

2004 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一) 试卷

一、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(1) 曲线 $y = \ln x$ 上与直线 $x + y = 1$ 垂直的切线方程为_____.

(2) 已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$, 且 $f(1) = 0$, 则 $f(x) =$ _____.

(3) 设 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分, 则曲线积分 $\int_L xdy - 2ydx$ 的值为_____.

(4) 欧拉方程 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0 (x > 0)$ 的通解为_____.

(5) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E

是单位矩阵, 则 $|B| =$ _____.

(6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X > \sqrt{DX}\} =$ _____.

二、选择题(本题共 8 小题, 每小题 4 分, 满分 32 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一个符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7) 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是

(A) α, β, γ

(B) α, γ, β

(C) β, α, γ

(D) β, γ, α

(8) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

(A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少

(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$

(D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$

(9) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 下列结论中正确的是

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

(B) 若存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$

(10) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2)$ 等于

(A) $2f(2)$

(B) $f(2)$

(C) $-f(2)$

(D) 0

(11) 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C , 则满足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q 为

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(12) 设 A, B 为满足 $AB = O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有

(A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关

(B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关

(C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关

(D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关

(13) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 1)$, 对给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 数 u_α 满足

$P\{X > u_\alpha\} = \alpha$, 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$

(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$

(D) $u_{1-\alpha}$

(14) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 独立同分布, 且其方差为 $\sigma^2 > 0$. 令 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

则

(A) $\text{Cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$

(B) $\text{Cov}(X_1, Y) = \sigma^2$

(C) $D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n} \sigma^2$

(D) $D(X_1 - Y) = \frac{n+1}{n} \sigma^2$

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 12 分)

设 $e < a < b < e^2$, 证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

(16) (本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时, 为了减少滑行距离, 在触地的瞬间, 飞机尾部张开减速伞, 以增大阻力, 使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机, 着陆时的水平速度为 700km/h 经测试, 减速伞打开后, 飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k = 6.0 \times 10^6$). 问从着陆点算起, 飞机滑行的最长距离是多少?

(注: kg 表示千克, km/h 表示千米/小时)

(17) (本题满分 12 分)

计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy$, 其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$

的上侧.

$$F(x, \beta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\beta}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1, \end{cases}$$

其中未知参数 $\beta > 1$, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本,

求: (1) β 的矩估计量.

(2) β 的最大似然估计量

2004 年数学一试题分析、详解和评注

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

(1) 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为 $y=x-1$.

【分析】 本题为基础题型，相当于已知切线的斜率为 1，由曲线 $y=\ln x$ 的导数为 1 可确定切点的坐标。

【详解】 由 $y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}=1$ ，得 $x=1$ ，可见切点为 $(1,0)$ ，于是所求的切线方程为

$$y-0=1\cdot(x-1), \quad \text{即 } y=x-1.$$

【评注】 本题也可先设切点为 $(x_0, \ln x_0)$ ，曲线 $y=\ln x$ 过此切点的导数为 $y'\Big|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}=1$ ，得 $x_0=1$ ，

由此可知所求切线方程为 $y-0=1\cdot(x-1)$ ，即 $y=x-1$.

本题比较简单，类似例题在一般教科书上均可找到.

(2) 已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$ ，且 $f(1)=0$ ，则 $f(x)=$ $\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

【分析】 先求出 $f'(x)$ 的表达式，再积分即可。

【详解】 令 $e^x=t$ ，则 $x=\ln t$ ，于是有

$$f'(t)=\frac{\ln t}{t}, \quad \text{即 } f'(x)=\frac{\ln x}{x}.$$

积分得 $f(x)=\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$. 利用初始条件 $f(1)=0$ ，得 $C=0$ ，故所求函数为 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

【评注】 本题属基础题型，已知导函数求原函数一般用不定积分。

完全类似的例题见《数学复习指南》P89 第 8 题, P90 第 11 题.

(3) 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分 $\int_L xdy-2ydx$ 的值为 $\frac{3}{2}\pi$.

