2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

（1）　下列函数不可导的是：

$(A)\ y = |x|\sin|x|$

$(B)\ y = |x|\sin\sqrt{|x|}$

$(C)\ y = \cos|x|$

$(D)\ y = \cos\sqrt{|x|}$

（2）过点（1,0,0）与（0,1,0）且与$z=x^2+y^2$相切的平面方程为

$(A)\ z = 0$与$x + y - z = 1$

$(B)\ z = 0$与$2x + 2y - z = 2$

$(C)\ y = x$与$x+y-z=1$

$(D)\ y = x$与$2c + 2y - z = 2$

（3）$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} =$

$(A)\ \sin 1 + \cos 1$

$(B)\ 2\sin 1 + \cos 1$

$(C)\ \sin 1 + \cos 1$

$(D)\ 3\sin 1 + 2\cos 1$

（4）$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$　　$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x}dx$　　$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sqrt{\cos x})dx$），则 M,N,K 的大小关系为

$(A)\ M > N > K$

$(B)\ M > K > N$

$(C)\ K > M > N$

$(D)\ N > M > K$

（5）下列矩阵中，与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为______.

A.$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　B.$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

C.$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　D.$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

（6）.设A，B为n阶矩阵，记$r(X)$为矩阵X的秩，$(X \quad Y)$ 表示分块矩阵，则

A. $r(A \quad AB)=r(A)$　　B. $r(A \quad BA)=r(A)$

C. $r(A \quad B)=\max\{r(A),r(B)\}$　　D. $r(A \quad B)=r(A^T \quad B^T)$

（7）设$f(x)$为某分部的概率密度函数，$f(1+x)=f(1-x)$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$，则 $p\{X\leq 0\}=$__________.

A. 0.2　　B. 0.3　　C. 0.4　　D. 0.6

（8）给定总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2已知，给定样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$，对总体均值μ进行检验，令$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，则

A．若显著性水平$\alpha=0.05$时拒绝H_0，则$\alpha=0.01$时也拒绝H_0.

B. 若显著性水平$\alpha=0.05$时接受H_0，则$\alpha=0.01$时拒绝H_0.

C. 若显著性水平$\alpha=0.05$时拒绝H_0，则$\alpha=0.01$时接受H_0.

D. 若显著性水平$\alpha=0.05$时接受H_0，则$\alpha=0.01$时也接受H_0.

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$, 则$k=$_____

（10）$y=f(x)$的图像过（0,0），且与$y=a^x$相切与（1,2），求$\int_0^1 xf'(x)dx=$ ______

（11）$F(x,y,z)=xy\vec{\varepsilon}-yz\vec{\eta}+xz\vec{k}$, 求$rot\vec{F}(1,1,0)=$ ________

（12）曲线 S 由$x^2+y^2+z^2=1$与$x+y+z=0$相交而成，求$\oint xydS=$ _________

（13）二阶矩阵 A 有两个不同特征值，α_1,α_2 是 A 的线性无关的特征向量，

$A^2(\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1+\alpha_2)$,则$|A|=$ ______

（14）A,B 独立，A,C 独立，$BC\neq\phi, P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(AC|AB\bigcup C)=\dfrac{1}{4}$,则$P(C)=$

（15）. 求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$

（16）. 一根绳长 2m，截成三段，分别折成圆、三角形、正方形，这三段分别为多长是所得的面积总和最小，并求该最小值。

（17）. $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 取正面，求 $\iint\limits_{\Sigma}xdydz+(y^3+z)dxdz+z^3dxdy$

（18）微分方程 $y'+y=f(x)$

（I）当 $f(x)=x$ 时，求微分方程的通解.

（II）当 $f(x)$ 为周期函数时，证微分方程有通解与其对应，且该通解也为周期函数.

（19）数列$\{x_n\}$，$x_1>0$，$x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$.证：$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

（20）设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$, 其中 a 是参数，

（I）求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解

（II）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形

（21）已知 a 是常数，且矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}$ 可经初等变换化为矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$

（I）求 a

（II）求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 P

（22）X,Y 随机变量相互独立，$P\{X=1\}=y_1$，$P\{X=-1\}=y_2$，Y 服从 λ 的泊松分布.

