2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, x>0\\ b, x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则

(A) $ab=\frac{1}{2}$　(B) $ab=-\frac{1}{2}$　(C) $ab=0$　(D) $ab=2$

（2）设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$ 则

(A) $f(1)>f(-1)$　(B) $f(1)<f(-1)$

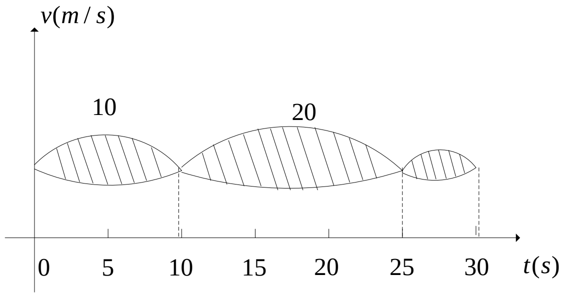
(C) $|f(1)|>|f(-1)|$　(D) $|f(1)|<|f(-1)|$

（3）函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $n(1,2,2)$ 的方向导数为（ ）

(A)12　(B)6　(C)4　(D)2

（4）甲乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10（单位:m）处,如下图中，实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$（单位:m/s）虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为 10，20，3，计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0（单位:s）,则

(A) $t_0=10$　(B) $15<t_0<20$　(C) $t_0=25$　(D) $t_0>25$



（5）设α为 n 维单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则

(A) $E-\alpha\alpha^T$不可逆　(B) $E+\alpha\alpha^T$不可逆

(C) $E+2\alpha\alpha^T$不可逆　(D) $E-2\alpha\alpha^T$不可逆

（6）已知矩阵$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则

(A) A 与 C 相似，B 与 C 相似

(B) A 与 C 相似，B 与 C 不相似

(C) A 与 C 不相似，B 与 C 相似

(D) A 与 C 不相似，B 与 C 不相似

（7）设A,B为随机事件，若$0<P(A)<1,0<P(B)<1$,则$P\left(A\middle|B\right)>P\left(A\middle|\bar{B}\right)$的充分必要条件是（ ）

A. $P\left(B\middle|A\right)>P\left(B\middle|\bar{A}\right)$　B $P\left(B\middle|A\right)<P\left(B\middle|\bar{A}\right)$

C. $\mathrm{P}\left(\bar{B}\middle|A\right)>\mathrm{P}\left(B\middle|\bar{A}\right)$　D. $\mathrm{P}\left(\bar{B}\middle|A\right)<\mathrm{P}\left(B\middle|\bar{A}\right)$

（8）设$X_1,X_2......X_n(n\geq 2)$来自总体 $N(\mu,1)$的简单随机样本，记$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

则下列结论中不正确的是：

(A) $\sum(X_i-\mu)^2$服从χ^2分布

(B) $2(X_n-X_1)^2$服从χ^2分布

(C) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$服从$\chi^2$分布

(D) $n(\bar{X}-\mu)^2$ 服从χ^2分布

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。

（9） 已知函数$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$,则$f^{(3)}(0)=$________

（10）微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$________

（11）若曲线积分 $\int_L \frac{xdx-aydy}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关，则 $a=$ __

（12）幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间（-1,1）内的和函数 $S(x)=$ ________

（13）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 的秩为

（14）设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 EX=

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）(本题满分 10 分)

设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(e^x,cosx)$,求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$

（16）(本题满分 10 分)

求 $\lim_{n\to k}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

（17）(本题满分 10 分)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 得极值

（18）(本题满分 10 分)

$f(x)$在$[0,1]$上具有 2 阶导数，$f(1)>0,\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$

证（1） 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 至少存在一个根

（2） 方程 $f(x)+f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同的实根

（19）（本题满分 10 分）

设薄片型物体 S 是圆锥面 $Z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $Z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点弧度为 $u(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。记圆锥与柱面的交线为 C

（1）求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程

（2）求 S 的质量 M

（20）（本题满分 11 分）

三阶行列式 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$

（1）证明 $r(A)=2$

（2）如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 求方程组 $Ax=b$ 的通解

（21）（本题满分 11 分）

设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$ 求 a 的值及一个正交矩阵 Q.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 XY 互独立，且X的概率分布为 $P\{X=0\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$，Y 概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}2y,0<y<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

(1)求 $P\{Y\le EY\}$　(2)求 $Z=X+Y$ 的概率密度

（23）（本题满分 11 分）

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 相互独立，且均服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $z_i=\left|x_i-\mu\right|,\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，利用 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 估计 σ

(I)求 z_1 的概率密度

(II)利用一阶矩求 σ 的矩估计量

(III)求 σ 的最大似然估计量

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, x>0\\ b, x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（　　）

$(A)ab=\dfrac{1}{2}$　　　　$(B)ab=-\dfrac{1}{2}$

$(C)ab=0$　　　　$(D)ab=2$

【答案】A

【解析】$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x}{ax}=\dfrac{1}{2a}$,$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\therefore\dfrac{1}{2a}=b\Rightarrow ab=\dfrac{1}{2}$. 选 A.

