



1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题(本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

- (1) 已知 $f'(3) = 2$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (3) 设平面曲线 L 为下半圆周 $y = -\sqrt{1-x^2}$, 则曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2) ds = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (4) 向量场 $u(x, y, z) = xy^2i + ye^zj + x \ln(1+z^2)k$ 在点 $P(1, 1, 0)$ 处的散度 $\text{div} u = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则逆矩阵 $(A - 2E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题(本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

- (1) 当 $x > 0$ 时, 曲线 $y = x \sin \frac{1}{x}$ ()
 (A) 有且仅有水平渐近线
 (B) 有且仅有铅直渐近线
 (C) 既有水平渐近线, 也有铅直渐近线
 (D) 既无水平渐近线, 也无铅直渐近线
- (2) 已知曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x + 2y + z - 1 = 0$, 则点 P 的坐标是 ()
 (A) $(1, -1, 2)$ (B) $(-1, 1, 2)$
 (C) $(1, 1, 2)$ (D) $(-1, -1, 2)$
- (3) 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 是任意常数, 则该非齐次方程的通解是 ()
 (A) $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$ (B) $C_1y_1 + C_2y_2 - (C_1 + C_2)y_3$
 (C) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$ (D) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$
- (4) 设函数 $f(x) = x^2, 0 \leq x < 1$, 而 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, -\infty < x < +\infty$, 其中 $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx, n = 1, 2, 3, \dots$, 则 $S(-\frac{1}{2})$ 等于 ()
 (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$



(5) 设 A 是 n 阶矩阵, 且 A 的行列式 $|A| = 0$, 则 A 中 ()

- (A) 必有一列元素全为 0
- (B) 必有两列元素对应成比例
- (C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合
- (D) 任一列向量是其余列向量的线性组合

三、(本题满分 15 分, 每小题 5 分.)

(1) 设 $z = f(2x - y) + g(x, xy)$, 其中函数 $f(t)$ 二阶可导, $g(u, v)$ 具有连续的二阶偏导数,

$$\text{求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

(2) 设曲线积分 $\int_C xy^2 dx + y\varphi(x)dy$ 与路径无关, 其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 且 $\varphi(0) = 0$,

$$\text{计算 } \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x)dy \text{ 的值.}$$

(3) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x+z)dV$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 所围成的区域.

四、(本题满分 6 分.)

将函数 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数.

五、(本题满分 7 分.)

设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 其中 f 为连续函数, 求 $f(x)$.

六、(本题满分 7 分.)

证明方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

七、(本题满分 6 分.)

问 λ 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = \lambda \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda + 2 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 2\lambda + 3 \end{cases}$$

有解, 并求出解的一般形式.

八、(本题满分 8 分.)

假设 λ 为 n 阶可逆矩阵 A 的一个特征值, 证明:

- (1) $\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征值;



- (2) $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值.

九、(本题满分 9 分.)

设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ 上, 问当 R 为何值时, 球面 Σ 在定球面内部的那部分的面积最大?

十、填空题(本题满分 6 分, 每小题 2 分.)

- (1) 已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$, 随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$ 及条件概率

$P(B|A)=0.8$, 则和事件 $A \cup B$ 的概率 $P(A \cup B)=$ _____.

- (2) 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次, 其命中率分别为 0.6 和 0.5. 现已知目标被命中, 则它是甲射中的概率为_____.

- (3) 若随机变量 ξ 在 $(1, 6)$ 上服从均匀分布, 则方程 $x^2 + \xi x + 1 = 0$ 有实根的概率是_____.

十一、(本题满分 6 分.)

设随机变量 X 与 Y 独立, 且 X 服从均值为 1、标准差(均方差)为 $\sqrt{2}$ 的正态分布, 而 Y 服从标准正态分布. 试求随机变量 $Z = 2X - Y + 3$ 的概率密度函数.



1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】 -1

【解析】 原式 $= -\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{-h} = -\frac{1}{2} f'(3) = -1$.

(2) 【答案】 $x-1$

【解析】 由定积分的性质可知, $\int_0^1 f(t)dt$ 和变量没有关系, 且 $f(x)$ 是连续函数, 故

$\int_0^1 f(t)dt$ 为一常数, 为简化计算和防止混淆, 令 $\int_0^1 f(t)dt = a$, 则有恒等式 $f(x) = x + 2a$, 两边 0 到 1 积分得

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x + 2a)dx,$$

即
$$a = \int_0^1 (x + 2a)dx = \int_0^1 xdx + 2a \int_0^1 dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + 2a[x]_0^1 = \frac{1}{2} + 2a,$$

解之得 $a = -\frac{1}{2}$, 因此 $f(x) = x + 2a = x - 1$.