$Z=XY$

（1）求 $\mathrm{cov}(X,Z)$.

（2）求 Z 得概率分布.

（23）$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自总体 X 的分布，$f(x)=\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$（$\sigma$ 未知，$-\infty<x<+\infty$）.

（1）求σ得极大似然估计.

（2）求$E(\hat{\sigma})$，$D(\hat{\sigma})$.

2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1.下列函数中不可导的是（　　）。

A. $f(x)=|x|\sin(|x|)$　　B. $f(x)=|x|\sin(\sqrt{|x|})$

C. $f(x)=\cos|x|$　　D. $f(x)=\cos(\sqrt{|x|})$

【答案】D
【解析】【解析】
A 可导：

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|\sin(|x|)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x\cdot\sin x}{x}=0,f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|\sin(|x|)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\sin x}{x}=0$$

B 可导：

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\cdot\sin\sqrt{-x}}{x}=0,f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\sin\sqrt{x}}{x}=0$$

C 可导：

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos|x|-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=0,f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos|x|-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=0$$

D 不可导：

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}(-x)}{x}=\frac{1}{2},f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x}{x}=-\frac{1}{2}$$

$$f_+'(0)\neq f_-'(0)$$

2.过点 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,0)$ 且与 $z=x^2+y^2$ 相切的平面方程为

A. $z=0$ 与 $x+y-z=1$　　B. $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$
C. $y=x$ 与 $x+y-z=1$　　D. $y=x$ 与 $2x+2y-z=2$

【答案】B
【解析】因为平面过点 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,0)$，故 C、D 排除，

曲面$z=x^2+y^2$的法向量为$(2x,2y,-1)$,因为平面过$(1,0,0)$，

则平面方程为$2x(X-1)+2yY-Z=0$，又因为平面过$(0,1,0)$，故$x=y$

由此，取特殊值；令 x=1,则法向量为$(2,2,-1)$，故 B 选项正确。

3. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=$

A. $\sin 1+\cos 1$　　　　B. $2\sin 1+\cos 1$

C. $2\sin 1+2\cos 1$　　　　D. $3\sin 1+2\cos 1$

【答案】B.

【解析】

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n)!}x^{2n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n}+3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

$$=-x\sin x+3\cos x$$

$$S(x)=x\cos x+2\sin x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=S(1)=\cos 1+2\sin 1$$

4. . $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx, K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)dx$,则 M,N,K 大小关系为

A. $M>N>K$　　　　B. $M>K>N$

C. $K>M>N$　　　　D. $K>N>M$

【答案】C

【解析】

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{2x}{1+x^2})dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx$$

$$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\text{时},1+\sqrt{\cos x}\geq 1,\text{所以}K>M$$

令$f(x)=1+x-e^x, f(0)=0, f'(x)=1-e^x$

当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$f'(x)<0$;当$x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$时，$f'(x)>0$

所以$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时，有$f(x)\leq 0$，从可有$\frac{1+x}{e^x}\leq 1$，由比较定理得N<M, 故选C

5. 下列矩阵中，与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为

A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

【答案】A

【解析】

方法一：排除法

令$Q=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，特征值为 1,1,1，$r(E-Q)=2$

选项 A：令$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$A$的特征值为 1,1,1，$r(E-A)=r\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}=2$

选项 B：令$B=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B$的特征值为 1,1,1，$r(E-B)=r\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}=1$

选项 C：令$C=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$C$的特征值为 1,1,1，$r(E-C)=r\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=1$

选项 B：令$D=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$D$的特征值为 1,1,1，$r(E-D)=r\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=1$

若矩阵Q与J相似，则矩阵$E-Q$与$E-J$相似，从而$r(E-Q)=r(E-J)$，故选（A）

方法二：定义法（利用初等矩阵的性质）

令$P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$P^{-1}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}P=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

所以$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$相似，故选（A）

6.设A,B为n阶矩阵，记$r(X)$为矩阵X的秩，$(X\ \ Y)$表示分块矩阵，则

A.$r(A\ \ AB)=r(A)$.　　B.$r(A\ \ BA)=r(A)$.

C.$r(A\ \ B)=\max\{r(A), r(B)\}$.　　D.$r(A\ \ B)=r(A^T\ \ B^T)$.