【分析】 利用极坐标将曲线用参数方程表示，相应曲线积分可化为定积分。

【详解】 正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，可表示为

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta, \\ y=\sqrt{2}\sin\theta, \end{cases} \quad \theta: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

于是 $\int_L xdy-2ydx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sqrt{2}\cos\theta \cdot \sqrt{2}\cos\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta \cdot \sqrt{2}\sin\theta] d\theta$

$$= \pi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\theta d\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

【评注】 本题也可添加直线段，使之成为封闭曲线，然后用格林公式计算，而在添加的线段上用参数法化为定积分计算即可。

完全类似例题见《数学题型集粹与练习题集》P143 例 10.11,《考研数学大串讲》P122 例 5、例 7.

(4) 欧拉方程 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0 (x > 0)$ 的通解为 $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2}$.

【分析】 欧拉方程的求解有固定方法, 作变量代换 $x = e^t$ 化为常系数线性齐次微分方程即可.

【详解】 令 $x = e^t$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2} \left[\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right],$$

代入原方程, 整理得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 0,$$

解此方程, 得通解为 $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2}$.

【评注】 本题属基础题型, 也可直接套用公式, 令 $x = e^t$, 则欧拉方程

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = f(x),$$

可化为 $a \left[\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right] + b \frac{dy}{dt} + cy = f(e^t)$.

完全类似的例题见《数学复习指南》P171 例 6.19,《数学题型集粹与练习题集》P342 第六题.,《考研数学大串讲》P75 例 12.

(5) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵,

则 $|B| = \frac{1}{9}$.

【分析】 可先用公式 $A^* A = |A| E$ 进行化简

【详解】 已知等式两边同时右乘 A, 得

$$ABA^* A = 2BA^* A + A, \quad \text{而 } |A| = 3, \text{ 于是有}$$

$$3AB = 6B + A, \quad \text{即} \quad (3A - 6E)B = A,$$

再两边取行列式, 有 $|3A - 6E||B| = |A| = 3,$

而 $|3A - 6E| = 27$ ，故所求行列式为 $|B| = \frac{1}{9}$ 。

【评注】先化简再计算是此类问题求解的特点，而题设含有伴随矩阵 A^* ，一般均应先利用公式 $A^*A = AA^* = |A|E$ 进行化简。

完全类似例题见《数学最后冲刺》P107 例 2，P118 例 9

(6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\{X > \sqrt{DX}\} = \frac{1}{e}$ 。

【分析】已知连续型随机变量 X 的分布，求其满足一定条件的概率，转化为定积分计算即可。

【详解】由题设，知 $DX = \frac{1}{\lambda^2}$ ，于是

$$\begin{aligned} P\{X > \sqrt{DX}\} &= P\{X > \frac{1}{\lambda}\} = \int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= -e^{-\lambda x} \Big|_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

【评注】本题应记住常见指数分布等的期望与方差的数字特征，而不应在考试时再去推算。
完全类似例题见《数学一临考演习》P35 第 5 题。

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ ，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是

(A) α, β, γ . (B) α, γ, β . (C) β, α, γ . (D) β, γ, α . [B]

【分析】先两两进行比较，再排出次序即可。

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt}{\int_0^x \cos t^2 dt} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x \cdot 2x}{\cos x^2} = 0$ ，可排除(C),(D)选项，

又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\gamma}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt}{\int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x \tan x}$
 $= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2} = \infty$ ，可见 γ 是比 β 低阶的无穷小量，故应选(B)。

【评注】本题是无穷小量的比较问题，也可先将 α, β, γ 分别与 x^n 进行比较，再确定相互的高低次序。

完全类似例题见《数学一临考演习》P28 第 9 题。

(8) 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0) > 0$ ，则存在 $\delta > 0$ ，使得

(A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加. (B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$. (D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$.

[C]

【分析】 函数 $f(x)$ 只在一点的导数大于零，一般不能推导出单调性，因此可排除(A),(B)选项，再利用导数的定义及极限的保号性进行分析即可。

【详解】 由导数的定义，知

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} > 0,$$

根据保号性，知存在 $\delta > 0$ ，当 $x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ 时，有

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$$

即当 $x \in (-\delta, 0)$ 时， $f(x) < f(0)$ ；而当 $x \in (0, \delta)$ 时，有 $f(x) > f(0)$ 。故应选(C)。

【评注】 题设函数一点可导，一般均应联想到用导数的定义进行讨论。
完全类似例题见《数学一临考演习》P28 第 10 题。

(9) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，下列结论中正确的是

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

(B) 若存在非零常数 λ ，使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = \lambda$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$ 。

