概率论与数理统计习题答案 完全版

浙大第四版（高等教育出版社）

第一章　　概率论的基本概念

1.[一]　写出下列随机试验的样本空间

（1）记录一个小班一次数学考试的平均分数（充以百分制记分）（[一] 1）

$$S=\left\{\frac{o}{n},\frac{1}{n}\cdots\cdots\frac{n\times 100}{n}\right\}$$，n 表小班人数

（3）生产产品直到得到 10 件正品，记录生产产品的总件数。（[一] 2）

S={10，11，12，………，n，………}

（4）对某工厂出厂的产品进行检查，合格的盖上“正品”，不合格的盖上“次品”，如连续查出二个次品就停止检查，或检查 4 个产品就停止检查，记录检查的结果。

查出合格品记为“1”，查出次品记为“0”，连续出现两个“0”就停止检查，或查满 4 次才停止检查。（[一] (3)）

S={00，100，0100，0101，1010，0110，1100，0111，1011，1101，1110，1111，}

2.[二]　设 A，B，C 为三事件，用 A，B，C 的运算关系表示下列事件。

（1）A 发生，B 与 C 不发生。

表示为：　　$A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A-(AB+AC)$或 $A-(B\cup C)$

（2）A，B 都发生，而 C 不发生。

表示为：　　$AB\overline{C}$ 或 $AB-ABC$ 或 $AB-C$

（3）A，B，C 中至少有一个发生　　　表示为：$A+B+C$

（4）A，B，C 都发生，　　　　表示为：ABC

（5）A，B，C 都不发生，　　　　表示为：$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $S-(A+B+C)$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$

（6）A，B，C 中不多于一个发生，即 A，B，C 中至少有两个同时不发生

相当于 $\overline{A}\,\overline{B},\overline{B}\,\overline{C},\overline{A}\,\overline{C}$ 中至少有一个发生。故　表示为：$\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{C}$ 。

（7）A，B，C 中不多于二个发生。

相当于：$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 中至少有一个发生。故　表示为：$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$

（8）A，B，C 中至少有二个发生。

相当于：AB，BC，AC 中至少有一个发生。故　表示为：$AB+BC+AC$

6.[三]　设 A，B 是两事件且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$. 问(1)在什么条件下 $P(AB)$取到最大值，最大值是多少？（2）在什么条件下 $P(AB)$取到最小值，最小值是多少？

解：由 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$ 即知 $AB\neq \phi$，（否则 $AB=\phi$ 依互斥事件加法定理，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.6+0.7=1.3>1$ 与 $P(A\cup B)\leqslant 1$ 矛盾）.

从而由加法定理得

$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$　　　　　　　　(*)

（1）从 $0\leqslant P(AB)\leqslant P(A)$知，当 $AB=A$，即 $A\cap B$ 时 $P(AB)$取到最大值，最大值为

$P(AB)=P(A)=0.6$，

（2）从(*)式知，当 $A\cup B=S$ 时，$P(AB)$取最小值，最小值为

$P(AB)=0.6+0.7-1=0.3$ 。

7.[四]　设 A，B，C 是三事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$. 求 A，B，C 至少有一个发生的概率。

解：P (A，B，C 至少有一个发生)$=P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}+0=\frac{5}{8}$

8.[五]　在一标准英语字典中具有 55 个由二个不相同的字母新组成的单词，若从 26

个英语字母中任取两个字母予以排列，问能排成上述单词的概率是多少？

记 A 表“能排成上述单词”

∵ 从 26 个任选两个来排列，排法有 A_{26}^2 种。每种排法等可能。

字典中的二个不同字母组成的单词：55 个

∴ $$P(A)=\frac{55}{A_{26}^2}=\frac{11}{130}$$

9. 在电话号码薄中任取一个电话号码，求后面四个数全不相同的概率。（设后面 4 个数中的每一个数都是等可能性地取自 0，1，2……9）

记 A 表“后四个数全不同”

∵ 后四个数的排法有 10^4 种，每种排法等可能。

后四个数全不同的排法有 A_{10}^4

∴ $$P(A)=\frac{A_{10}^4}{10^4}=0.504$$

10.[六] 在房间里有 10 人。分别佩代着从 1 号到 10 号的纪念章，任意选 3 人记录其纪念章的号码。

（1）求最小的号码为 5 的概率。

记“三人纪念章的最小号码为 5”为事件 A

∵ 10 人中任选 3 人为一组：选法有$\binom{10}{3}$种，且每种选法等可能。

又事件 A 相当于：有一人号码为 5，其余 2 人号码大于 5。这种组合的种数有$1\times\binom{5}{2}$

∴ $$P(A)=\frac{1\times\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{12}$$

（2）求最大的号码为 5 的概率。

记“三人中最大的号码为 5”为事件 B，同上 10 人中任选 3 人，选法有$\binom{10}{3}$种，且

每种选法等可能，又事件 B 相当于：有一人号码为 5，其余 2 人号码小于 5，选法有$1\times\binom{4}{2}$种

$$P(B)=\frac{1\times\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{20}$$

11.[七]　某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶，红漆 3 桶。在搬运中所标笺脱落，交货人随意将这些标笺重新贴，问一个定货 4 桶白漆，3 桶黑漆和 2 桶红漆顾客，按所定的颜色如数得到定货的概率是多少？

记所求事件为 A。

在 17 桶中任取 9 桶的取法有 C_{17}^{9} 种，且每种取法等可能。

取得 4 白 3 黑 2 红的取法有 $C_{10}^{4}\times C_{4}^{3}\times C_{3}^{2}$

故　$$P(A)=\frac{C_{10}^{4}\times C_{4}^{3}\times C_{3}^{2}}{C_{17}^{6}}=\frac{252}{2431}$$

12.[八]　在 1500 个产品中有 400 个次品，1100 个正品，任意取 200 个。

（1）求恰有 90 个次品的概率。

记“恰有 90 个次品”为事件 A

∵　在 1500 个产品中任取 200 个，取法有$\binom{1500}{200}$种，每种取法等可能。

200 个产品恰有 90 个次品，取法有$\binom{400}{90}\binom{1100}{110}$种

∴　$$P(A)=\frac{\binom{400}{90}\binom{1100}{110}}{\binom{1500}{200}}$$

（2）至少有 2 个次品的概率。

记：A 表“至少有 2 个次品”

B_0表“不含有次品”，B_1表“只含有一个次品”，同上，200 个产品不含次品，取法有$\binom{1100}{200}$种，200 个产品含一个次品，取法有$\binom{400}{1}\binom{1100}{199}$种

∵ $\overline{A} = B_0 + B_1$且B_0，B_1互不相容。

∴ $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - [P(B_0) + P(B_1)] = 1 - \left[\frac{\binom{1100}{200}}{\binom{1500}{200}} + \frac{\binom{400}{1}\binom{1100}{199}}{\binom{1500}{200}}\right]$

13.[九] 从5双不同鞋子中任取4只，4只鞋子中至少有2只配成一双的概率是多少？

记 A 表“4 只全中至少有两支配成一对”

则$\overline{A}$表“4 只人不配对”

∵ 从 10 只中任取 4 只，取法有$\binom{10}{4}$种，每种取法等可能。

要 4 只都不配对，可在 5 双中任取 4 双，再在 4 双中的每一双里任取一只。取法有$\binom{5}{4} \times 2^4$

∴ $P(\overline{A}) = \frac{C_5^4 \cdot 2^4}{C_{10}^4} = \frac{8}{21}$

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{8}{21} = \frac{13}{21}$

15.[十一] 将三个球随机地放入 4 个杯子中去，问杯子中球的最大个数分别是 1，2，3，的概率各为多少？

记A_i表“杯中球的最大个数为i个” i=1,2,3,

三只球放入四只杯中，放法有4^3种，每种放法等可能

对A_1：必须三球放入三杯中，每杯只放一球。放法 4×3×2 种。

(选排列：好比 3 个球在 4 个位置做排列)

$$P(A_1) = \frac{4 \times 3 \times 2}{4^3} = \frac{6}{16}$$

对A_2：必须三球放入两杯，一杯装一球，一杯装两球。放法有$C_3^2 \times 4 \times 3$种。

(从 3 个球中选 2 个球，选法有 C_3^2，再将此两个球放入一个杯中，选法有 4 种，最后将剩余的 1 球放入其余的一个杯中，选法有 3 种。

$$P(A_2)=\frac{C_3^2\times 4\times 3}{4^3}=\frac{9}{16}$$

对 A_3：必须三球都放入一杯中。放法有 4 种。(只需从 4 个杯中选 1 个杯子，放入此 3 个球，选法有 4 种)

$$P(A_3)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}$$

16.[十二]　50 个铆钉随机地取来用在 10 个部件，其中有三个铆钉强度太弱，每个部件用 3 只铆钉，若将三只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱，问发生一个部件强度太弱的概率是多少？

记 A 表“10 个部件中有一个部件强度太弱”。

法一：用古典概率作：

把随机试验 E 看作是用三个钉一组，三个钉一组去铆完 10 个部件（在三个钉的一组中不分先后次序。但 10 组钉铆完 10 个部件要分先后次序）

对 E：铆法有 $C_{50}^3\times C_{47}^3\times C_{44}^3\cdots\cdots\times C_{23}^3$ 种，每种装法等可能

对 A：三个次钉必须铆在一个部件上。这种铆法有〔$C_3^3\times C_{47}^3\times C_{44}^3\cdots\cdots C_{23}^3$〕×10 种

$$P(A)=\frac{[C_3^3\times C_{47}^3\times C_{44}^3\cdots\cdots\times C_{23}^3]\times 10}{C_{50}^3\times C_{47}^3\times\cdots\cdots\times C_{23}^3}=\frac{1}{1960}=0.00051$$

法二：用古典概率作

把试验 E 看作是在 50 个钉中任选 30 个钉排成一列，顺次钉下去，直到把部件铆完。（铆钉要计先后次序）

对 E：铆法有 A_{50}^3 种，每种铆法等可能

对 A：三支次钉必须铆在“1，2，3”位置上或“4，5，6”位置上，…或“28，29，30”位置上。这种铆法有 $A_3^3\times A_{47}^{27}+A_3^3\times A_{47}^{27}+\cdots\cdots+A_3^3+A_{47}^{27}=10\times A_3^3\times A_{47}^{27}$ 种

$$P(A)=\frac{10\times A_3^3\times A_{47}^{27}}{A_{50}^{30}}=\frac{1}{1960}=0.00051$$

17.[十三]　已知 $P(\overline{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\overline{B})=0.5,$ 求$P(B\mid A\cup\overline{B})$。

解一：

$P(A)=1-P(\overline{A})=0.7, P(\overline{B})=1-P(B)=0.6, A=AS=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$
注意 $(AB)(A\overline{B})=\phi$. 故有

$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0.7-0.5=0.2$。

再由加法定理，

$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=0.7+0.6-0.5=0.8$

于是 $P(B\mid A\cup\overline{B})=\frac{P[B(A\cup\overline{B})]}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{0.2}{0.8}=0.25$

解二: $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B}\mid A)\xrightarrow{\text{由已知}}05=07\cdot P(\overline{B}\mid A)$

$\therefore\quad P(\overline{B}\mid A)=\frac{0.5}{0.7}=\frac{5}{7}\Rightarrow P(B\mid A)=\frac{2}{7}$　故　$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{5}$

$$P(B\mid A\cup\overline{B})\overset{\text{定义}}{=\!=\!=}\frac{P(BA\cup B\overline{B})}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(BA)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}=\frac{\frac{1}{5}}{0.7+0.6-0.5}=0.25$$

18.[十四]　$P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B\mid A)=\frac{1}{3}$，$P(A\mid B)=\frac{1}{2}$，求$P(A\cup B)$。

解：由 $P(A\mid B)\overset{\text{定义}}{=\!=\!=}\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}\xrightarrow{\text{由已知条件}}$有 $\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{1}{6}$

由乘法公式，得 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{12}$

由加法公式，得 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$

19.[十五]　掷两颗骰子，已知两颗骰子点数之和为 7，求其中有一颗为 1 点的概率（用两种方法）。

解：（方法一）（在缩小的样本空间 SB 中求 P(A|B)，即将事件 B 作为样本空间，求事件 A 发生的概率）。

掷两颗骰子的试验结果为一有序数组（x, y）（x, y=1,2,3,4,5,6）并且满足 $x,+y=7$，则样本空间为

S={(x, y)| (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)}

每种结果（x, y）等可能。

A={掷二骰子，点数和为 7 时，其中有一颗为 1 点。故 $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$}

方法二：（用公式 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

S={(x, y)| x =1,2,3,4,5,6; y = 1,2,3,4,5,6}}每种结果均可能

A=“掷两颗骰子，x, y 中有一个为“1”点”，B=“掷两颗骰子，$x,+y=7$”。则 $P(B)=\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}, P(AB)=\frac{2}{6^2}$，

故 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{6^2}}{\frac{1}{6}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

20.[十六]　据以往资料表明，某一 3 口之家，患某种传染病的概率有以下规律：$P(A)=P${孩子得病}=0.6，$P(B|A)=P${母亲得病|孩子得病}=0.5，$P(C|AB)=P${父亲得病|母亲及孩子得病}=0.4。求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率。

解：所求概率为 $P(AB\overline{C})$（注意：由于“母病”，“孩病”，“父病”都是随机事件，这里不是求 $P(\overline{C}|AB)$

$P(AB)= P(A)=P(B|A)=0.6\times0.5=0.3$, $P(\overline{C}|AB)=1-P(C|AB)=1-0.4=0.6$.

从而 $P(AB\overline{C})= P(AB)\cdot P(\overline{C}|AB)=0.3\times0.6=0.18$.

21.[十七]　已知 10 只晶体管中有 2 只次品，在其中取二次，每次随机地取一只，作不放回抽样，求下列事件的概率。

（1）二只都是正品（记为事件 A）

法一：用组合做 在 10 只中任取两只来组合，每一个组合看作一个基本结果，每种取法等可能。

$$P(A)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}=0.62$$

法二：用排列做 在 10 只中任取两个来排列，每一个排列看作一个基本结果，每个排列等可能。

$$P(A)=\frac{A_8^2}{A_{10}^2}=\frac{28}{45}$$

法三：用事件的运算和概率计算法则来作。

记 A_1，A_2 分别表第一、二次取得正品。

$$P(A)=P(A_1A_2)=P(A)P(A_2\mid A_1)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$$

（2）二只都是次品（记为事件 B）

法一： $$P(B)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}$$

法二： $$P(B)=\frac{A_2^2}{A_{10}^2}=\frac{1}{45}$$

法三： $$P(B)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$$

（3）一只是正品，一只是次品（记为事件 C）

法一： $$P(C)=\frac{C_8^1\times C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$$

法二： $$P(C)=\frac{(C_8^1\times C_2^1)\times A_2^2}{A_{10}^2}=\frac{16}{45}$$

法三：　　　$P(C)=P(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2)$且$A_1\overline{A}_2$与$\overline{A}_1A_2$互斥

$$=P(A_1)P(\overline{A}_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid \overline{A}_1)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\frac{8}{9}=\frac{16}{45}$$

（4）第二次取出的是次品（记为事件 D）

法一：因为要注意第一、第二次的顺序。不能用组合作，

法二：　　　$P(D)=\dfrac{A_9^1\times A_2^1}{A_{10}^2}=\dfrac{1}{5}$

法三：　　　$P(D)=P(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_2)$且$A_1\overline{A}_2$与$\overline{A}_1A_2$互斥

$$=P(A_1)P(\overline{A}_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid \overline{A}_1)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{5}$$

22.[十八]　某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而随机的拨号，求他拨号不超过三次而接通所需的电话的概率是多少？如果已知最后一个数字是奇数，那么此概率是多少？

记 H 表拨号不超过三次而能接通。

A_i 表第 i 次拨号能接通。

注意：第一次拨号不通，第二拨号就不再拨这个号码。

$\because$　　$H=A_1+\overline{A}_1A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$　　三种情况互斥

$\therefore$　　$P(H)=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid \overline{A}_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid \overline{A}_1)P(A_3\mid \overline{A}_1\overline{A}_2)$

$$=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{10}$$

如果已知最后一个数字是奇数（记为事件 B）问题变为在 B 已发生的条件下，求 H 再发生的概率。

$P(H\mid B)=PA_1\mid B+\overline{A}_1A_2\mid B+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\mid B)$

$$=P(A_1\mid B)+P(\overline{A}_1\mid B)P(A_2\mid B\overline{A}_1)+P(\overline{A}_1\mid B)P(\overline{A}_2\mid B\overline{A}_1)P(A_3\mid B\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$$

24.[十九]　设有甲、乙二袋，甲袋中装有 n 只白球 m 只红球，乙袋中装有 N 只白球 M 只红球，今从甲袋中任取一球放入乙袋中，再从乙袋中任取一球，问取到（即从乙袋中取到）白球的概率是多少？（此为第三版 19 题(1)）

记 A_1，A_2 分别表“从甲袋中取得白球，红球放入乙袋”

再记 B 表“再从乙袋中取得白球”。

∵　　$B=A_1B+A_2B$ 且 A_1，A_2 互斥

∴　　$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

$$=\frac{n}{n+m}\times\frac{N+1}{N+M+1}+\frac{m}{n+m}\times\frac{N}{N+M+1}$$

[十九](2) 第一只盒子装有 5 只红球，4 只白球；第二只盒子装有 4 只红球，5 只白球。先从第一盒子中任取 2 只球放入第二盒中去，然后从第二盒子中任取一只球，求取到白球的概率。

记 C_1 为“从第一盒子中取得 2 只红球”。

C_2 为“从第一盒子中取得 2 只白球”。

C_3 为“从第一盒子中取得 1 只红球，1 只白球”，

D 为“从第二盒子中取得白球”，显然 C_1，C_2，C_3 两两互斥，$C_1\cup C_2\cup C_3=S$，由全概率公式，有

$P(D)=P(C_1)P(D|C_1)+P(C_2)P(D|C_2)+P(C_3)P(D|C_3)$

$$=\frac{C_5^2}{C_9^2}\cdot\frac{5}{11}+\frac{C_4^2}{C_9^2}\cdot\frac{7}{11}+\frac{C_5^1\cdot C_4^1}{C_9^2}\cdot\frac{6}{11}=\frac{53}{99}$$

26.[二十一]　已知男人中有 5%是色盲患者，女人中有 0.25%是色盲患者。今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

