

# 数值分析

# 学习辅导·习题解析

李 红 徐长发 著

华中科技大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

数值分析学习辅导/李 红 徐长发

武汉:华中科技大学出版社, 2001.5

ISBN 7-5609-3062-X

I. 数…

II. 李…

III. 数值分析-高等学校-教学参考书

IV .0241

责任编辑:龙纯曼  
责任校对:蔡晓瑚

封面设计:  
责任监印:

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87542624

经销:新华书店湖北发行所

印刷:

开本:850×1168 1/32 印张:

字数:

版次:2001年3月第1版 印次:2001年5月第1次印刷

印数:

ISBN 7-5609-3062-X/0241

定价:22.00元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行科调换)

## 内 容 提 要

本书是为理工科各专业研究生、本科生学习“数值分析”、“计算方法”课编写的辅导教材,主要内容包括函数插值与逼近,数值积分与数值微分,常微分方程数值解,方程求根,线性代数方程组的直接法与迭代解法等.本书各章都给出了内容提要,基本要求,例题选讲,习题及习题解答,最后编有模拟试题.

本书还可作为数学系、信息与计算科学系及其他专业大学生学习“数值分析”时的参考书,对参加同等学力人员申请硕士学位综合水平全国统一考试中的“数值分析”考试也极有参考价值.

# 前 言

科学计算能力是跨世纪人才不可或缺的,高等教育中如何培养学生科学计算的能力正日益受到关注,已成为当前教育改革的核心和焦点之一。

数值分析课程在培养学生科学计算能力上具有不可替代的作用。现今,已有众多数值分析教材出版,但与之相适应的教辅书尚不多见,编著一本数值分析辅导教材是很有必要的,因此,我们编著了《数值分析学习辅导·习题解析》一书。

该书包含下述内容:误差的有关知识,插值法,数值积分与微分,常微分方程数值解,非线性方程求根,线性代数方程组求解及函数逼近与计算。全书共分为九章,前八章结构均由内容提要、基本要求、例题分析、习题及习题解答五部分组成,第九章为模拟试题。

本书旨在为专、本科理科学生及工科大学生、研究生学习“计算方法”、“数值分析”等课程提供一本有较强指导性和可读性的辅导教材,同时,它对备考硕士研究生、博士研究生以及在职申请硕士学位综合性考试的读者也是有极大帮助的。

限于水平,错误和不妥之处恳请读者批评指正。

编者

2001. 2.

# 目 录

第一章 误差分析	(1)
一、内容提要	(1)
二、基本要求	(4)
三、例题选讲	(4)
四、习题	(8)
五、习题解答	(10)
第二章 插值法	(17)
一、内容提要	(17)
二、基本要求	(30)
三、例题选讲	(30)
四、习题	(53)
五、习题解答	(57)
第三章 函数逼近与计算	(73)
一、内容提要	(73)
二、基本要求	(84)
三、例题选讲	(84)
四、习题	(106)
五、习题解答	(109)
第四章 数值积分与数值微分	(125)
一、内容提要	(125)
二、基本要求	(132)
三、例题选讲	(133)
四、习题	(157)

五、习题解答 .....	(162)
第五章 常微分方程数值解法 .....	(185)
一、内容提要 .....	(185)
二、基本要求 .....	(192)
三、例题选讲 .....	(192)
四、习题 .....	(211)
五、习题解答 .....	(215)
第六章 方程求根 .....	(229)
一、内容提要 .....	(229)
二、基本要求 .....	(237)
三、例题选讲 .....	(237)
四、习题 .....	(259)
五、习题解答 .....	(262)
第七章 解线性方程组的直接解法 .....	(277)
一、内容提要 .....	(277)
二、基本要求 .....	(289)
三、例题选讲 .....	(289)
四、习题 .....	(315)
五、习题解答 .....	(321)
第八章 解线性方程组的迭代法 .....	(341)
一、内容提要 .....	(341)
二、基本要求 .....	(345)
三、例题选讲 .....	(346)
四、习题 .....	(358)
五、习题解答 .....	(364)
模拟试卷 .....	(381)

# 第一章 误差分析

## 一、内容提要

本章主要是论述误差的概念及其简单理论，其中包括：

### 1. 误差的来源

误差的来源是多方面的，但主要有四个方面。

#### (1) 模型误差

反映实际问题有关量之间关系的计算公式，即数学模型，通常只是近似的。由此产生的数学模型的解与实际问题的解之间的误差称为**模型误差**。

#### (2) 观测误差

数学模型中包含的某些参数(如时间、长度、电位等等)往往通过观测而获得，由观测得到的数据与实际的数据之间是有误差的，这种误差称为**观测误差**。

#### (3) 截断误差

求解数学模型所用的数值计算方法如果是一种近似的方法，那么只能得到数学模型的近似解，由此产生的误差称为**方法误差**或**截断误差**。

#### (4) 舍入误差

由于计算机的字长有限，参加运算的数据以及运算结果在计算机上存放会产生误差，这种误差称为**计算误差**或**舍入误差**。

在数值分析中，主要研究截断误差和舍入误差对计算结果的影响，而一般不考虑模型误差和观测误差。

### 2. 误差的基本概念

### (1)绝对误差

**绝对误差**是指准确值与其近似值之差. 设  $x^*$  是准确值  $x$  的一个近似值, 则  $e = x - x^*$  为  $x^*$  的绝对误差.  $|e|$  的一个上界  $\epsilon^*$  叫做近似值的**误差限**. 一般来讲, 误差限都取到某位的半个单位.

### (2)相对误差

用绝对误差来刻画近似数的精确程度是有局限性的, 因为它没有反映出它在原数中所占的比例. 记

$$e_r = \frac{x - x^*}{x},$$

$e_r$  称为近似值  $x^*$  的**相对误差**. 由于准确值  $x$  未知, 实际上总把  $\frac{x - x^*}{x^*}$  作为  $x^*$  的相对误差. 相对误差一般用百分比表示.

相对误差绝对值的一个上界  $\epsilon_r^*$  称做近似值的**相对误差限**.

### (3)有效数字

若近似值  $x^*$  的误差限是某一位的半个单位, 设该位到  $x^*$  的第一位非零数字共有  $n$  位, 则称  $x^*$  有  **$n$  位有效数字**.

有效数字是表示近似数准确度的另一重要方法, 它是由组成近似数的数字个数来表示近似数的精确度的.

若  $x^*$  有  $n$  位有效数字, 可写成标准化形式:

$$x^* = \pm a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \times 10^m, \quad (1.1)$$

其中  $a_1, \dots, a_n$  是 0 到 9 中的一个数字, 且  $a_1 \neq 0, m$  为整数.

有效数字与相对误差限的关系:

用(1.1)式表示的近似数  $x^*$ , 若  $x^*$  具有  $n$  位有效数字, 则其相对误差限为

$$\epsilon_r^* \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}. \quad (1.2)$$

反之, 若  $x^*$  的相对误差限

$$\epsilon_r^* \leq \frac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{-(n-1)}, \quad (1.3)$$

则  $x^*$  至少具有  $n$  位有效数字.

### 3. 数值运算的误差估计

设近似数  $x_1^*$  与  $x_2^*$  的误差限分别为  $\epsilon(x_1^*)$  及  $\epsilon(x_2^*)$ , 则它们进行加、减、乘、除运算得到的误差限分别为

$$\begin{cases} \epsilon(x_1^* \pm x_2^*) = \epsilon(x_1^*) \pm \epsilon(x_2^*), \\ \epsilon(x_1^* \cdot x_2^*) \approx |x_1^*| \epsilon(x_2^*) + |x_2^*| \epsilon(x_1^*), \\ \epsilon(x_1^* / x_2^*) \approx \frac{|x_1^*| \epsilon(x_2^*) + |x_2^*| \epsilon(x_1^*)}{|x_2^*|^2} \quad (x_2^* \neq 0). \end{cases} \quad (1.4)$$

函数值的误差:

设有函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 若需要计算  $A = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 而  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的近似值为  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ ,  $A$  的近似值为  $A^* = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , 于是函数值  $A^*$  的误差  $e(A^*)$  为

$$\begin{aligned} e(A^*) &= A^* - A = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\approx \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_k} \right] (x_k^* - x_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial x_k} \right]^* e_k^*, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\text{误差限} \quad \epsilon(A^*) \approx \sum_{k=1}^n \left| \left[ \frac{\partial f}{\partial x_k} \right]^* \right| \epsilon(x_k^*); \quad (1.6)$$

而  $A^*$  的相对误差限为

$$\epsilon_r^* = \epsilon_r(A^*) = \frac{\epsilon(A^*)}{|A^*|} \approx \sum_{k=1}^n \left| \left[ \frac{\partial f}{\partial x_k} \right]^* \right| \frac{\epsilon(x_k^*)}{|A^*|}.$$

### 4. 数值运算中的一些原则

数值运算总是在一个预先设计好的算法中进行的. 所谓算法就是一个有限的基本运算序列, 这个序列规定了怎样从输入数据去计算出问题的解. 由于运算是在计算机上进行的, 而计算机的字长有限, 因而产生舍入误差. 为减小舍入误差的影响, 设计算法时应遵循以下一些原则.