【答案】A.

【解析】根据矩阵的运算性质，$r(E,B)=n\Rightarrow r(A,AB)=r[A(E,B)]=r(A)$,故 A 正确.

若 $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，则 $BA=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，所以 $r(A\ \ BA)=r\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}=2,$

$r(A)=1$. 排除 B.

若$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}0&0\\3&4\end{pmatrix}$,那么$r(A\quad B)=r\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&3&4\end{pmatrix}=2, r(A)=1, r(B)=1,$
所以C排除.

若 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，则 $r(A^T\ \ B^T)=r\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=1$，$r(A,B)=r\begin{pmatrix}A^T\\B^T\end{pmatrix}$

$=r\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=2$ 所以排除 D.

7. 设 $f(x)$ 为某分布的概率密度函数，$f(1+x)=f(1-x)$，$\int_0^2 f(x)dx=0.6$，则

$P\{X<0\}=$

A.0.2　　B.0.3　　C.0.4　　D.0.6

【答案】A.

【解析】特殊值法：由已知可将 $f(x)$ 看成随机变量 $X\sim N\left(1,\sigma^2\right)$ 的概率密度，根据正态分布的对称性，$P\left(X<0\right)=0.2$

8. 给定总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，给定样本 $X_1,X_2,\ldots,X_n$，对总体均值 μ 进行检验，令 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，则

A. 若显著性水 $\alpha=0.05$ 时拒绝 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时也拒绝 H_0

B. 若显著性水 $\alpha=0.05$ 时接受 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时拒绝 H_0

C. 若显著性水 $\alpha=0.05$ 时拒绝 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时接受 H_0

D. 若显著性水 $\alpha=0.05$ 时接受 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时也接受 H_0

【答案】D

【解析】当 $\alpha=0.05$ 时，拒绝域为 $|z|\geq z_{\frac{\alpha}{2}}$，即 $|z|<z_{0.025}$　　(1)

当 $\alpha=0.01$ 时，接受域为 $|z|\geq z_{\frac{\alpha}{2}}$，即 $|z|<z_{0.005}$　　(2)

（1）包含（2），所以选项 D 正确.

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$，则 $k=$__________.

【答案】$k=-2$.

【解析】

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\lim_{x\to 0}\exp\left\{\frac{\ln\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)}{\sin kx}\right\}=e,$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)}{\sin kx}=1\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2\tan x}{1+\tan x}}{kx}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\tan x}{kx(1+\tan x)}=\frac{-2}{k}=1$$

$$\Rightarrow k=-2.$$

10.设函数 $f(x)$ 具有 2 阶连续导数，若曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,0)$ 且与曲线 $y=2^x$ 在点 $(1,2)$ 处相切，则 $\int_0^1 xf''(x)dx=$______________.

【答案】$2\ln 2-2$

【解析】

$f(0)=0, f(1)=2, f'(1)=2^x\ln 2\big|_{x=1}=2\ln 2$

$$\int_0^1 xf''(x)dx=\int_0^1 xdf'(x)=xf'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx=f'(1)-\int_0^1 xf'(x)dx$$

$=2\ln 2-f(1)+f(0)=2\ln 2-2$

11.设 $F(x,y,z)=xy\vec{i}-yz\vec{j}+zx\vec{k}$.则 $rot\overrightarrow{F}(1,1,0)=$______________________.

【答案】$(1,0,-1)$ 或 $\vec{i}-\vec{k}$

【解析】令 $P=xy,Q=-yz,R=xz$

则 $rot\overrightarrow{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=(0+y,0-z,0-x)=(y,-z,-x)$

故 $rot\overrightarrow{F}(1,1,0)=\vec{i}-\vec{k}$

12.曲线 S 由 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x+y+z=0$ 相交而成，求 $\oint xyds=$______________.

【答案】$-\frac{\pi}{3}$.

【解析】

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x+y+z=0\end{cases}\Rightarrow xy=\frac{1}{2}-(x^2+y^2)$$

$$\oint xyds=\oint[\frac{1}{2}-(x^2+y^2)]ds=\frac{1}{2}\oint ds-\frac{2}{3}\oint(x^2+y^2+z^2)ds=-\frac{1}{6}\oint ds=-\frac{\pi}{3}.$$

13.二阶矩阵 A 有两个不同特征值，α_1,α_2 是 A 的线性无关的特征向量，且满足 $A^2(\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1+\alpha_2)$，则 $|A|=$_________________.

