

2012 年全国硕士研究生入学统一考试 数学(一) 试卷

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

- (1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 滐近线的条数为 ()
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- (2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ ，其中 n 为正整数，则 $f'(0) =$
- (A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ (B) $(-1)^n(n-1)!$ (C) $(-1)^{n-1}n!$ (D) $(-1)^n n!$
- (3) 如果 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续，那么下列命题正确的是 ()
- (A) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在，则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微
- (B) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在，则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微
- (C) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微，则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在
- (D) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微，则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在
- (4) 设 $I_k = \int_e^k e^{x^2} \sin x dx$ ($k=1, 2, 3$)，则有 D
- (A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_2 < I_1 < I_3$
 (C) $I_1 < I_3 < I_2$ (D) $I_1 < I_2 < I_3$
- (5) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$ 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是 ()
- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ (C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$
- (6) 设 A 为 3 阶矩阵， P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ 则 $Q^{-1}AQ = (\quad)$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

(7) 设随机变量 x 与 y 相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则 $P\{x < y\} = (\quad)$

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

(8) 将长度为 1m 的木棒随机地截成两段, 则两段长度的相关系数为 ()

- (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) -1

二、填空题: 9—14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f'(x) + f(x) = 2e^x$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) $\int_0^2 x \sqrt{2x-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) $\text{grad} \left(xy + \frac{z}{y} \right)_{(2,1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 设 $\sum = \{(x, y, z) | x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则 $\iint y^2 ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设 X 为三维单位向量, E 为三阶单位矩阵, 则矩阵 $E - XX^T$ 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设 A, B, C 是随机事件, A, C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{3}$, 则

$P(A \bar{B} \bar{C}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, -1 < x < 1$

(16) (本题满分 10 分)

求 $f(x, y) = xe - \frac{x^2 + y^2}{2}$ 的极值。

(17) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数

(18) (本题满分 10 分)

已知曲线

，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0) = 0$ ， $f(t) > 0 \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ 。若曲线 L 的切线与 x

轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数 $f(t)$ 的表达式，并求此曲线 L 与 x 轴与 y 轴无边界的区域的面积。

(19) (本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点 $(0, 0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2, 0)$ ，再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点

$(0, 2)$ 的曲线段，计算曲线积分 $J = \int_L 3x^2 y dx + (x^2 + x - 2y) dy$ 。

(20) (本题满分 10 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ， $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(I) 求 $|A|$

(II) 已知线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解，求 a ，并求 $Ax = b$ 的通解。

(21) (本题满分 10 分) 三阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$ ， A^T 为矩阵 A 的转置，已知 $r(A^T A) = 2$ ，

且二次型 $f = x^T A^T A x$ 。

1) 求 a 2) 求二次型对应的二次型矩阵，并将二次型化为标准型，写出正交变换过程。

(22) (本题满分 10 分)

已知随机变量 X, Y 以及 XY 的分布律如下表所示,

X	0	1	2
P	$1/2$	$1/3$	$1/6$

Y	0	1	2
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

XY	0	1	2	4
P	$7/12$	$1/3$	0	$1/12$

求: (1) $P(X = 2Y)$; (2) $\text{cov}(X - Y, Y)$ 与 ρ_{XY} .

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 与 $N(\mu, 2\sigma^2)$, 其中 σ 是未知参数且 $\sigma > 0$, 设 $Z = X - Y$,

(1) 求 z 的概率密度 $f(z, \sigma^2)$;

(2) 设 z_1, z_2, \dots, z_n 为来自总体 Z 的简单随机样本, 求 σ^2 的最大似然估计量 $\bar{\sigma}^2$;

(3) 证明 $\bar{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。

2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题解析

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 滐近线的条数为 ()

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3

【答案】: C

【解析】: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \infty$, 所以 $x = 1$ 为垂直的

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1$, 所以 $y = 1$ 为水平的，没有斜渐近线 故两条选 C

(2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2)L(e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数，则 $f'(0) =$

- (A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$
- (B) $(-1)^n(n-1)!$
- (C) $(-1)^{n-1}n!$
- (D) $(-1)^n n!$

【答案】: C

【解析】: $f'(x) = e^x(e^{2x} - 2)L(e^{nx} - n) + (e^x - 1)(2e^{2x} - 2)L(e^{nx} - n) + L(e^x - 1)(e^{2x} - 2)L(ne^{nx} - n)$

所以 $f'(0) = (-1)^{n-1}n!$

(3) 如果 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续，那么下列命题正确的是 ()

(A) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在，则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微

(B) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在，则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微

(C) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在

(D) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在

【答案】:

【解析】: 由于 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 可知如果 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则必有 $f(0, 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$

这样, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 就可以写成 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, 也即极限 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 存在, 可知

