

2013 年全国硕士研究生入学统一考试 数学一试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答 题 纸 指 定 位 置 上。

(1) 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$ ，其中 c, k 为常数，且 $c \neq 0$ ，则 ()

(A) $k = 2, c = -\frac{1}{2}$

(B) $k = 2, c = \frac{1}{2}$

(C) $k = 3, c = -\frac{1}{3}$

(D) $k = 3, c = \frac{1}{3}$

(2) 曲面 $x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面方程为 ()

(A) $x - y + z = -2$

(B) $x + y + z = 2$

(C) $x - 2y + z = -3$

(D) $x - y - z = 0$

(3) 设 $f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$, $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx (n = 1, 2, \dots)$, 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, 则 $S(-\frac{9}{4}) = ()$

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $-\frac{1}{4}$

(D) $-\frac{3}{4}$

(4) 设 $l_1: x^2 + y^2 = 1, l_2: x^2 + y^2 = 2, l_3: x^2 + 2y^2 = 2, l_4: 2x^2 + y^2 = 2$, 为四条逆时针的平面曲线, 记

$I_i = \iint_{l_i} (y + \frac{y^3}{6}) dx + (2x - \frac{x^3}{3}) dy (i = 1, 2, 3, 4)$, 则 $\max(I_i) = ()$

(A) I_1

(B) I_2

(C) I_3

(D) I_3

(5) 设矩阵 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$, 则 B 可逆, 则

(A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

(D) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

(A) $a = 0, b = 2$

(B) $a = 0, b$ 为任意常数

(C) $a = 2, b = 0$

(D) $a = 2, b$ 为任意常数

(7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0, 1)$, $X_2 \sim N(0, 2^2)$, $X_3 \sim N(5, 3^2)$,

$P_j = P\{-2 \leq X_j \leq 2\}$ ($j = 1, 2, 3$), 则 ()

(A) $P_1 > P_2 > P_3$

(B) $P_2 > P_1 > P_3$

(C) $P_3 > P_1 > P_2$

(D) $P_1 > P_3 > P_2$

(8) 设随机变量 $X \sim t(n)$, $Y \sim F(1, n)$, 给定 $a (0 < a < 0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X > c\} = a$, 则 $P\{Y > c^2\} = ()$

(A) α

(B) $1 - \alpha$

(C) 2α

(D) $1 - 2\alpha$

二、填空题：9—14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 设函数 $f(x)$ 由方程 $y - x = e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(\frac{1}{n}) - 1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$, $y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，该方程的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 设 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t \sin t + \cos t \end{cases}$ (t 为参数)，则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设 $A = (a_{ij})$ 是三阶非零矩阵， $|A|$ 为 A 的行列式， A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若

$a_{ij} + A_{ij} = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$)，则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$

(14) 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布， a 为常数且大于零，则 $P\{Y \leq a+1 | Y > a\} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$ ，其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$

(16) (本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件： $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0$ ($n \geq 2$)， $S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数，

(I) 证明： $S''(x) - S(x) = 0$ ，

(II) 求 $S(x)$ 的表达式。

(17) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = (y + \frac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值。

(18) (本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1) = 1$ ，证明：

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\xi) = 1$

(II) 存在 $\eta \in (-1, 1)$ ，使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$

(19) (本题满分 10 分)

设直线 L 过 $A(1,0,0), B(0,1,1)$ 两点, 将 L 绕 Z 轴旋转一周得到曲面 Σ , Σ 与平面 $z=0, z=2$ 所围成的立体为 Ω ,

- (I) 求曲面 Σ 的方程
- (II) 求 Ω 的形心坐标.

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$, 并求所有矩阵 C .

(21) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha^T\alpha + \beta^T\beta$;

(II) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明二次型 f 在正交变化下的标准形为二次型 $2y_1^2 + y_2^2$.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 令随机变量 $Y = \begin{cases} 2 & x \leq 1 \\ x & 1 < x < 2, \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$

(I) 求 Y 的分布函数

(II) 求概率 $P\{X \leq Y\}$

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零, X_1, X_2, \dots, X_N 为来自总体

X 的简单随机样本.

- (1) 求 θ 的矩估计量;
- (2) 求 θ 的最大似然估计量.

