2014 硕士研究生入学考试

数学一

一、选择题 1—8 小题．每小题 4 分，共 32 分．

1．下列曲线有渐近线的是（　）

（A）$y=x+\sin x$　（B）$y=x^2+\sin x$　（C）$y=x+\sin\frac{1}{x}$　（D）$y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

2．设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在 $[0,1]$ 上（　）

（A）当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　（B）当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

（C）当 $f''(x)\le 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　（D）当 $f''(x)\le 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

3．设 $f(x)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dy=$（　）

（A）$\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

（B）$\int_0^1 dx\int_0^{1-x1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$

（C）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

（D）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

4．若函数 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2dx=\min\limits_{a,b\in R}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx\right\}$，则

$a_1\cos x+b_1\sin x=$（　）

（A）$2\sin x$　（B）$2\cos x$　（C）$2\pi\sin x$　（D）$2\pi\cos x$

5．行列式 $\begin{vmatrix}0 & a & b & 0\\ a & 0 & 0 & b\\ 0 & c & d & 0\\ c & 0 & 0 & d\end{vmatrix}$ 等于（　）

（A）$(ad-bc)^2$　（B）$-(ad-bc)^2$　（C）$a^2d^2-b^2c^2$　（D）$-a^2d^2+b^2c^2$

6．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维向量，则对任意的常数 k,l，向量 $\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的（　）

（A）必要而非充分条件 （B）充分而非必要条件 （C）充分必要条件 （D）非充分非必要条件

7．设事件 A，B 想到独立，$P(B)=0.5, P(A-B)=0.3$ 则 $P(B-A)=$（ ）

（A）0.1 （B）0.2 （C）0.3 （D）0.4

8. 设连续型随机变量 X_1, X_2 相互独立，且方差均存在，X_1, X_2 的概率密度分别为 $f_1(x), f_2(x)$，随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}(f_1(y)+f_2(y))$，随机变量 $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，则（ ）

（A） $EY_1>EY_2, DY_1>DY_2$ （B） $EY_1=EY_2, DY_1=DY_2$

（C） $EY_1=EY_2, DY_1<DY_2$ （D） $EY_1=EY_2, DY_1>DY_2$

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

9．曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为________.

10．设 $f(x)$ 为周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1), x\in[0,2]$，则 $f(7)=$________________.

11．微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足 $y(1)=e^3$ 的解为_____________.

12. 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 和平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正方向往负方向看是逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L zdx+ydz=$______________.

13．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围是______________.

14．设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{3\theta^2}, \theta<x<2\theta \\ 0,\quad 其它\end{cases}$，其中 θ 是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体的简单样本，若 $C\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计，则常数 $C=$____________.

三、解答题

15.（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left(t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right)dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$.

16.（本题满分 10 分）

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值.

17．（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数， $z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$． 若 $f(0)=0,f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

18．（本题满分 10 分）

设曲面 $\Sigma: z=x^2+y^2(z\le 1)$ 的上侧，计算曲面积分：$\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$

（1） 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；

（2） 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛.

19．（本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\dfrac{\pi}{2},0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$， $\cos a_n-a_n=\cos b_n$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

20．（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&3\end{pmatrix}$，E 为三阶单位矩阵.

（3） 求方程组 $AX=0$ 的一个基础解系；

（4） 求满足 $AB=E$ 的所有矩阵.

21．（本题满分 11 分）

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似.

22．（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的分布为 $P(X=1)=P(X=2)=\dfrac{1}{2}$，在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i),i=1,2$．

（5） 求 Y 的分布函数；

（6） 求期望 $E(Y)$.

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的分布函数为 $F(x,\theta)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，其中 θ 为未知的大于零的参数，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的简单随机样本，

（1）求 $E(X),E(X^2)$；（2）求 θ 的极大似然估计量.

（3）是否存在常数 a，使得对任意的 $\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-a\right|\geq\varepsilon\right\}=0$.

2014 年考研数学一答案解析

1、C

$$y=x+\sin\frac{1}{x}$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(y-x\right)=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$$

$$\therefore y=x+\sin\frac{1}{x}\text{存在斜渐近线}y=x$$

2、D

解：令 $F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x$

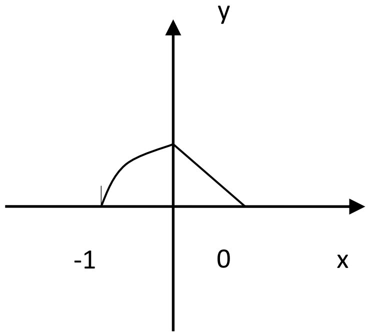
有 $F(0)=F(1)=0$，$F'(x)=f'(x)+f(0)-f(1)$，$F''(x)=f''(x)$