(3) 【答案】 π

【解析】 方法一: L 的方程又可写成 $x^2 + y^2 = 1 (y \leq 0)$, 被积分函数在 L 上取值, 于是

$$\text{原积分} = \int_L 1ds = \pi \quad (\text{半径为 1 的半圆周长}).$$

方法二: 写出 L 的参数方程,

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad (-\pi \leq t \leq 0)$$

则
$$\int_L (x^2 + y^2)ds = \int_{-\pi}^0 (\cos^2 t + \sin^2 t) \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} dt = \int_{-\pi}^0 1 \cdot dt = \pi.$$

(4) 【答案】 2

【解析】 直接用散度公式

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u}|_P &= \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(ye^z) + \frac{\partial}{\partial z}(x \ln(1+z^2)) \right] \Big|_P \\ &= (y^2 + e^z + x \cdot \frac{2z}{1+z^2}) \Big|_{(1,1,0)} = 1^2 + e^0 + 0 \cdot \frac{2 \cdot 0}{1+0^2} = 1+1=2. \end{aligned}$$



(5) 【答案】
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

【解析】 由于

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

为求矩阵的逆可有多种办法, 可用伴随, 可用初等行变换, 也可用分块求逆.

方法一: 如果对 $(A - 2E : E)$ 作初等行变换, 则由 $(A - 2E : E) \rightarrow (E : (A - 2E)^{-1})$ 可以直接得出 $(A - 2E)^{-1}$.

本题中, 第一行乘以 (-1) 加到第二行上; 再第二行乘以 $\frac{1}{2}$, 有

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

从而知 $(A - 2E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

方法二: 对于 2 阶矩阵的伴随矩阵有规律: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则求 A 的伴随矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

如果 $|A| \neq 0$, 这样

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{|ad - bc|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

再利用分块矩阵求逆的法则: $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix},$



本题亦可很容易求出 $(A-2E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

二、选择题(本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】(A)

【解析】函数 $y = x \sin \frac{1}{x}$ 只有间断点 $x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x}$, 其中 $\sin \frac{1}{x}$ 是有界函数, 而当 $x \rightarrow 0^+$ 时, x 为无穷小, 而无穷小量和一个有界函数的乘积仍然是无穷小,

所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0$, 故函数没有铅直渐近线.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \quad \text{令 } t = \frac{1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

所以 $y = 1$ 为函数的水平渐近线, 所以答案为(A).

【相关知识点】铅直渐近线: 如函数 $y = f(x)$ 在其间断点 $x = x_0$ 处有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则

$x = x_0$ 是函数的一条铅直渐近线;

水平渐近线: 当 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, (a 为常数), 则 $y = a$ 为函数的水平渐近线.

(2) 【答案】(C)

【解析】题设为求曲面 $S: F(x, y, z) = 0$ (其中 $F(x, y, z) = z + x^2 + y^2 - 4$) 上点 P 使 S 在该点处的法向量 \vec{n} 与平面 $2x + 2y + z - 1 = 0$ 的法向量 $n_0 = \{2, 2, 1\}$ 平行.

S 在 $P(x, y, z)$ 处的法向量

$$n = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\} = \{2x, 2y, 1\},$$

若 $n \parallel n_0$, 则 $n = \lambda n_0$, λ 为常数, 即 $2x = 2\lambda, 2y = 2\lambda, 1 = \lambda$. 即 $x = 1, y = 1$.

又点 $P(x, y, z) \in S$, 所以 $z = 4 - x^2 - y^2 \Big|_{(x,y)=(1,1)} = 4 - 1^2 - 1^2 = 2$, 故求得 $P(1, 1, 2)$.

因此应选(C).

(3) 【答案】(D)



【解析】由二阶常系数非齐次微分方程解的结构定理可知, $y_1 - y_3, y_2 - y_3$ 为方程对应齐次方程的特解, 所以方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的通解为

$$y = C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3,$$

即 $y = C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$, 故应选 D.