2013 年全国硕士研究生入学统一考试 数学一试题答案

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$ ，其中 c, k 为常数，且 $c \neq 0$ ，则 ()

- (A) $k = 2, c = -\frac{1}{2}$
(B) $k = 2, c = \frac{1}{2}$
(C) $k = 3, c = -\frac{1}{3}$
(D) $k = 3, c = \frac{1}{3}$

【答案】D

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3))}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x^k} = c, \therefore k = 3, c = \frac{1}{3}$

(2) 曲面 $x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面方程为 ()

- (A) $x - y + z = -2$
(B) $x + y + z = 2$
(C) $x - 2y + z = -3$
(D) $x - y - z = 0$

【答案】A

【解析】设 $F(x, y, z) = x^2 + \cos(xy) + yz + x$ ，

则 $F_x(x, y, z) = 2x - y \sin(xy) + 1 \Rightarrow F_x(0, 1, -1) = 1$ ；

$F_y(x, y, z) = -x \sin(xy) + z \Rightarrow F_y(0, 1, -1) = -1$ ；

$F_z(x, y, z) = y \Rightarrow F_z(0, 1, -1) = 1$ ，

所以该曲面在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面方程为 $x - (y - 1) + (z + 1) = 0$ ，

化简得 $x - y + z = -2$ ，选 A

(3) 设 $f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$, ($x \in [0, 1]$), $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx$ ($n = 1, 2, \dots$), 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, 则

$$S\left(-\frac{9}{4}\right) = (\quad)$$

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $-\frac{1}{4}$

(D) $-\frac{3}{4}$

【答案】C

【解析】根据题意, 将函数在 $[-1, 1]$ 上奇延拓 $f(x) = \begin{cases} \left| x - \frac{1}{2} \right|, & 0 < x < 1 \\ -\left| -x - \frac{1}{2} \right|, & -1 < x < 0 \end{cases}$, 它的傅里叶级数为 $S(x)$ 它是以 2 为周期的, 则当 $x \in (-1, 1)$ 且 $f(x)$ 在 x 处连续时, $S(x) = f(x)$, 因此

$$S\left(-\frac{9}{4}\right) = S\left(-\frac{9}{4} + 2\right) = S\left(-\frac{1}{4}\right) = -S\left(\frac{1}{4}\right) = -f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

(4) 设 $l_1: x^2 + y^2 = 1, l_2: x^2 + y^2 = 2, l_3: x^2 + 2y^2 = 2, l_4: 2x^2 + y^2 = 2$, 为四条逆时针的平面曲线, 记

$$I_i = \iint_{l_i} \left(y + \frac{y^3}{6} \right) dx + \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) dy (i = 1, 2, 3, 4), \text{ 则 } \max(I_i) = (\quad)$$

(A) I_1

(B) I_2

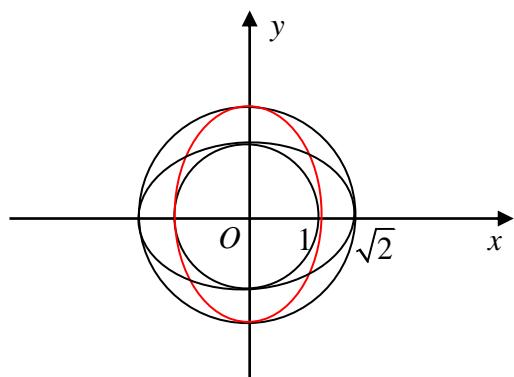
(C) I_3

(D) I_4

【答案】D

$$I_i = \iint_{l_i} \left(y + \frac{y^3}{6} \right) dx + \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) dy (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$= \iint_{D_i} \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{2} \right) dx dy$$



利用二重积分的几何意义，比较积分区域以及函数的正负，在区域 D_1, D_4 上函数为正值，则区域大，积分大，所以 $I_4 > I_1$ ，在 D_4 之外函数值为负，因此 $I_4 > I_2, I_4 > I_3$ ，故选 D。

(5) 设矩阵 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB = C$ ，且 C 可逆，则 ()

- (A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
- (B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
- (C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
- (D) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价

【答案】(B)

【解析】由 $C = AB$ 可知 C 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表示，又 B 可逆，故有 $A = CB^{-1}$ ，从而 A 的列向量组也可以由 C 的列向量组线性表示，故根据向量组等价的定义可知正确选项为 (B)。

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

- (A) $a = 0, b = 2$
- (B) $a = 0, b$ 为任意常数
- (C) $a = 2, b = 0$
- (D) $a = 2, b$ 为任意常数

【答案】(B)

【解析】由于 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 为实对称矩阵，故一定可以相似对角化，从而 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的

