

2009 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一) 试卷

一、选择题(1-8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 等价无穷小, 则

(A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$

(B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$

(C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$

(D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$

(2) 如图, 正方形 $\{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 被其对角线划分为四个区域

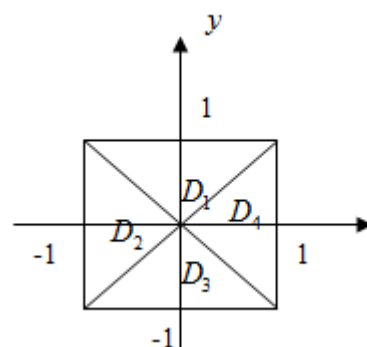
$D_k (k = 1, 2, 3, 4), I_k = \iint_{D_k} y \cos x dx dy$, 则 $\max_{1 \leq k \leq 4} \{I_k\} =$

(A) I_1

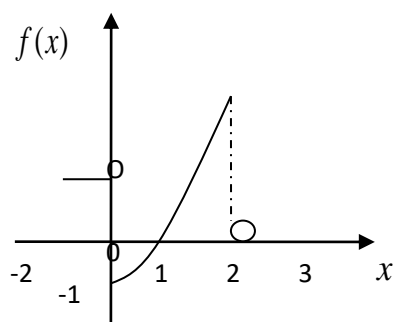
(B) I_2

(C) I_3

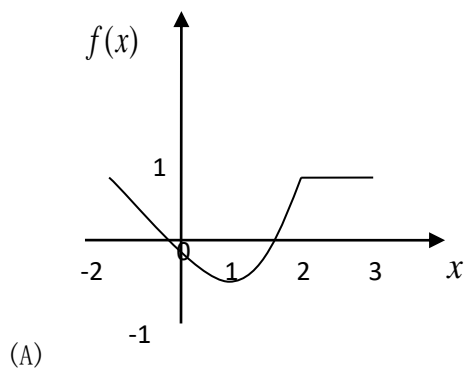
(D) I_4



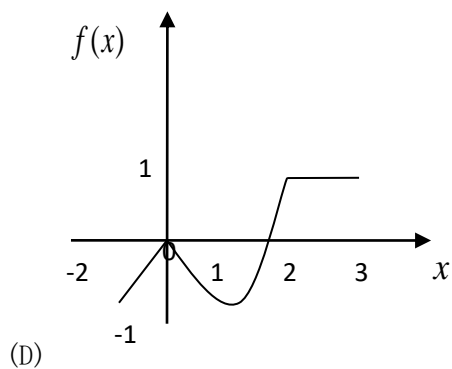
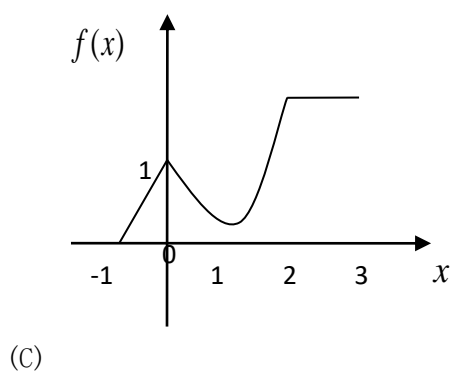
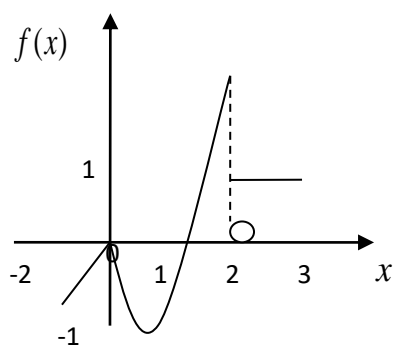
(3) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形为



则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为



(B)



(4) 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.

(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.