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则存在非零常数 λ ，使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = \lambda$ 。 [B]

【分析】 对于敛散性的判定问题，若不便直接推证，往往可用反例通过排除法找到正确选项。

【详解】 取 $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ ，但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散，排除(A)，(D)；

又取 $a_n = \frac{1}{n \sqrt{n}}$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，但 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = \infty$ ，排除(C)，故应选(B)。

【评注】 本题也可用比较判别法的极限形式，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lambda \neq 0, \text{ 而级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散, 因此级数 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 也发散, 故应选(B).}$$

完全类似的例题见《数学复习指南》P213 例 8.13.

(10) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2)$ 等于

- (A) $2f(2)$. (B) $f(2)$. (C) $-f(2)$. (D) 0 . [B]

【分析】 先求导, 再代入 $t=2$ 求 $F'(2)$ 即可。关键是求导前应先交换积分次序, 使得被积函数中不含有变量 t 。

【详解】 交换积分次序, 得

$$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx = \int_1^t \left[\int_1^x f(x) dy \right] dx = \int_1^t f(x)(x-1) dx$$

于是, $F'(t) = f(t)(t-1)$, 从而有 $F'(2) = f(2)$, 故应选(B).

【评注】 在应用变限的积分对变量 x 求导时, 应注意被积函数中不能含有变量 x :

$$\left[\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \right]' = f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x)$$

否则, 应先通过恒等变形、变量代换和交换积分次序等将被积函数中的变量 x 换到积分号外或积分线上。

完全类似例题见《数学最后冲刺》P184 例 12, 先交换积分次序再求导。

(11) 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C , 则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为

$$(A) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (B) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (C) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (D) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[D]

【分析】 本题考查初等矩阵的概念与性质, 对 A 作两次初等列变换, 相当于右乘两个相应的初等矩阵, 而 Q 即为此两个初等矩阵的乘积。

【详解】 由题设, 有

$$A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B, \quad B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C,$$

$$\text{于是, } A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C.$$

可见, 应选(D).

【评注】 涉及到初等变换的问题, 应掌握初等矩阵的定义、初等矩阵的性质以及与初等变换的关系。

完全类似例题见《数学题型集粹与练习题集》P196 例 2.2

(12) 设 A, B 为满足 $AB=O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有

- (A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
 (B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.
 (C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
 (D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关. [A]

【分析】A,B 的行列向量组是否线性相关，可从 A,B 是否行（或列）满秩或 $Ax=0$ ($Bx=0$) 是否有非零解进行分析讨论.

【详解 1】设 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 $n \times s$ 矩阵，则由 $AB=O$ 知，

$$r(A) + r(B) \leq n.$$

又 A,B 为非零矩阵，必有 $r(A) > 0, r(B) > 0$. 可见 $r(A) < n, r(B) < n$, 即 A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关，故应选(A).

【详解 2】由 $AB=O$ 知，B 的每一列均为 $Ax=0$ 的解，而 B 为非零矩阵，即 $Ax=0$ 存在非零解，可见 A 的列向量组线性相关。

同理，由 $AB=O$ 知， $B^T A^T = O$ ，于是有 B^T 的列向量组，从而 B 的行向量组线性相关，故应选(A).

【评注】 $AB=O$ 是常考关系式，一般来说，与此相关的两个结论是应记住的：

1) $AB=O \Rightarrow r(A) + r(B) \leq n$;

2) $AB=O \Rightarrow B$ 的每列均为 $Ax=0$ 的解。

完全类似例题见《数学最后冲刺》P110 例 10-11，《数学一临考演习》P79 第 4 题，〈考研数学大串讲〉P173 例 8, P184 例 27。

(13) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$ ，对给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$ ，数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$ ，若 $P\{|X| < x\} = \alpha$ ，则 x 等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (D) $u_{1-\alpha}$. [C]