$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$, 也即 $f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = 0\Delta x + 0\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$ 。由可微的定义

可知 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微。

(4) 设 $I_k = \int_e^k e^{x^2} \sin x dx (k=1, 2, 3)$, 则有 D

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| (A) $I_1 < I_2 < I_3$. | (B) $I_2 < I_1 < I_3$. |
| (C) $I_1 < I_3 < I_2$, | (D) $I_1 < I_2 < I_3$. |

【答案】: (D)

【解析】: $I_k = \int_e^k e^{x^2} \sin x dx$ 看为以 k 为自变量的函数, 则可知 $I_k' = e^{k^2} \sin k \geq 0, k \in (0, \pi)$, 即可知 $I_k = \int_e^k e^{x^2} \sin x dx$ 关于 k 在 $(0, \pi)$ 上为单调增函数, 又由于 $1, 2, 3 \in (0, \pi)$, 则

$I_1 < I_2 < I_3$, 故选 D

(5) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$ 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量组线性相关

的是 ()

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ | (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ |
| (C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ | (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ |

【答案】: (C)

【解析】: 由于 $|\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 可知 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关。故选 (C)

(6) 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ 则 $Q^{-1}AQ = (\quad)$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

【答案】: (B)

【解析】: $Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$,

$$\text{故 } Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}AP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

故选 (B)。

(7) 设随机变量 x 与 y 相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则 $p\{x < y\} = (\quad)$

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

【答案】: (A)

【解析】: (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-4y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$$\text{则 } P\{X < Y\} = \iint_{x < y} f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} dx \int_0^y e^{-x-4y} dx = \int_0^{+\infty} e^{-5y} dy = \frac{1}{5}$$

(8) 将长度为 1m 的木棒随机地截成两段, 则两段长度的相关系数为 ()

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) -1

【答案】: (D)

【解析】: 设两段长度分别为 x, y , 显然 $x + y = 1$, 即 $y = -x + 1$, 故两者是线性关系, 且是负相关, 所以相关系数为 -1

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f'(x) + f(x) = 2e^x$ ，则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】: e^x

【解析】: 特征方程为 $r^2 + r - 2 = 0$ ，特征根为 $r_1 = 1, r_2 = -2$ ，齐次微分方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 的通解为 $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ 。再由 $f'(x) + f(x) = 2e^x$ 得 $2C_1 e^x - C_2 e^{-2x} = 2e^x$ ，可知 $C_1 = 1, C_2 = 0$ 。故 $f(x) = e^x$

(10) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】: $\frac{\pi}{2}$

【解析】: 令 $t = x-1$ 得 $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx = \int_{-1}^1 (t+1)\sqrt{1-t^2}dt = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}dt = \frac{\pi}{2}$

(11) $\text{grad}\left(xy + \frac{z}{y}\right) \Big|_{(2,1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】: $\{1,1,1\}$

【解析】: $\text{grad}\left(xy + \frac{z}{y}\right) \Big|_{(2,1,1)} = \left\{y, x - \frac{z}{y^2}, \frac{1}{y}\right\} \Big|_{(2,1,1)} = \{1,1,1\}$

(12) 设 $\sum = \{(x, y, z) | x+y+z=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ ，则 $\iint_{\sum} y^2 ds = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】: $\frac{\sqrt{3}}{12}$

【解析】: 由曲面积分的计算公式可知 $\iint_{\sum} y^2 ds = \iint_D y^2 \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2} dx dy = \sqrt{3} \iint_D y^2 dx dy$ ，其中

$D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$ 。故原式 $= \sqrt{3} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} y^2 dx = \sqrt{3} \int_0^1 y^2 (1-y) dy = \frac{\sqrt{3}}{12}$

(13) 设 X 为三维单位向量， E 为三阶单位矩阵，则矩阵 $E - XX^T$ 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】: 2

【解析】: 矩阵 XX^T 的特征值为 $0, 0, 1$ ，故 $E - XX^T$ 的特征值为 $1, 1, 0$ 。又由于为实对称矩阵，是可相似对角化的，故它的秩等于它非零特征值的个数，也即 $r(E - XX^T) = 2$ 。

(14) 设 A, B, C 是随机事件, A, C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(A\bar{B}\bar{C}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】: $\frac{3}{4}$

【解析】: 由条件概率的定义, $P(AB|\bar{C}) = \frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})}$,

$$\text{其中 } P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$P(AB\bar{C}) = P(AB) - P(ABC) = \frac{1}{2} - P(ABC), \text{ 由于 } A, C \text{ 互不相容, 即 } AC = \emptyset, P(AC) = 0, \text{ 又}$$

$$ABC \subset AC, \text{ 得 } P(ABC) = 0, \text{ 代入得 } P(AB\bar{C}) = \frac{1}{2}, \text{ 故 } P(AB|\bar{C}) = \frac{3}{4}.$$

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{证明: } x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, -1 < x < 1$$

【解析】: 令 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2}$, 可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln \frac{1+x}{1-x} + x \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} - \sin x - x \\ &= \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x \\ &= \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot x - \sin x \end{aligned}$$

当 $0 < x < 1$ 时, 有 $\ln \frac{1+x}{1-x} \geq 0$, $\frac{1+x^2}{1-x^2} > 1$, 所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot x - \sin x \geq 0$,

故 $f'(x) \geq 0$, 而 $f(0) = 0$, 即得 $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geq 0$

所以 $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq \frac{x^2}{2} + 1$.