解：A_1={男人}，A_2={女人}，B={色盲}，显然 $A_1\cup A_2=S$，$A_1A_2=\phi$

由已知条件知 $P(A_1)=P(A_2)=\dfrac{1}{2}$。$P(B|A_1)=5\%, P(B|A_2)=0.25\%$

由贝叶斯公式，有

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{10000}}=\frac{20}{21}$$

[二十二]　一学生接连参加同一课程的两次考试。第一次及格的概率为 P，若第一次及格则第二次及格的概率也为 P；若第一次不及格则第二次及格的概率为 $\frac{P}{2}$（1）若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率。（2）若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率。

解：A_i={他第 i 次及格}，i=1,2

已知 $P(A_1)=P(A_2|A_1)=P$，$P(A_2\mid\overline{A}_1)=P/2$

（1）B={至少有一次及格}

所以 $\overline{B}=\{\text{两次均不及格}\}=\overline{A}_1\overline{A}_2$

$$\therefore P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)$$

$$=1-[1-P(A_1)][1-P(A_2\mid\overline{A}_1)]$$

$$=1-(1-P)(1-\frac{P}{2})=\frac{3}{2}P-\frac{1}{2}P^2$$

（2）$P(A_1A_2)\overset{\text{定义}}{=\!=\!=}\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}$　　　　（*）

由乘法公式，有 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=P^2$

由全概率公式，有 $P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)$

$$=P\cdot P+(1-P)\cdot\frac{P}{2}$$

$$=\frac{P^2}{2}+\frac{P}{2}$$

将以上两个结果代入（*）得 $P(A_1\mid A_2)=\dfrac{P^2}{\frac{P^2}{2}+\frac{P}{2}}=\dfrac{2P}{P+1}$

28.[二十五]　某人下午 5:00 下班，他所积累的资料表明：

到家时间	5:35~5:39	5:40~5:44	5:45~5:49	5:50~5:54	迟于 5:54
乘地铁到家的概率	0.10	0.25	0.45	0.15	0.05
乘汽车到家的概率	0.30	0.35	0.20	0.10	0.05

某日他抛一枚硬币决定乘地铁还是乘汽车，结果他是 5:47 到家的，试求他是乘地铁回家的概率。

解：设 A=“乘地铁”，B=“乘汽车”，C=“5:45~5:49 到家”，由题意,$AB=\Phi$,$A\cup B=S$

已知：$P(A)=0.5$,　$P(C|A)=0.45$,　$P(C|B)=0.2$,　$P(B)=0.5$

由贝叶斯公式有

$$P(A|C)=\frac{P(C|A)P(A)}{P(C)}=\frac{0.5\times 0.45}{P(C|A)\frac{1}{2}+P(C|B)\frac{1}{2}}=\frac{0.45}{0.65}=\frac{9}{13}=0.6923$$

29.[二十四]　有两箱同种类型的零件。第一箱装 5 只，其中 10 只一等品；第二箱 30 只，其中 18 只一等品。今从两箱中任挑出一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一只，作不放回抽样。试求（1）第一次取到的零件是一等品的概率。（2）第一次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的也是一等品的概率。

解：设 B_i 表示“第 i 次取到一等品”　i=1，2

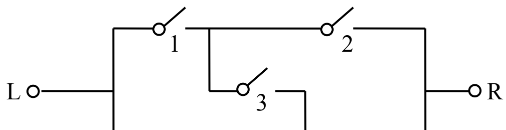
A_j 表示“第 j 箱产品” j=1,2，显然 $A_1\cup A_2=S$　　$A_1A_2=\Phi$

（1）$P(B_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{30}=\frac{2}{5}=0.4$（$B_1=A_1B+A_2B$ 由全概率公式解）。

（2）$P(B_2|B_1)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\frac{\frac{1}{2}\frac{10}{50}\frac{9}{49}+\frac{1}{2}\frac{18}{30}\frac{17}{29}}{\frac{2}{5}}=0.4857$

（先用条件概率定义，再求 $P(B_1B_2)$时，由全概率公式解）

32.[二十六（2）]　如图 1，2，3，4，5



表示继电器接点，假设每一继电器接点闭合的概率为 p，且设各继电器闭合与否相互独立，求 L 和 R 是通路的概率。

记 A_i 表第 i 个接点接通　　　　4　　　　5

记 A 表从 L 到 R 是构成通路的。

∵　$A=A_1A_2+A_1A_3A_5+A_4A_5+A_4A_3A_2$ 四种情况不互斥

∴　$P(A)=P(A_1A_2)+P(A_1A_3A_5)+P(A_4A_5)+P(A_4A_3A_2)-P(A_1A_2A_3A_5)$

$+P(A_1A_2A_4A_5)+P(A_1A_2A_3A_4)+P(A_1A_3A_4A_5)$

$+P(A_1A_2A_3A_4A_5)\,P(A_2A_3A_4A_5)+P(A_1A_2A_3A_4A_5)+P(A_1A_2A_3A_4A_5)$

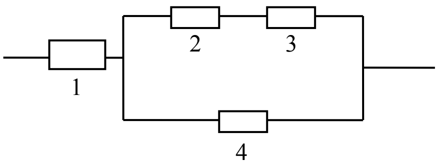
$+(A_1A_2A_3A_4A_5)+P(A_1A_2A_3A_4A_5)-P(A_1A_2A_3A_4A_5)$

又由于 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 互相独立。

故　　$P(A)=p^2+p^3+p^2+p^3-[p^4+p^4+p^4+p^4+p^5+p^4]$

$+[p^5+p^5+p^5+p^5]-p^5=2p^2+3p^3-5p^4+2p^5$

[二十六（1）]设有 4 个独立工作的元件 1，2，3，4。它们的可靠性分别为 P_1，P_2，P_3，P_4，将它们按图（1）的方式联接，求系统的可靠性。



记 A_i 表示第 i 个元件正常工作，i=1，2，3，4，

A 表示系统正常。

∵　$A=A_1A_2A_3+A_1A_4$ 两种情况不互斥

∴　$P(A)=P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_4)-P(A_1A_2A_3A_4)$　　(加法公式)

$=P(A_1)\,P(A_2)P(A_3)+P(A_1)\,P(A_4)-P(A_1)\,P(A_2)P(A_3)P(A_4)$

$=P_1P_2P_3+P_1P_4-P_1P_2P_3P_4$　　(A_1, A_2, A_3, A_4 独立)

34.[三十一]　袋中装有 m 只正品硬币，n 只次品硬币，（次品硬币的两面均印有国徽）。在袋中任取一只，将它投掷 r 次，已知每次都得到国徽。问这只硬币是正品的概率为多少？

解：设“出现 r 次国徽面”$=B_r$　“任取一只是正品”$=A$

由全概率公式，有

$$P(B_r)=P(A)P(B_r\mid A)+P(\overline{A})P(B_r\mid \overline{A})=\frac{m}{m+n}(\frac{1}{2})^r+\frac{n}{m+n}\times 1^r$$

$$\therefore\quad P(A\mid B_r)=\frac{P(A)P(B_r\mid A)}{P(B_r)}=\frac{\frac{m}{m+n}(\frac{1}{2})^r}{\frac{m}{m+n}(\frac{1}{2})^r+\frac{n}{m+n}}=\frac{m}{m+n\cdot 2^r}$$

（条件概率定义与乘法公式）

35．甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击，三人击中的概率分别为 0.4，0.5，0.7。飞机被一人击中而被击落的概率为 0.2，被两人击中而被击落的概率为 0.6，若三人都击中，飞机必定被击落。求飞机被击落的概率。

解：高 H_i 表示飞机被 i 人击中，i=1，2，3。B_1，B_2，B_2 分别表示甲、乙、丙击中飞机

$\because$　　$H_1=B_1\overline{B}_2\overline{B}_3+\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3+\overline{B}_1\overline{B}_2B_3$，三种情况互斥。

$H_2=B_1B_2\overline{B}_3+B_1\overline{B}_2B_3+\overline{B}_1B_2B_3$　三种情况互斥

$H_3=B_2B_2B_3$

又 B_1，B_2，B_2 独立。

$\therefore$　　$P(H_1)=P(B_1)P(\overline{B}_2)P(\overline{B}_3)+P(\overline{B}_1)P(B_2)P(\overline{B}_3)$

$+P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_2)P(B_3)=0.4\times0.5\times0.3+0.6$
$\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7=0.36$

$P(H_2)=P(B_1)P(B_2)P(\overline{B}_3)+P(B_1)P(\overline{B}_2)P(B_3)$

$+P(\overline{B}_1)P(B_2)P(B_3)=0.4\times0.5\times0.3$

$+0.4\times0.5\times0.7+0.6\times0.5\times0.7=0.41$

$P(H_3)=P(B_1)P(B_2)P(B_3)=0.4\times0.5\times0.7=0.14$

又因：　　　$A=H_1A+H_2A+H_3A$　　三种情况互斥

故由全概率公式，有

$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(AH_3)$

$=0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times1=0.458$

36.[三十三]设由以往记录的数据分析。某船只运输某种物品损坏 2%（这一事件记为 A_1），10%（事件 A_2），90%（事件 A_3）的概率分别为 $P(A_1)=0.8$,　$P(A_2)=0.15$, $P(A_2)=0.05$，现从中随机地独立地取三件，发现这三件都是好的（这一事件记为 B），试分别求 $P(A_1|B)$ $P(A_2|\text{B})$, $P(A_3|\text{B})$（这里设物品件数很多，取出第一件以后不影响取第二件的概率，所以取第一、第二、第三件是互相独立地）

∵　B 表取得三件好物品。

$B=A_1B+A_2B+A_3B$　三种情况互斥

由全概率公式，有

∴　　$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$=0.8\times(0.98)^3+0.15\times(0.9)^3+0.05\times(0.1)^3=0.8624$

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.8\times(0.98)^3}{0.8624}=0.8731$$
$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.15\times(0.9)^3}{0.8624}=0.1268$$
$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{0.05\times(0.1)^3}{0.8624}=0.0001$$

37.[三十四]　将 A，B，C 三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率为α，而输出为其它一字母的概率都是(1－α)/2。今将字母串 $AAAA$，$BBBB$，$CCCC$ 之一输入信道，输入 $AAAA$，$BBBB$，$CCCC$ 的概率分别为 p_1, p_2, p_3 $(p_1+p_2+p_3=1)$，已知输出为 $ABCA$，问输入的是 $AAAA$ 的概率是多少？（设信道传输每个字母的工作是相互独立的。）

解：设 D 表示输出信号为 $ABCA$，B_1、B_2、B_3 分别表示输入信号为 $AAAA$，$BBBB$，$CCCC$，则 B_1、B_2、B_3 为一完备事件组，且 $\text{P}(\text{B}_i)=\text{P}_i$, $i=1, 2, 3$。

再设 A 发、A 收分别表示发出、接收字母 A，其余类推，依题意有

$P(A_{收}|A_{发})=P(B_{收}|B_{发})=P(C_{收}|C_{发})=\alpha$，

$P(A_{收}|B_{发})=P(A_{收}|C_{发})=P(B_{收}|A_{发})=P(B_{收}|C_{发})=P(C_{收}|A_{发})=P(C_{收}|B_{发})=\dfrac{1-\alpha}{2}$

又 $P(ABCA|AAAA)=P(D|B_1)=P(A_{收}|A_{发})\,P(B_{收}|A_{发})\,P(C_{收}|A_{发})\,P(A_{收}|A_{发})$

$$=\alpha^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2,$$

同样可得 $P(D|B_2)=P(D|B_3)=\alpha\cdot\left(\dfrac{1-\alpha}{2}\right)^3$

于是由全概率公式，得

$$P(D)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(D\,|\,B_i)$$
$$=p_1a^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2+(P_2+P_3)\alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3$$

由 Bayes 公式，得

$$P(AAAA|ABCA)=P(B_1|D)=\frac{P(B_1)P(D\,|\,B_1)}{P(D)}$$

$$=\frac{2\alpha P_1}{2\alpha P_1+(1-\alpha)(P_2+P_3)}$$

[二十九]　设第一只盒子装有 3 只蓝球，2 只绿球，2 只白球；第二只盒子装有 2 只蓝球，3 只绿球，4 只白球。独立地分别从两只盒子各取一只球。（1）求至少有一只蓝球的概率，（2）求有一只蓝球一只白球的概率，（3）已知至少有一只蓝球，求有一只蓝球一只白球的概率。

解：记 A_1、A_2、A_3 分别表示是从第一只盒子中取到一只蓝球、绿球、白球，B_1、B_2、B_3 分别表示是从第二只盒子中取到一只蓝球、绿球、白球。

（1）记 C={至少有一只蓝球}

$C=A_1B_1+A_1B_2+A_1B_3+A_2B_1+A_3B_1$，5 种情况互斥

由概率有限可加性，得

$$P(C)=P(A_1B_1)+P(A_1B_2)+P(A_1B_3)+P(A_2B_1)+P(A_3B_1)$$

$$\overset{\text{独立性}}{=\!=\!=}P(A_1)P(B_1)+P(A_1)P(B_2)+P(A_1)P(B_3)+P(A_2)P(B_1)+P(A_3)P(B_1)$$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{9}+\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{9}+\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

（2）记 D={有一只蓝球，一只白球}，而且知 $D=A_1B_3+A_3B_1$ 两种情况互斥

$$P(D)=P(A_1B_3+P(A_3B_1)=P(A_1)P(B_3)+P(A_3)P(B_1)$$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{9}=\frac{16}{63}$$

（3）$P(D\mid C)=\dfrac{P(CD)}{P(C)}=\dfrac{P(D)}{P(C)}=\dfrac{16}{35}\qquad(\text{注意到}CD=D)$

[三十] A，B，C 三人在同一办公室工作，房间有三部电话，据统计知，打给 A，B，C 的电话的概率分别为 $\frac{2}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{1}{5}$。他们三人常因工作外出，A，B，C 三人外出的概率分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$，设三人的行动相互独立，求

（1）无人接电话的概率；（2）被呼叫人在办公室的概率；若某一时间断打进了 3 个电话，求（3）这 3 个电话打给同一人的概率；（4）这 3 个电话打给不同人的概率；（5）这 3 个电话都打给 B，而 B 却都不在的概率。

解：记 C_1、C_2、C_3 分别表示打给 A，B，C 的电话

D_1、D_2、D_3 分别表示 A，B，C 外出

注意到 C_1、C_2、C_3 独立，且 $P(C_1)=P(C_2)=\frac{2}{5}$，$P(C_3)=\frac{1}{5}$

$$P(D_1)=\frac{1}{2},\quad P(D_2)=P(D_3)=\frac{1}{4}$$

（1）P（无人接电话）$=P(D_1D_2D_3)=P(D_1)P(D_2)P(D_3)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$$

（2）记 G=“被呼叫人在办公室”，$G=C_1\overline{D_1}+C_2\overline{D_2}+C_3\overline{D_3}$ 三种情况互斥，由有限可加性与乘法公式

$$\begin{aligned}P(G)&=P(C_1\overline{D_1})+P(C_2\overline{D_2})+P(C_3\overline{D_3})\\&=P(C_1)P(\overline{D_1}\mid C_1)+P(C_2)P(\overline{D_2}\mid C_2)+P(C_3)P(\overline{D_3}\mid C_3)\\&=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{13}{20}\end{aligned}\quad\begin{pmatrix}\text{由于某人外出与}\\\text{否和来电话无关}\\\text{故}P(\overline{D_k}\mid C_k)=P(\overline{D_k})\end{pmatrix}$$

（3）H 为“这 3 个电话打给同一个人”

$$P(H)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{17}{125}$$

（4）R 为“这 3 个电话打给不同的人”

R 由六种互斥情况组成，每种情况为打给 A，B，C 的三个电话，每种情况的概率为

$$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{125}$$

于是 $P(R)=6\times\frac{4}{125}=\frac{24}{125}$

（5）由于是知道每次打电话都给 B，其概率是 1，所以每一次打给 B 电话而 B 不在的概率为 $\frac{1}{4}$，且各次情况相互独立

于是 P（3 个电话都打给 B，B 都不在的概率）$=(\frac{1}{4})^3=\frac{1}{64}$

第二章　　随机变量及其分布

1.[一]　一袋中有 5 只乒乓球，编号为 1、2、3、4、5，在其中同时取三只，以 X 表示取出的三只球中的最大号码，写出随机变量 X 的分布律

解：X 可以取值 3，4，5，分布律为

$$P(X=3)=P(\text{一球为3号, 两球为1,2号})=\frac{1\times C_2^2}{C_5^3}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=4)=P(\text{一球为4号, 再在1,2,3中任取两球})=\frac{1\times C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$$

$$P(X=5)=P(\text{一球为5号, 再在1,2,3,4中任取两球})=\frac{1\times C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}$$

也可列为下表

X： 3， 4，5

P：$\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{6}{10}$

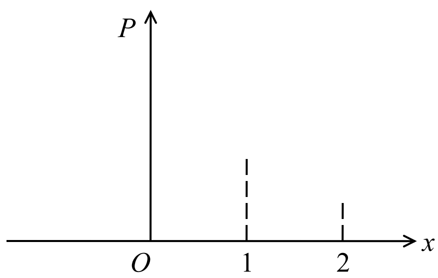
3.[三] 设在 15 只同类型零件中有 2 只是次品，在其中取三次，每次任取一只，作不放回抽样，以 X 表示取出次品的只数，（1）求 X 的分布律，（2）画出分布律的图形。

解：任取三只，其中新含次品个数 X 可能为 0，1，2 个。

$$P(X=0)=\frac{C_{13}^3}{C_{15}^3}=\frac{22}{35}$$

$$P(X=1)=\frac{C_2^1\times C_{13}^2}{C_{15}^3}=\frac{12}{35}$$

$$P(X=2)=\frac{C_2^2\times C_{13}^1}{C_{15}^3}=\frac{1}{35}$$



再列为下表

X： 0， 1， 2

P： $\frac{22}{35},\frac{12}{35},\frac{1}{35}$

4.[四] 进行重复独立实验，设每次成功的概率为 p，失败的概率为 $q=1-p(0<p<1)$

（1）将实验进行到出现一次成功为止，以 X 表示所需的试验次数，求 X 的分布律。（此时称 X 服从以 p 为参数的几何分布。）

（2）将实验进行到出现 r 次成功为止，以 Y 表示所需的试验次数，求 Y 的分布律。（此时称 Y 服从以 r, p 为参数的巴斯卡分布。）

（3）一篮球运动员的投篮命中率为 45%，以 X 表示他首次投中时累计已投篮的次数，写出 X 的分布律，并计算 X 取偶数的概率。

解：（1）$P(X=k)=q^{k-1}p \qquad k=1,2,\cdots\cdots$

（2）$Y=r+n=${最后一次实验前 $r+n-1$ 次有 n 次失败，且最后一次成功}

$P(Y=r+n)=C_{r+n-1}^{n}q^{n}p^{r-1}p=C_{r+n-1}^{n}q^{n}p^{r}$，　$n=0,1,2,\cdots$，其中 q=1－p，

