2008 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、选择题(1-8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)dt$ 则 $f'(x)$ 的零点个数

(A) 0　　(B) 1

(C) 2　　(D) 3

(2) 函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于

(A) $\boldsymbol{i}$　　(B) $-\boldsymbol{i}$

(C) $\boldsymbol{j}$　　(D) $-\boldsymbol{j}$

(3) 在下列微分方程中,以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ (C_1,C_2,C_3 为任意常数)为通解的是

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(B) 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛

(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛

(5) 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶非零矩阵, $\mathbf{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\mathbf{A}^3=0$,则

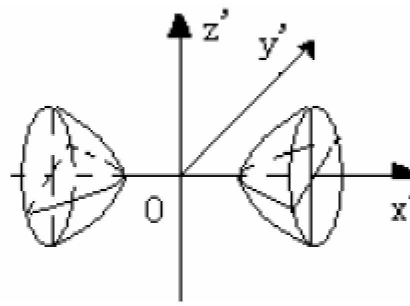
(A) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 不可逆, $\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 不可逆

(B) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 不可逆, $\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 可逆

(C) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 可逆, $\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 可逆

(D) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 可逆, $\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 不可逆

(6) 设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, 如果二次曲面方程 $(x,y,z)\mathbf{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图, 则 A 的正特征值个数为



(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3

(7) 设随机变量 X,Y 独立同分布且 X 分布函数为 $F(x)$, 则 $Z=\max\{X,Y\}$ 分布函数为

(A) $F^2(x)$　　(B) $F(x)F(y)$

(C) $1-[1-F(x)]^2$　　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$

(8) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$, $Y\sim N(1,4)$ 且相关系数 $\rho_{XY}=1$, 则

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$

二、填空题(9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$ _________.

(10) 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为_________.

(11) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为_________.

(12) 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧, 则 $\iint\limits_{\Sigma}xydydz+xdzdx+x^2dxdy=$ _________.

(13) 设 $\mathbf{A}$ 为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量, $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1=0,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\mathbf{A}$ 的非零特征值为_________.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X=EX^2\}=$ _________.

三、解答题(15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sin x-\sin\left(\sin x\right)\right]\sin x}{x^4}$.

(16) (本题满分 10 分)

计算曲线积分 $\int_L \sin 2x dx+2\left(x^2-1\right)ydy$, 其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $\left(0,0\right)$ 到点 $\left(\pi,0\right)$ 的一段.

(17) (本题满分 10 分)

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\ x+y+3z=5\end{cases}$, 求曲线 C 距离 XOY 面最远的点和最近的点.

(18) (本题满分 10 分)

设 $f\left(x\right)$ 是连续函数,

(1) 利用定义证明函数 $F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)dt$ 可导, 且 $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$.

(2) 当 $f\left(x\right)$ 是以 2 为周期的周期函数时, 证明函数 $G\left(x\right)=2\int_0^x f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt$ 也是以 2 为周期的周期函数.

(19) (本题满分 10 分)

$f\left(x\right)=1-x^2(0\le x\le\pi)$, 用余弦级数展开, 并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

(20)(本题满分 11 分)

$\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$, $\boldsymbol{\alpha}^T$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置, $\boldsymbol{\beta}^T$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置. 证明:

(1) $r(\mathbf{A})\le 2$.　　(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则 $r(\mathbf{A})<2$.

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n}$, 现矩阵 $\mathbf{A}$ 满足方程 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$, 其中 $\mathbf{X}=\left(x_1,\cdots,x_n\right)^T$, $\mathbf{B}=\left(1,0,\cdots,0\right)$,

(1) 求证 $\left|\mathbf{A}\right|=\left(n+1\right)a^n$.

(2) a 为何值, 方程组有唯一解, 求 x_1.

(3) a 为何值, 方程组有无穷多解, 求通解.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\left\{X=i\right\}=\dfrac{1}{3}\left(i=-1,0,1\right)$, Y 的概率密度为 $f_Y\left(y\right)=\begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$, 记 $Z=X+Y$,

(1) 求 $P\left\{Z\le\dfrac{1}{2}\middle| X=0\right\}$.

(2) 求 Z 的概率密度.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体为 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本.