(4) 【答案】(B)

【解析】 $S(x)$ 是函数 $f(x)$ 先作奇延拓后再作周期为 2 的周期延拓后的函数的傅式级数的和函数, 由于

$S(x)$ 是奇函数, 于是 $S(-\frac{1}{2}) = -S(\frac{1}{2})$.

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 连续, 由傅式级数的收敛性定理, $S(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. 因此,

$S(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$. 应选 (B).

(5) 【答案】(C)

【解析】本题考查 $|A| = 0$ 的充分必要条件, 而选项 (A)、(B)、(D) 都是充分条件, 并不必要.

因为对矩阵 A 来说, 行和列具有等价性, 所以单说列或者单说行满足什么条件就构成了 $|A| = 0$ 的必要条件, 但是不具有任意性, 只需要存在一列向量是其余列向量的线性组合.

以 3 阶矩阵为例, 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

条件 (A) 必有一列元素全为 0, (B) 必有两列元素对应成比例均不成立, 但有 $|A| = 0$, 所以 (A)、(B) 不满足题意, 不可选.

若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, 则 $|A| = 0$, 但第三列并不是其余两列的线性组合, 可见 (D) 不正确.

这样用排除法可知应选 (C).

三、(本题满分 15 分, 每小题 5 分.)

(1) 【解析】由于混合偏导数在连续条件下与求导次序无关, 可以先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 也可以先求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

方法一: 先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 由复合函数求导法,



$$\frac{\partial z}{\partial x} = f' \frac{\partial}{\partial x}(2x-y) + g'_1 \frac{\partial}{\partial x}(x) + g'_2 \frac{\partial}{\partial x}(xy) = 2f' + g'_1 + yg'_2,$$

再对 y 求偏导, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2f' + g'_1 + yg'_2) = 2f'' \frac{\partial}{\partial y}(2x-y) \\ &\quad + \left[g''_{11} \frac{\partial}{\partial y}(x) + g''_{12} \frac{\partial}{\partial y}(xy) \right] + \left[g'_2 + yg''_{21} \frac{\partial}{\partial y}(x) + yg''_{22} \frac{\partial}{\partial y}(xy) \right] \\ &= -2f'' + g''_{11} \cdot 0 + xg''_{12} + g'_2 + yg''_{21} \cdot 0 + xyg''_{22} \\ &= -2f'' + xg''_{21} + g'_2 + xyg''_{22}. \end{aligned}$$

方法二: 先求 $\frac{\partial z}{\partial y}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f' \frac{\partial}{\partial y}(2x-y) + g'_1 \frac{\partial}{\partial y}(x) + g'_2 \frac{\partial}{\partial y}(xy) = -f' + xg'_2,$$

再对 x 求偏导数, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-f' + xg'_2) \\ &= -f'' \frac{\partial}{\partial x}(2x-y) + g'_2 + xg''_{21} \frac{\partial}{\partial x}(x) + xg''_{22} \frac{\partial}{\partial x}(xy) \\ &= -2f'' + g'_2 + xg''_{21} + xyg''_{22}. \end{aligned}$$

【相关知识点】 复合函数求导法则: 若 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 在点 (x, y) 处偏导数存在, 函数

$z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 具有连续偏导数, 则复合函数 $z = f[u(x, y), v(x, y)]$ 在点 (x, y) 处的偏导数存在, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

(2) **【解析】方法一:** 先求出 $\varphi(x)$, 再求曲线积分.

设 $P(x, y), Q(x, y)$ 有连续偏导数, 在所给单连通区域 D 上, $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关, 则在 D 上有

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $y\varphi'(x) = 2xy$, 即 $\varphi'(x) = 2x, \varphi(x) = x^2 + C$. 由 $\varphi(0) = 0$, 得

$C = 0$, 即 $\varphi(x) = x^2$, 因此



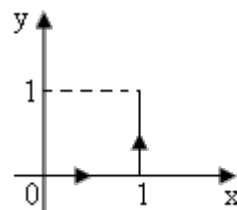
$$I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x) dy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + yx^2 dy = \frac{1}{2} \int_{(0,0)}^{(1,1)} y^2 dx^2 + x^2 dy^2$$

$$= \frac{1}{2} \int_{(0,0)}^{(1,1)} d(x^2 y^2) = \frac{1}{2} (x^2 y^2) \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = \frac{1}{2}.$$