- 1) 要避免除数绝对值远远小于被除数绝对值的除法;
- 2) 要避免两相近数相减;
- 3) 要防止大数“吃掉”小数;

- 4) 注意简化计算步骤,减少运算次数;
- 5) 要有数值稳定性,即能控制舍入误差的传播.

## 二、基本要求

1) 误差是用来衡量数值方法好与坏的重要标志,为此对每一个方法都要注意误差分析,可结合一些实际问题加深理解误差概念和理论的实际意义.

2) 在弄清楚基本概念以及它们之间的内在联系的基础上,会处理最常见的一般运算结果和解决某些实际问题.

## 三、例题选讲

**例 1** 求  $\sqrt{3}$  的近似值,使其绝对误差限精确到  $\frac{1}{2} \times 10^{-1}$ ,

$$\frac{1}{2} \times 10^{-2}, \frac{1}{2} \times 10^{-3}.$$

**解** 因为  $\sqrt{3}=1.73205\dots$ . 由于

$$\epsilon^*(1.7) = |\sqrt{3} - 1.7| = 0.03205\dots < 0.05,$$

$$\epsilon^*(1.73) = |\sqrt{3} - 1.73| = 0.00205\dots < 0.005,$$

$$\epsilon^*(1.732) = |\sqrt{3} - 1.732| = 0.00005.$$

所以  $x_1^* = 1.7, x_2^* = 1.73, x_3^* = 1.732$ .

**例 2** 测量一木板长是 954cm,问测量的相对误差是多大?

**解** 因为实际问题所截取的近似数,其绝对误差限一般不超过最小刻度的半个单位,所以当  $x=954\text{cm}$  时,有  $\epsilon^* = 0.5\text{cm}$ ,其相对误差限为

$$e_r(954) = \frac{0.5}{954} = 0.0005241\dots$$

$$< 0.000525 = 0.0525\% < 0.053\%.$$

注:此处取  $\epsilon^* = 0.053\%$  作为相对误差限而不取  $0.0525\%$ ,也不取  $0.052\%$  作为相对误差限,是因为绝对误差限  $0.5$  本身就是

近似的数,所以商多取位数是无意义的. 不取  $0.052\%$  是因为要求上界,其估值只能增不可减.

**例 3** 用最小刻度为毫米的卡尺测量直杆甲和直杆乙,分别读出长度  $a=312\text{mm}$ , 和  $b=24\text{mm}$ . 问:  $e(a)$ ,  $e(b)$ ,  $e_r(a)$ ,  $e_r(b)$  各是多少? 两直杆实际长度  $x$  和  $y$  在什么范围内?

$$\begin{aligned}\text{解} \quad e(a) &= e(b) = 0.5\text{mm}, \\ e_r(a) &= \frac{e(a)}{|a|} = \frac{0.5}{312} \approx 0.16\%, \\ e_r(b) &= \frac{e(b)}{|b|} = \frac{0.5}{24} \approx 2.08\%,\end{aligned}$$

$$311.5\text{mm} \leq x \leq 312.5\text{mm}, \quad 23.5\text{mm} \leq y \leq 24.5\text{mm}.$$

**例 4** 设  $x^* = -2.18$  和  $y^* = 2.1200$  分别是由准确值  $x$  和  $y$  经过四舍五入而得到的近似值, 问  $e(x^*)$ ,  $e(y^*)$ ,  $e_r(x^*)$ ,  $e_r(y^*)$  各是多少?

$$\begin{aligned}\text{解} \quad e(x^*) &= 0.005, \quad e(y^*) = 0.00005, \\ e_r(x^*) &= \frac{0.005}{2.18} \approx 0.23\%, \\ e_r(y^*) &= \frac{0.00005}{2.1200} \approx 0.0024\%.\end{aligned}$$

注: 凡是由准确值经过四舍五入而得到的近似值, 其绝对误差限等于该近似值末位的半个单位.

**例 5** 下列近似值的绝对误差限都是  $0.005$ ,  $x_1^* = 1.38$ ,  $x_2^* = -0.0312$ ,  $x_3^* = 0.86 \times 10^{-4}$ , 问, 各个近似值有几位有效数字?

**解**  $x_1^*$  有三位有效数字,  $x_2^*$  有一位有效数字,  $x_3^*$  没有有效数字.

**例 6** 已知近似数  $x^*$  有两位有效数字, 试求其相对误差限.

**解** 利用 (1.2) 式, 已知  $n=2$ , 但近似数  $x^*$  的第一位有效数字  $a$  未知, 遇到这种情况时, 可按第一位有效数字出现的最不利的情况估计, 即令  $a=1$ , 则

$$\epsilon_r^* \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)} = \frac{1}{2 \times 1} \times 10^{-(2-1)} = 5\%.$$

故  $x^*$  的相对误差限为 5%.

**例 7** 已知近似数  $x^*$  的相对误差限为 0.3%, 问  $x^*$  至少有几位有效数字?

**解** 已知  $\epsilon_r^* = 0.3\%$ . 设  $x^*$  有  $n$  位有效数字, 由于  $x^*$  的第一个有效数  $a_1$  没具体给定, 而我们知道  $a_1$  一定是 1, 2, ..., 9 中的一个, 由

$$\epsilon_r^* = 0.3\% = \frac{3}{1000} < \frac{1}{2 \times 10^2} = \frac{1}{2(9+1)} \times 10^{-1},$$

故由 (1.3) 式知  $n=2$ , 即  $x^*$  至少有 2 位有效数字.

**例 8** 为使  $\sqrt{70}$  的近似数的相对误差限小于 0.1%, 问查开方表时, 要取几位有效数字.

**解** 设查表时取  $n$  位有效数字, 那么由 (1.2) 式并注意到  $8 \leq \sqrt{70} \leq 9$  可取  $a_1 = 8$ . 因此为使  $\sqrt{70}$  的近似数相对误差限  $\epsilon_r^* < 0.1\%$ , 只需取  $n$  使

$$\frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)} = \frac{1}{2 \times 8} \times 10^{-(n-1)} < 0.1\%,$$

得  $n=3$  即可. 查开方表取  $\sqrt{70} \approx 8.37$ .

注: 关于有效数字有以下几点说明.

1) 用四舍五入法取准确值的前  $n$  位作为近似值, 则  $x^*$  必有  $n$  位有效数字.

2) 有效数字位数相同的两个近似数, 绝对误差限不一定相同. 例如, 设  $x_1^* = 12345$  及  $x_2^* = 0.12345$  均有五位有效数字, 而它们的绝对误差限分别为  $\epsilon^*(x_1^*) = 0.5$ ,  $\epsilon^*(x_2^*) = 0.000005$ .

3) 将任何数乘以  $10^m$  ( $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 等于移动该数的小数点, 并不影响它的有效数字的位数. 例如,  $g = 9.80 \text{ m/s}^2$  具有三位有效数字,  $g = 0.00980 \times 10^3 \text{ m/s}^2$  亦具有三位有效数字. 但  $9.8 \text{ m/s}^2$  与  $9.80 \text{ m/s}^2$  含义是不一样的, 前者只有两位有效数字,

后者却有三位有效数字.

4) 准确值被认为具有无穷位有效数字.

**例 9** 设有三个近似数

$$a=2.31, \quad b=1.93, \quad c=2.24.$$

它们都有三位有效数字, 试计算  $p=a+bc$ ,  $\epsilon(p)$  和  $\epsilon_r(p)$ ; 并问:  $p$  的计算结果能有几位有效数字?

