2002 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=$__________.

(2) 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定,则 $y''(0)=$__________.

(3) 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解是__________.

(4) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 可化成标准型 $f=6y_1^2$,则 $a=$__________.

(5) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$,则 $\mu=$__________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质:

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续;　② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续;

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微;　④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

若用“ $P\Rightarrow Q$ ”表示可由性质 P 推出性质 Q,则有

(A) ②⇒③⇒①.　(B) ③⇒②⇒①.

(C) ③⇒④⇒①.　(D) ③⇒①⇒④.

(2) 设 $u_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$

(A) 发散.　(B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛.　(D) 收敛性根据所给条件不能判定.

(3) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导,则

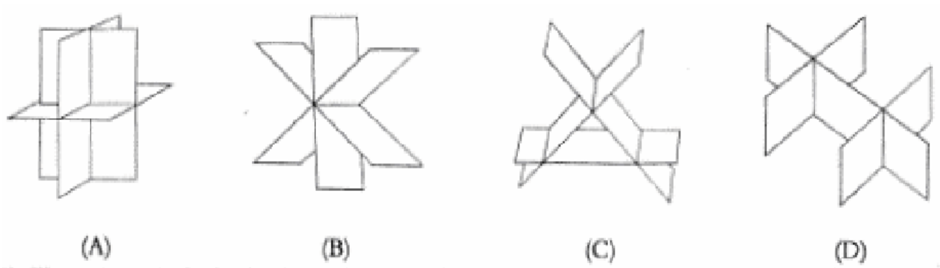
(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$.

(4) 设有三张不同平面的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i$, $i=1,2,3$,它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2 ,则这三张平面可能的位置关系为



(5) 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量,它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$,分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$,则

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(B) $f_1(x)\ f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

(D) $F_1(x)\ F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

三、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数,且 $f(0)\neq0, f'(0)\neq0$,若

$af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小,试确定 a,b 的值.

四、(本题满分 7 分)

已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同,写出此切线方程,并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{2}{n})$.

五、(本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$,其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

六、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数, L 是上半平面($y>0$) 内的有向分段光滑曲线,其起点为(a,b),终点为(c,d).记

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy,$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关;

(2) 当 $ab=cd$ 时,求 I 的值.

七、(本题满分 7 分)

(1) 验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{6^3}{6!}+\frac{9^3}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$;

(2) 利用 (1) 的结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

八、(本题满分 7 分)

设有一小山,取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面,其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2-xy\le 75\}$,小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上一点,问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大?若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$,试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动,为此需要在山脚下寻找一上山坡最大的点作为攀登的起点.也就是说,要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1)中 $g(x,y)$ 达到最大值的点.试确定攀登起点的位置.

九、(本题满分 6 分)

已知四阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量,其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$,如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$,求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

十、(本题满分 8 分)

设 A,B 为同阶方阵,

(1) 若 A,B 相似,证明 A,B 的特征多项式相等.

(2) 举一个二阶方阵的例子说明(1)的逆命题不成立.

(3) 当 A,B 均为实对称矩阵时,证明(1)的逆命题成立.

十一、(本题满分 7 分)

设维随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次,用 Y 表示观察值大于 $\dfrac{\pi}{3}$ 的次数,求 Y^2 的数学期望.

十二、(本题满分 7 分)

设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中$\theta(0<\theta<\frac{1}{2})$是未知参数,利用总体$X$的如下样本值

$$3,1,3,0,3,1,2,3,$$

求θ的矩估计值和最大似然估计值.

2002 年考研数学一试题答案与解析

一、填空题

(1)【分析】 原式$=\int_e^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_e^{+\infty}=1.$

(2)【分析】 方程两边对 x 两次求导得

$$e^y y'+6xy'+6y+2x=0, \qquad ①$$

$$e^y y''+e^y y'^2+6xy''+12y'+2=0. \qquad ②$$

以 $x=0$ 代入原方程得 $y=0$，以 $x=y=0$ 代入①得 $y'=0,$，再以 $x=y=y'=0$ 代入②得 $y''(0)=-2.$

(3)【分析】 这是二阶的可降阶微分方程.

令 $y'=P(y)$（以 y 为自变量），则 $y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dP}{dx}=P\frac{dP}{dy}.$

代入方程得 $yP\frac{dP}{dy}+P^2=0$，即 $y\frac{dP}{dy}+P=0$（或 $P=0$，但其不满足初始条件 $y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$）.