或记 r+n=k，则 $P\{Y=k\}=C_{k-1}^{r-1}p^{r}(1-p)^{k-r}$，　$k=r,r+1,\cdots$

（3）$P(X=k)=(0.55)^{k-1}0.45$　　　　k=1,2…

$$P(X\text{取偶数})=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=2k)=\sum_{k=1}^{\infty}(0.55)^{2k-1}0.45=\frac{11}{31}$$

6.[六]　一大楼装有 5 个同类型的供水设备，调查表明在任一时刻 t 每个设备使用的概率为 0.1，问在同一时刻

（1）恰有 2 个设备被使用的概率是多少？

$$P(X=2)=C_5^2p^2q^{5-2}=C_5^2\times(0.1)^2\times(0.9)^3=0.0729$$

（2）至少有 3 个设备被使用的概率是多少？

$$P(X\geq 3)=C_5^3\times(0.1)^3\times(0.9)^2+C_5^4\times(0.1)^4\times(0.9)+C_5^5\times(0.1)^5=0.00856$$

（3）至多有 3 个设备被使用的概率是多少？

$$P(X\leq 3)=C_5^0(0.9)^5+C_5^1\times 0.1\times(0.9)^4+C_5^2\times(0.1)^2\times(0.9)^3$$
$$+C_5^3\times(0.1)^3\times(0.9)^2=0.99954$$

（4）至少有一个设备被使用的概率是多少？

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0.59049=0.40951$$

[五]　一房间有 3 扇同样大小的窗子，其中只有一扇是打开的。有一只鸟自开着的窗子飞入了房间，它只能从开着的窗子飞出去。鸟在房子里飞来飞去，试图飞出房间。假定鸟是没有记忆的，鸟飞向各扇窗子是随机的。

（1）以 X 表示鸟为了飞出房间试飞的次数，求 X 的分布律。

（2）户主声称，他养的一只鸟，是有记忆的，它飞向任一窗子的尝试不多于一次。以 Y 表示这只聪明的鸟为了飞出房间试飞的次数，如户主所说是确实的，试求 Y 的分布律。

（3）求试飞次数 X 小于 Y 的概率；求试飞次数 Y 小于 X 的概率。

解：（1）X 的可能取值为 1，2，3，…，n，…

$P\{X=n\}=P\{$前 n－1 次飞向了另 2 扇窗子，第 n 次飞了出去$\}$

$=(\frac{2}{3})^{n-1}\cdot\frac{1}{3}$，　　n=1，2，……

（2）Y 的可能取值为 1，2，3

$P\{Y=1\}=P\{$第 1 次飞了出去$\}=\frac{1}{3}$

$P\{Y=2\}=P\{$第 1 次飞向 另 2 扇窗子中的一扇，第 2 次飞了出去$\}$

$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$P\{Y=3\}=P\{$第 1，2 次飞向了另 2 扇窗子，第 3 次飞了出去$\}$

$=\frac{2!}{3!}=\frac{1}{3}$

(3) $P\{X<Y\}=\sum_{k=1}^{3}P\{Y=k\}P\{X<Y\mid Y=k\}$ $\left(\begin{array}{l}\text{全概率公式并注意到}\\ P\{X<Y\mid Y=1\}=0\end{array}\right)$

$=\sum_{k=2}^{3}P\{Y=k\}P\{X<Y\mid Y=k\}$

$=\sum_{k=2}^{3}P\{Y=k\}P\{X<k\}$ 注意到X,Y独立即 $P\{X<Y\mid Y=k\}=P\{X<k\}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right]=8/27$

同上，$P\{X=Y\}=\sum^{3}P\{Y=k\}P\{X=Y\mid Y=k\}$

$=\sum^{3}P\{Y=k\}P\{X=k\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{27}=\frac{19}{81}$

故$P\{Y<X\}=1-P\{X<Y\}-P\{X=Y)=\frac{38}{81}$

8.[八] 甲、乙二人投篮，投中的概率各为 0.6, 0.7，令各投三次。求

（1）二人投中次数相等的概率。

记X表甲三次投篮中投中的次数

Y表乙三次投篮中投中的次数

由于甲、乙每次投篮独立，且彼此投篮也独立。

$P(X=Y)=P(X=0, Y=0)+P(X=2, Y=2)+P(X=3, Y=3)$

$=P(X=0)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=1)+P(X=2)P(Y=2)+P(X=3)P(Y=3)$

$=(0.4)^3\times(0.3)^3+[C_3^1\times0.6\times(0.4)^2]\times[C_3^1\times0.7\times(0.3)^2]$

$+[C_3^2\times(0.6)^2\times0.4]\times[C_3^2\times(0.7)^2\times.3]+(0.6)^3$

$\times(0.7)^3=0.321$

（2）甲比乙投中次数多的概率。

$P(X>Y)=P(X=1, Y=0)+P(X=2, Y=0)+P(X=2, Y=1)+$

$P(X=3)P(Y=0)+P(X=3)P(Y=1)+P(X=3)P(Y=2)$

$=P(X=1)P(Y=0)+P(X=2, Y=0)+P(X=2, Y=1)+$

$P(X=3)\,P(Y=0)+P(X=3)\,P(Y=1)+P(X=3)\,P(Y=2)$

$$=[C_3^1\times0.6\times(0.4)^2]\times(0.3)^3+[C_3^2\times(0.6)^2\times0.4]\times(0.3)^8+$$
$$[C_3^2\times(0.6)^2\times0.4]\times[C_3^1\times0.7\times(0.3)^2]+(0.6)^3$$
$$\times(0.3)^3+(0.6)^3\times[C_3^1\times0.7\times(0.3)^2]+(0.6)^3$$
$$\times[C_3^2\times(0.7)^2\times0.3]=0.243$$

9.[十]　有甲、乙两种味道和颜色极为相似的名酒各 4 杯。如果从中挑 4 杯，能将甲种酒全部挑出来，算是试验成功一次。

（1）某人随机地去猜，问他试验成功一次的概率是多少？

（2）某人声称他通过品尝能区分两种酒。他连续试验 10 次，成功 3 次。试问他是猜对的，还是他确有区分的能力（设各次试验是相互独立的。）

解：（1）P(一次成功)$=\dfrac{1}{C_8^4}=\dfrac{1}{70}$

（2）P(连续试验 10 次，成功 3 次)= $C_{10}^3(\dfrac{1}{70})^3(\dfrac{69}{70})^7=\dfrac{3}{10000}$。此概率太小，按实际推断原理，就认为他确有区分能力。

[九]　有一大批产品，其验收方案如下，先做第一次检验：从中任取 10 件，经验收无次品接受这批产品，次品数大于 2 拒收；否则作第二次检验，其做法是从中再任取 5 件，仅当 5 件中无次品时接受这批产品，若产品的次品率为 10%，求

（1）这批产品经第一次检验就能接受的概率

（2）需作第二次检验的概率

（3）这批产品按第 2 次检验的标准被接受的概率

（4）这批产品在第 1 次检验未能做决定且第二次检验时被通过的概率

（5）这批产品被接受的概率

解：X 表示 10 件中次品的个数，Y 表示 5 件中次品的个数，

由于产品总数很大，故 X~B（10，0.1），Y~B（5，0.1）（近似服从）

（1）$P\{X=0\}=0.9^{10}\approx0.349$

（2）$P\{X\leqslant2\}=P\{X=2\}+P\{X=1\}=C_{10}^2\,0.1^2\,0.9^8+C_{10}^1\,0.1\,0.9^9\approx0.581$

（3）$P\{Y=0\}=0.9^5\approx0.590$

（4）$P\{0<X\leqslant2，Y=0\}$　　($\{0<X\leqslant2\}$与$\{Y=2\}$独立)

$=P\{0<X\leqslant2\}P\{Y=0\}$

$=0.581\times0.590\approx0.343$

（5）$P\{X=0\}+P\{0<X\leqslant2，Y=0\}$

$\approx0.349+0.343=0.692$

12.[十三]　电话交换台每分钟的呼唤次数服从参数为 4 的泊松分布，求

（1）每分钟恰有 8 次呼唤的概率

法一：　　$P(X=8)=\dfrac{4^8}{8!}e^{-4}=0.029770$（直接计算）

法二：　　$P(X=8)=P(X\geqslant8)-P(X\geqslant9)$（查 $\lambda=4$ 泊松分布表）。

$=0.051134-0.021363=0.029771$

（2）每分钟的呼唤次数大于 10 的概率。

$P(X>10)=P(X\geqslant11)=0.002840$（查表计算）

[十二 (2)]每分钟呼唤次数大于 3 的概率。

$P\{X>3\}=P\{X\geq4\}=0.566530$

[十六]　以 X 表示某商店从早晨开始营业起直到第一顾客到达的等待时间（以分计），X 的分布函数是

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-0.4x}, & x\geq0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

求下述概率：

（1）P\{至多 3 分钟\}；（2）P\{至少 4 分钟\}；（3）P\{3 分钟至 4 分钟之间\}；

（4）P\{至多 3 分钟或至少 4 分钟\}；（5）P\{恰好 2.5 分钟\}

解：（1）P\{至多 3 分钟\}$=P\{X\leqslant3\}=F_X(3)=1-e^{-1.2}$

（2）P\{至少 4 分钟\} $P(X\geqslant4)=1-F_X(4)=e^{-1.6}$

（3）P\{3 分钟至 4 分钟之间\}$=P\{3<X\leqslant4\}=F_X(4)-F_X(3)=e^{-1.2}-e^{-1.6}$

（4）P\{至多 3 分钟或至少 4 分钟\}$=P$\{至多 3 分钟\}$+P$\{至少 4 分钟\}

$=1-e^{-1.2}+e^{-1.6}$

（5）P\{恰好 2.5 分钟\}$=P(X=2.5)=0$

18.[十七]　设随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}0, x<1,\\ \ln x, 1\leq x<e,\\ 1, x\geq e.\end{cases}$，

求（1）$P(X<2)$, $P\{0<X\leqslant3\}$, $P(2<X<5/2)$；（2）求概率密度 $f_X(x)$.

解：（1）$P(X\leqslant2)=F_X(2)=\ln2$，　$P(0<X\leqslant3)=F_X(3)-F_X(0)=1$，

$P(2<X<\frac{5}{2}=F_X(\frac{5}{2})-F_X(2)=\ln\frac{5}{2}-\ln 2=\ln\frac{5}{4}$

（2） $f(x)=F'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x},1<x<e,\\ 0,\text{其它}\end{cases}$

20.[十八（2）]设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 为

（1） $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & -1\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

（2） $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<1\\ 2-x & 1\le x\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

求 X 的分布函数 $F(x)$，并作出（2）中的 $f(x)$ 与 $F(x)$ 的图形。

解：当－1≤x≤1 时：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{-1}0\,dx+\int_{-1}^{x}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right]_{-1}^{X}$$

$$=\frac{1}{\pi}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x+\frac{1}{2}$$

当 1<x 时： $F(x)=\int_{-\infty}^{-1}0\,dx+\int_{-1}^{1}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2dx}+\int_{1}^{x}0\,dx=1$

故分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ \frac{1}{\pi}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x+\frac{1}{2} & -1\le x\le 1\\ 1 & 1<x\end{cases}$$

解：（2） $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

当$x<0$时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\,dt=0$

当$0\le x<1$时， $F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\,dt+\int_{0}^{x}t\,dt=\frac{x^2}{2}$

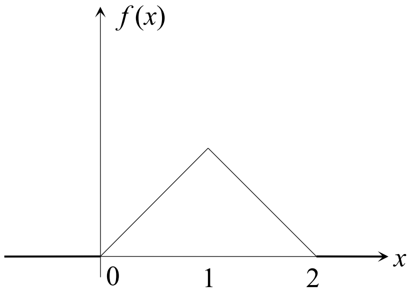
当$1\le x\le 2$时， $F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\,dt+\int_{0}^{1}t\,dt+\int_{1}^{x}(2-t)dt=2x-\frac{x^2}{2}-1$

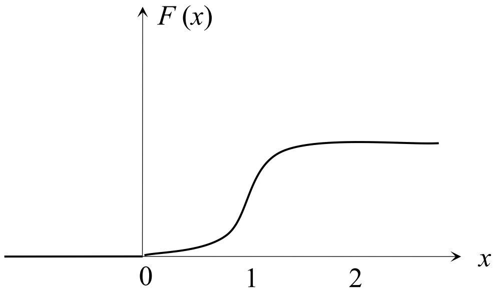
当$2<x$时， $F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\,dt+\int_{0}^{1}t\,dt+\int_{1}^{2}(2-t)dt+\int_{2}^{x}0\,dt=1$

故分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2}{2} & 0\le x<1\\ 2x-\dfrac{x^2}{2}-1 & 1\le x\le 2\\ 1 & 2<x\end{cases}$$

（2）中的 $f(x)$ 与 $F(x)$ 的图形如下





22.[二十]　某种型号的电子的寿命 X（以小时计）具有以下的概率密度：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2} & x>1000\end{cases}$$

现有一大批此种管子（设各电子管损坏与否相互独立）。任取 5 只，问其中至少有 2 只寿命大于 1500 小时的概率是多少？

解：一个电子管寿命大于 1500 小时的概率为

$$P(X>1500)=1-P(X\le 1500)=1-\int_{1000}^{1500}\frac{1000}{x^2}dx=1-\left\{1000(-\frac{1}{x})\Big|_{1000}^{1500}\right\}$$

$$=1-(1-\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$$

令 Y 表示“任取 5 只此种电子管中寿命大于 1500 小时的个数”。则 $Y\sim B(5,\frac{2}{3})$，

$$P(Y\ge 2)=1-P(Y<2)=1-\{P(Y=0)+P(Y=1)\}=1-\left\{(\frac{1}{3})^5+C_5^1\cdot(\frac{2}{3})\cdot(\frac{1}{3})^4\right\}$$

$$=1-\frac{1+5\times 2}{3^5}=1-\frac{11}{243}=\frac{232}{243}$$

23.[二十一]　设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（以分计）服从指数分布，其概率密度为：

$$F_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, x>0\\ 0,其它\end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，若超过10分钟他就离开。他一个月要到银行5次。以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，写出 Y 的分布律。并求 P（Y≥1）。

解：该顾客"一次等待服务未成而离去"的概率为

$$P(X>10)=\int_{10}^{+\infty}f_X(x)dx=\frac{1}{5}\int_{10}^{+\infty}e^{-\frac{x}{5}}dx=-e^{-\frac{x}{5}}\Big|_{10}^{+\infty}=e^{-2}$$

因此 $Y\sim B(5,e^{-2})$.即 $P(Y=k)=\binom{5}{k}e^{-2k}(1-e^{-2})^{5-k},(k=1,2,3,4,5$

$$P(Y\geq 1)=1-P(Y<1)=1-P(Y=0)=1-(1-e^{-2})^5=1-(1-\frac{1}{7.389})^5=1-(1-0.1353363)^5$$

$$=1-0.8677^5=1-0.4833=0.5167.$$

24.[二十二]　设K在（0，5）上服从均匀分布，求方程 $4x^2+4xK+K+2=0$ 有实根的概率

∵　K 的分布密度为：$f(K)=\begin{cases}\dfrac{1}{5-0} & 0<K<5\\ 0 & 其他\end{cases}$

要方程有根，就是要 K 满足 $(4K)^2-4\times4\times(K+2)\geq0$。

解不等式，得 K≥2时，方程有实根。

∴　$$P(K\geq 2)=\int_2^{+\infty}f(x)dx=\int_2^5\frac{1}{5}dx+\int_5^{+\infty}0\,dx=\frac{3}{5}$$

25.[二十三]　设 $X\sim N(3.2^2)$

（1）求 $P(2<X\leq5)$，$P(-4)<X\leq10)$，$P\{|X|>2\}$，$P(X>3)$

∵　若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\alpha<X\leq\beta)=\phi\left(\dfrac{\beta-\mu}{\sigma}\right)-\phi\left(\dfrac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$

∴　$$P(2<X\leq5)=\phi\left(\frac{5-3}{2}\right)-\phi\left(\frac{2-3}{2}\right)=\phi(1)-\phi(-0.5)$$

$$=0.8413-0.3085=0.5328$$

$$P(-4<X\leq10)=\phi\left(\frac{10-3}{2}\right)-\phi\left(\frac{-4-3}{2}\right)=\phi(3.5)-\phi(-3.5)$$

$$=0.9998-0.0002=0.9996$$

$$P(|X|>2)=1-P(|X|<2)=1-P(-2<P<2)$$

$$=1-\left[\Phi\left(\frac{2-3}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-2-3}{2}\right)\right]$$

$=1-\phi(-0.5)+\phi(-2.5)$

$=1-0.3085+0.0062=0.6977$

$P(X>3)=1-P(X\leqslant 3)=1-\phi\left(\dfrac{3-3}{2}\right)=1-0.5=0.5$

（2）决定 C 使得 $P(X>C)=P(X\leqslant C)$

∵ $P(X>C)=1-P(X\leqslant C)=P(X\leqslant C)$

得 $P(X\leqslant C)=\dfrac{1}{2}=0.5$

又 $P(X\leqslant C)=\phi\left(\dfrac{C-3}{2}\right)=0.5$, 查表可得 $\dfrac{C-3}{2}=0$ ∴ $C=3$

26.[二十四] 某地区 18 岁的女青年的血压（收缩区，以 mm-Hg 计）服从 $N(110,12^2)$ 在该地区任选一 18 岁女青年，测量她的血压 X。求

（1）$P(X\leq 105)$，$P(100<X\leq 120)$. （2）确定最小的 X 使 $P(X>x)\leq 0.05$.