记 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$, $T=\bar{X}^2-\dfrac{1}{n}S^2$

(1) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量.

(2) 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，求 DT .

2008 年考研数学一试题分析

一、选择题：(本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内)

（1）设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)dt$，则 $f'(x)$ 的零点个数为【　　】

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

【答案】应选(B).

【详解】$f'(x)=\ln(2+x^2)\cdot 2x=2x\ln(2+x^2)$.

显然 $f'(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f'(-1)\bullet f'(1)=(-2\ln 3)\bullet(2\ln 3)<0$，由零点定理，知 $f'(x)$ 至少有一个零点.

又 $f''(x)=2\ln(2+x^2)+\dfrac{4x^2}{2+x^2}>0$，恒大于零，所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调递增的. 又因为 $f'(0)=0$，根据其单调性可知，$f'(x)$ 至多有一个零点.

故 $f'(x)$ 有且只有一个零点. 故应选(B).

（2）函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点(0,1)处的梯度等于【　　】

(A)　i　　(B)　$-\mathrm{i}$.　　(C)　j.　　(D)　$-\mathrm{j}$.

【答案】　应选(A).

【详解】因为 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$. $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$.

所以 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}=1$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}=0$，于是 $\mathbf{grad}f(x,y)|_{(0,1)}=\mathrm{i}$.故应选(A).

（3）在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意的常数）为通解的是【　　】

(A)　$y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B)　$y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C)　$y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D)　$y'''-y''+4y'-4y=0$.

【答案】　应选(D).

【详解】 由 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$，**可知其特征根为**

$\lambda_1=1$，$\lambda_{2,3}=\pm 2\mathrm{i}$，故对应的特征值方程为

$$(\lambda-1)(\lambda+2i)(\lambda-2i)=(\lambda-1)(\lambda^2+4)$$

$$=\lambda^3+4\lambda-\lambda^2-4$$

$$=\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4$$

所以所求微分方程为 $y'''-y''+4y'-4y=0$． 应选(D).

（4）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是【　　】.

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

【答案】 应选(B).

【详解】 若 $\{x_n\}$ 单调，则由函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界知，若 $\{f(x_n)\}$ 单调有界，

因此若 $\{f(x_n)\}$ 收敛．故应选(B).

（5）设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵．若 $A^3=0$，则【　　】

则下列结论正确的是：

(A) $E-A$ 不可逆，则 $E+A$ 不可逆.　　(B) $E-A$ 不可逆，则 $E+A$ 可逆.

(C) $E-A$ 可逆，则 $E+A$ 可逆.　　(D) $E-A$ 可逆，则 $E+A$ 不可逆.

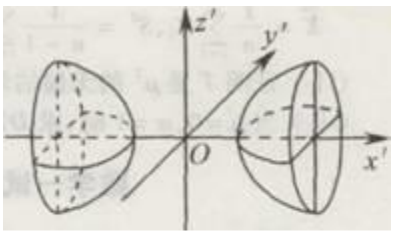
【答案】 应选(C).

【详解】 故应选(C).

$$(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E，\ (E+A)(E-A+A^2)=E+A^3=E .$$

故 $E-A$，$E+A$ 均可逆．故应选(C).

（6）设 A 为 3 阶实对称矩阵，如果二次曲面方程 $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图，则 A 的正特征值个数为【　　】



(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

【答案】 应选(B).

【详解】此二次曲面为旋转双叶双曲面，此曲面的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$．故$A$的正特征值个数为 1．故应选(B).

（7） 设随机变量X,Y独立同分布且X的分布函数为$F(x)$，则$Z=\max\{X,Y\}$的分布函数为【　　】

(A) $F^2(x)$.　(B) $F(x)F(y)$. (C) $1-[1-F(x)]^2$. (D) $[1-F(x)][1-F(y)]$.

【答案】应选(A).

【详解】$F(z)=P\left(Z\le z\right)=P\left\{\max\{X,Y\}\le z\right\}$

$$=P\left(X\le z\right)P\left(Y\le z\right)=F(z)F(z)=F^2(z).$$ 故应选(A).

（8）设随机变量$X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$，且相关系数$\rho_{XY}=1$，则【　　】

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$

【答案】应选 (D).