或取特殊路径如图：

$$I = \int_L xy^2 dx + yx^2 dy = \int_0^1 0 \cdot dx + \int_0^1 y \cdot x^2 dy$$

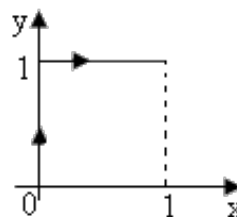
$$= \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$



方法二：不必求出 $\varphi(x)$ ，选取特殊的路径，取积分路径如图，则

$$I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x) dy$$

$$= \int_0^1 y\varphi(0) dy + \int_0^1 x dx = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$



(3) 【解析】利用三重积分的性质，

Ω 关于 yz 平面对称， x 对 x 为奇函数，所以 $\iiint_{\Omega} x dV = 0$ ，即 $\iiint_{\Omega} (x+z) dV = \iiint_{\Omega} z dV$ 。

Ω 是由球心在原点半径为 1 的上半球面与顶点在原点、对称轴为 z 轴、半顶角为 $\frac{\pi}{4}$ 的锥面所围成。故可选

用球坐标变换，则 $\Omega: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq 1$ ，

所以 $I = \iiint_{\Omega} z dV = \iiint_{\Omega} \rho \cos \varphi \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin 2\varphi d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{2} \cos 2\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

四、(本题满分 6 分.)

【解析】直接展开 $f(x)$ 相对比较麻烦，可 $f'(x)$ 容易展开，

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

由 $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^n t^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, (|t| < 1)$ ，令 $t = x^2$ 得

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, (x^2 < 1)$$



即
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, (|x| < 1)$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(u) du + f(0), \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{2n} du + \arctan \frac{1+0}{1-0} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x u^{2n} du \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, (|x| < 1) \end{aligned}$$

当 $x = \pm 1$ 时, 式 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 均收敛, 而左端 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 在 $x = 1$ 处无定义.

因此
$$f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in [-1, 1).$$

五、(本题满分 7 分.)

【解析】先将原式进行等价变换, 再求导, 试着发现其中的规律,

$$f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt = \sin x - x \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt,$$

所给方程是含有未知函数及其积分的方程, 两边求导, 得

$$f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t)dt - xf(x) + xf(x) = \cos x - \int_0^x f(t)dt,$$

再求导, 得

$$f''(x) = -\sin x - f(x), \text{ 即 } f''(x) + f(x) = -\sin x.$$

这是个简单的二阶常系数非齐次线性微分方程, 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 + 1 = 0$,

此特征方程的根为 $r = \pm i$, 而右边的 $\sin x$ 可看作 $e^{\alpha x} \sin \beta x$, $\alpha \pm i\beta = \pm i$ 为特征根, 因此非齐次方程有特解

$$Y = xa \sin x + xb \cos x.$$

代入方程并比较系数, 得 $a = 0, b = \frac{1}{2}$, 故 $Y = \frac{x}{2} \cos x$, 所以

$$f(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2} \cos x,$$

又因为 $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 所以 $c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{2}$, 即 $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{x}{2} \cos x$.

六、(本题满分 7 分.)

【解析】方法一: 判定方程 $f(x) = 0$ 等价于判定函数 $y = f(x)$ 与 x 的交点个数.



令
$$f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx,$$

其中 $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ 是定积分, 为常数, 且被积函数 $1 - \cos 2x$ 在 $(0, \pi)$ 非负, 故

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx > 0, \text{ 为简化计算, 令 } \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = k > 0, \text{ 即 } f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k,$$

则其导数 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, 令 $f'(x) = 0$ 解得唯一驻点 $x = e$,

即
$$\begin{cases} f'(x) > 0, 0 < x < e \\ f'(x) < 0, e < x < +\infty \end{cases},$$

所以 $x = e$ 是最大点, 最大值为 $f(e) = \ln e - \frac{e}{e} + k = k > 0$.

又因为
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - \frac{x}{e} + k) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \frac{x}{e} + k) = -\infty \end{cases},$$
 由连续函数的介值定理知在 $(0, e)$ 与 $(e, +\infty)$ 各有且仅有一个

零点(不相同), 故方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ 在 $(0, +\infty)$ 有且仅有两个不同实根.

方法二:
$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 x} dx,$$

因为当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $\sin x \geq 0$, 所以

$$\int_0^{\pi} \sqrt{2 \sin^2 x} dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x dx = \sqrt{2} [-\cos x]_0^{\pi} = 2\sqrt{2} > 0,$$

其它同方法一.