**解** 
$$p=2.31+1.93 \times 2.24=6.6332,$$

$$\begin{aligned}\epsilon(p) &= e(a) + e(bc) \approx e(a) + |b|e(c) + |c|e(b) \\ &= 0.005 + 0.005(1.93 + 2.24) = 0.02585,\end{aligned}$$

$$\epsilon_r(p) = \frac{e(p)}{|p|} \approx \frac{0.02585}{6.6332} \approx 0.39\%.$$

因为  $\epsilon(p) \approx 0.02585 < 0.05$ , 所以,  $p=6.6332$  中能有两位有效数字.

**例 10** 设  $f(x, y) = \frac{\cos y}{x}$ ,  $x = 1.30 \pm 0.005$ ,  $y = 0.871 \pm 0.0005$ . 如果用  $\tilde{u} = f(1.30, 0.871)$  作为  $f(x, y)$  的近似值, 则  $\tilde{u}$  能有几位有效数字?

**解** 
$$\tilde{u} = \frac{\cos 0.871}{1.30} \approx 0.49543.$$

由于

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\cos y}{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\sin y}{x}.$$

所以

$$\begin{aligned}\epsilon(\tilde{u}) &\approx \left| \frac{\cos 0.871}{1.30^2} \right| \times 0.005 + \left| \frac{\sin 0.871}{1.30} \right| \times 0.0005 \\ &\approx 0.0022 < 0.005.\end{aligned}$$

因而  $\tilde{u}=0.49543$  能有两位有效数字.

**例 11** 求二次方程  $x^2 - 16x + 1 = 0$  的较小正根, 要求有 3 位有效数字.

**解** 求解方程  $x^2 - 16x + 1 = 0$ , 得两根,  $x_1 = 8 - \sqrt{63}$ ,  $x_2 = 8$

+  $\sqrt{63}$ . 故此方程最小正根为  $x_1 = 8 - \sqrt{63}$ . 若取  $\sqrt{63} \approx 7.94$ , 具有 3 位有效数字, 则  $x_1 = 8 - \sqrt{63} \approx 8 - 7.94 = 0.06 = x_1^*$ , 只有 1 位有效数字. 若改用

$$x_1 = 8 - \sqrt{63} = \frac{1}{8 + \sqrt{63}} \approx \frac{1}{15.94} \approx 0.0627.$$

则此方程最小正根具有 3 位有效数字.

**例 12** 如果利用四位函数表计算  $1 - \cos 2^\circ$ , 试用不同方法计算并比较结果的误差.

**解** 用四位函数表直接计算:

$$1 - \cos 2^\circ \approx 1 - 0.9994 = 0.0006, \text{ 只有 1 位有效数字.}$$

$$1 - \cos 2^\circ = \frac{\sin^2 2^\circ}{1 + \cos 2^\circ} \approx \frac{(0.03490)^2}{1.9994} \approx 6.092 \times 10^{-4}, \text{ 具有 4 位}$$

有效数字.

$$1 - \cos 2^\circ = 2 \sin^2 1^\circ \approx 6.09 \times 10^{-4}, \text{ 具有 3 位有效数字.}$$

准确值  $1 - \cos 2^\circ = 6.0917 \cdots \times 10^{-4}$ , 故以上 3 种算法误差限分别为  $0.1 \times 10^{-4}$ ,  $0.0003 \times 10^{-4}$ ,  $0.002 \times 10^{-4}$ .

## 四、习题

1. 设  $x > 0$ ,  $x$  的相对误差为  $\delta$ , 求  $\ln x$  的误差.

2. 设  $x$  的相对误差为  $2\%$ , 求  $x^n$  的相对误差.

3. 下列各数都是经过四舍五入得到的近似数, 即误差限不超过最后一位的半个单位, 试指出它们是几位有效数字:

$$x_1^* = 1.1021, \quad x_2^* = 0.031, \quad x_3^* = 385.6, \quad x_4^* = 56.430, \quad x_5^* = 7 \times 1.0.$$

4. 利用公式(1.4)求下列各近似值的误差限:

$$(1) \quad x_1^* + x_2^* + x_4^*, \quad (2) \quad x_1^* \cdot x_2^* \cdot x_3^*, \quad (3) \quad x_2^* / x_4^*,$$

其中  $x_1^*$ 、 $x_2^*$ 、 $x_3^*$ 、 $x_4^*$  均为第 3 题所给的数.

5. 计算球体积, 要使相对误差限为  $1\%$ , 问度量半径  $R$  时允许的相对误差限是多少?

6. 设  $Y_0 = 28$ , 按递推公式

$$Y_n = Y_{n-1} - \frac{1}{100} \sqrt{783} \quad (n=1, 2, \dots)$$

计算到  $Y_{100}$ . 若取  $\sqrt{783} \approx 27.982$  (五位有效数字), 试问计算  $Y_{100}$  将有多大误差?

7. 求方程  $x^2 - 56x + 1 = 0$  的两个根, 使它至少具有四位有效数字 ( $\sqrt{783} \approx 27.982$ ).

8. 当  $N$  充分大时, 怎样求  $\int_N^{N+1} \frac{1}{1+x^2} dx$ ?

9. 正方形的边长大约为  $100\text{cm}$ , 应怎样测量才能使其面积误差不超过  $1\text{cm}^2$ ?

10. 设  $s = \frac{1}{2}gt^2$ , 假定  $g$  是准确的, 而对  $t$  的测量有  $\pm 0.1$  秒的误差, 证明当  $t$  增加时  $s$  的绝对误差增加, 而相对误差却减少.

11. 已测得某住房长  $l^* = 4.32\text{m}$ , 宽  $d^* = 3.12\text{m}$ , 已知  $|l - l^*| \leq 0.01\text{m}$ ,  $|d - d^*| \leq 0.01\text{m}$ , 试求住房面积  $S = ld$  的误差限与相对误差限.

12. 序列  $\{y_n\}$  满足递推关系

$$y_n = 10y_{n-1} - 1 \quad (n=1, 2, \dots).$$

若  $y_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$  (三位有效数字), 计算到  $y_{10}$  时误差有多大? 这个计算过程稳定吗?

13. 计算  $f = (\sqrt{2} - 1)^6$ , 取  $\sqrt{2} \approx 1.4$ . 利用下列算式计算, 哪一个得到的结果最好?

$$\frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^6}, (3 - 2\sqrt{2})^3, \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})^3}, 99 - 70\sqrt{2}.$$

14.  $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ , 求  $f(30)$  的值, 若开平方用六位函数表, 问求对数时误差有多大? 若改用另一等价公式:

$$\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

计算, 求对数时误差有多大?

15. 若用下列两种方法计算  $e^{-5}$  的近似值,问哪种方法能提供较好的近似值?

$$(1) e^{-5} \approx \sum_{i=0}^9 (-1)^i \frac{5^i}{i!} = x_1^*,$$

$$(2) e^{-5} \approx \left[ \sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!} \right]^{-1} = x_2^*.$$

16. 设  $I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx, n = 0, 1, \dots$ , 验证  $I_0 = 1 - e^{-1}, I_n = 1 - nI_{n-1}$ . 若  $e^{-1} \approx 0.3679$ , 依次计算  $I_0, I_1, \dots, I_9$ , 并证明误差是逐次递增的, 且  $I_9$  严重失真.