（2）设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则（　　）

$(A)f(1)>f(-1)$　　$(B)f(1)<f(-1)$

$(C)|f(1)|>|f(-1)|$　　$(D)|f(1)|<|f(-1)|$

【答案】C

【解析】$\because f(x)f'(x)>0,\therefore\begin{cases}f(x)>0\\ f'(x)>0\end{cases}$ (1) 或 $\begin{cases}f(x)<0\\ f'(x)<0\end{cases}$ (2)，只有 C 选项满足 (1) 且满足 (2)，所以选 C。

（3）函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $u=(1,2,2)$ 的方向导数为（　　）

$(A)12$　　$(B)6$　　$(C)4$　　$(D)2$

【答案】D

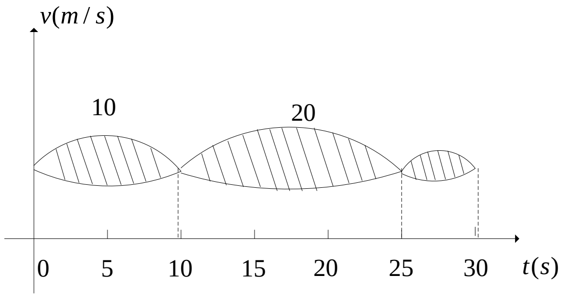
【解析】

$$gradf=\{2xy,x^2,2z\},\Rightarrow gradf\Big|_{(1,2,0)}=\{4,1,0\}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial u}=gradf\cdot\frac{u}{|u|}=\{4,1,0\}\cdot\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\}=2.$$

选 D.

（4）甲乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10（单位：m）处，图中实线表示甲的速度

曲线$v=v_1(t)$（单位：m/s），虚线表示乙的速度曲线$v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为 10,20,3，计时开始后乙追上甲的时刻记为t_0（单位：s），则（　　）



$(A)t_0=10$　　$(B)15<t_0<20$　　$(C)t_0=25$　　$(D)t_0>25$

【答案】B

【解析】从 0 到t_0这段时间内甲乙的位移分别为$\int_0^{t_0} v_1(t)dt, \int_0^{t_0} v_2(t)dt$, 则乙要追上甲，则$\int_0^{t_0} v_2(t)-v_1(t)dt=10$，当$t_0=25$时满足，故选 C.

（5）设α是n维单位列向量，E为n阶单位矩阵，则（　　）

$(A)E-\alpha\alpha^T$不可逆　　$(B)E+\alpha\alpha^T$不可逆
$(C)E+2\alpha\alpha^T$不可逆　　$(D)E-2\alpha\alpha^T$不可逆

【答案】A

【解析】选项 A,由$(E-\alpha\alpha^T)\alpha=\alpha-\alpha=0$得$(E-\alpha\alpha^T)x=0$有非零解，故$\left|E-\alpha\alpha^T\right|=0$。即$E-\alpha\alpha^T$不可逆。选项 B,由$r(\alpha\alpha^T)\alpha=1$得$\alpha\alpha^T$的特征值为 n-1 个 0，1.故$E+\alpha\alpha^T$的特征值为 n-1 个 1，2.故可逆。其它选项类似理解。

（6）设矩阵$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,则（　）

$(A)A$与C相似,B与C相似　　$(B)A$与C相似,B与C不相似
$(C)\ A$与C不相似,B与C相似　　$(D)A$与C不相似,B与C不相似

【答案】B

【解析】由 $(\lambda E-A)=0$ 可知 A 的特征值为 2,2,1

因为 $3-r(2E-A)=1$，$\therefore$A 可相似对角化，且 $A\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

由 $|\lambda E-B|=0$ 可知 B 特征值为 2,2,1.