(D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

(5) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量空间 \mathbf{R}^3 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基

$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(6) 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 均为 2 阶矩阵, $\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*$ 分别为 \mathbf{A}, \mathbf{B} 的伴随矩阵, 若 $|\mathbf{A}| = 2, |\mathbf{B}| = 3$, 则分块

矩阵 $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & 3\mathbf{B}^* \\ 2\mathbf{A}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & 2\mathbf{B}^* \\ 3\mathbf{A}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & 3\mathbf{A}^* \\ 2\mathbf{B}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & 2\mathbf{A}^* \\ 3\mathbf{B}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix}$

(7) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准

正态分布函数, 则 $EX =$

(A) 0

(B) 0.3

(C) 0.7

(D) 1

- (8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$, 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为
- (A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) 3

二、填空题(9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.)

- (9) 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $z=f(x,xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.
- (10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$, 则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的解为 $y =$ _____.
- (11) 已知曲线 $L: y=x^2(0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 则 $\int_L x ds =$ _____.
- (12) 设 $\Omega = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$, 则 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz =$ _____.
- (13) 若 3 维列向量 α, β 满足 $\alpha^T \beta = 2$, 其中 α^T 为 α 的转置, 则矩阵 $\beta \alpha^T$ 的非零特征值为 _____.
- (14) 设 X_1, X_2, \dots, X_m 为来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, \bar{X} 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k =$ _____.

三、解答题(15-23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

- (15) (本题满分 9 分)
- 求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y \ln y$ 的极值.
- (16) (本题满分 9 分)
- 设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}(n=1,2,\dots)$ 所围成区域的面积, 记 $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$, 求 S_1 与 S_2 的值.
- (17) (本题满分 11 分)

椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 绕 x 轴旋转而成, 圆锥面 S_2 是过点 $(4, 0)$ 且与椭圆

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(1) 求 S_1 及 S_2 的方程. (2) 求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

(18) (本题满分 11 分)

(1) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 可导, 则存在

$\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

(2) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则

$f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$

(19) (本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I = \iiint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的

外侧.

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(1) 求满足 $\mathbf{A}\xi_2 = \xi_1$ 的 ξ_2 . $\mathbf{A}^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 . (2) 对 (1) 中的任意向量 ξ_2, ξ_3

证明 ξ_1, ξ_2, ξ_3 无关.

(21) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

(1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值; (2) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

(22) (本题满分 11 分)

袋中有 1 个红色球, 2 个黑色球与 3 个白球, 现有回放地从袋中取两次, 每次取一球, 以 X, Y, Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(1) 求 $p\{X=1|Z=0\}$. (2) 求二维随机变量 (X, Y) 概率分布

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中参数 $\lambda (\lambda > 0)$ 未

知, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求参数 λ 的矩估计量.

(2) 求参数 λ 的最大似然估计量.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题答案解析

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 等价无穷小，则

- (A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$. (B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$.
(C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$. (D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$.

【答案】 A

【解析】 $f(x) = x - \sin ax, g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 为等价无穷小，则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1 - bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \cdot (-bx)} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \sin ax}{-6bx} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \sin ax}{-\frac{6b}{a} \cdot ax} = -\frac{a^3}{6b} = 1 \quad \therefore a^3 = -6b \quad \text{故排除 } B, C. \end{aligned}$$

另外 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2}$ 存在，蕴含了 $1 - a \cos ax \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$) 故 $a = 1$. 排除 D。

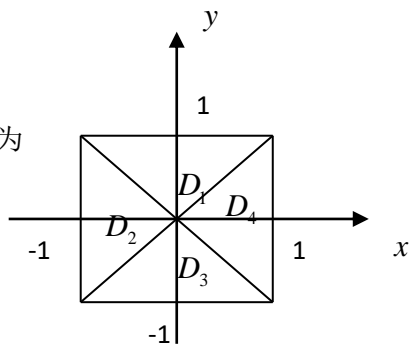
所以本题选 A。

(2) 如图，正方形 $\{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 被其对角线划分为

四个区域 D_k ($k = 1, 2, 3, 4$)， $I_k = \iint_{D_k} y \cos x dx dy$,

则 $\max_{1 \leq k \leq 4} \{I_k\} =$

- (A) I_1 . (B) I_2 . (C) I_3 . (D) I_4 .