当 $-1 < x < 0$, 有 $\ln \frac{1+x}{1-x} \leq 0$, $\frac{1+x^2}{1-x^2} > 1$, 所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot x - \sin x \leq 0$,

故 $f'(x) \geq 0$, 即得 $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geq 0$

可知, $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$, $-1 < x < 1$

(16) (本题满分 10 分)

求 $f(x, y) = xe - \frac{x^2 + y^2}{2}$ 的极值。

【解析】: $f(x, y) = xe - \frac{x^2 + y^2}{2}$,

先求函数的驻点. $f'_x(x, y) = e - x = 0$, $f'_y(x, y) = -y = 0$, 解得函数为驻点为 $(e, 0)$.

又 $A = f''_{xx}(e, 0) = -1$, $B = f''_{xy}(e, 0) = 0$, $C = f''_{yy}(e, 0) = -1$,

所以 $B^2 - AC < 0$, $A < 0$, 故 $f(x, y)$ 在点 $(e, 0)$ 处取得极大值 $f(e, 0) = \frac{1}{2}e^2$.

(17) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数

【解析】: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1}}{\frac{4(n+1)^2 + 4(n+1) + 3}{2(n+1)+1}} \right|$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} \cdot \frac{2(n+1)+1}{4(n+1)^2 + 4(n+1) + 3} \right| = 1$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n}$$

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n} dx$$

$$x=1 \text{ 时 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n} \text{ 发散}$$

$$\text{Q} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1}}{\frac{1}{2n+1}} = \infty$$

$$x = -1 \text{ 时 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} (-1)^{2n} \text{ 收敛}$$

$\therefore x \in (-1, 1)$ 为函数的收敛域。

$$\text{和函数为 } S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n} \cdot \frac{1}{x}$$

(18) (本题满分 10 分)

已知曲线 $L: \begin{cases} x = f(t) \\ y = \cos t \end{cases} \quad \left(0 \leq t < \frac{\pi}{2}\right)$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(0) = 0, f'(t) > 0 \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ 。

若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表达式, 并求此曲线 L 与 x 轴与 y 轴无边界的区域的面积。

【解析】: (1) 曲线 L 在任一处 (x, y) 的切线斜率为 $\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin t}{f'(t)}$, 过该点 (x, y) 处的切线为

$$Y - \cos t = \frac{-\sin t}{f'(t)}(X - f(t)), \text{ 令 } Y = 0 \text{ 得 } X = f'(t)\cos t + f(t). \text{ 由于曲线 } L \text{ 与 } x \text{ 轴和 } y \text{ 轴的交点到切}$$

点的距离恒为 1.

$$\text{故有 } [f'(t)\cot t + f(t) - f(t)]^2 + \cos^2 t = 1, \text{ 又因为 } f'(t) > 0 \quad (0 < t < \frac{\pi}{2})$$

$$\text{所以 } f'(t) = \frac{\sin t}{\cot t}, \text{ 两边同时取不定积分可得 } f(t) = \ln|\sec t + \tan t| - \sin t + C, \text{ 又由于 } f(0) = 0,$$

$$\text{所以 } C = 0. \text{ 故函数 } f(t) = \ln|\sec t + \tan t| - \sin t.$$

(2) 此曲线 L 与 x 轴和 y 轴的所围成的无边界的区域的面积为:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot f'(t) dt = \frac{\pi}{4}.$$

(19) (本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点 $(0, 0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2, 0)$, 再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点 $(0, 2)$ 的曲线段, 计算曲线积分 $J = \int_L 3x^2 y dx + (x^2 + x - 2y) dy$ 。

【解析】: 设圆 $x^2 + y^2 = 2x$ 为圆 C_1 , 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 为圆 C_2 , 下补线利用格林公式即可, 设所补直线 L_1 为 $x = 0 (0 \leq y \leq 2)$, 下用格林公式得: 原式 $= \int_{L+L_1} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy - \int_{L_1} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$

$$= \iint_D (3x^2 + 1 - 3x^2) dxdy - \int_2^0 -2y dy = \frac{1}{4} S_{C_2} - \frac{1}{2} S_{C_1} + 4 = \frac{\pi}{2} - 4$$