## 五、习题解答

$$\begin{aligned} 1. \text{ 解 } \ln x - \ln x^* &= \ln \frac{x}{x^*} = \ln \frac{x - x^* + x^*}{x^*} \\ &= \ln(\delta + 1) \approx \delta. \end{aligned}$$

$$\text{另解: } e(\ln x) \approx \frac{1}{x}(x - x^*) = e(x) = \delta.$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ 解 } e(x^n) &\approx nx^{n-1}(x - x^*), \\ e_r(x^n) &\approx n \frac{x^{n-1}(x - x^*)}{x^n} = n \frac{x - x^*}{x^*} \\ &= ne_r(x) = 0.02n. \end{aligned}$$

3. 解  $x_1^* = 1.1021$  有 5 位有效数字;  $x_2^* = 0.031$  有 2 位有效数字;  $x_3^* = 385.6$  有 4 位有效数字;  $x_4^* = 56.480$  有 5 位有效数字;  $x_5^* = 7 \times 1.0$  有 1 位有效数字.

$$\begin{aligned} 4. \text{ 解 } (1) \quad e^*(x_1^* + x_2^* + x_4^*) &\leq e(x_1^*) + e(x_2^*) + e(x_4^*) \\ &= \frac{1}{2} \times 10^{-4} + \frac{1}{2} \times 10^{-3} + \frac{1}{2} \times 10^{-3} \\ &\leq 1.05 \times 10^{-3} = \epsilon^*. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad e^*(x_1^* \cdot x_2^* \cdot x_3^*) &\approx x_2^* \cdot x_3^* (x_1 - x_1^*) + x_1^* \cdot x_3^* \\ &\quad \cdot (x_2 - x_2^*) + x_1^* \cdot x_2^* (x_3 - x_3^*) \end{aligned}$$

$$\approx 0.215 = \epsilon^* .$$

$$\begin{aligned} (3) e^* (x_2^* / x_1^*) &\leq \left| \frac{1}{x_1^*} (x_2^* - x_2^*) - \frac{x_2^*}{(x_1^*)^2} (x_1^* - x_1^*) \right| \\ &= \left| \frac{x_2^*}{x_1^*} e_r^* (x_2) - \frac{x_2^*}{x_1^*} e_r^* (x_1) \right| \\ &\leq \left| \frac{x_2^*}{x_1^*} \right| [ |e_r^* (x_2)| + |e_r^* (x_1)| ] \\ &= \frac{0.031}{56.480} \left[ \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-3}}{0.031} + \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-3}}{56.480} \right] \\ &\leq 10^{-5} = \epsilon^* . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \text{ 解 } e^* (V) &= \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi R^{*3}}{\frac{4}{3} \pi R^3} \\ &\approx \frac{R - R^*}{R} \cdot \frac{R^2 + R^* R + R R^*}{R^2} \\ &= \frac{R - R^*}{R} \cdot \frac{3 R^2}{R^2} = \frac{R - R^*}{R} \cdot 3 = 1\% . \end{aligned}$$

故

$$\frac{R - R^*}{R} = \frac{1}{300} .$$

$$6. \text{ 解 } \quad \text{设 } Y = \sqrt{783}, Y^* = 27.983,$$

$$\delta = |Y - Y^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3} ,$$

$$Y_0 = 28, \quad Y_0^* = 28, \quad \delta_0 = |Y_0 - Y_0^*| = 0 .$$

$$\begin{aligned} |Y_1 - Y_1^*| &= \left| \left[ 28 - \frac{1}{100} \sqrt{783} \right] - \left[ 28 - \frac{1}{100} \times 27.983 \right] \right| \\ &\leq \frac{1}{100} \delta , \end{aligned}$$

$$|Y_2 - Y_2^*| = \left| \left[ Y_1 - \frac{1}{100} \times \sqrt{783} \right] \right|$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ Y_1^* - \frac{1}{100} \times 27.983 \right] | \\
& = | (Y_1 - Y^*) - \frac{1}{100} (Y_1 - Y^*) | \\
& \leq \frac{1}{100} \delta + \frac{1}{100} \delta = \frac{2}{100} \delta.
\end{aligned}$$

仿此可得

$$|Y_n - Y_n^*| \leq \frac{n}{100} \delta.$$

则  $|Y_{100} - Y_{100}^*| \leq \frac{100}{100} \delta = \delta = \frac{1}{2} \times 10^{-3}.$

即计算  $Y_{100}$  的误差限不超过  $\frac{1}{2} \times 10^{-3}.$

7. 解 解方程  $x^2 - 56x + 1 = 0$  得

$$x = \frac{56 \pm \sqrt{56^2 - 4}}{2} = 28 \pm \sqrt{\frac{3132}{4}} = 28 \pm \sqrt{783}.$$

由第 6 题知  $\sqrt{783} \approx 27.983$  具有 5 位有效数字, 故可取

$$x_1 = 28 + \sqrt{783} \approx 28 + 27.983 = 55.983,$$

$$x_2 = 28 - \sqrt{783} = \frac{1}{28 + \sqrt{783}} \approx \frac{1}{55.983} = 0.01786.$$

8. 解 因  $\int_N^{N+1} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(N+1) - \arctan N$ , 当  $N$  充

分大时,  $\arctan(N+1)$  与  $\arctan N$  是两个相近的数, 应避免直接相减, 故选取算法如下:

$$\begin{aligned}
\int_N^{N+1} \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan(N+1) - \arctan N \\
&= \arctan \frac{1}{1 + N(N+1)}.
\end{aligned}$$

9. 解 设正方形的边长为  $x$ , 则其面积为  $y = x^2$ . 由题设知  $x$  的近似值  $x^* = 100\text{cm}$ . 记  $y^*$  为  $y$  的近似值, 则依 (1.5) 式知

$$e(y^*) = y^* - y = (x^2)'|_{x=x^*} (x^* - x)$$

$$= 2x^*(x^* - x) = 200(x^* - x).$$

又由题意知,

$$\epsilon(y^*) \approx 200\epsilon(x^*) \leq 1,$$

故

$$\epsilon(x^*) \leq \frac{1}{200} = 0.005(\text{cm}).$$

10. 解  $e(s) = s - s^* = gt(t - t^*) = gte(t),$

$$e_r(s) = \frac{s - s^*}{s} = \frac{gt(t - t^*)}{s} = \frac{2e(t)}{t}.$$

由上述  $s$  的绝对误差  $e(s)$  与其相对误差  $e_r(s)$  的表达式易知, 当  $t$  增加时,  $e(s)$  增, 而  $e_r(s)$  减少.

11. 解 因  $s = ld$ , 故  $\frac{\partial s}{\partial l} = d, \frac{\partial s}{\partial d} = l$ , 由(1.6)式知

$$\epsilon(s^*) \approx \left| \left[ \frac{\partial s}{\partial l} \right]^* \right| \epsilon(l^*) + \left| \left[ \frac{\partial s}{\partial d} \right]^* \right| \epsilon(d^*),$$

其中  $\left[ \frac{\partial s}{\partial l} \right]^* = d^* = 3.12, \left[ \frac{\partial s}{\partial d} \right]^* = l^* = 4.32, \epsilon(l^*) = \epsilon(d^*) =$

0.01, 于是误差限

$$\epsilon(s^*) = (3.12 + 4.32) \times 0.01 = 0.0744(\text{m}^2),$$

相对误差限

$$\epsilon_r(s^*) = \frac{\epsilon(s^*)}{|s^*|} = \frac{\epsilon(s^*)}{l^* d^*} = \frac{0.0744}{13.4784} \approx 0.55\%.$$

12. 解 因  $y_0 = \sqrt{2}, y_0^* = 1.41$ , 而

$$|y - y_0^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} = \delta,$$

于是有

$$|y_1 - y_1^*| = |10y_0 - 1 - 10y_0^* + 1| = 10|y_0 - y_0^*| \leq 10\delta,$$

$$|y_2 - y_2^*| = |10y_1 - 1 - 10y_1^* + 1| = 10|y_1 - y_1^*| \leq 10^2\delta.$$

类推有,

$$|y_{10} - y_{10}^*| \leq 10^{10}\delta.$$

即计算到  $y_{10}$ , 其误差限为  $10^{10}\delta$ , 亦即若在  $y_0$  处有误差限为  $\delta$ , 则

$y_0$  的误差限将扩大  $10^{10}$  倍, 可见这个计算过程是不稳定的.

13. 解  $(\sqrt{2}-1)^6 = 0.0050506\dots$ . 取  $\sqrt{2} \approx 1.4$ .

$$(1) \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6} \approx \frac{1}{(1.4+1)^6} = \frac{1}{2.4^6} \approx 0.0052328.$$

$$(2) (3-2\sqrt{2})^3 \approx (3-2 \times 1.4)^3 \approx 0.008.$$

$$(3) \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3} \approx \frac{1}{(3+2.8)^3} \approx 0.0051253.$$

$$(4) 99-70\sqrt{2} \approx 99-70 \times 1.4 = 1.$$

经比较知, 以  $\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$  计算得到的结果最好.