【详解】用排除法．设$Y=aX+b$．由$\rho_{XY}=1$，知X，Y正相关，得$a>0$．排除（A）和（C）．由$X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$，得

$$EX=0,EY=1,E(aX+b)=aEX+b.$$

$1=a\times0+b$，$b=1$．从而排除(B).故应选 (D).

二、填空题：(9－14 小题，每小题 4 分，共 24 分．把答案填在题中横线上.)

（9）微分方程$xy'+y=0$满足条件$y(1)=1$的解是$y=$____________ .

【答案】 应填$y=\frac{1}{x}$.

【详解】由$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$，得$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$．两边积分，得$\ln|y|=-\ln|x|+C$.

代入条件 $y(1)=1$，得 $C=0$．所以 $y=\dfrac{1}{x}$．

（10）曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 的切线方程为______________．

【答案】 应填 $y=x+1$．

【详解】设 $F(x,y)=\sin(xy)+\ln(y-x)-x$，则

$$F_x(x,y)=y\cos(xy)+\frac{-1}{y-x}-1,\quad F_x(x,y)=x\cos(xy)+\frac{1}{y-x},$$

$$F_x(0,1)=-1,\quad F_y(0,1)=1.\ \text{于是斜率}\ k=-\frac{F_x'(0,1)}{F_y'(0,1)}=1.$$

故所求得切线方程为 $y=x+1$．

（11）已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 的收敛域为____________．

【答案】 $(1,5]$．

【详解】由题意，知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 的收敛域为 $(-4,0]$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为 $(-2,2]$．所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 的收敛域为 $(1,5]$．

(12) 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}xydydz+xdzdx+x^2dxdy=$____________．

【答案】 4π．

【详解】作辅助面 $\Sigma_1:z=0$ 取下侧．则由高斯公式，有

$$\iint\limits_{\Sigma}xydydz+xdzdx+x^2dxdy$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma}xydydz+xdzdx+x^2dxdy-\iint\limits_{\Sigma_1}xydydz+xdzdx+x^2dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}ydV+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}x^2dxdy.$$

$$=0+\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2\bullet rdr=\pi\cdot\frac{16}{4}=4\pi.$$

(13) 设 A 为 2 阶矩阵，α_1,α_2 为线性无关的 2 维列向量，$A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$．则 A 的非零特征值为__________.

【答案】应填 1.

【详解】根据题设条件，得 $A(\alpha_1,\alpha_2)=(A\alpha_1,A\alpha_2)=(0,2\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$.

记 $P=(\alpha_1,\alpha_2)$，因 α_1,α_2 线性无关，故 $P=(\alpha_1,\alpha_2)$ 是可逆矩阵．因此

$AP=P\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$，从而 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$．记 $B=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$，则 A 与 B 相似，从而有相同的特征值.

因为 $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda&-2\\0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)$，$\lambda=0$，$\lambda=1$．故 A 的非零特征值为 1.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\left\{X=EX^2\right\}=$__________.

【答案】应填 $\frac{1}{2e}$.

【详解】因为 X 服从参数为 1 的泊松分布，所以 $EX=DX=1$．从而由 $DX=EX^2-(EX)^2$

得 $EX^2=2$．故 $P\left\{X=EX^2\right\}=P\left\{X=2\right\}=\frac{1}{2e}$.

三、解答题：(15－23 小题，共 94 分.)

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$

【详解 1】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)\cos x}{6x}\ \text{（或}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\sin x)^2}{3x^2}\text{，或}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x+o(\sin^2 x)}{3x^2}\text{）}$$

$$=\frac{1}{6}.$$

【详解 2】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{\sin^4 x}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{2}}{3t^2}\quad（或=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{6t}）$$

$$=\frac{1}{6}.$$

（16）(本题满分 9 分)

计算曲线积分 $\int_L \sin 2xdx+2(x^2-1)ydy$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段.