当 $f''(x)\geq 0$ 时，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上是凹的，所以 $F(x)\leq 0$，从而 $f(x)\leq g(x)$

3、D

区域如图：

选择极坐标：



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) rdr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) rdr$$

若为直角坐标

$$\int_{-1}^{0} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f\left(x, y\right) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f\left(x, y\right) dy$$

4、A

解析：

$$\mathrm{I} = \int_{-\pi}^{\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x - 2ax\cos x - 2bx\sin x + 2ab\sin x\cos x) dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} (x^2 + a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x - 2bx\sin x) dx$$

$$= 2(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2}a^2 + \frac{\pi}{2}b^2 - 2\pi b)$$

当$a = 0, b = 2$时，I最小

故 a, cosx+b, sinx=2sinx

5、B

解析：

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$= a\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} + c\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a\times d\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - c\times b\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= -ad\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= (bc-ad)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= -(ad-bc)^2$$

6、A

解析：

已知α_1，α_2，α_3无关

设$\lambda_1(\alpha_1+\mathrm{k}\alpha_3)+\lambda_2(\alpha_2+l\alpha_3)=0$

即$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+$（$\mathrm{k}\lambda_1+l\lambda_2)\alpha_3=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=k\lambda_1+l\lambda_2=0$

从而$\alpha_1+\mathrm{k}\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$无关

反之，若$\alpha_1+\mathrm{k}\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$无关，不一定有$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$无关

例如，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

7、B

$P(AB) = P(A)P(B) = [P(A-B)+P(AB)]P(B) = (0.3+P(AB))0.5$

$\Rightarrow P(AB) = 0.3$

$P(B-A) = P(B)-P(AB) = 0.5-0.3 = 0.2$

8、（D）

解：$Y_2=\dfrac{1}{2}(X_1+X_2)$，$EY_2=E[\dfrac{1}{2}(X_1+X_2)]=\dfrac{1}{2}(EX_1+EX_2)$，

$DY_2=D[\dfrac{1}{2}(X_1+X_2)]=\dfrac{1}{4}(DX_1+DX_2)$。

$f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$， $EY_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{2}[f_1(y)+f_2(y)]dy=\frac{1}{2}(EX_1+EX_2)=EY_2$，

$$EY_1^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^2}{2}[f_1(y)+f_2(y)]dy=\frac{1}{2}(EX_1^2+EX_2^2)，$$

$$DY_1=EY_1^2-(EY_1)^2=\frac{1}{2}(EX_1^2+EX_2^2)-\frac{1}{4}(EX_1+EX_2)^2$$

$$=\frac{1}{4}\left[2EX_1^2+2EX_2^2-(EX_1)^2-(EX_2)^2-2EX_1\cdot EX_2\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[DX_1+DX_2+EX_1^2+EX_2^2-2EX_1\cdot EX_2\right]$$

$$\ge\frac{1}{4}\left[DX_1+DX_2+(EX_1)^2+(EX_2)^2-2EX_1\cdot EX_2\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[DX_1+DX_2+(EX_1-EX_2)^2\right]\ge DY_2$$

9、

$F(x,y,z)=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)-z$

$F'_x=2x(1-\sin y)-y^2\cos x$

$F'_y=x^2(-\cos y)+2y(1-\sin x)$

$F'_z=-1$ $\quad F'_x\big|_{(1,0,1)}=2$ $\quad F'_y=-1$

$\therefore 2(x-1)+(-1)(y-0)+(-1)(z-1)=0$

$\therefore 2x-y-z-1=0$

10.

$f'(x)=2(x-1)x\in[0,2]$

$\therefore f(x)=x^2-2x+c$

又$f(x)$是奇函数

$\therefore f(0)=0\therefore c=0$

$\therefore f(x)=x^2-2x$

$x\in[0,2]$

$f(x)$的周期为4

$\therefore f(7)=f(3)=f(-1)=-f(1)=-(1-2)=1$

11、

$$xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$$

$$y' + \frac{y}{x}\ln\frac{x}{y} = 0$$

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u'x + u$$

$$\therefore u'x + u = u\ln u$$

$$\frac{u'}{u\ln u - u} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{u'}{u\ln u - u}dx = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln\left|\ln u - 1\right| = \ln\left|x\right| + C_1$$

$$\ln u - 1 = cx \text{即} y = xe^{cx+1}$$

又 $y(1)=e^3$　　$\therefore e^3 = e^{c+1}$　　$\therefore c = 2$

$$\therefore y = xe^{2x+1}$$

12、

答案：π

由斯托克斯公示：

$$\oint_L zdx + ydz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & 0 & y \end{vmatrix} ds$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & 0 & y \end{vmatrix} ds = \iint_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{2}}ds = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi\sqrt{2} = \pi$$

其中$\sum$ 为$\begin{cases} y+z = 0(\text{上侧}) \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$