【答案】 A

【解析】 本题利用二重积分区域的对称性及被积函数的奇偶性。

D_2, D_4 两区域关于 x 轴对称，而 $f(x, -y) = -y \cos x = -f(x, y)$ ，即被积函数是关于 y 的

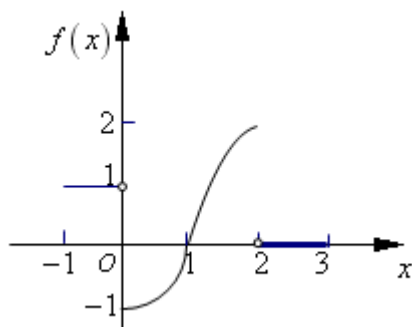
奇函数，所以 $I_2 = I_4 = 0$ ；

D_1, D_3 两区域关于 y 轴对称，而 $f(-x, y) = y \cos(-x) = y \cos x = f(x, y)$ ，即被积函数是

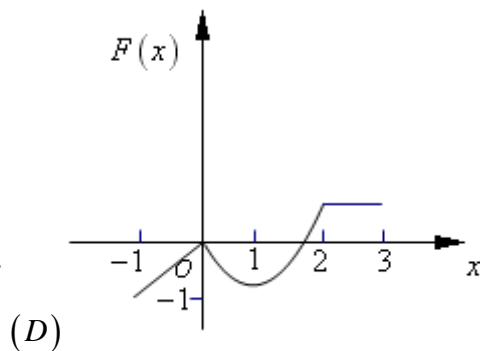
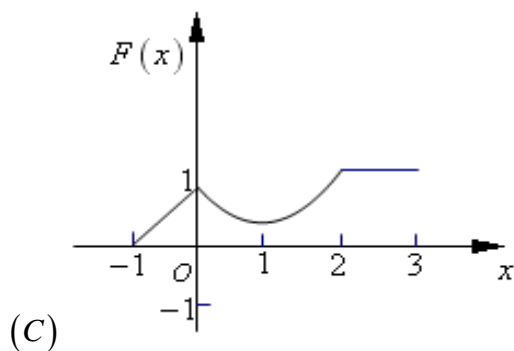
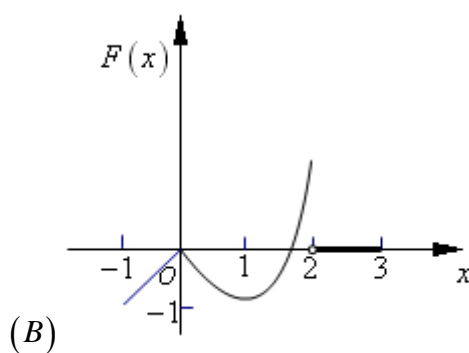
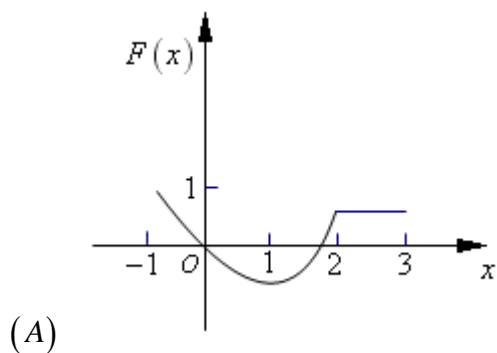
关于 x 的偶函数，所以 $I_1 = 2 \iint_{\{(x,y)|y \geq x, 0 \leq x \leq 1\}} y \cos x dx dy > 0$;

$I_3 = 2 \iint_{\{(x,y)|y \leq -x, 0 \leq x \leq 1\}} y \cos x dx dy < 0$. 所以正确答案为 A.

(3) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形为：



则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为



【答案】D

【解析】此题为定积分的应用知识考核，由 $y = f(x)$ 的图形可见，其图像与 x 轴及 y 轴、

$x = x_0$ 所围的图形的代数面积为所求函数 $F(x)$ ，从而可得出几个方面的特征：

① $x \in [0, 1]$ 时， $F(x) \leq 0$ ，且单调递减。

② $x \in [1, 2]$ 时， $F(x)$ 单调递增。

③ $x \in [2, 3]$ 时, $F(x)$ 为常函数。

④ $x \in [-1, 0]$ 时, $F(x) \leq 0$ 为线性函数, 单调递增。

⑤ 由于 $F(x)$ 为连续函数

结合这些特点, 可见正确选项为 D 。

(4) 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛。

(B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散。

(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛。

(D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散。

【答案】C

【解析】

方法一:

举反例 A 取 $a_n = b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

B 取 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$

D 取 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$

故答案为 (C)

方法二:

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则由定义可知 $\exists N_1$, 使得 $n > N_1$ 时, 有 $|a_n| < 1$

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛, 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0$, 则由定义可知 $\exists N_2$, 使得 $n > N_2$ 时, 有 $|b_n| < 1$

从而, 当 $n > N_1 + N_2$ 时, 有 $a_n^2 b_n^2 < |b_n|$, 则由正项级数的比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛。

(5) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量空间 R^3 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基

$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为

$$(A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \quad (B) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(C) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \quad (D) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

【答案】A

【解析】因为 $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A$ ，则 A 称为基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的过渡矩阵。

则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵 M 满足

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) &= \left(\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3 \right) M \\ &= \left(\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以此题选(A)。

(6) 设 A, B 均为 2 阶矩阵， A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵，若 $|A| = 2, |B| = 3$ ，则分块

矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

$$\begin{aligned} (A) & \begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}. & (B) & \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}. \\ (C) & \begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}. & (D) & \begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

【答案】B

【解析】根据 $CC^* = |C|E$ ，若 $C^* = |C|C^{-1}, C^{-1} = \frac{1}{|C|}C^*$

分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的行列式 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{2 \times 2} |A||B| = 2 \times 3 = 6$ ，即分块矩阵可逆

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^* &= \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = 6 \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{|B|} B^* \\ \frac{1}{|A|} A^* & 0 \end{pmatrix} \\ &= 6 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} B^* \\ \frac{1}{2} A^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

故答案为 B。

(7) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$ ，其中 $\Phi(x)$ 为标准正

态分布函数，则 $EX =$

(A) 0. (B) 0.3. (C) 0.7. (D) 1.

【答案】(C)

【解析】因为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$,

$$\text{所以 } F'(x) = 0.3\Phi'(x) + \frac{0.7}{2}\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right),$$

$$\text{所以 } EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xF'(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left[0.3\Phi'(x) + 0.35\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right) \right] dx$$

$$= 0.3 \int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'(x)dx + 0.35 \int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)dx$$

$$\text{而 } \int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'(x)dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)dx \quad \underline{\underline{\frac{x-1}{2} = u}} \quad 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (2u+1)\Phi'(u)du = 2$$

所以 $EX = 0 + 0.35 \times 2 = 0.7$ 。

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$ ， Y 的概率分布为

$P\{Y=0\} = P\{Y=1\} = \frac{1}{2}$ ，记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z = XY$ 的分布函数，则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

【答案】B

【解析】

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(XY \leq z) = P(XY \leq z | Y=0)P(Y=0) + P(XY \leq z | Y=1)P(Y=1) \\ &= \frac{1}{2}[P(XY \leq z | Y=0) + P(XY \leq z | Y=1)] \\ &= \frac{1}{2}[P(X \cdot 0 \leq z | Y=0) + P(X \leq z | Y=1)] \end{aligned}$$

$\because X, Y$ 独立

$$\therefore F_Z(z) = \frac{1}{2}[P(X \cdot 0 \leq z) + P(X \leq z)]$$

$$(1) \text{ 若 } z < 0, \text{ 则 } F_Z(z) = \frac{1}{2}\Phi(z)$$

$$(2) \text{ 当 } z \geq 0, \text{ 则 } F_Z(z) = \frac{1}{2}(1 + \Phi(z))$$

$\therefore z=0$ 为间断点，故选 (B)

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数， $z = f(x, xy)$ ，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____。

【答案】 $xf''_{12} + f'_2 + xyf''_{22}$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 + f'_2 \cdot y$ ，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xf''_{12} + f'_2 + yx \cdot f''_{22} = xf''_{12} + f'_2 + xyf''_{22}$$

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x$ ，则非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为 $y =$ _____。