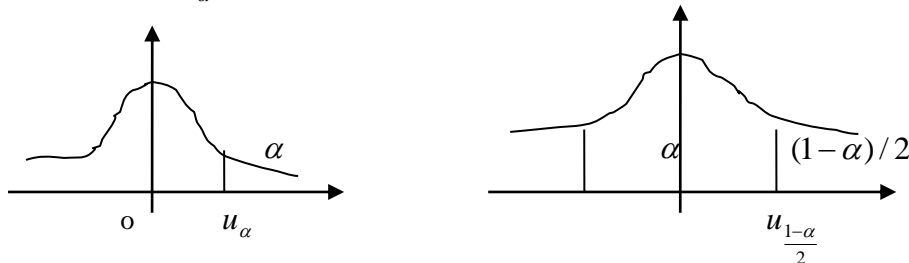
【分析】此类问题的求解，可通过 u_α 的定义进行分析，也可通过画出草图，直观地得到结论。

【详解】由标准正态分布概率密度函数的对称性知， $P\{X < -u_\alpha\} = \alpha$ ，于是

$$1 - \alpha = 1 - P\{|X| < x\} = P\{|X| \geq x\} = P\{X \geq x\} + P\{X \leq -x\} = 2P\{X \geq x\}$$

即有 $P\{X \geq x\} = \frac{1-\alpha}{2}$ ，可见根据定义有 $x = u_{\frac{1-\alpha}{2}}$ ，故应选(C).

【评注】本题 u_α 相当于分位数，直观地有



此类问题在文登学校的辅导班上作为正态分布的一般结论总结过.

(14) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 独立同分布，且其方差为 $\sigma^2 > 0$. 令 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ，则

$$(A) \quad \text{Cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (B) \quad \text{Cov}(X_1, Y) = \sigma^2.$$

$$(C) \quad D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n} \sigma^2. \quad (D) \quad D(X_1 - Y) = \frac{n+1}{n} \sigma^2. \quad [A]$$

【分析】 本题用方差和协方差的运算性质直接计算即可，注意利用独立性有：

$$\text{Cov}(X_1, X_i) = 0, i = 2, 3, \dots, n.$$

$$\begin{aligned} \text{【详解】} \quad \text{Cov}(X_1, Y) &= \text{Cov}\left(X_1, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \text{Cov}(X_1, X_1) + \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \text{Cov}(X_1, X_i) \\ &= \frac{1}{n} DX_1 = \frac{1}{n} \sigma^2. \end{aligned}$$

【评注】 本题(C),(D) 两个选项的方差也可直接计算得到：如

$$D(X_1 + Y) = D\left(\frac{1+n}{n} X_1 + \frac{1}{n} X_2 + \dots + \frac{1}{n} X_n\right) = \frac{(1+n)^2}{n^2} \sigma^2 + \frac{n-1}{n^2} \sigma^2$$

$$= \frac{n^2 + 3n}{n^2} \sigma^2 = \frac{n+3}{n} \sigma^2,$$

$$D(X_1 - Y) = D\left(\frac{n-1}{n} X_1 - \frac{1}{n} X_2 - \dots - \frac{1}{n} X_n\right) = \frac{(n-1)^2}{n^2} \sigma^2 + \frac{n-1}{n^2} \sigma^2$$

$$= \frac{n^2 - 2n}{n^2} \sigma^2 = \frac{n-2}{n} \sigma^2.$$

完全类似的例题见《数学一临考演习》P78 第 23 题（本题是第 23 题的特殊情况）。

（15）（本题满分 12 分）

设 $e < a < b < e^2$ ，证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$ 。

【分析】 根据要证不等式的形式，可考虑用拉格朗日中值定理或转化为函数不等式用单调性证明。

【证法 1】 对函数 $\ln^2 x$ 在 $[a, b]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\ln^2 b - \ln^2 a = \frac{2 \ln \xi}{\xi} (b-a), a < \xi < b.$$

$$\text{设 } \varphi(t) = \frac{\ln t}{t}, \text{ 则 } \varphi'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2},$$

当 $t > e$ 时， $\varphi'(t) < 0$ ，所以 $\varphi(t)$ 单调减少，从而 $\varphi(\xi) > \varphi(e^2)$ ，即

$$\frac{\ln \xi}{\xi} > \frac{\ln e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2},$$

$$\text{故 } \ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a).$$

【证法 2】 设 $\varphi(x) = \ln^2 x - \frac{4}{e^2}x$, 则

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 2\frac{\ln x}{x} - \frac{4}{e^2}, \\ \varphi''(x) &= 2\frac{1-\ln x}{x^2},\end{aligned}$$

所以当 $x > e$ 时, $\varphi''(x) < 0$, 故 $\varphi'(x)$ 单调减少, 从而当 $e < x < e^2$ 时,

$$\varphi'(x) > \varphi'(e^2) = \frac{4}{e^2} - \frac{4}{e^2} = 0,$$

即当 $e < x < e^2$ 时, $\varphi(x)$ 单调增加.