因为 $3-r(2E-B)=2$，$\therefore$B 不可相似对角化，显然 C 可相似对角化，

$\therefore A\sim C$，且 B 不相似于 C

（7）设 A,B 为随机概率，若 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$，则 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$ 的充分必要条件是（　）

$(A)P(B|A)>P(B|\overline{A})\qquad(B)P(B|A)<P(B|\overline{A})$

$(C)P(\overline{B}|A)>P(B|\overline{A})\qquad(D)P(\overline{B}|A)<P(B|\overline{A})$

【答案】A

【解析】按照条件概率定义展开，则 A 选项符合题意。

（8）设 $X_1,X_2\cdots X_n(n\geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论中不正确的是（　）

$(A)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$服从$\chi^2$分布　　$(B)2(X_n-X_1)^2$服从χ^2分布

$(C)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$服从$\chi^2$分布　　$(D)n(\overline{X}-\mu)^2$服从χ^2分布

【答案】B

【解析】

$$X\sim N(\mu,1),X_i-\mu\sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n),A\text{正确}$$

$$\Rightarrow(n-1)S^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1),\ \text{C正确，}$$

$$\Rightarrow\overline{X}\sim N(\mu,\frac{1}{n}),\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)\sim N(0,1),n(\overline{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1),D\text{正确,}$$

$$\Rightarrow\sim N(0,2),\frac{(X_n-X_1)^2}{2}\sim\chi^2(1),\text{故B错误.}$$

由于找不正确的结论，故 B 符合题意。

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(3)}(0)=$________

【答案】 $f(0)=-6$

【解析】

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$f'''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n 2n(2n-1)(2n-2)x^{2n-3}\Rightarrow f'''(0)=0$$

(10) 微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$________

【答案】 $y=e^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x)$，（$c_1,c_2$ 为任意常数）

【解析】齐次特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+3=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=-1+\sqrt{2}i$

故通解为 $e^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x)$

(11) 若曲线积分 $\int_L\dfrac{xdx-aydy}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关，则 $a=$________

【答案】 $a=1$

【解析】 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2-1)^2}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{2axy}{(x^2+y^2-1)^2}$，由积分与路径无关知 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow a=-1$

(12) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)=$________

【答案】 $s(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

【解析】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n\right)'=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)'=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

（13）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组

$A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 的秩为________

【答案】2

【解析】由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，可知矩阵 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可逆，故

$r\left(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3\right)=r\left(A\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\right)=r\left(A\right)$ 再由 $r\left(A\right)=2$ 得 $r\left(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3\right)=2$

（14）设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $EX=$________

【答案】2

【解析】$F'(x)=0.5\varphi(x)+\frac{0.5}{2}\varphi(\frac{x-4}{2})$，故 $EX=0.5\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx+\frac{0.5}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(\frac{x-4}{2})dx$

$\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=EX=0$。令 $\frac{x-4}{2}=t$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(\frac{x-4}{2})dx$ =

$2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(4+2t\right)\varphi(t)dt=8\cdot1+4\int_{-\infty}^{+\infty}t\varphi(t)dt=8$

因此 $E(X)=2$.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos x)$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$

【答案】$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f_1'(1,1),\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}''(1,1),$

【解析】

$$y = f(e^x, \cos x) \overset{x=0}{\Rightarrow} y(0) = f(1,1)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left(f_1' e^x + f_2' (-\sin x) \right)\Big|_{x=0} = f_1'(1,1)\cdot 1 + f_2'(1,1)\cdot 0 = f_1'(1,1)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = f_{11}'' e^{2x} + f_{12}'' e^x(-\sin x) + f_{21}'' e^x(-\sin x) + f_{22}'' \sin^2 x + f_1' e^x - f_2' \cos x$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = f_{11}''(1,1) + f_1'(1,1) - f_2'(1,1)$$

结论：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = f_1'(1,1)$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = f_{11}''(1,1) + f_1'(1,1) - f_2'(1,1)$$

（16）（本题满分 10 分）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n}) = \int_0^1 x\ln(1+x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+x)dx^2 = \frac{1}{2}(\ln(1+x)\cdot x^2\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2-1+1}{1+x}dx) = \frac{1}{4}$$

（17）（本题满分 10 分）

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值

【答案】极大值为 $y(1)=1$，极小值为 $y(-1)=0$

【解析】

两边求导得：

$$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0 \qquad （1）$$

令 $y'=0$ 得 $x=\pm1$

对（1）式两边关于 x 求导得　$6x+6y(y')^2+3y^2y''+3y''=0$　　（2）

将 $x=\pm1$ 代入原题给的等式中，得 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases} or \begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$，