七、(本题满分 6 分.)

【解析】对方程组的增广矩阵作初等行变换.

第一行分别乘以有 (-4) 、 (-6) 加到第二行和第三行上, 再第二行乘以 (-1) 加到第三行上, 有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & \lambda \\ 4 & 1 & 2 & \vdots & \lambda + 2 \\ 6 & 1 & 4 & \vdots & 2\lambda + 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & -3\lambda + 2 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & -4\lambda + 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & \lambda \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & -3\lambda + 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -\lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

由于方程组有解的充要条件是 $r(A) = r(\bar{A})$, 故仅当 $-\lambda + 1 = 0$, 即 $\lambda = 1$ 时, 方程组有解. 此时秩

$r(A) = r(\bar{A}) = 2 < n = 3$, 符合定理的第二种情况, 故方程组有无穷多解.

由同解方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1, \\ x_2 - 2x_3 = -1, \end{cases} \text{ 令 } x_3 = t, \text{ 解得原方程组的通解}$$



$$\begin{cases} x_1 = -t + 1, \\ x_2 = 2t - 1, \\ x_3 = t, \end{cases} \quad (\text{其中 } t \text{ 为任意常数}).$$

【相关知识点】1. 非齐次线性方程组有解的判定定理：

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵 $\bar{A} = (A:b)$ 的秩，即是 $r(A) = r(\bar{A})$ (或者说， b 可由 A 的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线表出，亦等同于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, b$ 是等价向量组)

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，线性方程组 $Ax = b$ ，则

$$(1) \quad \text{有唯一解} \quad \Leftrightarrow \quad r(A) = r(\bar{A}) = n.$$

$$(2) \quad \text{有无穷多解} \quad \Leftrightarrow \quad r(A) = r(\bar{A}) < n.$$

$$(3) \quad \text{无解} \quad \Leftrightarrow \quad r(A) + 1 = r(\bar{A}).$$

$$\Leftrightarrow \quad b \text{ 不能由 } A \text{ 的列向量 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 线表出.}$$

八、(本题满分 8 分.)

【解析】(1) 由 λ 为 A 的特征值可知，存在非零向量 α 使 $A\alpha = \lambda\alpha$ ，两端左乘 A^{-1} ，得

$\alpha = \lambda A^{-1}\alpha$. 因为 $\alpha \neq 0$ ，故 $\lambda \neq 0$ ，于是有 $A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda}\alpha$. 按特征值定义知 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.

(2) 由于逆矩阵的定义 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$ ，据第(1)问有 $\frac{A^*}{|A|}\alpha = \frac{1}{\lambda}\alpha \Rightarrow A^*\alpha = \frac{|A|}{\lambda}\alpha$ ，按特征值定义，即 $\frac{|A|}{\lambda}$ 为伴

随矩阵 A^* 的特征值.

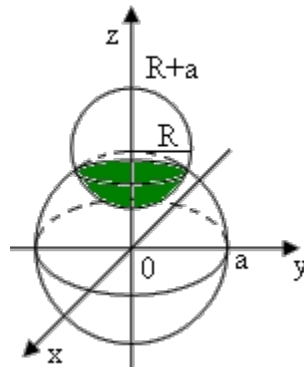
【相关知识点】矩阵特征值与特征向量的定义：设 A 是 n 阶矩阵，若存在数 λ 及非零的 n 维列向量 X 使得 $AX = \lambda X$ 成立，则称 λ 是矩阵 A 的特征值，称非零向量 X 是矩阵 A 的特征向量.

九、(本题满分 9 分.)

【解析】由球的对称性，不妨设球面 Σ 的球心是 $(0, 0, a)$ ，

于是 Σ 的方程是 $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = R^2$.