【答案】 $y = -xe^x + x + 2$

【解析】由常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x$ 可知

$y_1 = e^x$ ， $y_2 = xe^x$ 为其线性无关解。代入齐次方程，有

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = (1 + a + b)e^x = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0$$

$$y_2'' + ay_2' + by_2 = [2 + a + (a + 1 + b)x]e^x = 0 \Rightarrow 2 + a = 0$$

从而可见 $a = -2, b = 1$ 。

微分方程为 $y'' - 2y' + y = x$

设特解 $y^* = Ax + B$ 代入, $y' = A, A = 1$

$$-2A + Ax + B = x$$

$$-2 + B = 0, B = 2$$

\therefore 特解 $y^* = x + 2$

$$\therefore y = (c_1 + c_2 x)e^x + x + 2$$

把 $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ 代入, 得 $c_1 = 0, c_2 = -1$

\therefore 所求 $y = -xe^x + x + 2$

(11) 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 则 $\int_L x ds =$ _____。

【答案】 $\frac{13}{6}$

【解析】由题意可知, $x = x, y = x^2, 0 \leq x \leq \sqrt{2}$, 则

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + 4x^2} dx,$$

$$\text{所以 } \int_L x ds = \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{8} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4x^2} d(1 + 4x^2)$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(1 + 4x^2)^3} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6}$$

(12) 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz =$ _____。

【答案】 $\frac{4}{15}\pi$

【解析】

$$\text{方法一: } \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi \rho^2 \cos^2 \varphi d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi d(-\cos \varphi) \int_0^1 \rho^4 d\rho$$

$$= 2\pi \cdot -\frac{\cos^3 \varphi}{3} \Big|_0^{\pi} \cdot \frac{1}{5} d\varphi = \frac{4}{15}\pi$$

$$\text{方法二: 由轮换对称性可知 } \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz$$

$$\begin{aligned}\text{所以, } \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz &= \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{1}{3} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^4 \sin \varphi dr \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = \frac{4\pi}{15}\end{aligned}$$

(13) 若 3 维列向量 α, β 满足 $\alpha^T \beta = 2$, 其中 α^T 为 α 的转置, 则矩阵 $\beta \alpha^T$ 的非零特征值为_____。

【答案】 2

【解析】 $\because \alpha^T \beta = 2$

$$\therefore \beta \alpha^T \beta = \beta (\alpha^T \beta) = 2 \cdot \beta, \quad \therefore \beta \alpha^T \text{ 的非零特征值为 } 2.$$

(14) 设 X_1, X_2, \dots, X_m 为来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, \bar{X} 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k =$ _____

【答案】 -1

【解析】 $\because \bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计

$$\therefore E(\bar{X} + kS^2) = np^2$$

$$\therefore np + knp(1-p) = np^2$$

$$\therefore 1 + k(1-p) = p$$

$$\therefore k(1-p) = p-1$$

$$\therefore k = -1$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 9 分) 求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值。

【解析】

$$f'_x(x, y) = 2x(2 + y^2) = 0$$

$$f'_y(x, y) = 2x^2y + \ln y + 1 = 0$$

$$\text{故 } x = 0, y = \frac{1}{e}$$

$$f''_{xx} = 2(2 + y^2), f''_{yy} = 2x^2 + \frac{1}{y}, f''_{xy} = 4xy$$

则

$$f''_{xx}\Big|_{(0,\frac{1}{e})} = 2(2 + \frac{1}{e^2})$$

$$f''_{xy}\Big|_{(0,\frac{1}{e})} = 0$$

$$f''_{yy}\Big|_{(0,\frac{1}{e})} = e$$

$$\because f''_{xx} > 0 \text{ 而 } (f''_{xy})^2 - f''_{xx}f''_{yy} < 0$$

$$\therefore \text{二元函数存在极小值 } f(0, \frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$$

(16) (本题满分 9 分) 设 a_n 为曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$) 所围成区域的面积, 记

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}, \text{ 求 } S_1 \text{ 与 } S_2 \text{ 的值。}$$

【解析】由题意, $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ 在点 $x = 0$ 和 $x = 1$ 处相交,

$$\text{所以 } a_n = \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) dx = \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} - \frac{1}{n+2} x^{n+2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

$$\text{从而 } S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2N} - \frac{1}{2N+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

$$\text{由 } \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots + (-1)^{(n-1)} \frac{x^n}{n} + \dots \quad \text{取 } x = 1 \text{ 得}$$

$$\ln(2) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots \right) = 1 - S_2 \Rightarrow S_2 = 1 - \ln 2$$