解: (1) $P(X\leq 105)=\Phi(\dfrac{105-110}{12})=\Phi(-0.4167)=1-\Phi(0.4167)=1-0.6616=0.3384$

$P(100<X\leq 120)=\Phi(\dfrac{120-110}{12})-\Phi(\dfrac{100-110}{12})=\Phi(\dfrac{5}{6})-\Phi(-\dfrac{5}{6})$

$=2\Phi(\dfrac{5}{6})-1=2\Phi(0.8333)-1=2\times 0.7976-1=0.5952$

(2) $P(X>x)=1-P(X\leq x)=1-\Phi(\dfrac{x-110}{12})\leq 0.05\Rightarrow\Phi(\dfrac{x-110}{12})\geq 0.95.$

查表得 $\dfrac{x-110}{12}\geq 1.645.\Rightarrow x\geq 110+19.74=129.74.$ 故最小的$X=129.74.$

27.[二十五] 由某机器生产的螺栓长度（cm）服从参数为 $\mu=10.05$，$\sigma=0.06$ 的正态分布。规定长度在范围 10.05±0.12 内为合格品，求一螺栓为不合格的概率是多少？

设螺栓长度为 X

$P\{X$ 不属于$(10.05-0.12, 10.05+0.12)$

$=1-P(10.05-0.12<X<10.05+0.12)$

$=1-\left\{\Phi\left[\dfrac{(10.05+0.12)-10.05}{0.06}\right]-\Phi\left[\dfrac{(10.05-0.12)-10.05}{0.06}\right]\right\}$

$=1-\{\phi(2)-\phi(-2)\}$

$=1-\{0.9772-0.0228\}$

$=0.0456$

28.[二十六] 一工厂生产的电子管的寿命 X（以小时计）服从参数为 $\mu=160$，σ (未知)的正态分布，若要求 $P(120<X\leqslant 200==0.80$，允许 σ 最大为多少？

∵　$P(120<X\leqslant 200)=\Phi\left(\frac{200-160}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{120-160}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{40}{\sigma}\right)=0.80$

又对标准正态分布有 $\phi(-x)=1-\phi(x)$

∴　上式变为 $\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)-\left[1-\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)\right]\geq 0.80$

解出 $\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)$ 便得：　$\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)\geq 0.9$

再查表，得 $\frac{40}{\sigma}\geq 1.281$　$\sigma\leq\frac{40}{1.281}=31.25$

30.[二十七]　设随机变量 X 的分布律为：

X：	-2，	-1，	0，	1，	3
P：	$\frac{1}{5}$，	$\frac{1}{6}$，	$\frac{1}{5}$，	$\frac{1}{15}$，	$\frac{11}{30}$

求 $Y=X^2$ 的分布律

∵　$Y=X^2$：	$(-2)^2$	$(-1)^2$	$(0)^2$	$(1)^2$	$(3)^2$
P：	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

再把 X^2 的取值相同的合并，并按从小到大排列，就得函数 Y 的分布律为：

∴　Y：	0	1	4	9
P：	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

31.[二十八]　设随机变量 X 在（0，1）上服从均匀分布

（1）求 $Y=e^X$ 的分布密度

∵　X 的分布密度为：$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & x\text{为其他}\end{cases}$

$Y=g(X)=e^X$ 是单调增函数

又　　$X=h(Y)=lnY$，反函数存在

且　　$\alpha=min[g(0),g(1)]=min(1,e)=1$

$\beta=max[g(0),g(1)]=max(1,e)=e$

∴　Y 的分布密度为：$\psi(y)=\begin{cases}f[h(y)]\cdot|h'(y)|=1\cdot\frac{1}{y} & 1<y<e\\ 0 & y\text{为其他}\end{cases}$

（2）求 $Y=-2lnX$ 的概率密度。

∵　　$Y=g(X)=-2lnX$　是单调减函数

又　　$X=h(Y)=e^{-\frac{Y}{2}}$　反函数存在。

且　　　$\alpha = min[g(0), g(1)]=min(+\infty, 0)=0$

$\beta=max[g(0), g(1)]=max(+\infty, 0)= +\infty$

∴　Y 的分布密度为：$\psi(y)=\begin{cases} f[h(y)]\cdot|h'(y)|=1\cdot\left|-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\right|=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & 0<y<+\infty \\ 0 & y\text{为其他} \end{cases}$

32.[二十九]　设 X～N（0，1）

（1）求 $Y=e^X$ 的概率密度

∵　X 的概率密度是 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty<x<+\infty$

$Y= g(X)=e^X$　是单调增函数

又　　　$X= h(Y) = lnY$　反函数存在

且　　　$\alpha = min[g(-\infty), g(+\infty)]=min(0, +\infty)=0$

$\beta = max[g(-\infty), g(+\infty)]= max(0, +\infty)= +\infty$

∴　Y 的分布密度为：

$$\psi(y)=\begin{cases} f[h(y)]\cdot|h'(y)|=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}\cdot\dfrac{1}{y} & 0<y<+\infty \\ 0 & y\text{为其他} \end{cases}$$

（2）求 $Y=2X^2+1$ 的概率密度。

在这里，$Y=2X^2+1$ 在$(+\infty$，$-\infty)$不是单调函数，没有一般的结论可用。

设 Y 的分布函数是 F_Y（y），

则　　　　$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(2X^2+1\leqslant y)$

$$=P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\le X\le\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$$

当 $y<1$ 时：$F_Y(y)=0$

当 $y\geqslant 1$ 时：$F_y(y)=P\left(-\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\le X\le\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\right)=\displaystyle\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

故 Y 的分布密度 $\psi(y)$是：

当 $y\leqslant 1$ 时：$\psi(y)= [F_Y(y)]' = (0)' =0$

当 $y>1$ 时， $\psi(y)=[F_Y(y)]'=\left(\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}$$

（3）求 $Y=|X|$的概率密度。

∵ Y 的分布函数为 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(|X|\leqslant y)$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$

当 $y\geqslant 0$ 时，$F_Y(y)=P(|X|\leqslant y)=P(-y\leqslant X\leqslant y)=\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

∴ Y 的概率密度为：

当 $y\leqslant 0$ 时：$\psi(y)=[F_Y(y)]'=(0)'=0$

当 $y>0$ 时：$\psi(y)=[F_Y(y)]'=\left(\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)'=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

33.[三十] （1）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，求 $Y=X^3$ 的概率密度。

∵ $Y=g(X)=X^3$ 是 X 单调增函数，

又 $X=h(Y)=Y^{\frac{1}{3}}$，反函数存在，

且 $\alpha=min[g(-\infty),g(+\infty)]=min(0,+\infty)=-\infty$

$\beta=max[g(-\infty),g(+\infty)]=max(0,+\infty)=+\infty$

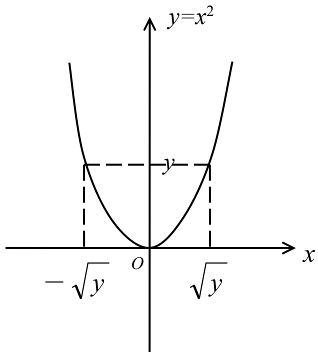
∴ Y 的分布密度为：

$$\psi(y)=f[h(h)]\cdot|h'(y)|=f(y^{\frac{1}{3}})\cdot\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}},-\infty<y<+\infty,\text{但}y\neq 0$$

$$\psi(0)=0$$

（2）设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，求 $Y=X^2$ 的概率密度。

法一：∵ X 的分布密度为：$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$



$Y=x^2$ 是非单调函数

当 $x<0$ 时 $y=x^2$∍ 反函数是 $x=-\sqrt{y}$

当 $x<0$ 时 $y=x^2$& $x=\sqrt{y}$

∴ $Y\sim f_Y(y)=f(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})'+f(\sqrt{y})(\sqrt{y})'$

$$=\begin{cases} 0+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}} , & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$$

法二：$Y \sim F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-\sqrt{y}<X\le\sqrt{y})=P(X\le\sqrt{y})-P(X\le-\sqrt{y})$

$$\begin{cases} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-x}dx+0=1-e^{-\sqrt{y}} , & y>0 \\ 0 , & y\le 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad Y \sim f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0. \\ 0 , & y\le 0. \end{cases}$$

34.[三十一]　设 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{\pi^2} & 0<x<\pi \\ 0 & x\text{为其他} \end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度。

∵　$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)$

$\qquad = P(\sin X\leqslant y)$

当 $y<0$ 时：$F_Y(y)=0$

当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时：$F_Y(y)=P(\sin X\leqslant y)=P(0\leqslant X\leqslant \arcsin y$ 或 $\pi-\arcsin y\leqslant X\leqslant\pi)$

$$=\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}dx$$

当 $1<y$ 时：$F_Y(y)=1$

∴　Y 的概率密度 $\psi(y)$ 为：

$y\leqslant 0$ 时，$\psi(y)=[F_Y(y)]'=(0)'=0$

$0<y<1$ 时，$\psi(y)=[F_Y(y)]'=\left(\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}dx\right)'$

$$=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

$1\leqslant y$ 时，$\psi(y)=[F_Y(y)]'=(1)'=0$

36.[三十三]　某物体的温度 T (°F)是一个随机变量，且有 $T\sim N$（98.6，2），试求θ(℃)

的概率密度。[已知$\theta=\frac{5}{9}(T-32)$]

法一：∵ T的概率密度为$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{(t-98.6)^2}{2\times 2}}$，$-\infty<t<+\infty$

又 $\theta=g(T)=\frac{5}{9}(T-32)$ 是单调增函数。

$T=h(\theta)=\frac{9}{5}\theta+32$ 反函数存在。

且 $\alpha=min[g(-\infty),g(+\infty)]=min(-\infty,+\infty)=-\infty$

$\beta=max[g(-\infty),g(+\infty)]=max(-\infty,+\infty)=+\infty$

∴ θ的概率密度$\psi(\theta)$为

$$\psi(\theta)=f[h(\theta)]\cdot|h'(\theta)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{(\frac{9}{5}\theta+32-98.6)^2}{4}}\cdot\frac{9}{5}$$

$$=\frac{9}{10\sqrt{\pi}}e^{-\frac{81(\theta-37)^2}{100}},-\infty<\theta<+\infty$$

法二：根据定理：若 X～N（α_1, σ_1），则 $Y=aX+b$～$N(a\alpha_1+b, a^2\sigma^2)$

由于 T～N（98.6, 2）

故 $\theta=\frac{5}{9}T-\frac{160}{9}\sim N\left[\frac{5}{9}\times 98.6-\frac{160}{9},\left(\frac{5}{9}\right)^2\times 2\right]=N\left[\frac{333}{9},\left(\frac{5}{9}\right)^2\times 2\right]$

故 θ的概率密度为：

$$\psi(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{5}{9}\sqrt{2}}e^{-\frac{\left(\theta-\frac{333}{9}\right)^2}{2\times\left(\frac{5}{9}\right)^2\times 2}}=\frac{9}{10\sqrt{\pi}}e^{-\frac{81(\theta-37)^2}{100}},\quad -\infty<\theta<+\infty$$

第三章　多维随机变量及其分布

1.[一]　在一箱子里装有 12 只开关，其中 2 只是次品，在其中随机地取两次，每次取一只。考虑两种试验：（1）放回抽样，（2）不放回抽样。我们定义随机变量 X，Y 如下：

$$X=\begin{cases}0, \text{若第一次取出的是正品,}\\ 1, \text{若第一次取出的是次品。}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}0, \text{若第二次取出的是正品,}\\ 1, \text{若第二次取出的是次品。}\end{cases}$$

试分别就（1）（2）两种情况，写出 X 和 Y 的联合分布律。

解：（1）放回抽样情况

由于每次取物是独立的。由独立性定义知。

$$P\,(X=i,\quad Y=j)=P\,(X=i)P\,(Y=j)$$

$$P\,(X=0,\ Y=0\ )=\frac{10}{12}\cdot\frac{10}{12}=\frac{25}{36}$$

$$P\,(X=0,\ Y=1\ )=\frac{10}{12}\cdot\frac{2}{12}=\frac{5}{36}$$

$$P\,(X=1,\ Y=0\ )=\frac{2}{12}\cdot\frac{10}{12}=\frac{5}{36}$$

$$P\,(X=1,\ Y=1\ )=\frac{2}{12}\cdot\frac{2}{12}=\frac{1}{36}$$

或写成

Y \ X	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

（2）不放回抽样的情况

$$P\,\{X=0,\ Y=0\ \}=\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11}=\frac{45}{66}$$

$$P\,\{X=0,\ Y=1\ \}=\frac{10}{12}\cdot\frac{2}{11}=\frac{10}{66}$$

$$P\,\{X=1,\ Y=0\ \}=\frac{2}{12}\cdot\frac{10}{11}=\frac{10}{66}$$

$$P\,\{X=1,\ Y=1\ \}=\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}=\frac{1}{66}$$

或写成

Y \ X	0	1

0	$\frac{45}{66}$	$\frac{10}{66}$
1	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$

3.[二]　盒子里装有 3 只黑球，2 只红球，2 只白球，在其中任取 4 只球，以 X 表示取到黑球的只数，以 Y 表示取到白球的只数，求 X，Y 的联合分布律。

Y \ X	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	0

解：（X，Y）的可能取值为(i, j)，i=0，1，2，3，　j=0，12，$i+j\geqslant 2$，联合分布律为

$$P\{X=0, Y=2\}=\frac{C_2^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{1}{35}$$

$$P\{X=1, Y=1\}=\frac{C_3^1C_2^1C_2^2}{C_7^4}=\frac{6}{35}$$

$$P\{X=1, Y=2\}=\frac{C_3^1C_2^2C_2^1}{C_7^4}=\frac{6}{35}$$

$$P\{X=2, Y=0\}=\frac{C_3^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{3}{35}$$

$$P\{X=2, Y=1\}=\frac{C_3^2C_2^1C_2^1}{C_7^4}=\frac{12}{35}$$

$$P\{X=2, Y=2\}=\frac{C_3^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{3}{35}$$

$$P\{X=3, Y=0\}=\frac{C_3^3C_2^1}{C_7^4}=\frac{2}{35}$$

$P\{X=3, Y=1\}=\dfrac{C_3^3C_2^1}{C_7^4}=\dfrac{2}{35}$

$P\{X=3, Y=2\}=0$

5.[三]　设随机变量（X，Y）概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), 0<x<2, 2<y<4\\ \quad 0,\ 其它\end{cases}$

（1）确定常数 k。　　（2）求 $P\{X<1, Y<3\}$

（3）求 $P(X<1.5\}$　　（4）求 $P(X+Y\leqslant 4\}$

分析：利用 $P\{(X, Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)dx\,dy=\iint\limits_{G\cap D_o} f(x,y)dx\,dy$ 再化为累次积分，其中

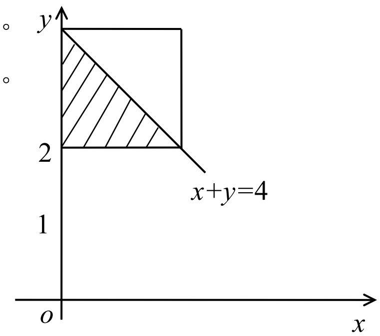
$$D_o=\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}0<x<2,\\2<y<4\end{matrix}\right\}$$

解：（1）$\because 1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx\,dy=\int_0^2\int_2^1 k(6-x-y)dydx$，$\therefore k=\dfrac{1}{8}$

（2）$P(X<1, Y<3)=\int_0^1 dx\int_2^3\dfrac{1}{8}(6-x-y)dy=\dfrac{3}{8}$

（3）$P(X\le 1.5)=P(X\le 1.5, Y<\infty)=\int_0^{1.5}dx\int_2^4\dfrac{1}{8}(6-x-y)dy=\dfrac{27}{32}$

（4）$P(X+Y\le 4)=\int_0^2 dx\int_0^{4-x}\dfrac{1}{8}(6-x-y)dy=\dfrac{2}{3}$



6.（1）求第 1 题中的随机变量（X、Y ）的边缘分布律。

（2）求第 2 题中的随机变量（X、Y ）的边缘分布律。

解：（1）① 放回抽样（第 1 题）

Y \ X	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

边缘分布律为

X	0	1
$P_{i\cdot}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1
$P_{\cdot j}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

② 不放回抽样（第 1 题）

Y \ X	0	1
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{10}{66}$
1	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$

边缘分布为

X	0	1
$P_{i\cdot}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1
$P_{\cdot j}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

（2）（X，Y ）的联合分布律如下

Y \ X	0	1	2	3
0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

解：　X 的边缘分布律

Y 的边缘分布律

X	0	1	2	3
$P_{i\cdot}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y
$P_{\cdot j}$

7.[五]　设二维随机变量（X，Y ）的概率密度为

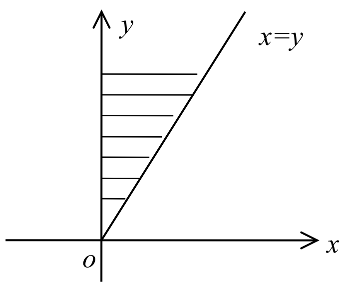
$$f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x) & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ 求边缘概率密度.