将 $x=1,y=1$ 代入（2）得 $y''(1)=-1<0$

将 $x=-1,y=0$ 代入（2）得 $y''(-1)=2>0$

故 $x=1$ 为极大值点， $y(1)=1$； $x=-1$ 为极小值点， $y(-1)=0$

（18）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)>0,\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，证明：

(I) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

(Π) 方程 $f(x)f^{'}(x)+(f^{'}(x))^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根。

【答案】

【解析】

（I） $f(x)$ 二阶导数， $f(1)>0,\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$

解：1）由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，根据极限的保号性得

$\exists\delta>0,\forall x\in(0,\delta)$ 有 $\dfrac{f(x)}{x}<0$，即 $f(x)<0$

进而 $\exists x_0\in(0,\delta)有f\left(\delta\right)<0$

又由于 $f(x)$ 二阶可导，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上必连续

那么 $f(x)$ 在 $[\delta,1]$ 上连续，由 $f(\delta)<0,f(1)>0$ 根据零点定理得：

至少存在一点 $\xi\in(\delta,1)$，使 $f(\xi)=0$，即得证

（II）由（1）可知 $f(0)=0$， $\exists\xi\in(0,1),使f(\xi)=0$， 令 $F(x)=f(x)f'(x)$， 则

$f(0)=f(\xi)=0$

由罗尔定理 $\exists\eta\in(0,\xi),使f'(\eta)=0$，则 $F(0)=F(\eta)=F(\xi)=0$，

对 $F(x)$ 在 $(0,\eta),(\eta,\xi)$ 分别使用罗尔定理：

$\exists\eta_1\in(0,\eta),\eta_2\in(\eta,\xi)$ 且 $\eta_1,\eta_2\in(0,1),\eta_1\neq\eta_2$， 使得 $F'(\eta_1)=F'(\eta_2)=0$，即

$F'(x)=f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$ 在 $(0,1)$ 至少有两个不同实根。

得证。

（19）（本题满分 10 分）

设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点的密度

为

$\mu=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 。记圆锥面与柱面的交线为C

(I) 求C在xOy平面上的投影曲线的方程；

(Π) 求S的M质量。

【答案】64

【解析】

（1）由题设条件知，C的方程为$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2x \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=2x$

则C在xoy平面的方程为$\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ z=0 \end{cases}$

（2）

$$m=\iint_s \mu(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})dS=\iint_s 9\sqrt{x^2+y^2+z^2}dS=\iint_{D:x^2+y^2\le 2x} 9\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy$$

$$=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr=64$$

（20）（本题满分 11 分）设 3 阶矩阵$A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$有 3 个不同的特征值，且$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$。

(I) 证明 $r(A)=2$；

(Π) 若$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组$Ax=\beta$的通解。

【答案】(I) 略；(II) 通解为$k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R$

【解析】

(I) 证明：由$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$可得$\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$，即$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，

因此，$|A|=|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|=0$，即 A 的特征值必有 0。

又因为 A 有三个不同的特征值，则三个特征值中只有 1 个 0，另外两个非 0.

且由于 A 必可相似对角化，则可设其对角矩阵为$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & 0\end{pmatrix},\lambda_1\ne\lambda_2\ne 0$

$\therefore r(A)=r(\Lambda)=2$

（II）由（1）$r(A)=2$，知 $3-r(A)=1$，即 $Ax=0$ 的基础解系只有 1 个解向量，

由 $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$ 可得 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=0$，则 $Ax=0$ 的基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，

又 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，即 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta$，则 $Ax=\beta$ 的一个特解为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

综上，$Ax=\beta$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R$

（21）（本题满分 11 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $X=QY$ 下的标准型 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q

【答案】$a=2;Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}, f \overset{x=Qy}{=\!=} -3y_1^2+6y_2^2$

【解析】

$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，其中 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\1 & -1 & 1\\-4 & 1 & a\end{pmatrix}$

由于 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 经正交变换后，得到的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，

故 $r(A)=2\Rightarrow|A|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}2 & 1 & -4\\1 & -1 & 1\\-4 & 1 & a\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=2$，

将 $a=2$ 代入，满足 $r(A)=2$，因此 $a=2$ 符合题意，此时 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\1 & -1 & 1\\-4 & 1 & 2\end{pmatrix}$，则

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 4\\ -1 & \lambda+1 & -1\\ 4 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_1=-3,\lambda_2=0,\lambda_3=6，$$

由 $(-3E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值-3 的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$；