(17) (本题满分 11 分) 椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 绕 x 轴旋转而成, 圆锥面 S_2 是过点

$(4, 0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成。

(I) 求 S_1 及 S_2 的方程

(II) 求 S_1 与 S_2 之间的立体体积。

$$\text{【解析】(I) } S_1 \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2 + z^2}{3} = 1,$$

过点 $(4, 0)$ 与 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的切线为 $y = \pm \left(\frac{1}{2}x - 2 \right)$,

所以 S_2 的方程为 $y^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2}x - 2 \right)^2$ 。

(II) 记 $y_1 = \frac{1}{2}x - 2$, 由 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 记 $y_2 = \sqrt{3 \left(1 - \frac{x^2}{4} \right)}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } V &= \int_1^4 \pi y_1^2 dx - \int_1^2 \pi y_2^2 dx = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 \right) dx - \pi \int_1^2 \left(3 - \frac{3}{4}x^2 \right) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{12}x^3 - x^2 + 4x \right]_1^4 - \pi \left[3x - \frac{1}{4}x^3 \right]_1^2 = \pi \end{aligned}$$

(18) (本题满分 11 分)

(I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 可导, 则存在

$\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

(II) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$,

则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$ 。

【解析】(I) 作辅助函数 $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$, 易验证 $\varphi(x)$ 满足:

$\varphi(a) = \varphi(b)$; $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

根据罗尔定理, 可得在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \therefore f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

(II) 任取 $x_0 \in (0, \delta)$, 则函数 $f(x)$ 满足:

在闭区间 $[0, x_0]$ 上连续, 开区间 $(0, x_0)$ 内可导, 从而有拉格朗日中值定理可得: 存在

$$\xi_{x_0} \in (0, x_0) \subset (0, \delta), \text{ 使得 } f'(\xi_{x_0}) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} \dots\dots (*)$$

又由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 对上式 (*) 两边取 $x_0 \rightarrow 0^+$ 时的极限可得:

$$f'_+(0) = \lim_{x_0 \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \lim_{x_0 \rightarrow 0^+} f'(\xi_{x_0}) = \lim_{\xi_{x_0} \rightarrow 0^+} f'(\xi_{x_0}) = A$$

故 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$ 。

(19) (本题满分 10 分) 计算曲面积分 $I = \oiint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面

$2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧。

【解析】 $I = \oiint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, 其中 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \quad ①$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{x^2 + z^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \quad ②$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \quad ③$$

$$\therefore ①+②+③ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = 0$$

由于被积函数及其偏导数在点 $(0, 0, 0)$ 处不连续, 作封闭曲面 (外侧)

$\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, 0 < R < \frac{1}{16}$ 有

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} &= \oiint_{\Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \oiint_{\Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{R^3} \\ &= \frac{1}{R^3} \iiint_{\Omega} 3dV = \frac{3}{R^3} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = 4\pi \end{aligned}$$

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(I) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 ,

(II) 对 (I) 中的任一向量 ξ_2, ξ_3 , 证明: ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关。

【解析】(I) 解方程 $A\xi_2 = \xi_1$

$$(A, \xi_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2$ 故有一个自由变量，令 $x_3 = 2$ ，由 $Ax = 0$ 解得， $x_2 = -1, x_1 = 1$

求特解，令 $x_1 = x_2 = 0$ ，得 $x_3 = 1$

$$\text{故 } \xi_2 = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k_1 \text{ 为任意常数}$$

解方程 $A^2\xi_3 = \xi_1$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A^2, \xi_1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故有两个自由变量，令 $x_2 = -1, x_3 = 0$ ，由 $A^2x = 0$ 得 $x_1 = 1$

令 $x_2 = 0, x_3 = 1$ ，由 $A^2x = 0$ 得 $x_1 = 0$

$$\text{求特解 } \eta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 故 } \xi_3 = k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k_2, k_3 \text{ 为任意常数}$$