解：$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 4.8y(2-x)dy=2.4x^2(2-x) & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 4.8y(2-x)dx=2.4y(3-4y+y^2) & 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

8.[六]　设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, 0<x<y \\ 0, \text{其它}.\end{cases}$$ 求边缘概率密度。



解: $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y e^{-y}dx=ye^{-y}, & y>0, \\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

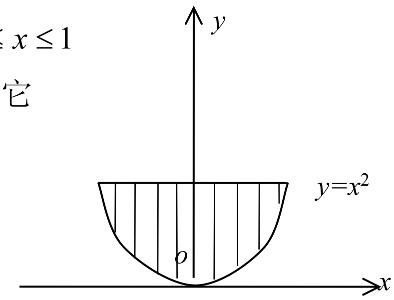
9.[七]　设二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} cx^2y, x^2\le y\le 1 \\ 0, 其它 \end{cases}$

（1）试确定常数 c。（2）求边缘概率密度。

解：$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}}cx^2ydx=c\int_0^1\frac{2}{3}y^{\frac{5}{2}}dy=\frac{4}{21}c\Rightarrow c=\frac{21}{4}$

$$X\sim f_X(x)=\begin{cases}\int_{x^2}^1\frac{21}{4}x^2ydy=\frac{21}{8}x^2(1-x^4), -1\le x\le 1\\ 0, \qquad 其它\end{cases}$$

$$Y\sim f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}}\frac{21}{4}d^2ydx=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}} \quad 0\le y\le 1\\ 0 \qquad 其它\end{cases}$$



15. 第 1 题中的随机变量 X 和 Y 是否相互独立。

解：放回抽样的情况

$$P\{X=0, Y=0\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{25}{36}$$

$$P\{X=0, Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}=\frac{5}{36}$$

$$P\{X=1, Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\}=\frac{5}{36}$$

$$P\{X=1, Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{1}{36}$$

在放回抽样的情况下，X 和 Y 是独立的

不放回抽样的情况：

$$P\{X=0, Y=0\}=\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11}=\frac{45}{66}$$

$$P\{X=0\}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

$$P\{X=0\}=P\{X=0, Y=0\}+P\{Y=0, X=1\}=\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11}+\frac{2}{11}\cdot\frac{10}{11}=\frac{5}{6}$$

$$P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$$

$$P\{X=0, Y=0\}\ne P\{X=0\}P\{Y=0\}$$

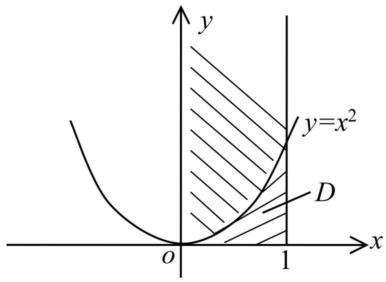
∴ X 和 Y 不独立

16.[十四]　设 X，Y 是两个相互独立的随机变量，X 在（0，1）上服从均匀分布。Y

的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{\frac{y}{2}}, y>0\\ 0, y\le 0.\end{cases}$

（1）求 X 和 Y 的联合密度。（2）设含有 a 的二次方程为 $a^2+2Xa+Y=0$,试求有实根的概率。

解：（1）X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, x\in(0,1)\\ 0, 其它\end{cases}$



Y 的概率密度为

$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, y>0\\ 0, y\le 0.\end{cases}$ 且知 X, Y 相互独立，

于是（X，Y）的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & 0<x<1, y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

（2）由于 a 有实跟根，从而判别式 $\Delta=4X^2-4Y\ge 0$

即：$Y\le X^2$　记 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1, 0<y<x^2\}$

$$P(Y\le X^2)=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy=-\int_0^1 dx\int_0^{x^2}de^{-\frac{y}{2}}=1-\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=1-\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^0 e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1-\sqrt{2\pi}(\Phi(1)-\Phi(2))=1-\sqrt{2\pi}(0.8413-0.5)$$
$$=1-2.5066312\times 0.3413=1-0.8555=0.1445$$

19.[十八]　设某种商品一周的需要量是一个随机变量，其概率密度为

$$f(t)=\begin{cases}te^{-t}, & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$$

并设各周的需要量是相互独立的，试求（1）两周（2）三周的需要量的概率密度。

解：（1）设第一周需要量为 X，它是随机变量

设第二周需要量为 Y，它是随机变量

且为同分布，其分布密度为

$$f(t)=\begin{cases} te^{-t}, & t>0 \\ 0 & t\le 0 \end{cases}$$

Z=X+Y 表示两周需要的商品量，由 X 和 Y 的独立性可知：

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-x}ye^{-y} & x>0,y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

∵ $z\geqslant 0$

∴ 当 $z<0$ 时，$f_z(z)=0$

当 $z>0$ 时，由和的概率公式知

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(z-y)f_y(y)dy$$

$$=\int_0^z (z-y)e^{-(z-y)}\cdot ye^{-y}dy=\frac{z^3}{6}e^{-z}$$

∴ $$f_z(z)=\begin{cases} \dfrac{z^3}{6}e^{-z}, & z>0 \\ 0 & z\le 0 \end{cases}$$

（2）设 z 表示前两周需要量，其概率密度为 $f_z(z)=\begin{cases} \dfrac{z^3}{6}e^{-z}, & z>0 \\ 0 & z\le 0 \end{cases}$

设 ξ 表示第三周需要量，其概率密度为：

$$f_\xi(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

z 与 ξ 相互独立

$\eta=z+\xi$ 表示前三周需要量

则：∵ η ⩾0， ∴当 $u<0$， $f_\eta(u)=0$

当 $u>0$ 时

$$f_\eta(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y)f_\xi(y)dy$$

$$=\int_0^u \frac{1}{6}(u-y)^3e^{-(u-y)}\cdot ye^{-y}dy$$

$$=\frac{u^5}{120}e^{-u}$$

所以η的概率密度为

$$f_\eta(u)=\begin{cases}\dfrac{u^5}{120}e^{-u} & u>0\\ 0 & u\le 0\end{cases}$$

22.[二十二]　设某种型号的电子管的寿命（以小时计）近似地服从N（160，20^2）分布。随机地选取4只求其中没有一只寿命小于180小时的概率。

解：设X_1，X_2，X_3，X_4为4只电子管的寿命，它们相互独立，同分布，其概率密度为：

$$f_T(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 20}e^{-\frac{(t-160)^2}{2\times 20^2}}$$

$$f\{X<180\}=F_X(180)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{20}\int_{-\infty}^{180}\frac{(t-160)^2}{2\times 20^2}dt$$

$$\xlongequal{令\frac{t-160}{20}=u}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{1}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi(\frac{180-60}{20})$$

$$\xlongequal{查表}0.8413$$

设$N=\min\{X_1，X_2，X_3，X_4\}$

$$P\{N>180\}=P\{X_1>180, X_2>180, X_3>180, X_4>180\}$$

$$=P\{X>180\}^4=\{1-p[X<180]\}^4=(0.1587)^4=0.00063$$

27.[二十八]　设随机变量（X，Y）的分布律为

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

（1）求$P\{X=2|Y=2\}$，$P\{Y=3|X=0\}$

（2）求$V=max(X, Y)$的分布律

（3）求 $U=min(X,Y)$的分布律

解：（1）由条件概率公式

$$P\{X=2|Y=2\}=\frac{P\{X=2,Y=2\}}{P\{Y=2\}}$$

$$=\frac{0.05}{0.01+0.03+0.05+0.05+0.05+0.08}$$

$$=\frac{0.05}{0.25}=0.2$$

同理 $P\{Y=3|X=0\}=\dfrac{1}{3}$

（2）变量 $V=max\{X,Y\}$

显然 V 是一随机变量，其取值为 V：0 1 2 3 4 5

$P\{V=0\}=P\{X=0 \quad Y=0\}=0$

$P\{V=1\}=P\{X=1，Y=0\}+P\{X=1，Y=1\}+P\{X=0，Y=1\}$

$=0.01+0.02+0.01=0.04$

$P\{V=2\}=P\{X=2，Y=0\}+P\{X=2，Y=1\}+P\{X=2，Y=2\}$

$+P\{Y=2,X=0\}+P\{Y=2,X=1\}$

$=0.03+0.04+0.05+0.01+0.03=0.16$

$P\{V=3\}=P\{X=3，Y=0\}+P\{X=3，Y=1\}+P\{X=3，Y=2\}+P\{X=3，Y=3\}$

$+P\{Y=3,X=0\}+P\{Y=3,X=1\}+P\{Y=3,X=2\}$

$=0.05+0.05+0.05+0.06+0.01+0.02+0.04=0.28$

$P\{V=4\}=P\{X=4，Y=0\}+P\{X=4，Y=1\}+P\{X=4，Y=2\}+P\{X=4，Y=3\}$

$=0.07+0.06+0.05+0.06=0.24$

$P\{V=5\}=P\{X=5，Y=0\}+\cdots\cdots+P\{X=5，Y=3\}$

$=0.09+0.08+0.06+0.05=0.28$

（3）显然 U 的取值为 0，1，2，3

$P\{U=0\}=P\{X=0，Y=0\}+\cdots\cdots+P\{X=0，Y=3\}+P\{Y=0，X=1\}$

$+\cdots\cdots+P\{Y=0，X=5\}=0.28$

同理 $P\{U=1\}=0.30 \quad P\{U=2\}=0.25 \quad P\{U=3\}=0.17$

或缩写成表格形式

（2）

V	0	1	2	3	4	5
P_k	0	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

（3）

U	0	1	2	3
P_k	0.28	0.30	0.25	0.17

（4）$W=V+U$ 显然 W 的取值为 0，1，……8

$P\{W=0\}=P\{V=0\ U=0\}=0$

$P\{W=1\}=P\{V=0, U=1\}+P\{V=1U=0\}$

∵ $V=\max\{X，Y\}=0$ 又 $U=\min\{X，Y\}=1$ 不可能

上式中的 $P\{V=0，U=1\}=0$，

又 $P\{V=1\ U=0\}=P\{X=1\ Y=0\}+P\{X=0\quad Y=1\}=0.2$

故 $P\{W=1\}=P\{V=0, U=1\}+P\{V=1，U=0\}=0.2$

$P\{W=2\}=P\{V+U=2\}= P\{V=2, U=0\}+ P\{V=1，U=1\}$

$= P\{X=2\ Y=0\}+ P\{X=0\quad Y=2\}+P\{X=1\quad Y=1\}$

$=0.03+0.01+0.02=0.06$

$P\{W=3\}=P\{V+U=3\}= P\{V=3, U=0\}+ P\{V=2，U=1\}$

$= P\{X=3\ Y=0\}+ P\{X=0，Y=3\}+P\{X=2，Y=1\}$

$+ P\{X=1，Y=2\} =0.05+0.01+0.04+0.03=0.13$

$P\{W=4\}= P\{V=4, U=0\}+ P\{V=3，U=1\}+P\{V=2，U=2\}$

$=P\{X=4\ Y=0\}+ P\{X=3，Y=1\}+P\{X=1，Y=3\}$

$+ P\{X=2，Y=2\} =0.19$

$P\{W=5\}= P\{V+U=5\}=P\{V=5, U=0\}+ P\{V=5，U=1\}$

$+P\{V=3，U=2\} =P\{X=5\ Y=0\}+ P\{X=5，Y=1\}$

$+P\{X=3，Y=2\}+ P\{X=2，Y=3\} =0.24$

$P\{W=6\}= P\{V+U=6\}=P\{V=5, U=1\}+ P\{V=4，U=2\}$

$+P\{V=3，U=3\} =P\{X=5，Y=1\}+ P\{X=4，Y=2\}$

$+P\{X=3，Y=3\} =0.19$

$P\{W=7\}= P\{V+U=7\}=P\{V=5, U=2\}+ P\{V=4，U=3\}$

$=P\{V=5，U=2\} +P\{X=4，Y=3\}=0.6+0.6=0.12$

$P\{W=8\}= P\{V+U=8\}=P\{V=5, U=3\}+ P\{X=5，Y=3\}=0.05$

或列表为

W	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

[二十一] 设随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0<x<1, 0<y<+\infty \\ 0 & ,\ \text{其它} \end{cases}$$

（1）试确定常数 b；（2）求边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$

（3）求函数 $U=\max(X, Y)$的分布函数。

解：（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\,dx=\int_0^1\int_0^{+\infty}be^{-(x+y)}dy\,dx=b[1-e^{-1}]$

$$\therefore\quad b=\frac{1}{1-e^{-1}}$$

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

$$=\begin{cases} 0 & x\le 0\text{或}x\ge 1 \\ \int_0^{+\infty}be^{-(x+y)}dy=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, & 0<x<1 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases} 0 & ,\quad y\le 0 \\ \int_0^1 be^{-(x+y)}dx=e^{-y} & y>0 \end{cases}$$

（3）$F_u(\omega)=P\{U\le u\}=P\{\max(X,Y)\le u\}=P\{X\le u, Y\le u\}$

$$=F(u,u)=\int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{u}f(x,y)dx\,dy$$

$u<0$, $F_U(u)=0$

$$0\le u<1,\ F_U(u)=\int_0^u\int_0^u be^{-(x+y)}dx\,dy=\frac{(1-e^{-u})^2}{1-e^{-1}}$$

$$u\ge 1,\ F_U(u)=\int_0^u\int_0^1 be^{-(x+y)}dx\,dy=1-e^{-u}$$

第四章

2.[二] 某产品的次品率为 0.1，检验员每天检验 4 次。每次随机地抽取 10 件产品进

行检验，如果发现其中的次品数多于 1，就去调整设备，以 X 表示一天中调整设备的次数，试求 E (X)。(设诸产品是否是次品是相互独立的。)

解：设表示一次抽检的 10 件产品的次品数为 ξ

P=P（调整设备）=P (ξ>1)=1－P (ξ≤1)= 1－[P (ξ=0)+ P (ξ=1)] $\overset{\text{查二项分布表}}{\equiv}$

1－0.7361=0.2639.

因此 X 表示一天调整设备的次数时 $X \sim B(4, 0.2639)$. $P(X=0)=\binom{4}{0}\times 0.2639^0\times 0.7361^4$ =0.2936.

$P(X=1)=\binom{4}{1}\times 0.2639^1\times 0.7361^3=0.4210$, $P(X=2)=\binom{4}{2}\times 0.2639^2\times 0.7361^2=0.2264$.

$P(X=3)=\binom{4}{3}\times 0.2639^3\times 0.7361=0.0541$, $P(X=4)=\binom{4}{4}\times 0.2639\times 0.7361^0=0.0049$.从而

$E(X)=np=4\times 0.2639=1.0556$

3.[三]　有 3 只球，4 只盒子，盒子的编号为 1，2，3，4，将球逐个独立地，随机地放入 4 只盒子中去。设 X 为在其中至少有一只球的盒子的最小号码（例如 X=3 表示第 1 号，第 2 号盒子是空的，第 3 号盒子至少有一只球），求 $E(X)$。

∵　事件 {X=1}={一只球装入一号盒，两只球装入非一号盒}+{两只球装入一号盒，一只球装入非一号盒}+{三只球均装入一号盒}（右边三个事件两两互斥）

∴　$$P(X=1)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{37}{64}$$

∵事件“X=2”=“一只球装入二号盒，两只球装入三号或四号盒”+“两只球装二号盒，一只球装入三或四号盒”+“三只球装入二号盒”

∴　$$P(X=2)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{2}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{19}{64}$$

同理：$$P(X=3)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{7}{64}$$

$$P(X=4)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$$

故　$$E(X)=1\times\frac{37}{64}+2\times\frac{19}{64}+3\times\frac{7}{64}+4\times\frac{1}{64}=\frac{25}{16}$$

5.[五]　设在某一规定的时间间段里，其电气设备用于最大负荷的时间 X（以分计）是一个连续型随机变量。其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1500)^2}x, & 0\le x\le 1500\\ \dfrac{-1}{(1500)^2}(x-3000), & 1500<x\le 1500\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 $E(X)$

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

$$=\int_0^{1500}x\cdot\frac{x}{(1500)^2}dx+\int_{1500}^{3000}x\cdot\frac{(3000-x)}{(1500)^2}dx$$

$$=\frac{1}{(1500)^2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{1500}+\frac{1}{(1500)^2}\left[1500x^2-\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{1500}^{3000}$$

$$=1500(\text{分})$$

6.[六]　设随机变量 X 的分布为

X	-2	0	2
P_k	0.4	0.3	0.3

求　$E(X)$，　$E(3X^2+5)$

解：　$E(X)=(-2)\times 0.4+0\times 0.3+2\times 0.3=-0.2$

$E(X^2)=(-2)^2\times 0.4+0^2\times 0.3+2^2\times 0.3=2.8$

$E(3X^2+5)=3E(X^2)+E(5)=8.4+5=13.4$

7.[七]　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$$

求（1）$Y=2X$　　（2）$Y=e^{-2x}$ 的数学期望。

解：（1）$E(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}2xf(x)dx=\int_0^{+\infty}2xe^{-x}dx$

$$=\left[-2xe^{-x}-2e^{-x}\right]_0^{+\infty}=2$$

（2） $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} e^{-2x} e^{-x} ex$

$$=-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{3}$$

8.[八] 设（X，Y）的分布律为

Y \ X	1	2	3
－1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

(1) 求 $E(X)$，$E(Y)$。
(2) 设 $Z=Y/X$，求 $E(Z)$。
(3) 设 $Z=(X-Y)^2$，求 $E(Z)$。

解：（1）由 X，Y 的分布律易得边缘分布为

Y \ X	1	2	3	
－1	0.2	0.1	0	0.3
0	0.1	0	0.3	0.4
1	0.1	0.1	0.1	0.3
	0.4	0.2	0.4	1

E(X)=1×0.4+2×0.2+3×0.4
=0.4+0.4+1.2=2.
E(Y)= (－1)×0.3+0×0.4
+1×0.3=0.