先求 Σ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的交线 Γ ：





$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-a)^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \end{cases} \Rightarrow z = \frac{2a^2 - R^2}{2a}.$$

代入上式得 Γ 的方程 $x^2 + y^2 = R^2 - \frac{R^4}{4a^2}.$

它在平面 xOy 上的投影曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = b^2, b^2 = R^2 - \frac{R^4}{4a^2} (0 < R < 2a), \\ z = 0, \end{cases}$

相应的在平面 xOy 上围成区域设为 D_{xy} , 则球面 Σ 在定球面内部的那部分面积

$$S(R) = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy.$$

将 Σ 的方程两边分别对 x, y 求偏导得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z-a}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z-a},$$

所以
$$\begin{aligned} S(R) &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a-z}\right)^2 + \left(\frac{y}{a-z}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a-z}\right)^2 + \left(\frac{y}{a-z}\right)^2} dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

利用极坐标变换 ($0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq b$) 有

$$\begin{aligned} S(R) &= \iint_{D_{xy}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \xrightarrow{\text{极坐标变换}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b \frac{R\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho \\ &= -\frac{R}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b \frac{1}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d(R^2 - \rho^2) \\ &= 2\pi R (-\sqrt{R^2 - \rho^2}) \Big|_0^b = 2\pi R (-\sqrt{R^2 - b^2} + R) \end{aligned}$$

代入 $b^2 = R^2 - \frac{R^4}{4a^2}$, 化简得 $S(R) = 2\pi R^2 - \frac{\pi R^3}{a}.$

这是一个关于 R 的函数, 求 $S(R)$ 在 $(0, 2a)$ 的最大值点, $S(R)$ 两边对 R 求导, 并令

$$S'(R) = 0, \text{ 得 } S'(R) = 4\pi R - \frac{3\pi R^2}{a} = 0, \text{ 得 } R = \frac{4a}{3}.$$



且
$$\begin{cases} S'(R) > 0, 0 < R < \frac{4}{3}a \\ S'(R) < 0, \frac{4}{3}a < R < 2a \end{cases},$$

故 $R = \frac{4a}{3}$ 时 $S(R)$ 取极大值, 也是最大值.

因此, 当 $R = \frac{4a}{3}$ 时球面 Σ 在定球面内部的那部分面积最大.

十、填空题(本题满分 6 分, 每小题 2 分.)

(1) 【解析】

方法一: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B|A) = 0.7$.

方法二: $P(A \cup B) = P(B) + P(A\bar{B}) = P(B) + P(A)P(\bar{B}|A) = 0.6 + 0.5 \times 0.2 = 0.7$.

(2) 【解析】设事件 A = “甲射中”, B = “乙射中”, 依题意, $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.5$,

A 与 B 相互独立, $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0.6 \times 0.5 = 0.3$.

因此, 有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.6 + 0.5 - 0.3 = 0.8$.

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A(A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = 0.75.$$

(3) 【解析】设事件 A = “方程有实根”, 而方程 $x^2 + \xi x + 1 = 0$ 有实根的充要条件是其判别式

$$\Delta = \xi^2 - 4 \geq 0, \text{ 即 } A = \{\xi^2 - 4 \geq 0\} = \{\xi^2 \geq 4\}.$$

随机变量 ξ 在 $(1, 6)$ 上服从均匀分布, 所以其分布函数为
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{x-1}{6-1}, & 1 \leq x < 6, \\ 1, & x \geq 6. \end{cases}$$

由分布函数的定义 $P(x \leq k) = F(k)$,

$$P\{\xi \geq 2\} = 1 - P\{\xi < 2\} = 1 - 0.2 = 0.8. \quad \text{而 } P\{\xi \leq -2\} = 0.$$

所以由概率的可加性, 有 $P(A) = \{\xi^2 \geq 4\} = P\{\xi \geq 2\} + P\{\xi \leq -2\} = 0.8 + 0 = 0.8$.

【相关知识点】广义加法公式: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

条件概率: $P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)}$, 所以 $P(AB) = P(BA) = P(B|A)P(A)$.



十一、(本题满分 6 分.)

【解析】 $X \sim N(1, 2)$, $Y \sim N(0, 1)$, 由独立的正态变量 X 与 Y 的线性组合仍服从正态分布, 且

$$EZ = 2EX - EY + 3 = 5, \quad DZ = 4DX + DY = 4 \times 2 + 1 = 9,$$

得 $Z \sim N(5, 9)$.

代入正态分布的概率密度公式, 有 Z 的概率密度函数为 $f_Z(z) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}$.

【相关知识点】对于随机变量 X 与 Y 均服从正态分布, 则 X 与 Y 的线性组合亦服从正态分布.

若 X 与 Y 相互独立, 由数学期望和方差的性质, 有

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c,$$

$$D(aX + bY + c) = a^2 D(X) + b^2 D(Y),$$

其中 a, b, c 为常数.