(II) 证明：由于

$$\begin{vmatrix} -1 & k_1 & k_2 - \frac{1}{2} \\ 1 & -k_1 & -k_2 \\ -2 & 2k_1 + 1 & k_3 \end{vmatrix} = k_1k_3 + 2k_1k_2 + (2k_1 + 1)(k_2 - \frac{1}{2}) - 2k_1(k_2 - \frac{1}{2}) - k_2(2k_1 + 1) - k_1k_3$$

$$= -\frac{1}{2} \neq 0$$

故 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

(21) (本题满分 11 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

【解析】(I) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a) \begin{vmatrix} \lambda - a & 1 \\ 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \lambda - a \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a)[(\lambda - a)(\lambda - a + 1) - 1] - [0 + (\lambda - a)]$$

$$= (\lambda - a)[(\lambda - a)(\lambda - a + 1) - 2]$$

$$= (\lambda - a)[\lambda^2 - 2a\lambda + \lambda + a^2 - a - 2]$$

$$= (\lambda - a)\left\{a\lambda + \frac{1}{2}(1 - 2a)\right\}^2 - \frac{9}{4}$$

$$= (\lambda - a)(\lambda - a + 2)(\lambda - a - 1)$$

$$\therefore \lambda_1 = a, \lambda_2 = a - 2, \lambda_3 = a + 1$$

(II) 若规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 说明有两个特征值为正, 一个为 0. 则

1) 若 $\lambda_1 = a = 0$, 则 $\lambda_2 = -2 < 0$, $\lambda_3 = 1$, 不符题意

2) 若 $\lambda_2 = 0$, 即 $a = 2$, 则 $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_3 = 3 > 0$, 符合

3) 若 $\lambda_3 = 0$, 即 $a = -1$, 则 $\lambda_1 = -1 < 0$, $\lambda_2 = -3 < 0$, 不符题意

综上所述, 故 $a = 2$

(22) (本题满分 11 分)

袋中有 1 个红色球, 2 个黑色球与 3 个白球, 现有放回地从袋中取两次, 每次取一球, 以 X, Y, Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数。

(I) 求 $P\{X = 1 | Z = 0\}$;

(II) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布。

【解析】(I) 在没有取白球的情况下取了一次红球，利用压缩样本空间则相当于只有 1 个红球，2 个黑球放回摸两次，其中摸了一个红球

$$\therefore P(X=1|Z=0) = \frac{C_2^1 \times 2}{C_3^1 \cdot C_3^1} = \frac{4}{9}$$

(II) X, Y 取值范围为 0, 1, 2, 故

$$P(X=0, Y=0) = \frac{C_3^1 \cdot C_3^1}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{1}{4}, P(X=1, Y=0) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^1}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=2, Y=0) = \frac{1}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{1}{36}, P(X=0, Y=1) = \frac{C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_3^1}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=1, Y=1) = \frac{C_2^1 \cdot C_2^1}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{1}{9}, P(X=2, Y=1) = 0$$

$$P(X=0, Y=2) = \frac{C_2^1 \cdot C_2^1}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{1}{9}$$

$$P(X=1, Y=2) = 0, P(X=2, Y=2) = 0$$

| $\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$ | 0 | 1 | 2 |
|--------------------------------------|-----|-----|------|
| 0 | 1/4 | 1/6 | 1/36 |
| 1 | 1/3 | 1/9 | 0 |
| 2 | 1/9 | 0 | 0 |

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，其中参数 $\lambda (\lambda > 0)$ 未知， X_1, X_2, \dots

X_n 是来自总体 X 的简单随机样本

(I) 求参数 λ 的矩估计量；

(II) 求参数 λ 的最大似然估计量

【解析】

(1) 由 $EX = \bar{X}$

$$\text{而 } EX = \int_0^{+\infty} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{X}} \text{ 为总体的矩估计量}$$

(2) 构造似然函数

$$L(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \lambda^{2n} \cdot \prod_{i=1}^n x_i \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}$$

$$\text{取对数 } \ln L = 2n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L}{d \lambda} = 0 \Rightarrow \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}$$

故其最大似然估计量为 $\lambda'' = \frac{2}{\bar{X}}$