因此当 $e < x < e^2$ 时, $\varphi(b) > \varphi(a)$,

即
$$\ln^2 b - \frac{4}{e^2}b > \ln^2 a - \frac{4}{e^2}a,$$

故
$$\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a).$$

【评注】 本题也可设辅助函数为 $\varphi(x) = \ln^2 x - \ln^2 a - \frac{4}{e^2}(x-a)$, $e < a < x < e^2$ 或

$\varphi(x) = \ln^2 b - \ln^2 x - \frac{4}{e^2}(b-x)$, $e < x < b < e^2$, 再用单调性进行证明即可.

完全类似的例题见《数学复习指南》P347 例 13.31 及 P344 的[解题提示], 《考研数学大串讲》P65 例 13.

(16) (本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时, 为了减少滑行距离, 在触地的瞬间, 飞机尾部张开减速伞, 以增大阻力, 使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机, 着陆时的水平速度为 700km/h. 经测试, 减速伞打开后, 飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比 (比例系数为 $k = 6.0 \times 10^6$). 问从着陆点算起, 飞机滑行的最长距离是多少?

注 kg 表示千克, km/h 表示千米/小时.

【分析】 本题是标准的牛顿第二定理的应用, 列出关系式后再解微分方程即可.

【详解 1】 由题设, 飞机的质量 $m=9000\text{kg}$, 着陆时的水平速度 $v_0 = 700\text{km/h}$. 从飞机接触跑道开始计时, 设 t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$, 速度为 $v(t)$.

根据牛顿第二定律, 得

$$m \frac{dv}{dt} = -kv.$$

又
$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx},$$

由以上两式得

$$dx = -\frac{m}{k} dv,$$

积分得 $x(t) = -\frac{m}{k}v + C$. 由于 $v(0) = v_0, x(0) = 0$, 故得 $C = \frac{m}{k}v_0$, 从而

$$x(t) = \frac{m}{k}(v_0 - v(t)).$$

当 $v(t) \rightarrow 0$ 时, $x(t) \rightarrow \frac{mv_0}{k} = \frac{9000 \times 700}{6.0 \times 10^6} = 1.05(km).$

所以, 飞机滑行的最长距离为 1.05km.

【详解 2】 根据牛顿第二定律, 得 $m \frac{dv}{dt} = -kv$,

所以 $\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt.$

两端积分得通解 $v = Ce^{-\frac{k}{m}t}$, 代入初始条件 $v|_{t=0} = v_0$ 解得 $C = v_0$,

故 $v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$

飞机滑行的最长距离为

$$x = \int_0^{+\infty} v(t) dt = -\frac{mv_0}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{mv_0}{k} = 1.05(km).$$

或由 $\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$, 知 $x(t) = \int_0^t v_0 e^{-\frac{k}{m}t} dt = -\frac{kv_0}{m}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1)$, 故最长距离为当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$x(t) \rightarrow \frac{kv_0}{m} = 1.05(km).$$

【详解 3】 根据牛顿第二定律, 得 $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt}$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{dx}{dt} = 0,$$

其特征方程为 $\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda = 0$, 解之得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{k}{m}$,

故 $x = C_1 + C_2 e^{-\frac{k}{m}t}.$

由 $x|_{t=0} = 0, v|_{t=0} = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = -\frac{kC_2}{m} e^{-\frac{k}{m}t} \Big|_{t=0} = v_0$,

得 $C_1 = -C_2 = \frac{mv_0}{k}$, 于是 $x(t) = \frac{mv_0}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}).$

当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x(t) \rightarrow \frac{mv_0}{k} = 1.05(km).$

所以, 飞机滑行的最长距离为 1.05km.

【评注】 本题求飞机滑行的最长距离，可理解为 $t \rightarrow +\infty$ 或 $v(t) \rightarrow 0$ 的极限值，这种条件应引起注意。

完全类似的例题见《数学最后冲刺》P98-99 例 10-11.