【详解 1】按曲线积分的计算公式直接计算.

$$\int_L \sin 2xdx+2(x^2-1)ydy$$

$$=\int_0^\pi[\sin 2xdx+2(x^2-1)\sin x\cos x]dx=\int_0^\pi x^2\sin 2xdx$$

$$=-\frac{x^2\cos 2x}{2}\Big|_0^\pi+\int_0^\pi x\cos 2xdx=-\frac{\pi^2}{2}+\int_0^\pi x\cos 2xdx$$

$$=-\frac{\pi^2}{2}+\frac{x\sin 2x}{2}\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\frac{\sin 2x}{2}dx$$

$$=-\frac{\pi^2}{2}.$$

【详解 2】添加辅助线，按照 Green 公式进行计算.

设 L_1 为 x 轴上从点 $(\pi,0)$ 到 $(0,0)$ 的直线段. D 是 L_1 与 L 围成的区域

$$\int_{L+L_1}\sin 2xdx+2(x^2-1)ydy$$

$$=-\iint_D\left[\frac{\partial(2(x^2-1)y}{\partial x}-\frac{\partial\sin 2x}{\partial y}\right]dxdy=-\iint_D 4xydxdy$$

$$=-\int_0^\pi\int_0^{\sin x}4xydydx=-\int_0^\pi 2x\sin^2 xdx=-\int_0^\pi x(1-\cos 2x)dx$$

$$=-\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}x\cos 2xdx=-\frac{\pi^2}{2}+\frac{x\sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin 2x}{2}dx$$

$$=-\frac{\pi^2}{2}.$$

因为 $\int_{L_1}\sin 2xdx+2(x^2-1)ydy=\int_{\pi}^{0}\sin 2xdx=0$

故 $\int_L\sin 2xdx+2(x^2-1)ydy=-\frac{\pi^2}{2}$

【详解 3】令 $I=\int_L\sin 2xdx+2(x^2-1)ydy$

$$=\int_L\sin 2xdx-2ydy+2x^2ydy=I_1+I_2$$

对于 I_1，记 $P=\sin 2x,\quad Q=-2y$．因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial x}=0$，故 I_1 与积分路径无关.

$I_1=\int_0^{\pi}\sin 2xdx=0$.

对于 I_2，

$$I_2=\int_L 2x^2ydy=\int_0^{\pi}2x^2\sin x\cos xdx=\int_0^{\pi}x^2\sin 2xdx$$

$$=-\frac{x^2\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}x\cos 2xdx$$

$$=-\frac{\pi^2}{2}+\int_0^{\pi}x\cos 2xdx$$

$$=-\frac{\pi^2}{2}+\frac{x\sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin 2x}{2}dx$$

$$=-\frac{\pi^2}{2}.$$

故 $$\int_L\sin 2xdx+2(x^2-1)ydy=-\frac{\pi^2}{2}$$

17（本题满分 11 分）已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\ x+y+3z=5,\end{cases}$ 求 C 上距离 xoy 面最远的点和最近的点.

【详解 1】 点 (x,y,z) 到 xoy 面的距离为 $|z|$，故求 C 上距离 xoy 面最远的点和最近的点的

坐标等价于求函数 $H=z^2$ 在条件 $x^2+y^2-2z^2=0,\ x+y+3z=5$ 下的最大值点和最小值点.

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5),$$

由 $\begin{cases} L_x'=2\lambda x+2\mu=0, \\ L_y'=2\lambda y+\mu=0, \\ L_z'=2z-4\lambda z+3\mu=0, \\ x^2+y^2-2z^2=0, \\ x+y+3z=5. \end{cases}$

得 $x=y$，

从而 $\begin{cases} 2x^2-2z^2=0, \\ 2x+3z=5. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-5, \\ y=-5, \\ z=5. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=1. \end{cases}$

根据几何意义，曲线 C 上存在距离 xoy 面最远的点和最近的点，故所求点依次为 $(-5,-5,5)$ 和 $(1,1,1)$.

【详解 2】 点 (x,y,z) 到 xoy 面的距离为 $|z|$，故求 C 上距离 xoy 面最远的点和最近的点的坐标等价于求函数 $H=x^2+y^2$ 在条件 $x^2+y^2-2\left(\frac{x+y-5}{3}\right)^2=0$ 下的最大值点和最小值点.