另解: 令  $x = \sqrt{2}$ , 取  $x$  的近似值为  $x^* = 1.4$ , 则所给 5 个算式可分别看作

$$f(x) = (x-1)^6, \quad f_1(x) = (x+1)^{-6}, \quad f_2(x) = (3-2x)^3 \\ f_3(x) = (3+2x)^{-3}, \quad f_4(x) = 99-70x.$$

$$\text{而} \quad |x - x^*| = |\sqrt{2} - 1.4| \leq 0.02 = \epsilon,$$

由 (1.4) 知

$$\begin{aligned} \epsilon f(x^*) &\approx |f'(x^*)(x-x^*)| \leq 6(x^*-1)^5 \epsilon \leq 0.062\epsilon, \\ \epsilon f_1(x^*) &\approx |f'_1(x^*)(x-x^*)| \leq 6(x^*+1)^{-7} \epsilon \leq 0.014\epsilon, \\ \epsilon f_2(x^*) &\approx |f'_2(x^*)(x-x^*)| \leq 6(3-2x^*)^2 \epsilon \leq 0.24\epsilon, \\ \epsilon f_3(x^*) &\approx |f'_3(x^*)(x-x^*)| \leq 6(3+2x^*)^{-4} \epsilon \\ &\leq 0.00531\epsilon, \end{aligned}$$

$$\epsilon f_4(x^*) \approx |f'_4(x^*)(x-x^*)| \leq 70\epsilon,$$

由此可见, 用  $\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$  计算时误差最小.

14. 解 设  $y = x - \sqrt{x^2-1}$ , 则  $f(y) = \ln y$ . 由 (1.4) 及 (1.5) 式知

$$e(f^*) = \frac{1}{y^*}(y^* - y), \quad \epsilon(f^*) \approx \frac{1}{|y^*|} |y^* - y|.$$

而由题意知  $|y^* - y| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$ ,  $|y^*| = 0.0167$ , 所以

$$\epsilon(f^*) \approx \frac{|y^* - y|}{|y^*|} \leq \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-4}}{0.0167} \approx 0.3 \times 10^{-2}.$$

若用等价公式  $\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  计算  
则  $|y^*| = 59.9833$ , 故

$$\epsilon(f^*) \approx \frac{|y^* - y|}{|y^*|} \leq \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-4}}{59.9833} \approx 0.834 \times 10^{-6}.$$

15. 解 方法 1 的误差由 Taylor 展开可得,

$$|e^{-5} - x_1^*| \leq \frac{e^{\xi}}{10!} \times 5^{10}, \quad -5 < \xi < 0.$$

而方法 2 的误差是

$$\begin{aligned} |e^{-5} - x_2^*| &= \left| \left( \sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!} + \frac{e^{\eta}}{10!} \times 5^{10} \right)^{-1} - \left( \sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!} \right)^{-1} \right| \\ &= \frac{\frac{e^{\eta}}{10!} \times 5^{10}}{\left( \sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!} + \frac{e^{\eta}}{10!} \times 5^{10} \right) \left( \sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!} \right)} \\ &= \frac{\frac{5^{10}}{10!} e^{\eta}}{e^5 \left( \sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!} \right)} = \frac{\frac{5^{10}}{10!} e^{\eta-5}}{\sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!}}, \quad -5 < \eta - 5 < 0. \end{aligned}$$

由此可知方法 2 的误差是方法 1 误差的  $1 / \sum_{i=0}^9 \frac{5^i}{i!} \approx \frac{1}{143.7}$  倍, 故方法 2 给出了较准确的近似值.

16. 解  $I_0 = \int_0^1 x^{-1} dx = 1 - e^{-1}$ , 对  $I_n$  用分部积分法得

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^n e^{x^{-1}} dx = x^n e^{x^{-1}} \Big|_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^{x^{-1}} dx \\ &= 1 - n I_{n-1}. \end{aligned}$$

由所给公式按 4 位有效数字计算  $I_n^*$  ( $n = 0, 1, \dots, 9$ ), 得

$$\begin{aligned} I_0 &= 1 - e^{-1} \approx 0.6321 = I_0^*, I_1^* = 0.3679, \\ I_2^* &= 0.2642, I_3^* = 0.2074, I_4^* = 0.1704, \\ I_5^* &= 0.1480, I_6^* = 0.1120, I_7^* = 0.2160, \\ I_8^* &= -0.7280, I_9^* = 7.552. \end{aligned}$$

误差  $\epsilon_n = I_n - I_n^*$ , 其中  $I_n^* = 1 - nI_{n-1}^*$ , 于是

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= I_n - I_n^* = -n(I_{n-1} - I_{n-1}^*) = \dots \\ &= (-1)^n n! (I_0 - I_0^*) = (-1)^n n! \epsilon_0 \end{aligned}$$

当  $n$  增大时  $\epsilon_n$  是递增的, 且  $I_9^*$  的误差达到  $-9! \epsilon_0$ , 是严重失真的. 事实上, 容易看到

$$\begin{aligned} \frac{e^{-1}}{n+1} &= e^{-1} \left( \min_{0 \leq x \leq 1} e^x \right) \int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq e^{-1} \left( \max_{0 \leq x \leq 1} e^x \right) \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

即  $0.1e^{-1} \leq 0.03680 \leq I_9 \leq 0.1$ .

而  $I_9^* = 7.552$ , 却严重失真.

## 第二章 插值法

### 一、内容提要

插值法是广泛应用于理论研究和工程实际的重要数值方法。众所周知,反映自然规律的数量关系的函数有三种表示法:解析法、图像法和表格法。大量实际问题中的函数关系是用表格法给出的,如观测或实验而得到的函数数据表格。从提供的部分离散的函数值去进行理论分析和设计都是极不方便甚至是不可能的,因此需要设法寻找与已知函数值相符而形式简单的插值函数。另外一种情况是,函数表达式虽已给定,但计算复杂,因此也需要根据一些函数值找出既反映原函数特征,又便于计算的简单函数去近似原函数。

#### 1. 插值概念

设函数  $y = f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有定义,且已知在点  $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$  上的值  $y_0, y_1, \cdots, y_n$ , 若存在一简单函数  $P(x)$ , 有

$$P(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

成立,就称  $P(x)$  为  $f(x)$  的插值函数,点  $x_0, x_1, \cdots, x_n$  称为插值节点,包含插值节点的区间  $[a, b]$  称为插值区间,求插值函数  $P(x)$  的方法称为插值法。

若插值函数  $P(x)$  是次数不超过  $n$  的代数多项式,即

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

其中  $a_i$  为实数,就称  $P(x)$  为插值多项式。相应的插值法称为多项式插值;若  $P(x)$  为分段的多项式,就称为分段插值;若  $P(x)$  为三

角多项式,就称为三角插值,等等.

## 2. 插值多项式的存在与唯一性

**定理 2.1** 给定  $n+1$  个互异的点  $x_0, x_1, \dots, x_n$  和  $n+1$  个函数值  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , 则在次数不高于  $n$  的代数多项式集合中, 存在

唯一一个插值多项式  $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  满足条件  $P(x_i) = y_i (i=0, 1, \dots, n)$ .

不少实际问题不但要求插值函数在节点上与给定的函数值相等, 而且还要求它的导数值也与给定的导数值相等, 甚至要求高阶导数值也相等, 满足这种要求的插值多项式称为 **Hermite**(埃尔米特)插值多项式.

**定理 2.2** 设  $n+1$  个节点  $x_0, x_1, \dots, x_n$  互异, 则在次数不高于  $m+n+1$  的代数多项式集合中, 存在唯一多项式  $P_{m+n+1}(x) =$

$\sum_{i=0}^{m+n+1} a_i x^i$  满足条件

$$\begin{cases} P_{m+n+1}(x_i) = y_i, & i = 0, 1, \dots, n, \\ P'_{m+n+1}(x_{i_k}) = y'_{i_k}, & k = 0, 1, \dots, m. \end{cases}$$

## 3. Lagrange(拉格朗日)插值多项式

给定  $n+1$  个互异节点  $x_i$  上的值  $y_i (i=0, 1, \dots, n)$ , 构造次数不超过  $n$  的多项式  $L_n(x)$ , 使  $L_n(x_i) = y_i (i=0, 1, \dots, n)$ , 则有

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x), \quad (2.1)$$

其中 
$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad (2.2)$$

且 
$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad \sum_{i=0}^n l_i(x) = 1.$$

称(2.1)式为 **Lagrange**插值多项式, (2.2)式为 **Lagrange**插值基函数.

