}{b_\omega}w_b + \frac{c_v}{c_\omega}w_c)$$(在屏幕空间上的三角形使用重心坐标插值)

求出p_v值。

在 chapter7/PerspectiveCorrectInterpolation/main.cpp 中，我们先对 FillTriangle 函数进行修改，因为之前这个函数只接受 point2 的顶点，现在我们除了使用 x,y 分量之外还需要使用ω分量，所以修改成接受 point4 类型的顶点，在这里我们暂时不使用 point4 的 z 分量。在 ClipTriangleAndDraw 函数中我们将裁剪出来的顶点的ω分量也保存下来。

ClipTriangleAndDraw 函数部分代码:

```
Triangle[0].X = tmp[0].X / tmp[0].W;//执行透视除法
Triangle[0].Y = tmp[0].Y / tmp[0].W;
Triangle[0].W = tmp[0].W;
Triangle[1].X = tmp[i].X / tmp[i].W;
Triangle[1].Y = tmp[i].Y / tmp[i].W;
Triangle[1].W = tmp[i].W;
Triangle[2].X = tmp[i + 1].X / tmp[i + 1].W;
Triangle[2].Y = tmp[i + 1].Y / tmp[i + 1].W;
Triangle[2].W = tmp[i + 1].W;
```

我们在绘制每个像素的时候使用上面推导的公式计算出当前像素的纹理 UV 值:

```
double WeightA, WeightB, WeightC;
Vector3 bp(x - ps[1].X, y - ps[1].Y, 0.0);
Vector3 ap(x - ps[0].X, y - ps[0].Y, 0.0);
Vector3 cp(x - ps[2].X, y - ps[2].Y, 0.0);
WeightA = (bc.X * bp.Y - bc.Y * bp.X) / square;
WeightB = (ca.X * cp.Y - ca.Y * cp.X) / square;
WeightC = (ab.X * ap.Y - ab.Y * ap.X) / square;//得到屏幕空间中三个顶点的权值



double u, v;//纹理的uv
double Pomega = 1 / ((1 / ps[0].W) * WeightA + (1 / ps[1].W) * WeightB + (1 / ps[2].W)
* WeightC);//求出当前顶点的ω分量

u = Pomega * (attribute[0] / ps[0].W * WeightA + attribute[2] / ps[1].W * WeightB +
attribute[4] / ps[2].W * WeightC);//使用线性插值计算当前绘制像素的u值
v = Pomega * (attribute[1] / ps[0].W * WeightA + attribute[3] / ps[1].W * WeightB +
attribute[5] / ps[2].W * WeightC);//使用线性插值计算当前绘制像素的v值
```

```
double px, py;//图片的x,y
UV2XY(u, v, px, py, 2, 2);//将uv转换成xy坐标
COLORREF c = getPixel((int)px, (int)py);
gp.setPixel(x, y, c);//绘制像素
```

我们可以看到，现在即使被绘制的平面和 near 平面有夹角，也能正确的对纹理进行插值了。