(17) (本题满分 12 分)

计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy,$$

其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧.

【分析】 先添加一曲面使之与原曲面围成一封闭曲面，应用高斯公式求解，而在添加的曲面上应用直接投影法求解即可.

【详解】 取 Σ_1 为 xoy 平面上被圆 $x^2 + y^2 = 1$ 所围部分的下侧，记 Ω 为由 Σ 与 Σ_1 围成的空间闭区域，则

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma + \Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy \\ &\quad - \iint_{\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy. \end{aligned}$$

由高斯公式知

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma + \Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy &= \iiint_{\Omega} 6(x^2 + y^2 + z) dxdydz \\ &= 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{1-r^2} (z + r^2) r dz \\ &= 12\pi \int_0^1 \left[\frac{1}{2} r(1-r^2)^2 + r^3(1-r^2) \right] dr = 2\pi. \end{aligned}$$

$$\text{而 } \iint_{\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 3 dxdy = 3\pi,$$

$$\text{故 } I = 2\pi - 3\pi = -\pi.$$

【评注】 本题选择 Σ_1 时应注意其侧与 Σ 围成封闭曲面后同为外侧（或内侧），再就是在 Σ_1 上直接投影积分时，应注意符号（ Σ_1 取下侧，与 z 轴正向相反，所以取负号）.

完全类似的例题见《数学复习指南》P325 例 12.21，《数学题型集粹与练习题集》P148 例 10.17 (2)，《数学一临考演习》P38 第 19 题.

(18) (本题满分 11 分)

设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$ ，其中 n 为正整数. 证明此方程存在惟一正实根 x_n ，并证明当 $\alpha > 1$ 时，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha} \text{ 收敛.}$$

【分析】 利用介值定理证明存在性，利用单调性证明惟一性。而正项级数的敛散性可用比较法判定。

【证】 记 $f_n(x) = x^n + nx - 1$. 由 $f_n(0) = -1 < 0$ ， $f_n(1) = n > 0$ ，及连续函数的介值定理知，方程

$x^n + nx - 1 = 0$ 存在正实数根 $x_n \in (0, 1)$.

当 $x > 0$ 时, $f'_n(x) = nx^{n-1} + n > 0$, 可见 $f_n(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 故方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 存在惟一正实数根 x_n .

由 $x^n + nx - 1 = 0$ 与 $x_n > 0$ 知

$$0 < x_n = \frac{1 - x_n^n}{n} < \frac{1}{n}, \text{ 故当 } \alpha > 1 \text{ 时, } 0 < x_n^\alpha < \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha.$$

而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 收敛, 所以当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\alpha$ 收敛.

【评注】 本题综合考查了介值定理和无穷级数的敛散性, 题型设计比较新颖, 但难度并不大, 只要基本概念清楚, 应该可以轻松求证.

完全类似例题见《数学题型集粹与练习题集》P91 例 6.15(有关根的存在性与惟一性证明), 收敛性证明用比较法很简单.

(19) (本题满分 12 分)

设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值.

【分析】 可能极值点是两个一阶偏导数为零的点, 先求出一阶偏导, 再令其为零确定极值点即可, 然后用二阶偏导确定是极大值还是极小值, 并求出相应的极值.

【详解】 因为 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$, 所以

$$\begin{aligned} 2x - 6y - 2y \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial z}{\partial x} &= 0, \\ -6x + 20y - 2z - 2y \frac{\partial z}{\partial y} - 2z \frac{\partial z}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{得 } \begin{cases} x - 3y = 0, \\ -3x + 10y - z = 0, \end{cases}$$

$$\text{故 } \begin{cases} x = 3y, \\ z = y. \end{cases}$$

将上式代入 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$, 可得

$$\begin{cases} x = 9, \\ y = 3, \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = -9, \\ y = -3, \\ z = -3. \end{cases}$$

$$\text{由于 } 2 - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$-6 - 2 \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$20 - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

所以 $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(9,3,3)} = \frac{1}{6}$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(9,3,3)} = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(9,3,3)} = \frac{5}{3}$,

故 $AC - B^2 = \frac{1}{36} > 0$, 又 $A = \frac{1}{6} > 0$, 从而点(9,3)是 $z(x,y)$ 的极小值点, 极小值为 $z(9,3)=3$.