【答案】-1

【解析】$A^2\left(\alpha_1+\alpha_2\right)=A^2\alpha_1+A^2\alpha_2=\lambda_1^{\ 2}\alpha_1+\lambda_2^{\ 2}\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2$

从而 $\left(\lambda_1^{\ 2}-1\right)\alpha_1+\left(\lambda_2^{\ 2}-1\right)\alpha_2=0$

$\because \alpha_1,\alpha_2$ 无关，$\therefore \lambda_1^{\ 2}-1=0,\lambda_2^{\ 2}-1=0$

$\therefore \lambda_1=1,\lambda_2=-1,$ 或 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，$\therefore |A|=-1$

14. 设随机事件 A 与 B 相互独立，A 与 C 相互独立，$BC=\phi$，若

$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},P(AC|AB\cup C)=\frac{1}{4}$，则 $P(C)=$________________.

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】

$$P\left(AC|AB\cup C\right)=\frac{P\left(AC\cap\left(AB\cup C\right)\right)}{P\left(AB\cup C\right)}=\frac{P\left(ABC\cup AC\right)}{P\left(AB\cup C\right)}=\frac{P\left(ABC\right)+P\left(AC\right)-P\left(ABC\right)}{P\left(AB\right)+P\left(C\right)-P\left(ABC\right)}$$

$\because BC=\varnothing,$从而$ABC=\varnothing$

$$\therefore\frac{P\left(ABC\right)+P\left(AC\right)-P\left(ABC\right)}{P\left(AB\right)+P\left(C\right)-P\left(ABC\right)}=\frac{P\left(A\right)P\left(C\right)}{P\left(A\right)P\left(B\right)+P\left(C\right)}=\frac{1}{4}$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$

【答案】$\frac{1}{2}(e^{2x}arc\tan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{e^x-1})+C$

【解析】

$$原式=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}de^{2x}$$

$$=\frac{1}{2}(e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\int e^{2x}\frac{1}{1+e^x-1}\cdot\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx)$$

$$=\frac{1}{2}(e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\int\frac{e^{2x}}{2\sqrt{e^x-1}}dx)$$

$$=\frac{1}{2}(e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\int\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}de^x)$$

$$=\frac{1}{2}(e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{3}\left(e^x-1\right)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{e^x-1})+C$$

对于 $\int\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}de^x$,令 $\sqrt{e^x-1}=t,e^x=t^2+1$，则

$$\int\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}de^x=\int(t^2+1)dt=\frac{1}{3}t^3+t+C=\frac{1}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{e^x-1}+C$$

故原式$=\frac{1}{2}(e^{2x}arc\tan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{e^x-1})+C$

16.（本题满分 10 分）一根绳长 2m 截成三段，分别折成圆、三角形与正方形，这三段分别为多长时所得面积之和最小，并求该最小值.

【答案】

【解析】假设圆的半径为 x，正方形边长为 y，正三角形边长为 z，则有

$$2\pi x+4y+3z=2,x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0$$

令 $f(x,y,z)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^2+\lambda(2\pi x+4y+3z-2)$

$$f(x,y,z)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^2+\lambda(2\pi x+4y+3z-2)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=2\pi x+2\pi\lambda=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y+4\lambda=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\sqrt{3}}{2}z+3\lambda=0\\ 2\pi x+4y+3z-2=0\end{cases}$$

求解上述方程得到，驻点为 $\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}(1,2,2\sqrt{3})$

最小面积为，$S_{\min}=\pi\left(\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2}{\pi+4+3\sqrt{3}}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$.

17.（本题满分 10 分）

$x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 取正面，求 $\iint\limits_{\Sigma}xdydz+(y^3+z)dxdz+z^3dxdy$.

【答案】$\frac{14}{45}\pi$.