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\left(x^2+y^2-\frac{2}{9}(x+y-5)^2\right),$$

由 $\begin{cases} L_x'=2x+\lambda\left(2x-\frac{4}{9}(x+y-5)\right)=0, \\ L_y'=2y+\lambda\left(2y-\frac{4}{9}(x+y-5)\right)=0, \\ x^2+y^2-2\left(\frac{x+y-5}{3}\right)^2=0. \end{cases}$

得 $x=y$，从而 $2x^2-\frac{2}{9}(2x-5)^2=0$.

解得

$$\begin{cases} x=-5, \\ y=-5, \\ z=5. \end{cases} 或 \begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=1. \end{cases}$$

根据几何意义，曲线 C 上存在距离 xoy 面最远的点和最近的点，故所求点依次为 $(-5,-5,5)$ 和 $(1,1,1)$.

【详解 3】由 $x^2+y^2-2z^2=0$ 得

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}z\cos\theta, \\ y=\sqrt{2}z\sin\theta. \end{cases}$$

代入 $x+y+3z=5$，得

$$z=\frac{5}{3+\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta)}$$

所以只要求 $z=z(\theta)$ 的最值.

令 $z'(\theta)=\dfrac{5\sqrt{2}(-\sin\theta+\cos\theta)}{\left(3+\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta)\right)^2}=0$，得 $\cos\theta=\sin\theta$，解得 $\theta=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}$． 从而

$$\begin{cases} x=-5, \\ y=-5, \\ z=5. \end{cases} 或 \begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=1. \end{cases}$$

根据几何意义，曲线 C 上存在距离 xoy 面最远的点和最近的点，故所求点依次为 $(-5,-5,5)$ 和 $(1,1,1)$.

（18）(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数，

（I）利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$；

（II）当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时，证明函数 $G(x)=2\int_0^x f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt$ 也是以 2 为周期的周期函数.

（I）【证明】 $F'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\int_0^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_0^x f(t)dt}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x)$$

【注】不能利用 L’Hospital 法则得到 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x}$.

(II) 【证法 1】根据题设，有

$$G'(x+2)=\left[2\int_0^{x+2}f(t)dt-(x+2)\int_0^2 f(t)dt\right]'=f(x+2)-\int_0^2 f(t)dt,$$

$$G'(x)=\left[2\int_0^{x}f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt\right]'=2f(x)-\int_0^2 f(t)dt.$$

当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时， $f(x+2)=f(x)$.

从而 $G'(x+2)=G'(x)$. 因而

$$G(x+2)-G(x)=C.$$

取 $x=0$ 得，$C=G(0+2)-G(0)=0$，故 $G(x+2)-G(x)=0$.

即 $G(x)=2\int_0^x f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt$ 是以 2 为周期的周期函数.

【证法 2】根据题设，有

$$G(x+2)=2\int_0^{x+2}f(t)dt-(x+2)\int_0^2 f(t)dt,$$

$$=2\int_0^{2}f(t)dt+x\int_2^{x+2}f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt-2\int_0^2 f(t)dt.$$

对于 $\int_2^{x+2}f(t)dt$，作换元 $t=u+2$，并注意到 $f(u+2)=f(u)$，则有

$$\int_2^{x+2}f(t)dt=\int_0^x f(u+2)du=\int_0^x f(u)du=\int_0^x f(t)dt,$$

因而 $x\int_2^{x+2}f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt=0$.

于是

$$G(x+2)=2\int_0^x f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt=G(x).$$

即 $G(x)=2\int_0^x f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt$ 是以 2 为周期的周期函数

【证法 3】根据题设，有

$$G(x+2)=2\int_0^{x+2}f(t)dt-(x+2)\int_0^2 f(t)dt,$$

$$=2\int_0^{x}f(t)dt+2\int_x^{x+2}f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt-2\int_0^2 f(t)dt$$

$$=2\int_0^x f(t)dt - x\int_0^2 f(t)dt + 2\int_x^{x+2} f(t)dt - 2\int_0^2 f(t)dt$$

$$=G(x)+2\left(\int_x^{x+2} f(t)dt - \int_0^2 f(t)dt\right).$$

当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时，必有

$$\int_x^{x+2} f(t)dt = \int_0^2 f(t)dt .$$

事实上

$$\frac{d(\int_2^{x+2} f(t)dt)}{dx} = f(x+2) - f(x) = 0,$$

所以

$$\int_2^{x+2} f(t)dt \equiv C .$$

取 $x=0$ 得，$C \equiv \int_2^{0+2} f(t)dt = \int_2^2 f(t)dt$.