$n=1$  时,

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1;$$

$n = 2$  时,

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2.$$

#### 4. Newton(牛顿) 插值多项式

(1) 差商

**定义 2.1** 称  $f[x_0, x_k] = \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$  为函数  $f(x)$  关于

点  $x_0, x_k$  的一阶差商;  $f[x_0, x_1, x_k] = \frac{f[x_0, x_k] - f[x_0, x_1]}{x_k - x_1}$  称为

$f(x)$  关于点  $x_0, x_1, x_k$  的二阶差商; 一般地, 称

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$

为  $f(x)$  关于点  $x_0, x_1, \dots, x_k$  的  $k$  阶差商.

差商的性质:

1)  $k$  阶差商可表为函数值  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_k)$  的线性组合, 即

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] \\ = \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}.$$

2) 差商具有对称性, 即

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_1, x_0, \dots, x_n] = \cdots = f[x_1, x_2, \dots, x_n, x_0].$$

3) 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上存在  $n$  阶导数, 且节点  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ , 则  $n$  阶差商与导数关系如下:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [a, b].$$

注: 由差商的性质 2) 及定义知, 有

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

## (2) 差分

设函数  $y = f(x)$  在等距节点  $x_k = x_0 + kh$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) 上的值  $f_k = f(x_k)$  为已知, 这里  $h$  为常数, 称为步长.

**定义 2.2** 记号

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k,$$

$$\nabla f_k = f_k - f_{k-1},$$

$$\delta f_k = f\left(x_k + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_k - \frac{h}{2}\right) = f_{k+\frac{1}{2}} - f_{k-\frac{1}{2}}$$

分别称为  $f(x)$  在  $x_k$  处以  $h$  为步长的向前差分、向后差分及中心差分, 符号  $\Delta$ 、 $\nabla$ 、 $\delta$  分别称为向前差分算子、向后差分算子及中心差分算子.

除了已引入的差分算子外, 常用的算子符号还有不变算子  $I$  及移位算子  $E$ , 定义如下:

$$If_k = f_k, \quad Ef_k = f_{k+1}.$$

差分的性质:

1) 各阶差分均可用函数值表示. 如

$$\Delta^n f_k = \sum_{j=0}^n (-1)^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} f_{n+k-j},$$

$$\nabla^n f_k = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} f_{k+j-n},$$

其中  $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}$  为二项展开式的系数.

2) 可用各阶差分表示函数值. 如

$$f_{n+k} = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \Delta^j f_k.$$

3) 差商与差分有关系:

$$f[x_k, \dots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!} \frac{1}{h^m} \Delta^m f_k, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

$$f[x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-m}] = \frac{1}{m!} \frac{1}{h^m} \nabla^m f_k, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

4) 差分与导数有关系:

$$\nabla^n f_k = h^n f^{(n)}(\xi), \quad \xi \in (x_k, x_{k+1}).$$

(3) Newton 插值多项式

给定  $n+1$  个互异节点  $x_i$  上的值  $y_i (i=0, 1, \dots, n)$ , 构造次数不超过  $n$  的多项式  $N_n(x)$ , 使  $N_n(x_i) = y_i (i=0, 1, \dots, n)$ .

$$\begin{aligned} N_n(x) = & f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2] \\ & \cdot (x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\ & \cdot (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

称(2.3)式为 **Newton 插值多项式**.

(4) 等距节点的 Newton 前插、后插公式

若节点  $x_k = x_0 + kh (k=0, 1, \dots, n)$   $h = \frac{b-a}{n}$ , 要计算  $x_0$  附近点  $x$  处的函数值  $f(x)$ , 可令  $x = x_0 + th, 0 \leq t \leq 1$ , 于是

$$\prod_{j=0}^k (x - x_j) = t(t-1) \cdots (t-k) h^{k+1},$$

则有

$$\begin{aligned} N_n(x_0 + th) = & f_0 + t \Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots \\ & + \frac{t(t-1) \cdots (t-n+1)}{n!} \Delta^n f_0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

若要计算  $x_n$  附近点  $x$  处的函数值  $f(x)$ , 可先将插值节点按  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_0$  的次序排列, 作变换  $x = x_n + th (-1 \leq t \leq 0)$ , 再应用 Newton 插值公式(2.3), 则有

$$\begin{aligned} N_n(x_n + th) = & f_n + t \nabla f_n + \frac{t(t+1)}{2} \nabla^2 f_n + \dots \\ & + \frac{t(t+1) \cdots (t+n-1)}{n!} \nabla^n f_n. \end{aligned} \quad (2.5)$$

称(2.4)式为 **Newton 前插公式**, (2.5)式为 **Newton 后插公式**.

## 5. Hermite(埃尔米特) 插值多项式

## (1) 两点三次 Hermite 插值

给定数据表:

$x$	$x_k$	$x_{k+1}$
$y = f(x)$	$y_k$	$y_{k+1}$
$y' = f'(x)$	$y'_k$	$y'_{k+1}$

作一个次数不超过三的多项式  $H_3(x)$ , 使  $H_3(x_k) = y_k, H_3(x_{k+1}) = y_{k+1}, H'_3(x_k) = y'_k, H'_3(x_{k+1}) = y'_{k+1}$ , 则有

$$H_3(x) = y_k \alpha_k(x) + y_{k+1} \alpha_{k+1}(x) + y'_k \beta_k(x) + y'_{k+1} \beta_{k+1}(x), \quad (2.6)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_k(x) &= \left[ 1 + 2 \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right] \left[ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \right]^2, \\ \alpha_{k+1}(x) &= \left[ 1 + 2 \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \right] \left[ \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right]^2, \\ \beta_k(x) &= (x - x_k) \left[ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \right]^2, \\ \beta_{k+1}(x) &= (x - x_{k+1}) \left[ \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right]^2. \end{aligned}$$

## (2) 三点三次 Hermite 插值

给定数据表:

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$
$y = f(x)$	$y_0$	$y_1$	$y_2$
$y' = f'(x)$		$y'_1$	

作一个次数不超过三的多项式  $H_3(x)$ , 使

$$H_3(x_0) = y_0, \quad H_3(x_1) = y_1, \quad H_3(x_2) = y_2, \quad H'_3(x_1) = y'_1,$$

则有

$$\begin{aligned}
 H_3(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\
 &\quad + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
 &\quad + A(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

其中

$$A = \frac{y'_1 - f[x_0, x_1] - (x_1 - x_0)f[x_0, x_1, x_2]}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

(3)  $n+1$  个节点的  $2n+1$  次 Hermite 插值

给定数据表:

$x$	$x_0$	$x_1$	$\cdots$	$x_n$
$y = f(x)$	$y_0$	$y_1$	$\cdots$	$y_n$
$y' = f'(x)$	$y'_0$	$y'_1$	$\cdots$	$y'_n$

作一个次数不超过  $2n+1$  的多项式  $H_{2n+1}(x)$ , 使  $H_{2n+1}(x_i) = y_i$ ,  $H'_{2n+1}(x_i) = y'_i$ , 则有

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n [y_i \alpha_i(x) + y'_i \beta_i(x)],$$

其中

$$\alpha_i(x) = \left[ 1 - 2(x - x_i) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_j} \right] l_i^2(x),$$

$$\beta_i(x) = (x - x_i) l_i^2(x),$$

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

## 5. 插值余项

**定理 2.3** 设  $f^{(n)}(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f^{(n+1)}(x)$  在  $(a, b)$  内存在, 节点  $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ ,  $L_n(x)$  是满足条件  $L_n(x_i) = y_i$  ( $i = 0, 1, \cdots, n$ ) 的插值多项式, 则对任何  $x \in [a, b]$ , 插值余项

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \quad (2.8)$$

其中  $\xi \in (a, b)$  且依赖于  $x$ ,  $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ .

**定理 2.4** 设  $f^{(2n+1)}(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f^{(2n+2)}(x)$  在  $(a, b)$  内存在, 节点  $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ ,  $H_{2n+1}(x)$  是满足条件  $H_{2n+1}(x_i) = y_i$ ,  $H'_{2n+1}(x_i) = y'_i (i = 0, 1, \cdots, n)$  的插值多项式, 则对任何  $x \in [a, b]$ , 插值余项

$$R_n(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega_{n+1}^2(x), \quad (2.9)$$

其中  $\xi \in (a, b)$  且依赖于  $x$ ,  $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ .

若可以求出  $\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| = M$ , 则用插值多项式  $L_n(x)$  逼近  $f(x)$  的截断误差限

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)| \quad (2.10)$$

$$\text{或} \quad |R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} |\omega_{n+1}(x)|. \quad (2.11)$$

## 6. 分段低次插值

### (1) 高次插值的 Runge(龙格)现象

对  $f(x)$  做插值多项式  $L_n(x)$ , 不一定  $L_n(x)$  的次数越高逼近  $f(x)$  的精度就越高. Runge 给出了一个等距节点插值多项式  $L_n(x)$  不收敛到  $f(x)$  的例子.

例如, 设  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $x \in [-5, 5]$ . 在  $[-5, 5]$  上取  $n+1$  个等距节点  $x_k = -5 + 10 \frac{k}{n} (k = 0, 1, \cdots, n)$  所构造的 Lagrange 插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{1+x_i^2} l_i(x),$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $L_n(x)$  只在  $|x| \leq 3.63$  内收敛于  $f(x)$ , 而在这区间外是发散的. 图 2.1 显示了这种现象.

为避免出现这种令人失望的 Runge 现象,人们常常采用分段低次插值,它所得的插值多项式虽不及 Lagrange 插值多项式光滑,却具有次数低和避免“Runge 现象”等优点.

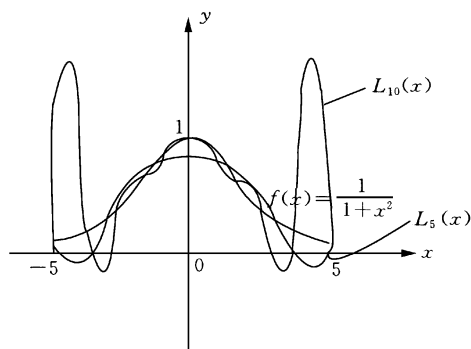


图 2.1

## (2) 分段线性插值

分段线性插值就是过插值点用折线段逼近

$f(x)$ . 设已知节点  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  上的函数值  $f_0, f_1, \dots, f_n$ , 记  $h_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $h = \max_i h_i$ , 若折线函数  $I_h(x)$  满足:

- 1)  $I_h(x) \in C[a, b]$ ;

- 2)  $I_h(x_i) = f_i (i = 0, 1, \dots, n)$ ;

3)  $I_h(x_i)$  在每个小区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上是线性函数.  $I_h(x)$  称为分段线性插值函数.

当  $x \in [a, b]$  时,

$$I_h(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x), \quad (2.12)$$

其中基函数  $l_i(x)$  满足条件  $l_i(x_k) = \delta_{ik} (i, k = 0, 1, \dots, n)$ , 其形式是

$$l_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i (i = 0 \text{ 略去}), \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} (i = n \text{ 略去}), \\ 0, & x \in [a, b], x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases}$$

分段线性插值基函数  $l_i(x)$  只在  $x_i$  附近不为零, 在其它地方均为零, 这种性质称为局部非零性质. 正是因为基函数的这种局

部非零性,故分段线性插值的数值计算过程是稳定的.

当  $f(x) \in C[a, b]$  时,有

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_h(x) = f(x)$$

在  $[a, b]$  上一致成立,故  $I_h(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $f(x)$ .

分段线性插值函数的光滑性太差. 一种比较光滑的插值函数是

### (3) 分段三次 Hermite 插值

为了构造一个导数连续的分段插值函数  $I_h(x)$ ,除了在节点  $x_i (i=0, 1, \dots, n)$  上给出函数值  $f_i$  外,还给出导数值  $f'_i (i=0, 1, \dots, n)$ ,  $I_h(x)$  满足:

1)  $I_h(x) \in C^1[a, b]$  ( $C^1[a, b]$  代表区间  $[a, b]$  上一阶导数连续的函数集合);

2)  $I_h(x_i) = f_i, I'_h(x_i) = f'_i (i=0, 1, \dots, n)$ ;

3)  $I_h(x)$  在每个小区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上是三次多项式.

$I_h(x)$  称为分段三次 Hermite 插值函数.

当  $x \in [a, b]$  时,

$$I_h(x) = \sum_{i=0}^n [f_i \alpha_i(x) + f'_i \beta_i(x)], \quad (2.13)$$

其中  $\alpha_i(x)$ 、 $\beta_i(x)$  分别为

$$\alpha_i(x) = \begin{cases} \left[ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right]^2 \left[ 1 + 2 \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \right], & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \left[ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right]^2 \left[ 1 + 2 \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right], & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \left[ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right]^2 (x - x_i), & x_{i-1} \leq x \leq x_i (i=0 \text{ 略去}), \\ \left[ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right]^2 (x - x_i), & x_i \leq x \leq x_{i+1} (i=n \text{ 略去}), \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

从上述表达式易知基函数  $\alpha(x)$ 、 $\beta(x)$  具有局部非零性. 由于这种局部非零性, 所以分段三次 Hermite 插值的数值计算是稳定的, 当  $f(x) \in C[a, b]$  时, 有  $\lim_{h \rightarrow 0} I_h(x) = f(x)$ , 即  $I_h(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛到  $f(x)$ .

分段三次 Hermite 插值需要提供节点处的导数值, 且只能保证插值函数一阶导函数连续, 因此还需对此问题再做进一步的改进. 于是提出了三次样条插值.

## 7. 三次样条插值

样条插值是用分段低次多项式去逼近被逼近函数, 并且能满足对光滑性的要求, 又无需给出每个节点处的导数值. 它除了要求给出各个节点处的函数值之外, 只需提供两个边界节点处的导数信息.

给定数据:

$$x: \quad a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b,$$

$$y = f(x): \quad y_0 \quad y_1 \quad \cdots \quad y_n.$$

构造一个函数  $S(x)$ , 使其满足下面三个条件:

1)  $S(x)$ 、 $S'(x)$ 、 $S''(x)$  在  $[a, b]$  上连续;

2)  $S(x)$  在每个子区间  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ) 上是不高于三次的多项式;

3)  $S(x_i) = y_i$  ( $i = 0, 1, \cdots, n$ ).

满足条件 1) 和 2) 的函数称为节点  $x_0, x_1, \cdots, x_n$  上的三次样条函数, 还满足条件 3) 的函数称为三次样条插值函数.

(1) 边界条件的常见类型

1° 第一种边界条件

给定端点处的一阶导数, 即  $S'(x_0) = y'_0$ ,  $S'(x_n) = y'_n$ .

2° 第二种边界条件

给定端点处的二阶导数, 即  $S''(x_0) = y''_0$ ,  $S''(x_n) = y''_n$ .

作为特例,  $S'(x_0) = S'(x_n) = 0$  称为自然边界条件, 满足自然边界条件的样条函数称为自然样条函数.

### 3° 第三种边界条件

当  $y = f(x)$  是以  $b - a$  为周期的周期函数时, 则要求  $S(x)$  也是周期函数, 这时的边界条件可以写成

$$\begin{aligned} S(x_0 + 0) &= S(x_n - 0), \\ S'(x_0 + 0) &= S'(x_n - 0), \\ S''(x_0 + 0) &= S''(x_n - 0). \end{aligned}$$

注: 由于  $y = f(x)$  以  $b - a$  为周期, 故  $f(a) = f(b)$ , 即  $y_0 = y_n$ , 从而必有  $S(x_0 + 0) = S(x_n - 0)$ , 因此, 在第三种边界条件中, 真正起作用的是后面的两个等式.

### (2) 三次样条插值函数的求法

#### 1° 利用节点处的一阶导数来表示三次样条插值函数

假设在区间  $[a, b]$  上三次样条函数  $S(x)$  存在,  $S(x)$  在节点  $x_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$  的导数值为  $m_i$ , 即  $S'(x_i) = m_i (i = 0, 1, \dots, n)$ . 由  $S(x_i) = y_i (i = 0, 1, \dots, n)$ , 则由分段三次 Hermite 插值公式(2.13)可得

$$S(x) = \sum_{i=0}^n [y_i \alpha_i(x) + m_i \beta_i(x)]. \quad (2.14)$$

实际上  $m_i (i = 0, 1, \dots, n)$  是未知的, 但是  $m_i$  的值可由条件

$$S''(x_i + 0) = S''(x_i - 0) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.15)$$

及两个边界条件来确定.