【解析】$x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$，即 $x^2+3y^2+3z^2=1$

$P=x,Q=y^3+z,R=z^3$，设 $\sum_1:\begin{cases}3y^2+3z^2\leq 1\\ x=0\end{cases}$，方向指向 x 轴负半轴，

$$\iint_{\Sigma_1+\Sigma} xdydz+(y^3+z)dxdz+z^3dxdy \underline{\underline{\text{高斯公式}}} \iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz$$

$$=\iiint_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)dxdydz=\iiint_{\Omega}dxdydz+6\iiint_{\Omega}y^2dxdydz=\frac{2}{9}\pi+\frac{4}{45}\pi=\frac{14}{45}\pi$$

又$\because \iint_{\Sigma_1} xdydz+(y^3+z)dxdz+z^3dxdy=0$，所以原式$=\iint_{\Sigma_1+\Sigma}-\iint_{\Sigma_1}=\frac{14}{45}\pi$.

18. （本题满分 10 分）

微分方程 $y'+y=f(x)$

（1）当 $f(x)=x$ 时，求微分方程的通解

（2）当 $f(x)$ 为周期函数时，证微分方程有通解与其对应，且该通解也为周期函数

【答案】

【解析】（1） $y'+y=x \Rightarrow y=e^{-\int dx}(\int xe^{\int dx}dx+C)=(x-1)+Ce^{-x}.$

（2） $y(x)=e^{-x}\int e^x f(x)dx$,由于 $f(x+T)=f(x)$，则

$y(x+T)=e^{-(x+T)}\int e^{x+T}f(x+T)dx=e^{-x}\int e^x f(x)dx.$ 得证。

19. （本题满分 10 分）

数列$\{x_n\},x_1>0,x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1,$ 证明$\{x_n\}$收敛，并求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$

【答案】 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0.$

【解析】

(1)

有界性：由 $x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$ 有 $e^{x_{n+1}}=\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}\Rightarrow x_{n+1}=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}$

则 $x_2=\ln\dfrac{e^{x_1}-1}{x_1}$,设 $f(x)=e^x-1-x$.

$\because f'(x)=e^x-1>0(x>0)$,且 $f(0)=0$

$\therefore f(x)$ 单调递增,故 $f(x)>0$，即 $e^x-1>x(x>0)$

因此$\dfrac{e^{x_1}-1}{x_1}$在$x_1>0$时大于 1,故$x_2=\ln\dfrac{e^{x_1}-1}{x_1}>0$,

同理，用数学归纳法可证之， 对$\forall n,x_n>0$.

单调性： $x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}-x_n=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}-\ln e^{x_n}=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}$

设$g(x)=e^x-1-xe^x$,$\because g'(x)=-xe^x$

显然当$x>0$时，$g'(x)<0,$则$g(x)$单调递减，又$\because g(0)=0$

$\therefore g(x)<g(0)=0,\therefore e^x-1<xe^x\Rightarrow\dfrac{e^x-1}{xe^x}<1$

$\therefore x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}<0,n=1,2,3,\cdots$

故$\{x_n\}$单调递减

综上可知$\{x_n\}$单调递减且存在下界，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

（2）设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由$ae^a=e^a-1$，可知$a=0$.

20. （本题满分 11 分）

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中$a$是参数。

（1）求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解

（2）求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形

【解析】

（1）$\because f(x_1,x_2,x_3)=0$，

$$\therefore\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_2+x_3=0\\x_1+ax_3=0\end{cases},\text{系数矩阵}A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{bmatrix}$$

①当$a-2=0$，即$a=2$时，$r(A)=2<3,A\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 有非零解

通解为 $x=k\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},k\in R$

②当 $a-2\neq 0$，即 $a\neq 2$ 时，$r(A)=3, f(x_1,x_2,x_3)=0$ 只有 0 解

即 $x_1=x_2=x_3=0$

(2) 由（1）可得：当 $a\neq 2$ 时

方法一、

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为正定二次型，

所以规范形为 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$

方法二、

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{bmatrix},|A|\neq 0$$

$\therefore\ y=Ax$ 为可逆线性变换，所以规范形为 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$

当 $a=2$ 时

方法一、特征值法：

$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3$

所对应的二次型矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&2&0\\3&0&6\end{pmatrix}$$

$|\lambda E-B|=\lambda\left(\lambda^2-10\lambda+18\right)=0$

$\lambda_1=0,\lambda_2=5+\sqrt{7}>0,\lambda_3=5-\sqrt{7}>0$

所以二次型的规范型为 $z_1^2+z_2^2$

方法二：配方法

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3$$
$$=2\left(x_1-\frac{x_2+3x_3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1-\dfrac{x_2+3x_3}{2} \\ y_2=x_2-x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$，$\therefore$ 二次型的标准型为 $2y_1^2+\dfrac{3}{2}y_2^2$，$\therefore$ 二次型的规范型为 $z_1^2+z_2^2$.

