十、简单的几何变换

在这里我将会介绍一些简单的仿射变换，关于仿射变换的定义可以自行查阅维基百科。

1. 平移

对于一个三维点 P，如果他按照一个三维向量$\underset{a}{\rightarrow}$平移到点 P'，则点 P'的坐标为

$$P' = P + a$$

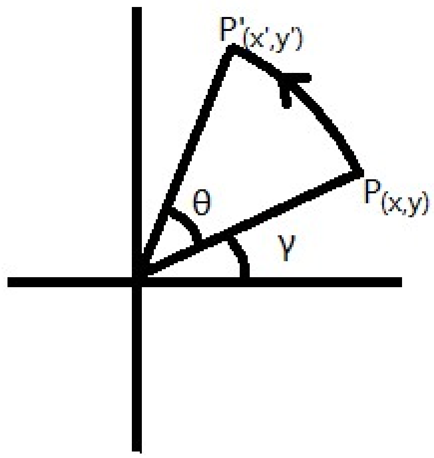
即$P_x = P_x + a_x$、$P_y = P_y + a_y$、$P_z = P_z + a_z$。

2. 缩放

对于一个三维点，我们可以令其在某个方向上面缩放，最简单的就是在坐标轴方向上的缩放，如一个点 P 在 x 轴方向上面缩放 a 倍，则$P'_x = aP_x$。

3. 旋转

这里我也只是简单的介绍一下欧拉旋转，更为复杂一点的四元数我就不说了，我们可以让某个三维点 P 绕坐标轴旋转θ度得到新的点 P'。我们先看看在二维平面上面的旋转，如下图：




已知一个顶点 P，以原点为中心，逆时针旋转了θ，我们可以很容易的求出 P'的坐标。我们设 P 到原点的距离为 r，则可以根据上图得到下面的式子：

$$\begin{cases} x = r.cos\gamma \\ y = r.sin\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r.cos\,(\theta + \gamma) \\ y' = r.sin\,(\theta + \gamma) \end{cases}$$

并且我们把 x'和 y'使用三角函数公式展开得到如下式子：

$$\begin{cases} x' = r.cos\theta cos\gamma - r.sin\theta sin\gamma \\ y' = r.sin\theta cos\gamma + r.cos\theta sin\gamma \end{cases}$$

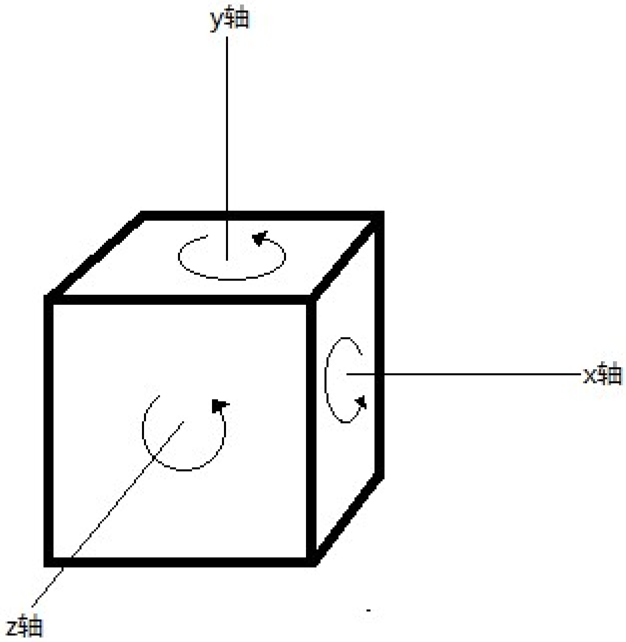
又因为

$$\begin{cases} x = r.cos\gamma \\ y = r.sin\gamma \end{cases}$$

所以 x'和 y'可以写成

$$\begin{cases} x' = x.cos\theta - y.sin\theta \\ y' = x.sin\theta + y.cos\theta \end{cases}$$

这里就得到了顶点在二维上的旋转，实际上我们可以把三维旋转分解成三个轴方向上的二维旋转，如下图:




我们把旋转分解到三个轴向上面，就变成了三个二维旋转。这样就能套用上面的公式了，绕 Z 轴旋转时可以直接使用上述公式:

$$\begin{cases} x' = x.cos\theta - y.sin\theta \\ y' = x.sin\theta + y.cos\theta \end{cases}$$

因为 Z 值不会改变，所以完整的公式为:

$$\begin{cases} x' = x.cos\theta - y.sin\theta \\ y' = x.sin\theta + y.cos\theta \\ z' = z \end{cases}$$

而绕另外两个轴旋转的公式类似，读者可以自行推导。

欧拉旋转会遇到一个叫做万向锁(Gimbal Lock)的问题，采用四元数即可解决。