13、

$[-2, 2]$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2a\, x_1x_3 + 4\, x_2x_3$$

$$= x_1^2 + 2a\, x_1x_3 + a^2\, x_3^2 - x_2^2 + 4\, x_2x_3 - a^2\, x_3^2$$

$$= (x_1 + a\, x_3)^2 - (x_2 - 2\, x_3)^2 + (4 - a^2)\, x_3^2$$

$$= y_1^2 - y_2^2 + (4 - a^2)y_3^2$$

若负惯性指数为1，则$4 - a^2 \ge 0$，$a \in [-2, 2]$

14、$\dfrac{2}{5n}$

$$E(c\sum_{i=1}^{n}X_{i=}^{2}) = c\sum_{i=1}^{n}E(X_i^{2}) = ncE(X^2) = nc\int_{\theta}^{2\theta}\frac{2x^3}{3\theta^2}dx$$

$$= \frac{2nc}{3\theta^2}\cdot\frac{1}{4}x^4\Big|_{\theta}^{2\theta} = \frac{5nc}{2}\theta^2 = \theta^2 \quad \therefore C = \frac{2}{5n}$$

15.
解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)\,dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x (t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)\,dt}{x^2\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x}{1} = \lim_{x\to\infty}x^2(e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x})$$

$$\overset{令\frac{1}{x}=t}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^t-1-t}{t^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+t+\frac{1}{2}t^2+O(t^2)-1-t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

16.
解：

$y^3+xy^2+x^2y+6=0(1)$

(1)式两端对x求导得：

$(3y^2+2xy+x^2)y'+y^2+2xy=0(2)$

当$y'=0$时,解得$y=0$（舍）或$y=-2x$

把$y=-2x$代入(1)式，得$x=1, y=-2$

（2）式两端对x求导得

$(6yy'+2y+2xy'+2x)y'+(3y^2+2xy+x^2)y''+2yy'+2y+2xy'=0$

代入$x=1, y=-2, y'\big|_{x=1}=0$, 得$y''\big|_{x=1}=\dfrac{4}{9}>0$

所以当$x=1$时, $f(x)$有极小值$f(1)=-2$

17、
解：

$\frac{\partial z}{\partial x}=f' \cdot e^x \cdot \cos y$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos y \cdot (f'' \cdot e^x \cdot \cos y \cdot e^x + f' \cdot e^x) = f'' \cdot (e^x \cdot \cos y)^2 + f' \cdot e^x \cdot \cos y$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f' \cdot e^x \cdot (-\sin y)$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x[f'' \cdot e^x \cdot (-\sin y) + f' \cdot \cos y] = (e^x)^2 \sin y^2 f'' - f' \cdot \cos y \cdot e^x$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f'' \cdot e^{2x}=(4z+e^x \cdot \cos y)e^{2x}$

$\therefore f''(e^x \cdot \cos y)=4f(e^x \cdot \cos y)+e^x \cdot \cos y$

令$t=e^x \cdot \cos y, \therefore f''(t)=4f(t)+t$

$\therefore y''-4y=x$

求特征值：

$\lambda^2-4=0 \quad \therefore x=\pm 2 \quad \therefore y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$

再求非其次特征值。

$y^*=(ax+b)$ 代入 $\therefore y^*=-\frac{1}{4}x$

$\therefore y=y(x)+y^*=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-\frac{1}{4}x$

$y(0)=0=C_1+C_2$

$y'(0)=0=x_1-x_2-\frac{1}{4}$

$$\therefore \begin{cases} C_1+C_2=0 \\ 2C_1-2C_2=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=\frac{1}{16} \\ C_2=-\frac{1}{16} \end{cases}$$

$\therefore f(\mu)=\frac{1}{16}e^{2\mu}-\frac{1}{16}e^{-2\mu}-\frac{1}{4}\mu$

18、设曲面，$\Sigma_1:\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ z=1 \end{cases}$，方向向上.

$$\iint\limits_{\Sigma^{-1}+\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(3(x-1)^2+3(y-1)^2+1)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+6x+3+3y^2+6y+3+1)dxdydz$$

$$=\iiint_{\Omega}(3x^2+3y^2+7)\,dxdydz=\int_0^1 dz\iint_{D(z)}(3x^2+3y^2+7)dxdy$$

$$=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}(3r^2+7)rdr=4\pi$$

其中 $\iiint_{\Omega}(6x+6y)\,dxdydz=0$，因为积分区域关于 xoz, yoz 对称，积分函数

$f(x,y)=6x+6y$ 分别是 y,x 的奇函数.

在曲面 Σ_1 上，$\iint_{\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)\,dxdy=0$

故 $\oiint_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)\,dxdy=-4\pi$.