21.（本题满分 11 分）

已知 a 是常数，且矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$

（1）　求 a

（2）　求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 P

【答案】

（1）$a=2$

（2）$P=\begin{bmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}$，其中 $k_2\neq k_3,k_1,k_2,k_3\in R$

【解析】

（1）

$\because$ 矩阵 A 经过初等列变换得到矩阵 B

$\therefore$ 矩阵 A,B 等价

$\therefore r(A)=r(B)$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&0&2-a\end{bmatrix}$$

$\therefore 2-a=0,a=2$

（2）

$$(A,B)=\begin{bmatrix}1&2&a&1&a&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-a&-1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}-6k_1+3\\2k_1-1\\k_1\end{bmatrix},Y=\begin{bmatrix}-6k_2+4\\2k_2-1\\k_2\end{bmatrix},Z=\begin{bmatrix}-6k_3+4\\2k_3-1\\k_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&k_3-k_2\end{bmatrix}$$

$\because P$ 可逆，$\therefore k_2\neq k_3$

$$\therefore P=\begin{bmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}，\quad k_2\neq k_3,k_1,k_2,k_3\in R$$

22.已知随机变量 X,Y 相互独立，且 $P(X=1)=P(X=-1)=\frac{1}{2},Y$ 服从参数为 λ 的泊松分布，$Z=XY$。

（1）求 $Cov(X,Z)$　　　（2）求 Z 的分布律

【解析】

$(1).\operatorname{cov}(X,Z)=\operatorname{cov}(X,XY)=EX^2Y-EXEXY=EY=\lambda$

$(2)Z$的所有可能取值为$0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$

$P(Z=k)=P(X\cdot Y=k)=P(XY=k\mid X=1)P(X=1)+P(XY=k\mid X=-1)P(X=-1)$

$=P(XY=k,X=1)+P(XY=k,X=-1)$

$=P(Y=k,X=1)+P(Y=-k,X=-1)$

$=\frac{1}{2}P(Y=k)+\frac{1}{2}P(Y=-k),$

当$k=0,P(Z=0)=\frac{1}{2}e^{-\lambda}+\frac{1}{2}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}$

当$k<0,P(Z=k)=0+\frac{1}{2}\frac{\lambda^{-k}}{(-k)!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{-k}}{2(-k)!}e^{-\lambda}$

当$k>0,P(Z=k)=\frac{1}{2}\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}+0=\frac{\lambda^{k}}{2k!}e^{-\lambda}$

23.已知总体 X 的密度函数为 $f(x,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty$

$X_{1,}X_2,...X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，σ 为大于 0 的参数，σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$

（1）求 $\hat{\sigma}$.（2）求 $E\hat{\sigma},D\hat{\sigma}$

【解析】（1）对于总体的 n 个样本值 $x_1,x_2,...,x_n$，其似然函数为

$$L(x_1,x_2,...,x_n,\sigma)=\frac{1}{2^n\sigma^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}}$$

取对数得 $\ln L(\sigma)=-n\ln 2-n\ln\sigma-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}$，$\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma^2}=0$

解得 $\hat{\sigma}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{n}$，又因为 $\frac{d^2\ln L(\sigma)}{d\sigma^2}|_{\hat{\sigma}}<0$，$\therefore\sigma$ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i|}{n}$.

（2）$E(\hat{\sigma})=\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}|x_i|)=E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\sigma$

$D(\hat{\sigma})=\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}|x_i|=\frac{1}{n}D(|X|))=\frac{1}{n}[E(X^2)-(E(|X|))^2]$

其中 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=2\sigma^2$，$\therefore D(\hat{\sigma})=\frac{\sigma^2}{n}$.