(20) (本题满分 10 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(I) 求 $|A|$

(II) 已知线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解, 求 a , 并求 $Ax = b$ 的通解。

$$\text{【解析】(I)} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a \times (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 - a^4$$

$$\text{(II)} \quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a - a^2 \end{array} \right) \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a^4 & -a - a^2 \end{array} \right) \end{array}$$

可知当要使得原线性方程组有无穷多解, 则有 $1 - a^4 = 0$ 及 $-a - a^2 = 0$, 可知 $a = -1$ 。

$$\text{此时, 原线性方程组增广矩阵为} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{进一步化为行最简形得} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{可知导出组的基础解系为} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{非齐次方程的特解为} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{故其通解为} k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

线性方程组 $Ax = b$ 存在 2 个不同的解, 有 $|A| = 0$.

$$\text{即: } |A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0, \text{ 得 } \lambda = 1 \text{ 或 } -1.$$

当 $\lambda = 1$ 时, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 显然不符, 故 $\lambda = -1$.

(21) (本题满分 10 分) 三阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$, A^T 为矩阵 A 的转置, 已知 $r(A^T A) = 2$, 且二次型

$$f = x^T A^T A x.$$

1) 求 a

2) 求二次型对应的二次型矩阵, 并将二次型化为标准型, 写出正交变换过程。

【解析】: 1) 由 $r(A^T A) = r(A) = 2$ 可得,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} = a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\begin{aligned} 2) \quad f &= x^T A^T A x = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 \end{aligned}$$

$$\text{则矩阵 } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0$$

解得 B 矩阵的特征值为: $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 6$

对于 $\lambda_1 = 0$, 解 $(\lambda_1 E - B)X = 0$ 得对应的特征向量为: $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

对于 $\lambda_2 = 2$, 解 $(\lambda_2 E - B)X = 0$ 得对应的特征向量为: $\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

对于 $\lambda_3 = 6$, 解 $(\lambda_3 E - B)X = 0$ 得对应的特征向量为: $\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

将 η_1, η_2, η_3 单位化可得:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

(22) (本题满分 10 分)

已知随机变量 X, Y 以及 XY 的分布律如下表所示,

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

求: (1) $P(X = 2Y)$;

(2) $\text{cov}(X - Y, Y)$ 与 ρ_{XY} .

【解析】:

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

$$(1) P(X = 2Y) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$$

$$(2) \text{cov}(X - Y, Y) = \text{cov}(X, Y) - \text{cov}(Y, Y)$$

$$\text{cov}(X, Y) = EXY - EXEY, \text{ 其中 } EX = \frac{2}{3}, EX^2 = 1, EY = 1, EY^2 = \frac{5}{3}, DX = EX^2 - (EX)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}, \quad EXY = \frac{2}{3}$$

$$\text{所以, } \text{cov}(X, Y) = 0, \quad \text{cov}(Y, Y) = DY = \frac{2}{3}, \quad \text{cov}(X - Y, Y) = -\frac{2}{3}, \quad \rho_{XY} = 0.$$

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 与 $N(\mu, 2\sigma^2)$, 其中 σ 是未知参数且 $\sigma > 0$,

设 $Z = X - Y$,

(1) 求 z 的概率密度 $f(z, \sigma^2)$;

(2) 设 z_1, z_2, \dots, z_n 为来自总体 Z 的简单随机样本, 求 σ^2 的最大似然估计量 $\bar{\sigma}^2$;

(3) 证明 $\bar{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。

【解析】: (1) 因为 $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y \sim N(\mu, 2\sigma^2)$, 且 X 与 Y 相互独立, 故 $Z = X - Y \sim N(0, 5\sigma^2)$,

所以, Z 的概率密度为 $f(z, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{10\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{10\sigma^2}}, (-\infty < z < +\infty)$

(2) 似然函数

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(z_i, \sigma^2) = \frac{1}{(10\pi)^{\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{10\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2} = (10\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{10\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2}$$

$$\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(10\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{10\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2$$

$$\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{10(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n z_i^2 = 0$$

$$\text{解得最大似然估计值为 } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{5n} \sum_{i=1}^n z_i^2,$$

$$\text{最大似然估计量为 } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{5n} \sum_{i=1}^n Z_i^2$$

$$(3) \quad E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{1}{5n} \sum_{i=1}^n Z_i^2\right) = \frac{1}{5n} \sum_{i=1}^n EZ_i^2 = \frac{1}{5n} \sum_{i=1}^n [(EZ_i)^2 + DZ_i] = \frac{1}{5n} \sum_{i=1}^n 5\sigma^2 = \sigma^2$$

故 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。