分离变量得 $\frac{dP}{P}+\frac{dy}{y}=0,$

积分得 $\ln|P|+\ln|y|=C'$，即 $P=\frac{C_1}{y}$（$P=0$ 对应 $C_1=0$）；

由 $x=0$ 时 $y=1,P=y'=\frac{1}{2}$，得 $C_1=\frac{1}{2}$. 于是

$$y'=P=\frac{1}{2y}, 2ydy=dx, \text{积分得 } y^2=x+C_2.$$

又由 $y\big|_{x=0}=1$ 得 $C_2=1$，所求特解为 $y=\sqrt{x+1}.$

(4)【分析】 因为二次型 $x^T Ax$ 经正交变换化为标准型时,标准形中平方项的系数就是二次型矩阵 A 的特征值,所以 $6,0,0$ 是 A 的特征值.

又因 $\sum a_{ii}=\sum \lambda_i$,故 $a+a+a=6+0+0,\Rightarrow a=2.$

(5)【分析】 设事件 A 表示“二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根”,则 $A=\{16-4X<0\}=\{X>4\}$. 依题意,有

$$P(A)=P\{X>4\}=\frac{1}{2}.$$

而

$$P\{X>4\}=1-P\{X\le 4\}=1-\Phi(\frac{4-\mu}{\sigma}),$$

即

$$1-\Phi(\frac{4-\mu}{\sigma})=\frac{1}{2},\Phi(\frac{4-\mu}{\sigma})=\frac{1}{2},\frac{4-\mu}{\sigma}=0.\Rightarrow \mu=4.$$

二、选择题

(1)【分析】 这是讨论函数 $f(x,y)$ 的连续性, 可偏导性, 可微性及偏导数的连续性之间的关系. 我们知道, $f(x,y)$ 的两个偏导数连续是可微的充分条件, 若 $f(x,y)$ 可微则必连续, 故选(A).

(2)【分析】 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{u_n}}{\frac{1}{n}}=1>0\Rightarrow n$ 充分大时即 $\exists N,n>N$ 时 $\dfrac{1}{u_n}>0$,且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{u_n}=0,$ 不妨认为 $\forall n,u_n>0,$ 因而所考虑级数是交错级数,但不能保证 $\dfrac{1}{u_n}$ 的单调性.

按定义考察部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(\frac{1}{u_k}+\frac{1}{u_{k+1}})=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{u_k}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{u_{k+1}}$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{u_k}+\sum_{l=1}^{n+1}(-1)^l\frac{1}{u_l}=\frac{1}{u_1}+\frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}}\to\frac{1}{u_1}(n\to+\infty),$$

$\Rightarrow$ 原级数收敛.

再考察取绝对值后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$.注意 $\frac{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{u_n}+\frac{n+1}{u_{n+1}}\cdot\frac{n}{n+1}\to 2,$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$ 发散.因此选(C).

(3)【分析】 证明(B)对:反证法. 假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=a\neq 0$,则由拉格朗日中值定理,

$$f(2x)-f(x)=f'(\xi)x\to\infty(x\to+\infty)$$

(当 $x\to+\infty$ 时,$\xi\to+\infty$,因为 $x<\xi<2x$);但这与 $|f(2x)-f(x)|\leq|f(2x)|+|f(x)|\leq 2M$ 矛盾

($|f(x)|\leq M$).

(4)【分析】 因为 $r(A)=r(\overline{A})=2<3$,说明方程组有无穷多解,所以三个平面有公共交点且不唯一,因此应选(B).

(A)表示方程组有唯一解,其充要条件是 $r(A)=r(\overline{A})=3.$

(C)中三个平面没有公共交点,即方程组无解,又因三个平面中任两个都不行,故 $r(A)=2$ 和 $r(\overline{A})=3$,且 A 中任两个平行向量都线性无关.

类似地,(D)中有两个平面平行,故 $r(A)=2$,$r(\overline{A})=3$,且 A 中有两个平行向量共线.

(5)【分析】 首先可以否定选项(A)与(C),因

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)+f_2(x)]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x)dx=2\neq 1,$$
$$F_1(+\infty)+F_2(+\infty)=1+1=2\neq 1.$$

对于选项(B),若 $f_1(x)=\begin{cases}1,-2<x<-1,\\0,其他,\end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases}1,0<x<1,\\0,其他,\end{cases}$ 则对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$,

$f_1(x)f_2(x)\equiv 0$,$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)f_2(x)dx=0\neq 1$,因此也应否定(C),综上分析,用排除法应选(D).