充分必要条件为 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为 2,b,0。

$$\text{又 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - b & -a \\ -1 & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda[(\lambda - b)(\lambda - 2) - 2a^2], \text{ 从而 } a = 0, b \text{ 为任意常数。}$$

(7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量，且 $X_1 \sim N(0, 1)$, $X_2 \sim N(0, 2^2)$, $X_3 \sim N(5, 3^2)$,

$P_j = P\{-2 \leq X_j \leq 2\} (j=1, 2, 3)$, 则 ()

- (A) $P_1 > P_2 > P_3$

(B) $P_2 > P_1 > P_3$

(C) $P_3 > P_1 > P_2$

(D) $P_1 > P_3 > P_2$

【答案】(A)

【解析】由 $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(0,2^2)$, $X_3 \sim N(5,3^2)$ 知,

$$p_1 = P\{-2 \leq X_1 \leq 2\} = P\{|X_1| \leq 2\} = 2\Phi(2) - 1,$$

$$p_2 = P\{-2 \leq X_2 \leq 2\} = P\{|X_2| \leq 2\} = 2\Phi(1) - 1, \text{ 故 } p_1 > p_2.$$

由根据 $X_3 \sim N(5,3^2)$ 及概率密度的对称性知, $p_1 > p_2 > p_3$, 故选 (A)

(8) 设随机变量 $X \sim t(n)$, $Y \sim F(1,n)$, 给定 $a(0 < a < 0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X > c\} = a$, 则 $P\{Y > c^2\} = (\quad)$

(A) α

(B) $1-\alpha$

(C) 2α

(D) $1-2\alpha$

【答案】(C)

【解析】由 $X \sim t(n)$, $Y \sim F(1,n)$ 得, $Y = X^2$, 故 $P\{Y > c^2\} = P\{X^2 > c^2\} = P\{X < -c \text{ 或 } X > c\} = 2a$

二、填空题(9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上).

(9) 设函数 $f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(\frac{1}{n})-1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】1

【解析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(\frac{1}{n})-1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = f'(0)$

由 $y-x=e^{x(1-y)}$, 当 $x=0$ 时, $y=1$

方程两边取对数 $\ln(y-x) = x(1-y)$

两边同时对 x 求导, 得 $\frac{1}{y-x}(y'-1) = (1-y) - xy'$

将 $x=0$, $y=1$ 代入上式, 得 $f'(0)=1$

(10) 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$, $y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 该方程的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - xe^{2x}$

【解析】因 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$ 是非齐次线性微分方程的解，则 $y_1 - y_2 = e^{3x} - e^x$ 是它所对应的齐次线性微分方程的解，可知对应的齐次线性微分方程的通解为 $y_p = C_1 e^{3x} + C_2 e^x$ ，因此该方程的通解可写为 $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - xe^{2x}$

$$(11) \text{ 设 } \begin{cases} x = \sin t \\ y = t \sin t + \cos t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}), \text{ 则 } \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案】 $\sqrt{2}$

$$【\text{解析}] \frac{dy}{dt} = \sin t + t \cos t - \sin t = t \cos t, \frac{dx}{dt} = \cos t, \frac{dy}{dx} = \frac{t \cos t}{\cos t} = t,$$

$$\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt} = 1, \text{ 所以 } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\cos t}, \text{ 所以 } \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

$$(12) \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\ln 2$

$$【\text{解析}] \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = - \int_1^{+\infty} \ln x d(\frac{1}{1+x}) = - \frac{\ln x}{1+x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)} dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)} dx = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right) dx = [\ln x - \ln(1+x)] \Big|_1^{+\infty} = \ln \frac{x}{1+x} \Big|_1^{+\infty} = \ln 2$$

(13) 设 $A = (a_{ij})$ 是三阶非零矩阵， $|A|$ 为 A 的行列式， A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若

$$a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3), \text{ 则 } |A| = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案】 -1

【解析】

由 $a_{ij} + A_{ij} = 0$ 可知， $A^T = -A^*$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \\ &= -\sum_{j=1}^3 a_{ij}^2 = -\sum_{i=1}^3 a_{ij}^2 < 0 \end{aligned}$$

从而有 $|A| = |A^T| = |-A^*| = -|A|^2$, 故 $|A| = -1$.