（2）

$Z=Y/X$	－1	－1/2	－1/3	0	1/3	1/2	1
p_k	0.2	0.1	0	0.4	0.1	0.1	0.1

$E(Z)=(-1)\times0.2+(-0.5)\times0.1+(-1/3)\times0+0\times0.4+1/3\times0.1+0.5\times0.1+1\times0.1$
$=(-1/4)+1/30+1/20+1/10=(-15/60)+11/60=-1/15.$

（3）

$Z(X-Y)^2$	0 $(1-1)^2$	1 $(1-0)^2$ 或 $(2-1)^2$	4 $(2-0)^2$ 或 $(1-(-1))^2$ 或 $(3-1)^2$	9 $(3-0)^2$ 或 $(2-(-1))^2$	16 $(3-(-1))^2$
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4	0

$E(Z)=0\times0.1+1\times0.2+4\times0.3+9\times0.4+16\times0=0.2+1.2+3.6=5$

10.[十] 一工厂生产的某种设备的寿命 X（以年计）服从指数分布，概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$ 工厂规定出售的设备若在一年内损坏，可予以调换。若工厂出售一台设备可赢利 100 元，调换一台设备厂方需花费 300 元。试求厂方出售一台设备净赢利的数学期望。

解：一台设备在一年内损坏的概率为 $P(X<1)=\frac{1}{4}\int_{0}^{1}e^{-\frac{1}{4}x}dx=-e^{-\frac{x}{4}}\Big|_{0}^{1}=1-e^{-\frac{1}{4}}$

故 $P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-(1-e^{-\frac{1}{4}})=e^{-\frac{1}{4}}$. 设 Y 表示出售一台设备的净赢利

则
$$Y=f(X)=\begin{cases}(-300+100)=-200,(X<1)\\ 100,(X\geq 1).\end{cases}$$

故 $E(Y)=(-200)\cdot P(X<1)+100\cdot P(X\geq 1)=-200+200e^{-\frac{1}{4}}+100e^{-\frac{1}{4}}$

$$=300e^{-\frac{1}{4}}-200\approx 33.64$$

11.[十一]　某车间生产的圆盘直径在区间（a, b）服从均匀分布。试求圆盘面积的数学期望。

解：设 X 为圆盘的直径，则其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, x\in(a,b)\\ 0, 其它.\end{cases}$$

用 Y 表示圆盘的面积，则 $Y=\frac{1}{4}\pi X^2$, 从而

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4}\pi x^2 f(x)dx=\frac{\pi}{4}\int_a^b\frac{1}{b-a}x^2dx=\frac{\pi}{4(b-a)}\cdot\frac{(b^3-a^3)}{3}=\frac{\pi}{12}(a^2+ab+b^2).$$

12.[十三]　设随机变量 X_1，X_2 的概率密度分别为

$$f_1(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}4e^{-4x}, x>0\\ 0 \quad , x\leq 0\end{cases}$$

求（1）$E(X_1+X_2)$，$E(2X_1-3X_2^2)$；（2）又设 X_1，X_2 相互独立，求 $E(X_1X_2)$

解：（1）$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=\int_0^\infty x\cdot 2e^{-2x}dx+\int_0^\infty x\cdot 4e^{-4x}dx$

$$=\left[-xe^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^\infty+\left[-xe^{-4x}-\frac{1}{4}e^{-4x}\right]_0^\infty=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

（2）$E(2X_1-3X_2^2)=2E(X_1)-3E(X_2^2)=2\times\frac{1}{2}-3\int_0^\infty x^2\cdot 4e^{-4x}dx$

$$=1-3\left[-x^2e^{-4x}-\frac{x}{2}e^{-4x}-\frac{1}{8}e^{-4x}\right]_0^\infty=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

（3）$E(X_1X_2)=E(X_1)\cdot E(X_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

13.[十四]　将 n 只球（1～n 号）随机地放进 n 只盒子（1～n 号）中去，一只盒子装一只球。将一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对，记 X 为配对的个数，求 $E(X)$

解：引进随机变量 $X_i=\begin{cases}1 & \text{第}i\text{号盒装第}i\text{号球}\\ 0 & \text{第}i\text{号盒装非}i\text{号球}\end{cases}$

i=1, 2, ⋯ n

则球盒对号的总配对数为 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$

X_i的分布列为

X_i:	1	0
P:	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$

$E(X_i)\frac{1}{n}$　　i=1, 2 ⋯⋯ n

∴　$$E(X)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\times\frac{1}{n}=1$$

i=1, 2 ⋯⋯ n

14.[十五]　共有 n 把看上去样子相同的钥匙，其中只有一把能打开门上的锁，用它们去试开门上的锁。设抽取钥匙是相互独立的，等可能性的。若每把钥匙经试开一次后除去，试用下面两种方法求试开次数 X 的数学期望。

（1）写出 X 的分布律，（2）不写出 X 的分布律。

解：（1）

X	1	2	3	⋯⋯n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}$	$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}$	⋯⋯ $\frac{1}{n}$

$$E(X)=1\times\frac{1}{n}+2\times\frac{1}{n}\cdots\cdots+n\times\frac{1}{n}=\frac{1+2\cdots\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}$$

（2）设一把一把钥匙的试开，直到把钥匙用完。

设　$X_i=\begin{cases}i & \text{第}i\text{次试开能开门}\\ 0 & \text{第}i\text{次试开不能开门}\end{cases}$　　i=1, 2 ⋯⋯ n

则试开到能开门所须试开次数为 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$

X_i	i	0

∵ P | $\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\cdots\frac{1}{n-i}=\frac{1}{n}$ | $\frac{n-1}{n}$ $E(X_i)=i\cdot\frac{1}{n}$

$i=1, 2\cdots\cdots n$

∴ $E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots\cdots+\frac{n}{n}=\frac{n+1}{2}$

15.（1）设随机变量 X 的数学期望为 $E(X)$，方差为 $D(X)>0$，引入新的随机变量（X^* 称为标准化的随机变量）：$X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$

验证 $E(X^*)=0$，$D(X^*)=1$

（2）已知随机变量 X 的概率密度。

$$f(x)=\begin{cases}1-|1-x|, & 0<x<2\\ 0\qquad\quad, & 其它,\end{cases}$$

求 X^*的概率密度。

解：（1）$E(X^*)=E[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}]=\frac{1}{\sqrt{D(X)}}[E(X)-E(X)]=0$

$$D(X^*)=E[X^*-E(X)^*]]^2=E(X^{*2})=E\left[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right]^2$$

$$=\frac{1}{D(X)}E[X-E(X)]^2=\frac{1}{DX}\cdot D(X)=1$$

（2）$E(X)=\int_0^2 x[1-|1-x|]dx=\int_0^1 x[1-(1-x)]dx+\int_1^2 x[1+(1-x)]dx=1$

$$E(X^2)=\int_0^2 x^2[1-|1-x|]dx=\int_0^1 x^2[1-(1-x)]dx$$

$$+\int_1^2 x^2[1+(1-x)]dx=\frac{7}{6}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{7}{6}-1=\frac{1}{6}$$

$$X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{DX}}=\frac{X-1}{\sqrt{\frac{1}{6}}}$$

$$F_{X^*}(y)=P(X^*\le y)=P(\frac{X-1}{\sqrt{\frac{1}{6}}}\le y)=P(X\le\sqrt{\frac{1}{6}}y+1)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{\sqrt{6}}y+1}f(x)dx$$

$$=\begin{cases}0 & 当\frac{1}{\sqrt{6}}y+1\le 0,即y\le -\sqrt{6}时\\ \int_0^{\frac{1}{\sqrt{6}}y-1}[1-|1-x|]dx & 当0<\frac{1}{\sqrt{6}}y+1\le 2,即-\sqrt{6}<y\le\sqrt{6}时\\ 1 & 当2<\frac{1}{\sqrt{6}}y+1,即\sqrt{6}<y时\end{cases}$$

$$g_{X^*}(y)=\begin{cases}\{1-|1-(\frac{1}{\sqrt{6}}y+1)|\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} & -\sqrt{6}<y\le\sqrt{6}\\ 0 & y为其他值\end{cases}$$

16.[十六]　设 X 为随机变量，C 是常数，证明 $D(X)<E\{(X-C)^2\}$，对于 $C\neq E(X)$，（由于 $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$，上式表明 $E\{(X-C)^2\}$当 $C=E(X)$时取到最小值。）

证明：∵　$D(X)-E(X-C)^2=D(X^2)-[E(X)]^2-[E(X^2)-2CE(X^2)+C^2$

$=-\{[E(X)]^2-2CE(X^2)+C^2\}$

$=-[E(X)-C]^2<0$，

∴当 $E(X)\neq C$ 时 $D(X)<E(X-C)^2$

17. 设随机变量 X 服从指数分布，其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta},x>0\\ 0,x\le 0\end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 是常数，求 $E(X)$，$D(X)$。

解：

$$E(X)=\int_0^{+\infty}x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\int_0^{+\infty}xd(-e^{-\frac{x}{\theta}})=-xe^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=0+(-\theta e^{-\frac{x}{\theta}})\Big|_0^{+\infty}=\theta$$

$$又E(X^2)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\infty}x^2e^{-\frac{x}{\theta}}dx\overset{令t=\frac{x}{\theta}}{=\!=\!=\!=}\theta^2\int_0^{\infty}t^2e^{-t}dt=2\theta^2$$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=2\theta^2-\theta^2=\theta^2$

21．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立的随机变量且有 $E(X_i)=\mu,D(X_i)=\sigma^2,i=1,2,\cdots,n$.

记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.（1）验证 $E(\overline{X})=\mu,D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$.（2）验证 $S^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right]$.（3）验证 $E(S^2)$

证明：（1）$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu$

(利用数学期望的性质 2°，3°)

$$D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)\overset{X_1,\cdots,X_n\text{相互独立}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

(利用方差的性质 2°，3°)

（2）首先证 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\sum_{i=1}^{n}X_i\overline{X}+n\overline{X}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\overline{X}\cdot\overline{X}+n\overline{X}^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2.$$

于是 $S^2=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right\}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

（3）$E(S^2)=E[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]=\frac{1}{n-1}E(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(D(X_i)+E^2(X_i)-n(D(\overline{X})+E^2(\overline{X}))\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}[n\sigma^2+n\mu^2-n(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)]=\sigma^2$$

23．[二十五]　设随机变量 X 和 Y 的联合分布为：

$Y \backslash X$	－1	0	1
－1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$

1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

验证：X 和 Y 不相关，但 X 和 Y 不是相互独立的。

证：∵ $P[X=1 \quad Y=1]=\frac{1}{8}$ $\quad P[X=1]=\frac{3}{8}$ $\quad P[Y=1]=\frac{3}{8}$

$P[X=1 \quad Y=1]\neq P[X=1]\,P[Y=1]$

∴ X，Y 不是独立的

又 $E(X)=-1\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=0$

$E(Y)=-1\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=0$

$COV(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-EX\cdot EY$

$=(-1)(-1)\ \frac{1}{8}+(-1)1\times\frac{1}{8}+1\times(-1)\times\frac{1}{8}+1\times1\times\frac{1}{8}=0$

∴ X，Y 是不相关的

27. 已知三个随机变量 X, Y, Z 中，$E(X)=E(Y)=1$, $E(Z)=-1$，$D(X)=D(Y)=D(Z)=1$, $\rho_{XY}=0 \quad \rho_{XZ}=\frac{1}{2}$，$\rho_{YZ}=-\frac{1}{2}$。设 $W=X+Y+Z$ 求 $E(W)$，$D(W)$。

解：$E(W)=E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)=1+1-1=1$

$D(W)=D(X+Y+Z)=E\{[(X+Y+Z)-E(X+Y+Z)]^2\}$

$=E\{[X-E(X)]+[Y-E(Y)]+Z-E(Z)\}^2$

$=E\{[X-E(X)]^2+[Y-E(Y)]^2+[Z-E(Z)]^2+2[X-E(X)][Y-E(Y)]$

$+2[Y-E(Y)][Z-E(Z)]+2[Z-E(Z)][X-E(X)]\}$

$=D(X)+D(Y)+D(Z)+2\,COV(X,Y)+2\,COV(Y,Z)+2\,COV(Z,X)$

$=D(X)+D(Y)+D(Z)+2\sqrt{D(X)D(Y)}\,\rho_{XY}+2\sqrt{D(Y)D(Z)}\,\rho_{XZ}$

$+2\sqrt{D(Z)D(X)}\,\rho_{ZX}=1+1+1+2\times\sqrt{1\times1}\times0+2\sqrt{1\times1}(-\frac{1}{2})$

$+2\sqrt{1\times1}(\frac{1}{2})=3$

26.[二十八] 设随机变量（X_1，X_2）具有概率密度。

$$f(x,y)=\frac{1}{8}(x+y)\text{，}\quad 0\leqslant x\leqslant 2,\qquad 0\leqslant y\leqslant 2$$

求 $E(X_1)$，$E(X_2)$，COV（X_1，X_2），$\rho_{X_1X_2}$ $\quad D(X_1+X_2)$

解： $$E(X_2)=\int_0^2 dx\int_0^2 x\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$$

$$E(X_2)=\int_0^2 dx\int_0^2 y\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$$

$$COV(X_1X_2)=E\{(X_1-\frac{7}{6})(X_2-\frac{7}{6})\}$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^2(x-\frac{7}{6})(y-\frac{7}{6})\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=-\frac{1}{36}$$

$$D(X_1)=E(X_1^2)-[E(X_1)]^2=\int_0^2 dx\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

$$D(X_2)=E(X_2^2)-[E(X_2)]^2=\int_0^2 dx\int_0^2 y^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

$$\rho_{XY}=\frac{COV(X_1,X_2)}{\sqrt{DX_1}\sqrt{DX_2}}=\frac{-\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}}=-\frac{1}{11}$$

$$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)+2COV(X_1,X_2)$$

$$=\frac{11}{36}+\frac{11}{36}+2\times(-\frac{1}{36})=\frac{5}{9}$$

28.[二十九]设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 X，Y 相互独立。试求 $Z_1=\alpha X+\beta Y$ 和 $Z_2=\alpha X-\beta Y$ 的相关系数（其中 α,β 是不为零的常数）.

解：由于 X，Y 相互独立

$$Cov(Z_1,Z_2)=E(Z_1,Z_2)-E(Z_1)E(Z_2)=E(\alpha X+\beta Y)(\alpha X-\beta Y)-(\alpha EX+\beta EY)(\alpha EX-\beta EY)$$

$$=\alpha^2EX^2-\beta EY^2-\alpha^2(EX)^2+\beta(EY)^2=\alpha^2DX-\beta^2DY=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2$$

$$DZ_1=\alpha^2DX+\beta^2DY=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2,\ DZ_2=\alpha^2DX+\beta^2DY=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2,$$

(利用数学期望的性质 2°3°)

故 $\rho_{Z_1Z_2}=\dfrac{Cov(Z_1,Z_2)}{\sqrt{DZ_1}\sqrt{DZ_2}}=\dfrac{(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)}$

29．[二十三] 卡车装运水泥，设每袋水泥重量（以公斤计）服从 $N(50,2.5^2)$ 问最多装多少袋水泥使总重量超过 2000 的概率不大于 0.05.

解：已知 $X\sim N(50,2.5^2)$ 不妨设最多可装 A 袋水泥才使总重量超过 2000 的概率不大于 0.05.则由期望和方差的性质得 $Y=AX\sim N(50A,2.5^2A)$.故由题意得

$$P\{Y\geq 2000\}\leq 0.05\Rightarrow P\{Y<2000)\geq 0.95$$

即 $\Phi\left(\dfrac{2000-50A}{2.5\sqrt{A}}\right)\geq 0.95$查表得$\dfrac{2000-50A}{2.5\sqrt{A}}\geq 1.65$解得 $A\geq 39$.

30.[三十二] 已知正常男性成人血液中，每一毫升白细胞数平均是 7300，均方差是 700，利用契比雪夫不等式估计每毫升含白细胞数在 5200～9400 之间的概率 p.

解：由题意知 $\mu=7300$, $\sigma=700$，则由契比雪夫不等式

$$P\{5200\leq X\leq 9400\}=P\{|X-7300|\leq 2100\}\geq 1-\frac{700^2}{2100^2}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\approx 0.8889$$

31.[三十三]对于两个随机变量 V,W 若 $E(V^2)E(W^2)$存在,证明$[E(VW)]^2\leq E(V^2)E(W^2)$ 这一不等式称为柯西施瓦兹（Cauchy-Schwarz）不等式.

证明：由$|VW|\leq\frac{1}{2}(V^2+W^2)$和关于矩的结论，知当 $E(V^2)$, $E(W^2)$存在时 $E(VW)$, $E(V)$, $E(W)$, $D(V)$, $D(W)$,都存在.当 $E(V^2)$, $E(W^2)$至少有一个为零时，不妨设 $E(V^2)=0$，

由 $D(V)=E(V^2)-[E(V)]^2\leq E(V^2)=0$ 知 $D(V)=0$,此时$[E(V)]^2=E(V^2)=0$ 即 $E(V)=0$。再由方差的性质知 $P(V=0)=1$.又$(VW=0)\supset(V=0)$故有 $P(VW=0)=1$.于是 $E(VW)=0$，不等式成立. 当 $E(V^2)>0$，$E(W^2)>0$ 时，对$\forall t>0$

有 $E(W-tV)^2=E(V^2)t^2-2E(VW)t+E(W^2)\geq 0$.(*)

(*)式是 t 的二次三项式且恒非负，所以有$\Delta=[-2E(VW)]^2-4E(V^2)E(W^2)\leq 0$

故 Cauchy-Schwarz 不等式成立。

[二十一]（1）设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立，且有 $E(X_i)=i$, $D(X_i)=5-i$, $i=1,2,3,4$。设 $Y=2X_1-X_2+3X_3-\frac{1}{2}X_4$，求 $E(Y)$，$D(Y)$。

（2）设随机变量 X, Y 相互独立，且 $X\sim N(720, 30^2)$，$Y\sim N(640, 25^2)$，求 $Z_1=2X+Y$，$Z_2=X-Y$ 的分布，并求 $P\{X>Y\}$, $P\{X+Y>1400\}$

解：（1）利用数学期望的性质 2°，3°有

$E(Y)=2E(X_1)-E(X_2)+3E(X_3)-\frac{1}{2}E(X_4)=7$

利用数学方差的性质 2°，3°有

$D(Y)=2^2D(X_1)+(-1)^2D(X_2)+3^2D(X_3)+(-\frac{1}{2})^2D(X_4)=37.25$

（2）根据有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布，知 $Z_1\sim N$（•，•），$Z_2\sim N$（•，•）

而 $EZ_1=2EX+Y=2\times720+640$, $D(Z_1)=4D(X)+D(Y)=4225$

$EZ_2=EX-EY=720-640=80$, $D(Z_2)=D(X)+D(Y)=1525$

即 $Z_1\sim N(2080, 4225)$， $Z_2\sim N(80, 1525)$

$P\{X>Y\}=P\{X-Y>0\}=P\{Z_2>0\}=1-P\{Z_2\le 0\}$

$$=1-\Phi\left(\frac{0-80}{\sqrt{1525}}\right)=\Phi\left(\frac{80}{1525}\right)=0.9798$$

$P\{X+Y>1400\}=1-P\{X+Y\le 1400\}$

同理 X+Y～N（1360，1525）

则 P{X+Y >1400 }=1－P{X+Y ≤1400 }

$$=1-\Phi\left(\frac{1400-1360}{\sqrt{1525}}\right)=0.1539$$

[二十二]　5 家商店联营，它们每周售出的某种农产品的数量（以 kg 计）分别为 X_1，X_2，X_3，X_4，X_5，已知 X_1～N（200，225），X_2～N（240，240），X_3～N（180，225），X_4～N（260，265），X_5～N（320，270），X_1，X_2，X_3，X_4，X_5 相互独立。

（1）求 5 家商店两周的总销售量的均值和方差；

（2）商店每隔两周进货一次，为了使新的供货到达前商店不会脱销的概率大于 0.99，问商店的仓库应至少储存多少公斤该产品？

解：（1）令 $Y=\sum_{i=1}^{5}X_i$ 为总销售量。

已知 $EX_1=200$，$EX_2=240$，$EX_3=180$，$EX_4=260$，$EX_5=320$，

$D(X_1)=225$，$D(X_2)=240$，$D(X_3)=225$，$D(X_4)=265$，$D(X_5)=270$，

利用数学期望的性质 3°有

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{5}E(X_i)=1200$$

利用方差的性质 3°有

$$D(Y)=\sum_{i=1}^{5}D(X_i)=1225$$

（2）设商店仓库储存 a 公斤该产品，使得

$P\{Y\le a\}>0.99$

由相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布，并注意到（1），得

Y～ N（1200，1225）

$$P\{Y\le a\}=\Phi\left(\frac{a-1200}{35}\right)>0.99$$

查标准正态分布表知

$$\frac{a-1200}{35}>2.33$$

$$a>1281.55$$

∴ a 至少取 1282.