由 $(6E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值 6 的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

由 $(0E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值 0 的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-3 & & \\ & 6 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 彼此正交，故只需单位化即

可：$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$,,

则 $Q=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，$Q^TAQ=\begin{pmatrix}-3 & & \\ & 6 & \\ & & 0\end{pmatrix}$

$$f\overset{x=Qy}{=}-3y_1^2+6y_2^2$$

（22）（本题满分 11 分）设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P(X=0)=P(X=2)=\frac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

(I) 求 $P(Y\le EY)$

(Π) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

【答案】$(\text{I})P\{Y\le EY\}=\frac{4}{9}$;$(\text{II})\ f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0<z<1\\ z-2, 2<z<3\end{cases}$

【解析】

$$(\text{I})E(Y)=\int_0^1 y2ydy=\frac{2}{3}$$

$$P(Y\le EY)=P(Y\le\frac{2}{3})=\int_0^{\frac{2}{3}}2ydy=\frac{4}{9}$$

$$(\Pi)F_z(Z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$$
$$=P(X+Y\le z,X=0)+P(X+Y\le z,X=2)$$
$$=P(Y\le z,X=0)+P(Y\le z-2,X=2)$$
$$=\frac{1}{2}P(Y\le z)+\frac{1}{2}P(Y\le z-2)$$

（1） 当 $z<0,z-2<0$，而 $z<0$，则 $F_z(Z)=0$

（2） 当 $z-2\ge 1,z>1,$ 即 $z\ge 3$ 时，$F_z(Z)=1$

（3）当 $0\le z<1$ 时，$F_z(Z)=\frac{1}{2}z^2$

（4）当 $1\le z<2$ 时，$F_z(Z)=\frac{1}{2}$

（5）当 $2\le z<3$ 时，$F_z(Z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(z-2)^2$

所以综上 $F_z(Z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \frac{1}{2}z^2, 0\le z<1\\ \frac{1}{2},1\le z<2\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(z-2)^2,2\le z<3\\ 1, \quad z\ge 3\end{cases}$

所以 $f_z(Z)=[F_z(Z)]'=\begin{cases}z & 0<z<1\\ z-2 & 2<z<3\end{cases}$

（23）（本题满分 11 分）某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $X_1,X_2\cdots X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots n)$，利用 $Z_1,Z_2\cdots Z_n$ 估计 σ。

(I) 求 Z_i 的概率密度；

(Π) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量

【答案】

$$(I)\, f_{Z_i}(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases};$$

$$(II)\text{矩估计}\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|;$$

$$(III)\text{最大似然估计：}\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$$

【解析】$(\mathrm{I})F_{z_i}(z)=P(Z_i\le z)=P(|X_i-\mu|\le z)$

当 $z<0, F_{z_i}(z)=0$

当 $z\ge 0, F_{z_i}(z)=P(-z\le X_i-\mu\le z)=P(\mu-z\le X_i\le \mu+z)=F_X(\mu+z)-F(\mu-z)$

当 $z\ge 0$ 时，

$$\therefore f_{z_i}(z)=\left(F_{z_i}(z)\right)'=f_x(\mu+z)+f_x(\mu-z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{综上 } f_{z_i}(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, z>0\\ 0\ , z\le 0\end{cases}$$

$$(\Pi)E\left(Z_i\right)=\int_0^{+\infty}z\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz^2$$

$$=\frac{-2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}d(-\frac{z^2}{2\sigma^2})=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

令 $E(Z_i)=\overline{Z}$　　　$\overline{Z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$

由此可得 σ 的矩估计量 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$

对总体 X 的 n 个样本 $X_1,X_2,\cdots X_n$，则相交的绝对误差的样本

$Z_1, Z_2, \cdots Z_n, Z_i = |x_i - u|, i = 1, 2 \ldots n,$ 令其样本值为 $Z_1, Z_2, \cdots Z_n, Z_i = |x_i - u|$

则对应的似然函数 $L(\sigma) = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i^2}{2\sigma^2}}, Z_1, Z_2, \cdots Z_n > 0 \\ 0\text{,其他} \end{cases}$

两边取对数，当 $Z_1, Z_2, \cdots Z_n > 0$ 时

$$\ln L(\sigma) = n \ln \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma}} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

令 $\dfrac{d \ln L(\sigma)}{d\sigma} = -\dfrac{n}{u} + \dfrac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = 0$

所以，$\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i^2} = \sqrt{\dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - u)^2}$ 为所求的最大似然估计。