19、

（1）证明：

$\because \cos a_n-a_n=\cos b_n$

$\therefore a_n=\cos a_n-\cos b_n$

又 $0<a_n<\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \cos a_n-\cos b_n>0$

$\Rightarrow a_n<b_n$

$\because a_n>0, b_n>0,$ 又 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

故 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

（2）

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\cos a_n-\cos b_n}{b_n}$$

$$=\frac{-2\sin\frac{a_n+b_n}{2}\sin\frac{a_n-b_n}{2}}{\frac{a_n+b_n}{2}\cdot\frac{a_n-b_n}{2}}\cdot\frac{a_n^2-b_n^2}{4b_n}$$

$$\le\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}$$

$$\le\frac{b_n^2}{2b_n}=\frac{b_n}{2}$$

$$\because 0<a_n<\frac{\pi}{2},0<b_n<\frac{\pi}{2}$$

且$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$收敛

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$收敛

20.

$$(A)=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-4r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-3r_3+r_1]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&-2&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}x_1=-x_4\\x_2=2x_4\\x_3=3x_4\\x_4=x_4\end{matrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$$ c 为任意常数

设 $B=\begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&1&0\\1&2&0&-3&0\end{array}\right)$$

$$A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 & \vdots & 4 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \vdots & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \vdots & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \vdots & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}=c_3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B=\begin{pmatrix} -c_1+2 & -c_2+6 & -c_3-1 \\ 2c_1-1 & 2c_2-3 & 2c_3+1 \\ 3c_1-1 & 3c_2-4 & 3c_3+1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

c_1,c_2,c_3为任意常数

21、

解：

$$设A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}$$

所以 A 的 n 个特征值为 λ_1=n, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n$=0

又因为 A 是一个实对称矩阵，所以 A 可以相似对角化，且

$$A \sim \begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad |\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda - N \end{vmatrix} = (\lambda - n)\lambda^{n-1}$$

所以 B 的 n 个特征值为 λ_1'=n, $\lambda_2' = \cdots = \lambda_n'$=0

$$又 |0E - B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix}$$

所以 $r(0E - B) = 1$

故 B 的 n−1 重特征值 0 有 n−1 个线性无关的特征向量

所以 B 也可以相似对角化，且 $B \sim \begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

所以 A 与 B 相似。

22、（同数三 22 题）

解：（1）

$$\begin{aligned} F_y(y) &= P(Y \le y) \\ &= P(Y \le y, X = 1) + P(Y \le y, X = 2) \\ &= P(Y \le y \mid X = 1)P(X = 1) + P(Y \le y \mid X = 2)P(X = 2) \\ &= \frac{1}{2}P(Y \le y \mid X = 1) + \frac{1}{2}P(Y \le y \mid X = 2) \end{aligned}$$

① 当 $y < 0$ 时，$F_Y(y) = 0$

② 当 $0 \le y < 1$ 时，$F_Y(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}y$

③ 当$1 \le y < 2$时，$F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} + \frac{y}{4}$

④ 当$y \ge 2$时，$F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

综上：$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{3}{4} y & 0 \le y < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{y}{4} & 1 \le y < 2 \\ 1 & y \ge 2 \end{cases}$

（2）

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4} & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \le y < 2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy = \frac{3}{4} \int_0^1 y dy + \frac{1}{4} \int_1^2 y dy$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

23、

解：（1）

$$F(x;\theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}} & x \ge 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

所以$f(x;\theta) = F'(x;\theta) = \begin{cases} \frac{2X}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} & x \ge 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x;\theta)\,dx = \int_0^{+\infty} x \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = -\int_0^{+\infty} x d e^{-\frac{x^2}{\theta}} = -x e^{-\frac{x^2}{\theta}} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \sqrt{\pi\theta}$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x;\theta)\,dx = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx \underline{\underline{令x^2 = t}} \int_0^{+\infty} t \frac{2\sqrt{t}}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} t \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} dt = \theta$$

(2)设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本的观测值

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_{ij}, \theta) = \begin{cases} \dfrac{2^n \prod_{i=1}^{n} x_i}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} & x_i \geq 0(i = 1, 2, \cdots, n) \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$（i=1，2，…，n）时，

当 $L(\theta) = \dfrac{2^n \prod_{i=1}^{n} x_i}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

$$\ln L(\theta) = n\ln 2 + \ln \prod_{i=1}^{n} x_i - n \ln \theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

令：

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 为\theta的最大似然估计值$$

（3）

$\because$ $x_1, x_2, \cdots, x_n$独立同分布，$\therefore$ $x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2$独立同分布

又$EX_i^2 = \theta(i = 1, 2, \cdots, n)$　　由辛傾大数定理

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

$$E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ex_i^2 = \theta$$

$\therefore$ 存在实数a=θ,　　st. 对于$\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\theta}_n - a\right| < \varepsilon\right\} = 1$$