类似地，由

$$A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{(-9, -3, -3)} = -\frac{1}{6}, \quad B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(-9, -3, -3)} = \frac{1}{2}, \quad C = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{(-9, -3, -3)} = -\frac{5}{3},$$

可知 $AC - B^2 = \frac{1}{36} > 0$, 又 $A = -\frac{1}{6} < 0$, 从而点 $(-9, -3)$ 是 $z(x, y)$ 的极大值点, 极大值为

$$z(-9, -3) = -3.$$

【评注】 本题讨论由方程所确定的隐函数求极值问题，关键是求可能极值点时应注意 x, y, z 满足原方程。完全类似的例题见《数学复习指南》P277 例 10.31.

(20) (本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组

[illegible]

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

【分析】 本题是方程的个数与未知量的个数相同的齐次线性方程组，可考虑对系数矩阵直接用初等行变换化为阶梯形，再讨论其秩是否小于 n ，进而判断是否有非零解；或直接计算系数矩阵的行列式，根据题设行列式的值必为零，由此对参数 a 的可能取值进行讨论即可。

【详解 1】 对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} = B.$$

当 $a=0$ 时, $r(A)=1<n$, 故方程组有非零解, 其同解方程组为

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0,$$

由此得基础解系为

$$\eta_1 = (-1, 1, 0, \dots, 0)^T, \quad \eta_2 = (-1, 0, 1, \dots, 0)^T, \quad \dots, \eta_{n-1} = (-1, 0, 0, \dots, 1)^T,$$

于是方程组的通解为

$x = k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-1}\eta_{n-1}$, 其中 k_1, \cdots, k_{n-1} 为任意常数.

当 $a \neq 0$ 时, 对矩阵 B 作初等行变换, 有

$$B \rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a + \frac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

可知 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$ 时, $r(A) = n-1 < n$, 故方程组也有非零解, 其同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -3x_1 + x_3 = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ -nx_1 + x_n = 0, \end{cases}$$

由此得基础解系为

$$\eta = (1, 2, \cdots, n)^T,$$

于是方程组的通解为

$x = k\eta$, 其中 k 为任意常数.

【详解 2】 方程组的系数行列式为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = (a + \frac{n(n+1)}{2})a^{n-1}.$$

当 $|A| = 0$, 即 $a=0$ 或 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$ 时, 方程组有非零解.

当 $a=0$ 时, 对系数矩阵 A 作初等行变换, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0,$$

由此得基础解系为

$$\eta_1 = (-1, 1, 0, \cdots, 0)^T, \eta_2 = (-1, 0, 1, \cdots, 0)^T, \cdots, \eta_{n-1} = (-1, 0, 0, \cdots, 1)^T,$$

于是方程组的通解为

$x = k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-1}\eta_{n-1}$, 其中 k_1, \cdots, k_{n-1} 为任意常数.

当 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$ 时，对系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -3x_1 + x_3 = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ -nx_1 + x_n = 0, \end{cases}$$

由此得基础解系为

$$\eta = (1, 2, \cdots, n)^T,$$

于是方程组的通解为

$$x = k\eta, \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

【评注】 矩阵 A 的行列式 $|A|$ 也可这样计算：

$$A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{bmatrix} = aE + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix}, \text{ 矩阵 } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix} \text{ 的特征}$$

值为 $0, \cdots, 0, \frac{n(n+1)}{2}$ ，从而 A 的特征值为 $a, a, \cdots, a + \frac{n(n+1)}{2}$ ，故行列式 $|A| = (a + \frac{n(n+1)}{2})a^{n-1}$ 。

类似例题见《数学题型集粹与练习题集》P228 例 4.4 和 P234 例 4.12.

(21) (本题满分 9 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 A 是否可相似对角化.

【分析】 先求出 A 的特征值，再根据其二重根是否有两个线性无关的特征向量，确定 A 是否可相似对角化即可.