所以

$$G(x+2) = 2\int_0^x f(t)dt - x\int_0^2 f(t)dt = G(x) .$$

即 $G(x) = 2\int_0^x f(t)dt - x\int_0^2 f(t)dt$ 是以 2 为周期的周期函数

(19)(本题满分 11 分)

将函数 $f(x)=1-x^2(0\le x\le \pi)$ 展开成余弦级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的和.

【详解】将 $f(x)$ 作偶周期延拓，则有 $b_n = 0, n = 1, 2, \cdots$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\,\mathrm{d}\,x = 2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right).$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\cos nxdx - \int_0^{\pi} x^2\cos nxdx\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[0-\int_0^{\pi} x^2\cos nxdx\right]\Bigg|_0^{\pi} = \frac{-2}{\pi}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{2x\sin nx}{n}dx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{2\pi(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{4(-1)^{n-1}}{n^2} .$$

所以 $f(x)=1-x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx$，$0\le x\le\pi$.

令 x=0，有 $f(0)=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

又 $f(0)=1$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

（20）(本题满分 10 分)

设 α,β 为 3 维列向量，矩阵 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，其中 α^T,β^T 分别是 α,β 得转置．证明：

（I）　秩 $r(A)\le 2$；

（II）　若 α,β 线性相关，则秩 $r(A)<2$.

【详解】(I)【证法 1】$r(A)=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)\le r(\alpha)+r(\beta)\le 2$.

【证法 2】因为 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，$A$ 为 3×3 矩阵，所以 $r(A)\le 3$.

因为 α,β 为 3 维列向量，所以存在向量 $\xi\ne 0$，使得

$$\alpha^T\xi=0,\quad \beta^T\xi=0$$

于是　$$A\xi=\alpha\alpha^T\xi+\beta\beta^T\xi=0$$

所以 $Ax=0$ 有非零解，从而 $r(A)\le 2$.

【证法 3】因为 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，所以 A 为 3×3 矩阵．

又因为 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^T\\ \beta^T\\ 0\end{pmatrix}$，

所以 $|A|=|\alpha\quad\beta\quad 0|\begin{vmatrix}a^T\\ \beta^T\\ 0\end{vmatrix}=0$

故　$r(A)\le 2$.

（II）【证法】由 α,β 线性相关，不妨设 $\alpha=k\beta$．于是 $r(A)=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)=r\left((1+k^2)\beta\beta^T\right)\le r(\beta)\le 1<2$.

(21) (本题满分 12 分).

设 n 元线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

（I）证明行列式$|A|=(n+1)a^n$；

（II）当a为何值时，该方程组有惟一解，并求x_1.

（III）当a为何值时，该方程组有无穷多解，并求其通解.

【详解】（I）【证法 1】数学归纳法．记$D_n=|A|=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n$

以下用数学归纳法证明$D_n=(n+1)a^n$.

当$n=1$时，$D_1=2a$，结论成立．

当$n=2$时，$D_2=\begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix}=3a^2$，结论成立．

假设结论对小于n的情况成立．将D_n按第一行展开得

$$D_n=2aD_{n-1}-\begin{vmatrix} a^2 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$$

$$=2ana^{n-1}-a^2(n-1)a^{n-2}$$

$$=(n+1)a^n$$

故　$|A|=(n+1)a^n$.

【注】本题（1）也可用递推法．由 $D_n=\cdots=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$ 得，

$D_n-aD_{n-1}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=a^{n-2}(D_2-a^{n-2}D_1)=a^n$．于是 $D_n=(n+1)a^n$

（I）【证法 2】消元法．记 $|A|=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n$

$$\xlongequal{r_2-\frac{1}{2}ar_1}\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n$$

$$\xlongequal{r_3-\frac{2}{3}ar_2}\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & & & \\ & & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n$$

$=\cdots\cdots$

$$\xlongequal{r_n-\frac{n-1}{n}ar_{n-1}}\begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & 0 & \frac{n+1}{n}a\end{vmatrix}_n$$

$=(n+1)a^n$.