进一步分析可知,若令 $X=\max(X_1,X_2)$,而 $X_i \sim f_i(x), i=1,2,$ 则 X 的分布函数 $F(x)$ 恰是 $F_1(x)F_2(x)$.

$$F(x)=P\{\max(X_1,X_2)\le x\}=P\{X_1\le x, X_2\le x\}$$

$$=P\{X_1\le x\}P\{X_2\le x\}=F_1(x)F_2(x).$$

三、【解】　用洛必达法则.由题设条件知

$\lim\limits_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0).$ 由于 $f'(0)\ne 0$,故必有 $a+b-1=0.$

又由洛必达法则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}$

$$=(a+2b)f'(0)=0,$$

及 $f'(0)\ne 0$,则有 $a+2b=0$.

综上,得 $a=2, b=-1.$

四、【解】　由已知条件得

$$f(0)=0,\ f'(0)=\left(\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt\right)'_x\Big|_{x=0}=\frac{e^{-\arctan^2 x}}{1+x^2}\Big|_{x=0}=1,$$

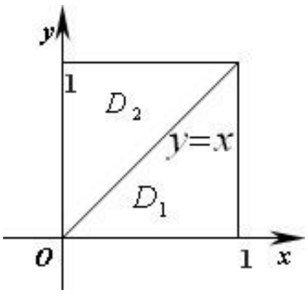
故所求切线方程为 $y=x$.由导数定义及数列极限与函数极限的关系可得

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)=2\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2f'(0)=2.$$

五、【分析与求解】　D 是正方形区域如图.因在 D 上被积函数分块表示

$$\max\{x^2,y^2\}=\begin{cases} x^2, x\ge y, \\ y^2, x\le y, \end{cases} (x,y)\in D,$$

于是要用分块积分法,用 $y=x$ 将 D 分成两块:



$$D=D_1\cup D_2, D_1=D\cap\{y\le x\}, D_2=D\cap\{y\ge x\}.$$

$$\Rightarrow \qquad I=\iint\limits_{D_1} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy+\iint\limits_{D_2} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_1} e^{x^2}dxdy+\iint\limits_{D_2} e^{y^2}dxdy=2\iint\limits_{D_1} e^{x^2}dxdy \text{（}D\text{ 关于 }y=x\text{ 对称）}$$

$$=2\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy\text{（选择积分顺序）}=2\int_0^1 xe^{x^2}dx=e^{x^2}\Big|_0^1=e-1.$$

六、【分析与求解】　(1) 易知 $Pdx+Qdy\exists$原函数,

$$Pdx+Qdy=\frac{1}{y}dx+yf(xy)dx+xf(xy)dy-\frac{x}{y^2}dy=\frac{1}{y^2}(ydx-xdy)+f(xy)(ydx+xdy)$$

$$=d(\frac{x}{y})+f(xy)d(xy)=d[\frac{x}{y}+\int_0^{xy}f(t)dt].$$

$\Rightarrow$在 $y>0$ 上 $Pdx+Qdy\exists$原函数,即 $u(x,y)=\frac{x}{y}+\int_0^{xy}f(t)dt$.

$\Rightarrow$积分 I 在 $y>0$ 与路径无关.

(2) 因找到了原函数,立即可得 $I=u(x,y)\Big|_{(a,b)}^{(c,d)}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$.

七、【证明】　与书上解答略有不同,参见数三 2002 第七题 (1) 因为幂级数

$$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots$$

的收敛域是 $(-\infty<x+\infty)$,因而可在 $(-\infty<x+\infty)$ 上逐项求导数,得

$$y'(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots,$$

$$y''(x)=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots,$$

所以　　$y''+y'+y=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots=e^x\ (-\infty<x+\infty)$.

(2) 与 $y''+y'+y=e^x$ 相应的齐次微分方程为 $y''+y'+y=0$,

其特征方程为 $\lambda^2+\lambda+1=0$,特征根为 $\lambda_{1,2}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

因此齐次微分方程的通解为 $Y=e^{-\frac{x}{2}}(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x)$.

设非齐次微分方程的特解为 $y^*=Ae^x$,将 y^* 代入方程 $y''+y'+y=e^x$ 可得

$A=\dfrac{1}{3}$,即有 $y^*=\dfrac{1}{3}e^x$.

于是,方程通解为 $y=Y+y^*=e^{-\frac{x}{2}}(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x)+\dfrac{1}{3}e^x$.

当 $x=0$ 时,有 $\begin{cases} y(0)=1=C_1+\dfrac{1}{3}, \\ y'(0)=0=-\dfrac{1}{2}C_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}C_2+\dfrac{1}{3}. \end{cases}\Rightarrow C_1=\dfrac{2}{3},C_2=0.$

于是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数为 $y(x)=\dfrac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{3}e^x\ (-\infty<x+\infty)$

八、【分析与求解】　(1) 由梯度向量的重要性质:函数 $h(x,y)$ 在点 M 处沿该点的梯度方向

$$\textbf{grad}h(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}=\{\frac{\partial h}{\partial x},\frac{\partial h}{\partial y}\}\Big|_{(x_0,y_0)}=\{-2x_0+y_0,-2y_0+x_0\}$$

方向导数取最大值即 $\textbf{grad}h(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}$ 的模,$\Rightarrow g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}$.