第五章　大数定理和中心极限定理

1．[一]　据以往经验某种电器元件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布，现在随机的抽取 16 只，设它们的寿命是相互独立的，求这 16 只元件寿命总和大于 1920 小时的概率。

解：设第 i 只寿命为 X_i，（$1\le i\le 16$），故 $E(X_i)=100$，$D(X_i)=100^2(l=1,2,\cdots,16)$.依本章定理 1 知

$$P(\sum_{i=1}^{16}X_i\le 1920)=P\left(\frac{\sum_{i=0}^{16}X_i-1600}{\sqrt{16}\times 100}\le\frac{1920-1600}{\sqrt{16}\times 100}\right)=P\left(\frac{\sum_{i=0}^{16}X_i-1600}{400}\le 0.8\right)$$

$$=\Phi(0.8)=0.7881.$$

从而 $P(\sum_{i=1}^{16}X_i>1920)=1-P(\sum_{i=1}^{16}X_i\le 1920)=1-0.7881=0.2119.$

3．[三]　计算机在进行加法时，对每个加数取整（取为最接近它的整数），设所有的取整误差是相互独立的，且它们都在（－0.5，0.5）上服从均匀分布，

（1）若将 1500 个数相加，问误差总和的绝对值超过 15 的概率是多少？

（2）几个数相加在一起使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.90

解：

（1）设取整误差为 X_{i}（$i=1,2,\cdots$，1500），它们都在（－0.5, 0.5）上服从均匀分布。

于是：

$$E(X_i)=p=\frac{-0.5+0.5}{2}=0$$

$$D(X_i)=\frac{[0.5-(-0.5)]^2}{12}=\frac{1}{12}$$

$$nE(X_i)=0, \quad \sqrt{nD(X_i)}=\sqrt{1500\times\frac{1}{12}}=\sqrt{125}=11.18$$

$$P\left\{\left|\sum_{i=0}^{1500}X_i\right|>15\right\}=1-P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1500}X_i\right|\le 15\right\}$$

$$=1-P\left\{-15\le\sum_{i=1}^{1500}X_i\le 15\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{-15}{11.18}\le\frac{\sum_{i=1}^{1500}X_i}{11.18}\le\frac{15}{11.18}\right\}$$

$$=1-[\Phi(1.34)-\Phi(-1.34)]$$

$$=2[1-\Phi(1.34)]=2\times[1-0.9099]=0.1802$$

8．某药厂断言，该厂生产的某种药品对于医治一种疑难的血液病的治愈率为 0.8，医院检验员任意抽查 100 个服用此药品的病人，如果其中多于 75 人治愈，就接受这一断言，否则就拒绝这一断言。（1）若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.8，问接受这一断言的概率是多少？（2）若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.7，问接受这一断言的概率是多少？

解：设 X 为 100 人中治愈的人数，则 $X\sim B(n,p)$其中 n=100

（1） $$P(X>75)=1-P(X\le 75)=1-P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{75-np}{\sqrt{npq}}\right\}=1-\Phi(\frac{75-np}{\sqrt{npq}})$$

$$=1-\Phi(\frac{-5}{4})=\Phi(+\frac{5}{4})=0.8944$$

（2）p=0.7 由中心极限定理知

$$P(X>75)=1-P(X\le 75)=1-P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{75-np}{\sqrt{npq}}\right\}=1-\Phi(\frac{75-np}{\sqrt{npq}})$$

$$=1-\Phi(\frac{5}{\sqrt{21}})=1-\Phi(1.09)=1-0.8621=0.1379.$$

7．[七]　一复杂的系统，由 100 个互相独立起作用的部件所组成。在整个运行期间每个部件损坏的概率为 0.10。为了整个系统起作用至少必需有 85 个部件工作。求整个系统工作的概率。

（2）一个复杂的系统，由 n 个互相独立起作用的部件所组成，每个部件的可靠性（即

部件工作的概率）为 0.90。且必须至少有 80%部件工作才能使整个系统工作，问 n 至少为多少才能使系统的可靠性不低于 0.95。

解：（1）设每个部件为 $X_i\,(i=1,2,\cdots\cdots100)$

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{部件工作}\\ 0 & \text{部件损坏不工作}\end{cases}$$

设 X 是 100 个相互独立，服从（0－1）分布的随机变量 X_i 之和

$X=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_{100}$

由题设知　　$n=100\quad P\{X_i=1\}=p=0.9,\ P\{X_i=0\}=0.1$

$E(X_i)=p=0.9$

$D(X_i)=p\,(1-p)=0.9\times0.1=0.09$

$n\cdot E(X_i)=100\times0.9=90,\ n\,D(X_i)=100\times0.09=9$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i\geq85\right\}=P\left\{\frac{X-nE(X_i)}{\sqrt{nD(X_i)}}\geq\frac{85-nE(X_i)}{\sqrt{nD(X_i)}}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{X-90}{\sqrt{9}}\geq\frac{85-90}{\sqrt{9}}\right\}=P\left\{\frac{X-90}{3}\geq\frac{-5}{3}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{X-90}{3}<-\frac{5}{3}\right\}$$　　由中心极限定理知

$$\approx1-\int_{-\infty}^{-\frac{5}{3}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$=1-\Phi(-\frac{5}{3})$ 查标准正态分布表

$=\phi\,(1.67)$

$=0.9525$

解：（2）设每个部件为 $X_i\,(i=1,2,\cdots\cdots n)$

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{部件工作}\\ 0 & \text{部件损坏不工作}\end{cases}$$

$P\{X_i=1\}=p=0.9,\ P\{X_i=0\}=1-p=0.1$

$E(X_i)=p=0.9,\qquad D(X_i)=0.9\times0.1=0.09$

由问题知　　$P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i>\frac{80}{100}n\right\}=0.95$　求 $n=?$

而 $$P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{80}{100} n\right\}$$

$$= P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{nD(X_i)}} > \frac{\frac{80}{100} n - np}{\sqrt{nD(X_i)}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 0.9n}{0.3\sqrt{n}} > \frac{\frac{80}{100} n - 0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right\}$$

$$=1- P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 0.9n}{0.3\sqrt{n}} \le \frac{\frac{80}{100} n - 0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right\}$$ 由中心极限定理知

$$=1-\Phi\left(\frac{-0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right) \ge 0.95$$

查标准正态分布表得 $\frac{0.1n}{0.3\sqrt{n}} \ge 1.645$

解得 $n \ge 24.35$

取 $n=25$，即 n 至少为 25 才能使系统可靠性为 0.95.

[八] 随机地取两组学生，每组 80 人，分别在两个实验室里测量某种化合物的 PH 值，各人测量的结果是随机变量，它们相互独立，且服从同一分布，其数学期望为 5，方差为 0.3，以 $\overline{X}, \overline{Y}$ 分别表示第一组和第二组所得结果的算术平均：

（1）求 $P\{4.9 < \overline{X} < 5.1\}$ （2）$P\{-0.1 < \overline{X} - \overline{Y} < 0.1\}$

解：由中心极限定理知

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{80} X_i - 80\times 5}{\sqrt{80\times 0.3}} \sim N(0,1) \qquad V = \frac{\sum_{j=1}^{80} Y_j - 80\times 5}{\sqrt{80\times 0.3}} \sim N(0,1)$$

（1） $P\{4.9<\overline{X}<5.1\}=P\left\{\frac{4.9\times 80-80\times 5}{\sqrt{80\times 0.3}}<\frac{\sum_{i=1}^{80}X_i-80\times 5}{\sqrt{80\times 0.3}}<\frac{5.1\times 80-80\times 5}{\sqrt{80\times 0.3}}\right\}$

$$P\left\{-1.63<\frac{\sum_{i=1}^{80}X_i-80\times 5}{\sqrt{24}}<1.63\right\}=2\Phi(1.63)-1=2\times 0.9484-1=0.8968$$

（2）由 X_i, Y_j 的相互独立性知 $\sum_{i=1}^{80}X_i$ 与 $\sum_{j=1}^{80}Y_j$ 独立。从而 U，V 独立。

于是 $U-V\sim N(0,2)$

而 $Z\cong U-V=\frac{\sum_{i=1}^{80}X_i-\sum_{j=1}^{80}Y_j}{\sqrt{24}}$

$$P\{-0.1<\overline{X}-\overline{Y}<0.1\}=P\left\{\frac{-0.1\times 80}{\sqrt{80\times 0.3}}<\frac{\sum_{i=1}^{80}X_i-\sum_{j=1}^{80}Y_j}{\sqrt{80\times 0.3}}<\frac{0.1\times 80}{\sqrt{80\times 0.3}}\right\}$$

$$=P\{-1.63<Z<1.63\}=\Phi\left(\frac{1.63}{\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(-\frac{1.63}{\sqrt{2}}\right)=2\Phi(1.15)-1$$

=2×0.8749－1=0.7498

[九] 某种电子器件的寿命（小时）具有数学期望μ（未知），方差σ^2=400 为了估计μ，随机地取几只这种器件，在时刻 t=0 投入测试（设测试是相互独立的）直到失败，测得其寿命 $X_1,\cdots,X_n$，以 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum X_i$ 作为μ的估计，为使 $P\{|\overline{X}-\mu|\}\geq 0.95$, 问 n 至少为多少？

解：由中心极限定理知，当 n 很大时

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}=\frac{n\overline{X}-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\sim N(0,1)$$

$$P\{|\overline{X}-\mu|<1\}=P\left\{\frac{-n}{\sqrt{n\sigma^2}}<\frac{n\overline{X}-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}<\frac{n}{\sqrt{n\sigma^2}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{n}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)-\Phi\left(-\frac{n}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

$$=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{20}\right)-1\geq 0.95$$

所以$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{20}\right)\geq 0.975$

查标准正态分布表知

$$\frac{\sqrt{n}}{20}\geq 1.96$$
$$n\geq 1536.64$$

即 n 至少取 1537。

第六章　样本及抽样分布

1.[一]　在总体 N（52，6.3^2）中随机抽一容量为 36 的样本，求样本均值 $\overline{X}$ 落在 50.8 到 53.8 之间的概率。

解：

$$\overline{X}\sim N(52,\frac{6.3^2}{36}),P\{50.8<\overline{X}<53.8\}=P\{-\frac{1.2}{\frac{6.3}{6}}<\frac{\overline{X}-52}{\frac{6.3}{6}}<\frac{1.8}{\frac{6.3}{6}}\}$$

$$=\Phi(\frac{12}{7})-\Phi(\frac{-8}{7})=0.8293$$

2.[二]　在总体 N（12，4）中随机抽一容量为 5 的样本 X_1，X_2，X_3，X_4，X_5.

（1）求样本均值与总体平均值之差的绝对值大于 1 的概率。

（2）求概率 $P\{\max(X_1，X_2，X_3，X_4，X_5)>15\}$.

（3）求概率 $P\{\min(X_1，X_2，X_3，X_4，X_5)>10\}$.

解：（1） $P\{|\overline{X}-12|>1\}=P\left\{\left|\frac{\overline{X}-12}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\right|>\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\right\}=2P\left\{\left|\frac{\overline{X}-12}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\right|>\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

$$=2[1-\Phi(\frac{\sqrt{5}}{2})]=0.2628$$

（2）$P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)>15\}=1-P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)\le 15\}$

$$=1-\prod_{i=1}^{5}P\{X_i\le 15\}=1-[\Phi(\frac{15-12}{2})]^5=0.2923.$$

（3）$P\{\min(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)<10\}=1-P\{\min(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)\ge 10\}$

$$=1-\prod_{i=1}^{5}P\{X_i\ge 10\}=1-[1-\Phi(\frac{10-12}{2})]^5=1-[\Phi(1)]^5=0.5785.$$

4.[四]　设 X_1，$X_2\cdots$，X_{10} 为 N（0，0.3^2）的一个样本，求 $P\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\}$.

解：$\sum_{i=1}^{10}X_i^2\Big/0.3^2\sim\chi^2(10), P\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\}=P\{\sum_{i=1}^{10}\frac{X_i^2}{0.3^2}>16\}=0.1(\text{查表}5)$

7．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自泊松分布 $\pi(\lambda)$ 的一个样本，$\overline{X}$，S^2 分别为样本均值和样本方差，求 $E(\overline{X}), D(\overline{X}), E(S^2)$.

解：由 $X\sim\pi(\lambda)$ 知 $E(X)=\lambda$，$D(X)=\lambda$

$\therefore E(\overline{X})=E(X)=\lambda, D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{\lambda}{n}, E(S^2)=D(X)=\lambda.$

[六]　设总体 X~b(1,p)，X_1，$X_2, \cdots$，X_n 是来自 X 的样本。

（1）求 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布律；

（2）求 $\sum^{n}X_i$ 的分布律；

（3）求 $E(\overline{X}), D(\overline{X}), E(S^2)$.

解：（1）（$X_1, \cdots, X_n$）的分布律为

$$P\{X_1=i_1, X_2=i_2, \cdots, X_n=in\}\overset{\text{独立}}{=\!=}\prod_{k=1}^{n}P\{X_k=i_k\}=\prod_{k=1}^{n}P^{i_k}(1-P)^{1-i_k}$$

$$=P^{\sum_{k=1}^{n}i_k}(1-P)^{n-\sum_{i=1}^{n}i_k}, i_k=0\text{或}1, k=1,\cdots,n.$$

（2） $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n, p)$

(由第三章习题 26[二十七]知)

（3）$E(\overline{X})=E(X)=P$，

$$D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{P}{n}$$

$$E(S^2)=D(X)=P(1-P)$$

[八]设总体 $X\sim N$（μ，σ^2），X_1，…，X_{10} 是来自 X 的样本。

（1）写出 X_1，…，X_{10} 的联合概率密度（2）写出 $\overline{X}$ 的概率密度。

解：（1）(X_1，…，X_{10})的联合概率密度为

$$f(x_1,\cdots x_{10})=\prod_{i=1}^{10} f(x_i)=\prod_{i=1}^{10}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i=\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

（2）由第六章定理一知

$$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n}), n=10$$

即 $\overline{X}$ 的概率密度为

$$f_{\overline{X}}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}e^{-\frac{n(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

第七章　参数估计

1．[一]　随机地取 8 只活塞环，测得它们的直径为（以 mm 计）

74.001　74.005　74.003　74.001　74.000　73.998　74.006　74.002

求总体均值μ及方差σ²的矩估计，并求样本方差 S^2。

解：μ，σ²的矩估计是　$\hat{\mu} = \overline{X} = 74.002$　$,\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{x})^2 = 6\times 10^{-6}$

$S^2 = 6.86\times 10^{-6}$。

2．[二]设 X_1，X_1，…，X_n 为准总体的一个样本。求下列各总体的密度函数或分布律中的未知参数的矩估计量。

（1）$f(x) = \begin{cases} \theta\, c^{\theta}\, x^{-(\theta+1)}, x > c \\ 0, \text{其它} \end{cases}$　　其中 $c>0$ 为已知，$\theta>1$，θ为未知参数。

（2）$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\theta}\, x^{\sqrt{\theta}-1}, 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{其它}. \end{cases}$　　其中$\theta>0$，θ为未知参数。

（5）$P(X = x) = \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x}, x = 0,1,2,\cdots,m, 0 < p < 1, p$ 为未知参数。

解：（1）$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{c}^{+\infty} \theta\, c^{\theta}\, x^{-\theta}\, dx = \frac{\theta\, c^{\theta}}{\theta - 1} c^{-\theta+1} = \frac{\theta\, c}{\theta - 1}$，令 $\frac{\theta\, c}{\theta - 1} = \overline{X}$，得 $\theta = \frac{\overline{X}}{\overline{X} - c}$

（2）$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{1} \sqrt{\theta}\, x^{\sqrt{\theta}}\, dx = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$，令 $\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1} = \overline{X}$，得$\theta = (\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}})^2$

（5）$E(X) = mp$　　令 $mp = \overline{X}$，　　解得 $\hat{p} = \frac{\overline{X}}{m}$

3．[三]求上题中各未知参数的极大似然估计值和估计量。

解：（1）似然函数　$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \theta^{n} c^{n\theta} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{-\theta+1}$

$$\ln L(\theta) = n\ln(\theta) + n\theta \ln c + (1-\theta)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i, \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{\theta}{n} + n\ln c - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$$

$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - n\ln c}$　（解唯一故为极大似然估计量）

（2）$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \theta^{-\frac{n}{2}} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1}, \ln L(\theta) = \frac{-n}{2}\ln(\theta) + (\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{-n}{2}\cdot\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,\quad \hat{\theta}=(n\Big/\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2$$ 。(解唯一)故为极大似然估计量。

（5） $L(p)=\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}=\binom{m}{x_1}\cdots\binom{m}{x_n}p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{mn-\sum_{i=1}^{n}x_i}$ ，

$$\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n}\ln\binom{m}{x_i}+\sum_{i=1}^{n}x_i\ln p+(mn-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p),$$

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{mn-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0$$

解得 $p=\frac{\sum_{i=2}^{n}x_i}{mn}=\frac{\overline{X}}{m}$，（解唯一）故为极大似然估计量。

4．[四(2)] 设 X_1，$X_1,\cdots$，X_n 是来自参数为 λ 的泊松分布总体的一个样本，试求 λ 的极大似然估计量及矩估计量。

解：（1）矩估计 $X\sim\pi(\lambda)$，$E(X)=\lambda$，故$\hat{\lambda}=\overline{X}$ 为矩估计量。

（2）极大似然估计 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}P(x_i;\lambda)=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}e^{-n\lambda}$ ，

$$\ln L(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i!-n\lambda$$

$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}-n=0$, 解得 $\hat{\lambda}=\overline{X}$ 为极大似然估计量。

（其中 $p(x_i;\lambda)=P\{X=x_i\}=\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}$, $x_i=0,1,\cdots$)

5．[六]　一地质学家研究密歇根湖湖地区的岩石成分，随机地自该地区取 100 个样品，每个样品有 10 块石子，记录了每个样品中属石灰石的石子数。假设这 100 次观察相互独立，并由过去经验知，它们都服从参数为 n=10，P 的二项分布。P 是该地区一块石子是石灰石的概率。求 p 的极大似然估计值，该地质学家所得的数据如下