(14) 设随机变量 X 服从标准正态分布 $X \sim N(0, 1)$, 则 $E(Xe^{2X}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2e^2$

【解析】由 $X \sim N(0,1)$ 及随机变量函数的期望公式知

$$E(Xe^{2X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{2x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{1}{2}[(x-2)^2-4]} dx = 2e^2.$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx &= \int_0^1 \frac{\int_0^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt}{\sqrt{x}} dx = -\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \int_x^1 \frac{\ln(t+1)}{t} dt \\ &= -\int_0^1 dt \int_0^t \frac{\ln(t+1)}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = -2 \int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t} \cdot \sqrt{t} dt = -2 \int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{\sqrt{t}} dt \\ &= -4 \int_0^1 \ln(t+1) d\sqrt{t} = -4 \left[\sqrt{t} \ln(t+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t+1} dt \right] \\ &= -4 \ln 2 + 4 \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t+1} dt = -4 \ln 2 + 4 \int_0^1 \frac{u}{u^2+1} \cdot 2u du \\ &= -4 \ln 2 + 8 \int_0^1 \frac{u^2+1-1}{u^2+1} du = -4 \ln 2 + 8 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{u^2+1} \right) du \\ &= -4 \ln 2 + 8 \left(u - \arctan u \right) \Big|_0^1 = -4 \ln 2 + 8 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = -4 \ln 2 + 8 - 2\pi \end{aligned}$$

(16) (本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件： $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geq 2)$, $S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数,

(III) 证明： $S''(x) - S(x) = 0$,

(IV) 求 $S(x)$ 的表达式.

【解析】(I) 设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$, $S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$,

因为 $a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0$, 因此 $S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$;

(II) 方程 $S''(x) - S(x) = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 - 1 = 0$,

解得 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$, 所以 $S(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$,

又 $a_0 = S(0) = 3 \Rightarrow c_1 + c_2 = 3$, $a_1 = S'(0) = 1 \Rightarrow c_1 - c_2 = 1$,

解得 $c_1 = 2, c_2 = -1$, 所以 $S(x) = 2e^{-x} - e^x$.

17 (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = (y + \frac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值.

$$\begin{aligned} \text{【解析】} & \left\{ \begin{array}{l} f_x' = x^2 e^{x+y} + (y + \frac{x^3}{3})e^{x+y} = (x^2 + y + \frac{x^3}{3})e^{x+y} = 0 \\ f_y' = e^{x+y} + (y + \frac{x^3}{3})e^{x+y} = (1 + y + \frac{x^3}{3})e^{x+y} = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

解得 $(1, -\frac{4}{3}), (-1, -\frac{2}{3})$,

$$A = f_{xx}'' = (2x + x^2)e^{x+y} + (x^2 + y + \frac{x^3}{3})e^{x+y} = (\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 2x + y)e^{x+y}$$

$$B = f_{xy}'' = e^{x+y} + (x^2 + y + \frac{x^3}{3})e^{x+y} = (\frac{x^3}{3} + x^2 + y + 1)e^{x+y}$$

$$C = f_{yy}'' = e^{x+y} + (1 + y + \frac{x^3}{3})e^{x+y} = (\frac{x^3}{3} + y + 2)e^{x+y}$$

对于 $(1, -\frac{4}{3})$ 点, $A = 3e^{-\frac{1}{3}}, B = e^{-\frac{1}{3}}, C = e^{-\frac{1}{3}}, \Delta = AC - B^2 > 0, A > 0$,

$\therefore (1, -\frac{4}{3})$ 为极小值点, 极小值为 $-e^{-\frac{1}{3}}$

对于 $(-1, -\frac{2}{3})$, $A = -e^{-\frac{5}{3}}, B = e^{-\frac{5}{3}}, C = e^{-\frac{5}{3}}, \Delta = AC - B^2 < 0$, 不是极值.

(18) (本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有 2 阶导数, 且 $f(1) = 1$, 证明:

(III) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$

(IV) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$

【解析】(1) 令 $F(x) = f(x) - x$, $F(0) = f(0) = 0$, $F(1) = f(1) - 1 = 0$,

则 $\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = 1$

(2) 令 $G(x) = e^x(f'(x) - 1)$, 则 $G(\xi) = 0$,

又由于 $f(x)$ 为奇函数, 故 $f'(x)$ 为偶函数, 可知 $G(-\xi) = 0$,

则 $\exists \eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1, 1)$ 使 $G'(\eta) = 0$,

即 $e^\eta[f'(\eta) - 1] + e^\eta f''(\eta) = 0$, 即 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$

(19) (本题满分 10 分)

设直线 L 过 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 1)$ 两点, 将 L 绕 Z 轴旋转一周得到曲面 Σ , Σ 与平面 $z=0, z=2$ 所围成的立体为 Ω ,

(III) 求曲面 Σ 的方程

(IV) 求 Ω 的形心坐标.