(2) 按题意,即求 $g(x,y)$ 求在条件 $x^2+y^2-xy-75=0$ 下的最大值点 $\Leftrightarrow$

$$g^2(x,y)=(y-2x)^2+(x-2y)^2=5x^2+5y^2-8xy$$

在条件 $x^2+y^2-xy-75=0$ 下的最大值点.

这是求解条件最值问题,用拉格朗日乘子法.令拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(x^2+y^2-xy-75),$$

则有
$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=10x-8y+\lambda(2x-y)=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=10y-8x+\lambda(2y-x)=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-xy-75=0.\end{cases}$$

解此方程组:将①式与②式相加得 $(x+y)(\lambda+2)=0.\Rightarrow x=-y$ 或 $\lambda=-2.$

若 $y=-x$,则由③式得 $3x^2=75$ 即 $x=\pm 5, y=\mp 5.$ 若 $\lambda=-2,$ 由①或②均得 $y=x$,代入③式得 $x^2=75$ 即 $x=\pm 5\sqrt{3}, y=\pm 5\sqrt{3}.$ 于是得可能的条件极值点

$$M_1(5,-5), M_2(-5,5), M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3}), M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3}).$$

现比较 $f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$ 在这些点的函数值:

$$f(M_1)=f(M_2)=450,\ f(M_3)=f(M_4)=150.$$

因为实际问题存在最大值,而最大值又只可能在 M_1,M_2,M_3,M_4 中取到.因此 $g^2(x,y)$ 在 M_1,M_2 取到在 D 的边界上的最大值,即 M_1,M_2 可作为攀登的起点.

九、【解】 由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关及 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ 知,向量组的秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$,即矩阵 A 的秩为 3. 因此 $Ax=0$ 的基础解系中只包含一个向量.那么由

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0$$

知, $Ax=0$ 的基础解系是 $(1,-2,1,0)^T$.

再由 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ 知, $(1,1,1,1)^T$ 是 $Ax=\beta$ 的一个特解.故 $Ax=\beta$ 的通解是 $k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

十、【解】　(1) 若 A,B 相似,那么存在可逆矩阵 P ,使 $P^{-1}AP=B,$ 故

$$|\lambda E-B|=|\lambda E-P^{-1}AP|=|P^{-1}\lambda EP-P^{-1}AP|$$

$$=|P^{-1}(\lambda E-A)P|=|P^{-1}||\lambda E-A||P|=|\lambda E-A|.$$

(2) 令 $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$, 那么 $|\lambda E-A|=\lambda^2=|\lambda E-B|$.

但 A,B 不相似.否则,存在可逆矩阵 P ,使 $P^{-1}AP=B=0$.从而 $A=P0P^{-1}=0$,矛盾,亦可从 $r(A)=1,r(B)=0$ 而知 A 与 B 不相似.

(3) 由 A,B 均为实对称矩阵知, A,B 均相似于对角阵,若 A,B 的特征多项式相等,记特征多项式的根为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 则有

$$A\text{ 相似于}\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix},\ B\text{ 也相似于}\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}.$$

即存在可逆矩阵 P,Q ,使 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}=Q^{-1}BQ.$

于是 $(PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1})=B.$ 由 PQ^{-1} 为可逆矩阵知, A 与 B 相似.

十一、【解】 由于 $P\{X>\frac{\pi}{3}\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}$，依题意，$Y$ 服从二项分布 $B(4,\frac{1}{2})$，则有

$$EY^2=DY+(EY)^2=npq+(np)^2=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+(4\times\frac{1}{2})^2=5.$$

十二、【解】 $EX=0\times\theta^2+1\times 2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta,\ \theta=\frac{1}{4}(3-EX).$

θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}(3-\overline{X})$，根据给定的样本观察值计算 $\bar{x}=\frac{1}{8}(3+1+3+0+3+1+2+3)$ $=2$。因此 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}(3-\bar{x})=\frac{1}{4}$.

对于给定的样本值似然函数为

$$L(\theta)=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4,\ \ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta),$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{24\theta^2-28\theta+6}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}.$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，得方程 $12\theta^2-14\theta+3=0$，解得 $\theta=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$（$\theta=\frac{7+\sqrt{13}}{12}>\frac{1}{2}$，不合题意）.

于是 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$.