（II）【详解】当 $a\neq 0$ 时，方程组系数行列式 $D_n\neq 0$，故方程组有惟一解．由克莱姆法则，将 D_n 得第一列换成 b，得行列式为

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_n=\begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{n-1}=D_{n-1}=na^{n-1}$$

所以，$x_1=\dfrac{D_{n-1}}{D_n}=\dfrac{a}{(n+1)a}$.

（III）【详解】 当 $a=0$ 时，方程组为

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}$$

此时方程组系数矩阵得秩和增广矩阵得秩均为 $n-1$，所以方程组有无穷多组解，其通解为 $x=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T+k\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T$，其中 k 为任意常数.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率密度为 $P(X=i)=\dfrac{1}{3}(i=-1,0,1)$，$Y$ 的概率

密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

记 $Z=X+Y$.

（Ⅰ） 求 $P\left(Z\le \frac{1}{2}\middle| X=0\right)$；

（Ⅱ）求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

（Ⅰ）**【详解】**

解法 1.

$$P\left(Z\le\frac{1}{2}\middle|X=0\right)=P\left(X+Y\le\frac{1}{2}\middle|X=0\right)$$
$$=P\left(Y\le\frac{1}{2}\middle|X=0\right)=P\left(Y\le\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

解法 2.

$$P\left(Z\le\frac{1}{2}\middle|X=0\right)=\frac{P\left(X+Y\le\frac{1}{2},X=0\right)}{P(X=0)}$$
$$=\frac{P\left(Y\le\frac{1}{2},X=0\right)}{P(X=0)}=P\left(Y\le\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

（Ⅱ）

解法 1.

$$\mathbf{F}_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$$
$$=P\{X+Y\le z,X=-1\}+P\{X+Y\le z,X=0\}+P\{X+Y\le z,X=1\}$$
$$=P\{Y\le z+1,X=-1\}+P\{Y\le z,X=0\}+P\{Y\le z-1,X=1\}$$
$$=P\{Y\le z+1\}P\{X=-1\}+P\{Y\le z\}P\{X=0\}+P\{Y\le z-1\}P\{X=1\}$$
$$=\frac{1}{3}[P\{Y\le z+1\}+P\{Y\le z\}+P\{Y\le z-1\}]$$
$$=\frac{1}{3}[F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1)]$$

$$f_z(z)=F_z'(z)$$
$$=\frac{1}{3}\left[f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)\right]=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1<z<2;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

解法 2.

$$f_Z(z)=\sum_{i=-1}^{1}P(X=i)f_Y(z-i)$$

$$=\frac{1}{3}\left[f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)\right]=\begin{cases}\frac{1}{3},-1<z<2;\\ 0,\quad \text{其它}.\end{cases}$$

（23）(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2\cdots X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，$T=\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2$.

（1）证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

（2）当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，求 DT..

【详解 1】（1）首先 T 是统计量．其次

$$E(T)=E(\bar{X}^2)-\frac{1}{n}ES^2$$

$$=D(\bar{X}^2)+(E\bar{X})^2-\frac{1}{n}ES^2=\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2-\frac{1}{n}\sigma^2=\mu^2$$

对一切 μ,σ 成立．因此 T 是 $\hat{\mu}^2$ 的无偏估计量.

【详解 2】（1）首先 T 是统计量．其次

$$T=\frac{n}{n-1}\bar{X}^2-\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{j\neq k}^{n}X_jX_k,$$

$$ET=\frac{n}{n-1}\sum_{j\neq k}^{n}E(X_j)(EX_k)=\mu^2,$$

对一切 μ,σ 成立．因此 T 是 $\hat{\mu}^2$ 的无偏估计量.

（2）解法 2．根据题意，有 $\sqrt{n}\bar{X}\sim N(0,1)$，$n\bar{X}^2\sim\chi^2(1)$，$(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$.

于是 $D(n\bar{X}^2)=2$，$D\left((n-1)S^2\right)=2(n-1)$.

所以 $D(T)=D\left(\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right)$

$$=\frac{1}{n^2}D(n\bar{X}^2)+\frac{1}{n^2(n-1)^2}D\left((n-1)S^2\right)=\frac{2}{n(n-1)}$$