样品中属石灰石的石子数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
观察到石灰石的样品个数	0	1	6	7	23	26	21	12	3	1	0

解：λ 的极大似然估计值为$\hat{\lambda}=\overline{X}$=0.499

[四(1)]　设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
P_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中$\theta(0<\theta<1)$为未知参数。已知取得了样本值 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=1$，试求θ的矩估计值和最大似然估计值。

解：（1）求θ的矩估计值

$$E(X)=1\times\theta^2+2\cdot 2\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2$$
$$=[\theta+3(1-\theta)][\theta+(1-\theta)]=3-2\theta$$

令$E(X)=3-2\theta=\overline{X}$

则得到θ的矩估计值为$\hat{\theta}=\dfrac{3-\overline{X}}{2}=\dfrac{3-\dfrac{1+2+1}{3}}{2}=\dfrac{5}{6}$

（2）求θ的最大似然估计值

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{3}P\{X_i=x_i\}=P\{X_1=1\}P\{X_2=2\}P\{X_3=1\}$

$$=\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2$$
$$=2\theta^5(1-\theta)$$

$\ln L(\theta)$=ln2+5lnθ+ln(1－θ)

求导　$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{1-\theta}=0$

得到唯一解为$\hat{\theta}=\dfrac{5}{6}$

8．[九(1)]　设总体 $X\sim N$（μ，σ^2），X_1，X_1，…，X_n 是来自 X 的一个样本。试确定常数 c 使 $c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计。

解：由于

$$E[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2]=c[\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2]=c\sum_{i=1}^{n-1}D(X_{i+1}-X_i)^2+(E(X_{i+1}-X_i))^2]$$

$$=c\sum_{i=1}^{n-1}[D(X_{i+1})+D(X_i)+(EX_{i+1}-EX_1)^2]=c\sum_{i=1}^{n-1}(2\sigma^2+0^2)=c(2n-1)\sigma^2$$

当$c=\dfrac{1}{2(n-1)}$时，$c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计 。

[十]　设 X_1，X_2，　X_3，　X_4 是来自均值为 θ 的指数分布总体的样本，其中 θ 未知，设有估计量

$$T_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2)+\frac{1}{3}(X_3+X_4)$$

$$T_2=(X_1+2X_2+3X_3+4X_4)/5$$

$$T_3=(X_1+X_2+X_3+X_4)/4$$

（1）指出 T_1，T_2，　T_3 哪几个是θ的无偏估计量；

（2）在上述θ的无偏估计中指出哪一个较为有效。

解：（1）由于 X_i 服从均值为θ的指数分布，所以

$E(X_i)=\theta$,　　$D(X_i)=\theta^2$,　$i=1,2,3,4$

由数学期望的性质 2°，3°有

$$E(T_1)=\frac{1}{6}[E(X_1)+E(X_2)]+\frac{1}{3}[E(X_3)+E(X_4)]=\theta$$

$$E(T_2)=\frac{1}{5}[E(X_1)+2E(X_2)+3E(X_3)+4E(X_4)]=2\theta$$

$$E(T_3)=\frac{1}{4}[E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4)]=\theta$$

即 T_1，T_2 是θ的无偏估计量

（2）由方差的性质 2°，3°并注意到 X_1，X_2，　X_3，　X_4 独立，知

$$D(T_1)=\frac{1}{36}[D(X_1)+D(X_2)]+\frac{1}{9}[D(X_3)+D(X_4)]=\frac{5}{18}\theta^2$$

$$D(T_2)=\frac{1}{16}[D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)+D(X_4)]=\frac{1}{4}\theta^2$$

$D(T_1)> D(T_2)$

所以 T_2 较为有效。

14.[十四]　设某种清漆的 9 个样品，其干燥时间（以小时计）分别为 6.0　5.7　5.8　6.5　7.0　6.3　5.6　6.1　5.0。设干燥时间总体服从正态分布 $N\sim(\mu,\sigma^2)$，求μ的置信度为 0.95 的置信区间。（1）若由以往经验知σ=0.6（小时）（2）若σ为未知。

解：（1）μ的置信度为 0.95 的置信区间为（$\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}$），

计算得 $\overline{X} = 6.0$, 查表 $z_{0.025} = 1.96, \sigma = 0.6$, 即为 $(6.0 \pm \frac{0.6}{\sqrt{9}} \times 1.96) = (5.608, 6.392)$

（2）μ的置信度为 0.95 的置信区间为（$\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$），计算得 $\overline{X} = 6.0$，查表 $t_{0.025}(8)=2.3060$.

$$S^2 = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{8} \times 2.64 = 0.33.\text{ 故为}(6.0 \pm \frac{\sqrt{0.33}}{3} \times 2.3060) = (5.558, 6.442)$$

16.[十六]　随机地取某种炮弹 9 发做试验，得炮弹口速度的样本标准差为 s=11(m/s)。设炮口速度服从正态分布。求这种炮弹的炮口速度的标准差σ的置信度为 0.95 的置信区间。

解：σ的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right) = \left(\frac{\sqrt{8} \times 11}{\sqrt{17.535}}, \frac{\sqrt{8} \times 11}{\sqrt{2.18}}\right) = (7.4,\ 21.1)$$

其中α=0.05, n=9

查表知 $\chi^2_{0.025}(8) = 17.535, \chi^2_{0.975}(8) = 2.180$

19.[十九]　研究两种固体燃料火箭推进器的燃烧率。设两者都服从正态分布，并且已知燃烧率的标准差均近似地为 0.05cm/s，取样本容量为 $n_1=n_2=20$.得燃烧率的样本均值分别为 $\overline{x_1} = 18cm/s, \overline{x_2} = 24cm/s$. 设两样本独立，求两燃烧率总体均值差$\mu_1 - \mu_2$的置信度为 0.99 的置信区间。

解：$\mu_1 - \mu_2$的置信度为 0.99 的置信区间为

$$\left(\overline{X_1} - \overline{X_2} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = \left(18 - 24 + 2.58\sqrt{\frac{0.05^2}{20} \times 2}\right) = (-6.04, -5.96).$$

其中α=0.01，$z_{0.005}$=2.58,　　$n_1=n_2=20$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0.05^2, \overline{X_1} = 18, \overline{X_2} = 24$

20.[二十]　设两位化验员 A，B 独立地对某中聚合物含氯两用同样的方法各做 10 次测定，其测定值的样本方差依次为 $S_A^2 = 0.5419, S_B^2 = 0.6065$. 设$\sigma_A^2, \sigma_B^2$分别为 A，B 所测定的测定值总体的方差，设总体均为正态的。设两样本独立，求方差比σ_A^2 / σ_B^2的置信度为 0.95 的置信区间。

解：$\sigma_A^2 \big/ \sigma_B^2$ 的置信度为 0.95 的置信区间

$$\left(\frac{S_A^2}{S_B^2 F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_A^2}{S_B^2 F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)}\right)$$

$$=\left(\frac{0.5419}{0.6065\times 4.03}, \frac{0.5419\times 4.03}{0.6065}\right)=(0.222,\ 3.601).$$

其中 $n_1=n_2=10$，$\alpha=0.05$，$F_{0.025}(9,9)=4.03$，$F_{0.975}(9,9)=\dfrac{1}{F_{0.025}(9,9)}=\dfrac{1}{4.03}$。

第八章　假设检验

1.[一]某批矿砂的 5 个样品中的镍含量，经测定为（%）3.25　3.27　3.24　3.26　3.24。设测定值总体服从正态分布，问在$\alpha=0.01$ 下能否接受假设：这批矿砂的含镍量的均值为 3.25.

解：设测定值总体 $X\sim N$（μ，σ^2），μ，σ^2 均未知

步骤：（1）提出假设检验 H_0：$\mu=3.25$;　H_1：$\mu\neq 3.25$

（2）选取检验统计量为 $t=\dfrac{\overline{X}-3.25}{S\big/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

（3）H_0 的拒绝域为$|t|\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$.

（4）$n=5$,　$\alpha=0.01$，由计算知 $\bar{x}=3.252, S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{5}(X_i-\overline{X})^2}=0.01304$

查表 $t_{0.005}(4)=4.6041$,　$|t|=\left|\dfrac{3.252-3.25}{0.01304\big/\sqrt{5}}\right|=0.343<t_{\alpha/2}(n-1)$

（5）故在$\alpha=0.01$ 下，接受假设 H_0

2．[二]　如果一个矩形的宽度ω与长度 l 的比$\omega\big/l=\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\approx 0.618$，这样的矩形称为黄金矩形。这种尺寸的矩形使人们看上去有良好的感觉。现代建筑构件（如窗架）、工艺品（如图片镜框）、甚至司机的执照、商业的信用卡等常常都是采用黄金矩型。下面

列出某工艺品工厂随机取的20个矩形的宽度与长度的比值。设这一工厂生产的矩形的宽度与长短的比值总体服从正态分布，其均值为μ，试检验假设（取$\alpha = 0.05$）

H$_0$：$\mu = 0.618$　　H$_1$：$\mu \neq 0.618$

0.693　0.749　0.654　0.670　0.662　0.672　0.615　0.606　0.690　0.628　0.668

0.611　0.606　0.609　0.601　0.553　0.570　0.844　0.576　0.933.

解：步骤：（1）H$_0$：$\mu = 0.618$；H$_1$：$\mu \neq 0.618$

（2）选取检验统计量为$t = \dfrac{\overline{X} - 0.618}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

（3）H$_0$的拒绝域为$|t| \geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$.

（4）n=20　$\alpha = 0.05$，计算知

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.6605, S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 0.0925,$$

$$t_{\alpha/2}(n-1) = 2.0930, |t| = \left|\frac{0.6605 - 0.618}{0.0925/\sqrt{20}}\right| = 2.055 < t_{\alpha/2}(n-1)$$

（5）故在$\alpha = 0.05$下，接受H$_0$，认为这批矩形的宽度和长度的比值为0.618

3.[三]　要求一种元件使用寿命不得低于1000小时，今从一批这种元件中随机抽取25件，测得其寿命的平均值为950小时，已知这种元件寿命服从标准差为σ=100小时的正态分布。试在显著水平$\alpha = 0.05$下确定这批元件是否合格？设总体均值为μ。即需检验假设H$_0$：$\mu \geq 1000$，H$_1$：$\mu < 1000$。

解：步骤：（1）$H_0: \mu \geq 1000$；H$_1$：$\mu < 1000$；（σ=100已知）

（2）H$_0$的拒绝域为$\dfrac{\bar{x} - 1000}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_{\alpha}$

（3）n=25，$\alpha = 0.05$，$\bar{x} = 950$，

计算知$\dfrac{\bar{x} - 1000}{100/\sqrt{25}} = -2.5 < -z_{0.05} = 1.645$

（4）故在$\alpha = 0.05$下，拒绝H$_0$，即认为这批元件不合格。

12.[十一]　一个小学校长在报纸上看到这样的报导：“这一城市的初中学生平均每周看8小时电视”。她认为她所领导的学校，学生看电视的时间明显小于该数字。为此她向100个学生作了调查，得知平均每周看电视的时间$\bar{x} = 6.5$小时，样本标准差为s=2小时。

问是否可以认为这位校长的看法是对的？取$\alpha = 0.05$。（注：这是大样本检验问题。由中心极限定理和斯鲁茨基定理知道不管总体服从什么分布，只要方差存在，当 n 充分

大时 $\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ 近似地服从正态分布。）

解：（1）提出假设 H_0：$\mu \le 8$；H_1：$\mu > 8$

（2）当 n 充分大时，$\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ 近似地服从 N（0，1）分布

（3）H_0 的拒绝域近似为 $\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \ge z_\alpha$

（4）n=100，$\alpha = 0.05$，$\bar{x} = 6.5$，S=2，由计算知

$$|t| = \left|\frac{6.5-8}{2/\sqrt{100}}\right| = 7.5 > z_{0.05} = 1.645$$

（5）故在$\alpha = 0.05$ 下，拒绝 H_0，即认为校长的看法是不对的。

14.[十三]　某种导线，要求其电阻的标准差不得超过 0.005(欧姆)。今在生产的一批导线中取样品 9 根，测得 s=0.007(欧姆)，设总体为正态分布。问在水平$\alpha = 0.05$ 能否认为这批导线的标准差显著地偏大？

解：（1）提出 H_0：$\sigma \le 0.005$；H_1：$\sigma > 0.005$

（2）H_0 的拒绝域为 $(n-1)S^2 \big/ 0.005^2 \ge \chi^2_\alpha(n-1)$

（3）n=9，$\alpha = 0.05$，S=0.007，由计算知

$$(n-1)S^2 \big/ 0.005^2 = \frac{8 \times 0.007^2}{0.005^2} = 15.68 > \chi^2_\alpha(n-1)$$

查表$\chi^2_{0.05}(8) = 15.507$

（4）故在$\alpha = 0.05$ 下，拒绝 H_0，认为这批导线的标准差显著地偏大。

15.[十四]　在题 2 中记总体的标准差为σ。试检验假设（取$\alpha = 0.05$）

H_0：$\sigma^2 = 0.11^2$，　H_1：$\sigma^2 \ne 0.11^2$。

解：步骤（1）H_0：$\sigma^2 = 0.11^2$；　H_1：$\sigma^2 \ne 0.11^2$

（2）选取检验统计量为$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{0.11^2} \sim \chi^2(n-1)$

（3）H_0 的拒绝域为$\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$或$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

（4）n=20，$\alpha = 0.05$，由计算知 S^2=0.0925 ^{2}，$\dfrac{(n-1)S^2}{0.11^2} = 13.437$

查表知 $\chi^2_{0.025}(19) = 32.852, \chi^2_{0.975}(19) = 8.907$

（5）故在$\alpha = 0.05$，接受 H_0，认为总体的标准差σ为 0.11.

16.[十五]　测定某种溶液中的水份，它的 10 个测定值给出 s=0.037%，设测定值总体为正态分布，σ^2为总体方差。试在水平$\alpha = 0.05$ 下检验假设 H_0：$\sigma \geq 0.04\%$；H_1：$\sigma < 0.04\%$。

解：（1）H_0：$\sigma^2 \geq (0.04\%)^2$；H_1：$\sigma^2 < (0.04\%)^2$

（2）H_0 的拒绝域为$(n-1)S^2 \big/ (0.04\%)^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

（3）n=10，$\alpha = 0.05$，S=0.037%，查表知$\chi^2_{0.95}(9) = 3.325$

由计算知 $\dfrac{(n-1)S^2}{(0.04\%)^2} = \dfrac{9 \times 0.037)^2}{(0.04\%)^2} = 7.701 > \chi^2_{0.95}(9).$

（4）故在$\alpha = 0.05$ 下，接受 H_0，认为σ大于 0.04%

17.[十六]　在第 6[五]题中分别记两个总体的方差为σ_1^2和σ_2^2。试检验假设（取α = 0.05）H_0：σ_1^2**和**σ_2^2 以说在第 6[五]题中我们假设$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 是合理的。

解：（1）H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

（2）选取检验统计量为　　$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

（3）H_0 的拒绝域为 $F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$或$F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

（4）n_1=8，n_2=10，$\alpha = 0.05$，查表知 $F_{0.025}(7,9)$= 4.20

$$F_{0.975}(7,9) = \frac{1}{F_{0.025}(9,7)} = \frac{1}{4.82} = 0.207, F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0.00025}{0.00084} = 0.298$$

$F_{0.975}(7,9) < F < F_{0.025}(7,9)$

（5）故在$\alpha = 0.05$ 下，接受 H_0，认为$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

18.[十七]　在第 8 题[七]中分别记两个总体的方差为σ_1^2和σ_2^2。试检验假设（取α = 0.05）H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 以说明在第 8[七]题中我们假设$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 是合理的。

解：（1）H_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

（2）选取检验统计量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

（3）n_1=n_2=12，$\alpha=0.05$，查表知

$F_{0.025}(11,11)$= 3.34，$F_{0.975}(11,11)=\dfrac{1}{F_{0.025}(11,11)}=\dfrac{1}{3.34}=0.299$

由计算知 $S_1^2=0.932, S_2^2=1,\ 0.299<S_1^2/S_2^2=0.932<3.34$

（4）故在$\alpha=0.05$ 下，接受 H_0，认为$\sigma_1^2=\sigma_2^2$

24.[二十三]　检查了一本书的 100 页，记录各页中印刷错误的个数，其结果为

错误个数 f_i	0	1	2	3	4	5	6	≥7
含 f_i 个错误的页数	36	40	19	2	0	2	1	0

问能否认为一页的印刷错误个数服从泊松分布（取$\alpha=0.05$）。

解：（1）H_0：总体 $X\sim\pi(\lambda)$；H_1：X 不服从泊松布；（λ未知）

（2）当 H_0 成立时，λ的最大似然估计为$\hat{\lambda}=\bar{x}=1$.

（3）H_0 的拒绝域为$\chi^2=\sum\dfrac{\hat{f}_i^2}{n\hat{p}_i}-n>\chi_\alpha^2(k-\gamma-1)$

（4）n=100

$$\hat{P}_0=P\{X=0\}=\frac{e^{-1}}{0!}=0.3679$$

$$\hat{P}_1=P\{X=1\}=\frac{1^1e^{-1}}{1!}=0.3679$$

$$\hat{P}_2=P\{X=2\}=\frac{1^2e^{-1}}{2!}=0.18397$$

$$\hat{P}_3=P\{X=3\}=\frac{1^3e^{-1}}{3!}=0.06132$$

$$\hat{P}_4=P\{X=4\}=\frac{1^4e^{-1}}{4!}=0.01533$$

$$\hat{P}_5=P\{X=5\}=\frac{1^5e^{-1}}{5!}=0.003066$$

$$\hat{P}_6=P\{X=6\}=\frac{1^6e^{-1}}{6!}=0.000511$$

$$\hat{P}_7=P\{X=7\}=1-\sum^{6}\hat{P}_i=0.000083$$

对于 $j>3$，$n\hat{P}_j < 5$

将其合并得

$$\sum_{j=3}^{7} n\hat{P}_j = 8.023$$

合并后，$K=4$，$Y=1$

查表知$\chi^2_{0.05}(4-1-1) = 5.991$

由计算知$\chi^2 = \frac{36^2}{36.79} + \frac{40^2}{36.79} + \frac{19^2}{18.397} + \frac{5^2}{8.023} - 100 = 1.444$

（5）故在$\alpha = 0.05$ 下，接受 H_0，认为一页的印刷错误个数服从泊松分布。