【详解】 A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -(\lambda-2) & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a).$$

当 $\lambda = 2$ 是特征方程的二重根，则有 $2^2 - 16 + 18 + 3a = 0$ ，解得 $a = -2$ 。

当 $a = -2$ 时，A 的特征值为 2, 2, 6，矩阵 $2E - A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ 的秩为 1，故 $\lambda = 2$ 对应的线性无关的特征

向量有两个，从而 A 可相似对角化。

若 $\lambda = 2$ 不是特征方程的二重根，则 $\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a$ 为完全平方，从而 $18 + 3a = 16$ ，解得 $a = -\frac{2}{3}$ 。

当 $a = -\frac{2}{3}$ 时，A 的特征值为 2, 4, 4，矩阵 $4E - A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$ 秩为 2，故 $\lambda = 4$ 对应的线性无关的特

征向量只有一个，从而 A 不可相似对角化。

【评注】 n 阶矩阵 A 可对角化的充要条件是：对于 A 的任意 k_i 重特征根 λ_i ，恒有 $n - r(\lambda_i E - A) = k_i$ 。而单根一定只有一个线性无关的特征向量。

原题见《考研数学大串讲》P224 例 20.，完全类似的例题还可参见《数学复习指南》P462 例 5.12 及[解题提示]。

(22) (本题满分 9 分)

设 A, B 为随机事件，且 $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$ ，令

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生,} \\ 0, & A \text{ 不发生;} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生,} \\ 0, & B \text{ 不发生.} \end{cases}$$

求：(I) 二维随机变量(X, Y)的概率分布；

(II) X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY} 。

【分析】 先确定(X, Y)的可能取值，再求在每一个可能取值点上的概率，而这可利用随机事件的运算性质得到，即得二维随机变量(X, Y)的概率分布；利用联合概率分布可求出边缘概率分布，进而可计算出相关系数。

【详解】 (I) 由于 $P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{12}$ ，

$$P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} = \frac{1}{6},$$

所以, $P\{X=1, Y=1\} = P(AB) = \frac{1}{12},$

$$P\{X=1, Y=0\} = P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{6},$$

$$P\{X=0, Y=1\} = P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{12},$$

$$P\{X=0, Y=0\} = P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A+B)$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = \frac{2}{3}$$

(或 $P\{X=0, Y=0\} = 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$),

故(X,Y)的概率分布为

X \ Y	Y	
	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

(II) X, Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

则 $EX = \frac{1}{4}, EY = \frac{1}{6}, DX = \frac{3}{16}, DY = \frac{5}{36}, E(XY) = \frac{1}{12},$

故 $Cov(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY = \frac{1}{24},$ 从而 $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}} = \frac{\sqrt{15}}{15}.$

【评注】 本题尽管难度不大，但考察的知识点很多，综合性较强。通过随机事件定义随机变量或通过随机变量定义随机事件，可以比较好地将概率论的知识前后连贯起来，这种命题方式值得注意。

原题见《考研数学大串讲》P274 例 3.

(23) (本题满分 9 分)

设总体 X 的分布函数为

$$F(x, \beta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\beta}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1, \end{cases}$$

其中未知参数 $\beta > 1, X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，求：

(I) β 的矩估计量；

(II) β 的最大似然估计量.

【分析】先由分布函数求出概率密度，再根据求矩估计量和最大似然估计量的标准方法进行讨论即可。

【详解】X 的概率密度为

$$f(x, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$$

(I) 由于

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x; \beta)dx = \int_1^{+\infty} x \cdot \frac{\beta}{x^{\beta+1}} dx = \frac{\beta}{\beta-1}, \text{ 令 } \frac{\beta}{\beta-1} = \bar{X}, \text{ 解得 } \beta = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}, \text{ 所以参数 } \beta \text{ 的}$$

矩估计量为 $\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}.$

(II) 似然函数为

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^n}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\beta+1}}, & x_i > 1 (i=1, 2, \cdots, n), \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $x_i > 1 (i=1, 2, \cdots, n)$ 时, $L(\beta) > 0$, 取对数得, $\ln L(\beta) = n \ln \beta - (\beta+1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$, 两边对 β 求导, 得

$$\frac{d \ln L(\beta)}{d\beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \ln x_i, \text{ 令 } \frac{d \ln L(\beta)}{d\beta} = 0, \text{ 可得 } \beta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i},$$

故 β 的最大似然估计量为

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}.$$

【评注】本题是基础题型, 难度不大, 但计算量比较大, 实际做题时应特别注意计算的准确性。

完全类似的例题见《数学复习指南》P596 例 6.9, 《数学题型集粹与练习题集》P364 第十三题, 《数学一临考演习》P26 第 23 题.