【解析】(1) l 过 A, B 两点, 所以其直线方程为: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-z \\ y = z \end{cases}$

所以其绕着 z 轴旋转一周的曲面方程为:

$$x^2 + y^2 = (1-z)^2 + z^2 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{2} - (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$$

(2) 由形心坐标计算公式可得 $\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z dx dy dz}{\iiint_{\Omega} dx dy dz} = \frac{\pi \int_0^2 [z(1-z)^2 + z^2] dz}{\pi \int_0^2 [(1-z)^2 + z^2] dz} = \frac{7}{5}$, 所以形心坐标为 $(0, 0, \frac{7}{5})$

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$, 并求所有矩阵 C .

【解析】由题意可知矩阵 C 为 2 阶矩阵, 故可设 $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, 则由 $AC - CA = B$ 可得线性方程组:

$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0 \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - ax_3 = b \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1-a \end{array} \right) \end{aligned}$$

由于方程组 (1) 有解, 故有 $1+a=0, b-1-a=0$, 即 $a=-1, b=0$, 从而有

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \text{故有 } \begin{cases} x_1 = k_1 + k_2 + 1 \\ x_2 = -k_1 \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases}, \text{其中 } k_1, k_2 \text{ 任意.}$$

$$\text{从而有 } C = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$$

(21) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha^T\alpha + \beta^T\beta$;

(II) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明二次型 f 在正交变化下的标准形为二次型 $2y_1^2 + y_2^2$ 。

【解析】(1)

$$f = (2a_1^2 + b_1^2)x_1^2 + (2a_2^2 + b_2^2)x_2^2 + (2a_3^2 + b_3^2)x_3^2 + (4a_1a_2 + 2b_1b_2)x_1x_2 + (4a_1a_3 + b_1b_3)x_1x_3 + (4a_2a_3 + 2b_2b_3)x_2x_3$$

$$\text{则 } f \text{ 的矩阵为 } \begin{pmatrix} 2a_1^2 + b_1^2 & 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_1a_3 + b_1b_3 \\ 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_2^2 + b_2^2 & 2a_2a_3 + b_2b_3 \\ 2a_1a_3 + b_1b_3 & 2a_2a_3 + b_2b_3 & 2a_3^2 + b_3^2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{pmatrix} = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$$

(2) 令 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, 则 $A\alpha = 2\alpha\alpha^T\alpha + \beta\beta^T\alpha = 2\alpha, A\beta = 2\alpha\alpha^T\beta + \beta\beta^T\beta = \beta$, 则 1,2 均为 A 的特征值, 又由于 $r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 2$, 故 0 为 A 的特征值, 则三阶矩阵 A 的特征值为 2,1,0, 故 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 令随机变量 $Y=\begin{cases} 2 & x \leq 1 \\ x & 1 < x < 2, \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$

(I) 求 Y 的分布函数

(II) 求概率 $P\{X \leq Y\}$

【解析】(1) $F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$

由 Y 的概率分布知, 当 $y < 1$ 时, $F_Y(y) = 0$;

当 $y > 2$ 时, $F_Y(y) = 1$;

当 $1 \leq y \leq 2$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{Y = 1\} + P\{1 < Y \leq y\} = P\{Y = 1\} + P\{1 < X \leq y\}$

$$\begin{aligned} &= P\{X \geq 2\} + P\{1 < X \leq y\} = \int_2^3 \frac{1}{9}x^2 dx + \int_1^y \frac{1}{9}x^2 dx \\ &= \frac{1}{27}(y^3 + 18) \end{aligned}$$

(2) $P\{X \leq Y\} = P\{X \leq Y, X \leq 1\} + P\{X \leq Y, 1 < X < 2\} + P\{X \leq Y, X > 2\} = \frac{8}{27}$

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

【解析】(1) $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}} dx = \theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\theta}{x}} d(-\frac{\theta}{x}) = \theta$, 令 $EX = \bar{X}$, 故 θ 矩估计量为 \bar{X} .

(2) $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \frac{\theta^2}{x_i^3} e^{-\frac{\theta}{x_i}} & x_i > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} \theta^{2n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i^3} e^{-\frac{\theta}{x_i}} & x_i > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

当 $x_i > 0$ 时,

$$\ln L(\theta) = 2n \ln \theta - 3 \sum_{i=1}^n \ln x_i - \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0,$$

得 $\theta = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$ ， 所以得 θ 极大似然估计量 $\hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$.