由条件(2.15)得

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = g_i \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad (2.16)$$

其中 
$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i}, \quad \mu_i = 1 - \lambda_i, \quad (2.17)$$

$$g_i = 3(\lambda_i f[x_{i-1}, x_i] + \mu_i f[x_i, x_{i+1}]), \quad h_i = x_{i+1} - x_i.$$

方程(2.16)称为**三转角方程**.

再加上两个边界条件即可得关于  $n+1$  个变量  $m_i (i = 0, 1, \dots, n)$  的  $n+1$  个方程. 即

在第一种边界条件下, 有

$$\begin{cases} \lambda_i m_{i+1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = g_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ m_0 = y'_0, \\ m_n = y'_n; \end{cases} \quad (2.18)$$

在第二种边界条件下,有

$$\begin{cases} \lambda_i m_{i+1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = g_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ 2m_0 + m_1 = 3f[x_0, x_1] = g_0, \\ m_{n-1} + 2m_n = 3f[x_{n-1}, x_n] = g_n; \end{cases} \quad (2.19)$$

在第三种边界条件下,有

$$\begin{cases} \lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = g_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ m_0 = m_n, \\ \mu_n m_1 + \lambda_n m_{n-1} + 2m_n = g_n, \end{cases} \quad (2.20)$$

其中 
$$\mu_n = \frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}, \quad \lambda_n = \frac{h_0}{h_0 + h_{n-1}},$$

$$g_n = 3(\mu_n f[x_0, x_1] + \lambda_n f[x_{n-1}, x_n]).$$

通过解方程(2.18)或(2.19)或(2.20)即可得到  $m_i (i = 0, 1, \dots, n)$ , 然后代入式(2.14), 就得到所求  $S(x)$ .

2° 利用节点处的二阶导数来表示三次样条插值函数

假设在区间  $[a, b]$  上三次样条函数  $S(x)$  存在,  $S(x)$  在节点  $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$  的二阶导数值为  $M_i$ , 即  $S''(x_i) = M_i$ . 由于  $S(x)$  在区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上是三次多项式, 故  $S''(x)$  在  $[x_i, x_{i+1}]$  上是线性函数, 可表示为

$$S''(x) = M_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}.$$

对  $S''(x)$  积分两次并利用  $S(x_i) = y_i$  及  $S(x_{i+1}) = y_{i+1}$ , 可定出积分常数, 于是得

$$\begin{aligned} S(x) &= M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} \\ &+ \left[ y_i - \frac{M_i h_i^2}{6} \right] \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + \left[ y_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6} \right] \frac{x - x_i}{h_i}, \\ &i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

此处  $M_i (i = 0, 1, \dots, n)$  是未知的,  $M_i$  的值可由条件

$$S'(x_i + 0) = S'(x_i - 0) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.22)$$

及两个边界条件来确定.

由条件(2.22)得

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (2.23)$$

其中  $\mu_i, \lambda_i$  由(2.17)所示, 而

$$d_i = 6 \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]}{h_{i-1} + h_i} = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}].$$

再加上两个边界条件就可得到求  $M_i (i = 0, 1, \dots, n)$  的  $n+1$  个方程.

通常称方程(2.23)为**三弯矩方程**, 求出  $M_i$ , 代入(2.21)式即得所求  $S(x)$ .

## 二、基本要求

通过本章学习, 能够利用插值法构造符合要求的近似函数, 或计算出某函数的近似函数值, 并对某些问题能做一定的理论分析. 具体要求如下:

- 1) 掌握多项式插值公式的存在唯一性条件及其余项表达式的推导.
- 2) 掌握 Lagrange 插值多项式及其基函数的性质.
- 3) 会构造 Newton 插值多项式, 掌握差商、差分的计算过程及有关性质.
- 4) 能论述高次与分段低次多项式插值的收敛性和稳定性, 并能构造分段线性插值及分段二点三次 Hermite 插值.
- 5) 理解三次样条函数及三次样条插值函数的定义及其构造方法.

## 三、例题选讲

**例 1** 求经过  $A(0, 1), B(1, 2), C(2, 3)$  三个样点的插值多项式.

**解** 由题意可知,三个插值节点及对应的函数值为

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2,$$

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 3.$$

由 Lagrange 二次插值公式得

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 \\ &\quad + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 \\ &= \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} \times 1 + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} \times 2 \\ &\quad + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \times 3 = x+1. \end{aligned}$$

**例 2** 已知函数  $y = f(x)$  的数据如下表.

$i$	0	1	2	3
$x_i$	0	1	2	3
$y_i = f(x_i)$	1	3	9	27

试作一个三次插值多项式  $P_3(x)$ , 利用  $P_3(x)$  计算  $\sqrt{3}$ .

**解** 利用 Newton 插值公式:

$$\begin{aligned} N_3(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad \cdot (x-x_0)(x-x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x-x_0) \\ &\quad \cdot (x-x_1)(x-x_2), \end{aligned}$$

为此先作差商表(表 2.1).

**表 2.1 差商表**

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	差 商		
			$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
0	0	1			
1	1	3	2		
2	2	9	6	2	
3	3	27	18	6	$\frac{4}{3}$

故

$$\begin{aligned}P_3(x) &= N_3(x) = 1 + 2x + 2x(x-1) \\&\quad + \frac{4}{3}x(x-1)(x-2) \\&= 1 + 2x + 2x^2 - 2x + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + \frac{8}{3}x \\&= \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x + 1.\end{aligned}$$

由差商表知,  $f(x) = 3^x$ , 而  $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ , 故令  $x = \frac{1}{2}$ , 即得

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &\approx P_3\left(\frac{1}{2}\right) \\&= \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8}{3} \times \frac{1}{2} + 1 = 2.\end{aligned}$$

**例 3** 已知函数  $y = f(x)$  的数据如下表.

$i$	0	1	2
$x_i$	-1	0	1
$y_i$	-1	0	1
$y'_i$		0	

求一次数不超过三的 Hermite 插值多项式  $H_3(x)$ , 使  $H_3(x_i) = y_i, (i = 0, 1, 2), H'_3(x_1) = y'_1$ .

**解** 方法 1: 令

$$H_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

由插值条件知:

$$\begin{cases} H_3(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -1, \\ H_3(0) = a_0 = 0, \\ H_3(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1, \\ H'_3(0) = a_1 = 0. \end{cases}$$

解上述线性方程组得,  $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1$ . 故得

$$H_3(x) = x^3.$$

方法 2: 由题意知  $x = 0$  是  $H_3(x)$  的二重零点, 故可令

$$H_3(x) = x^2(ax + b).$$

又由  $H_3(-1) = -1$ ,  $H_3(1) = 1$ , 知

$$\begin{cases} b - a = -1, \\ a + b = 1. \end{cases}$$

解之得  $a = 1, b = 0$ , 故有

$$H_3(x) = x^3.$$

方法 3: 利用数据  $(x_i, y_i) (i = 0, 1, 2)$  可构造一个二次 Newton 插值多项式, 即作差商表 2.2.

表 2.2 差商表

$x_i$	$y_i$	差 商	
		$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
-1	-1		
0	0	1	
1	1	1	0

由 (2.3) 式得

$$N_2(x) = -1 + 1 \cdot (x + 1) + 0 \cdot (x + 1) \cdot x = x.$$

再令  $H_3(x) = N_2(x) + A(x + 1)x(x - 1)$ . 由  $H'_3(0) = 0$ , 得  $A = 1$ , 故

$$H_3(x) = x^3.$$

方法 4: 利用重节点的 Newton 插值多项式构造  $H_3(x)$ . 由差商表 2.3,

表 2.3 差商表

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	差 商		
			$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	-1	-1			
1	0	0	1		
1	0	0	0	-1	
2	1	1	1	1	1

$$H_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_1]$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_1, x_2] \\
& \cdot (x - x_0)(x - x_1)^2 \\
& = -1 + 1 \cdot (x + 1) + (-1) \cdot (x + 1)x \\
& \quad + 1 \cdot (x + 1)x^2 = x^3.
\end{aligned}$$

注: 在重节点  $x_1$  处的差商  $f[x_1, x_1] = f'(x_1)$ .

$$f[x_1, \dots, x_1] = \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!}.$$

$k+1$

**例 4** 已知  $f(x) = \sin x$  的数值表如下, 分别用向前、向后 Newton 插值公式求  $\sin 0.57891$  的近似值. 并估计误差.

$x$	0.4	0.5	0.6	0.7
$\sin x$	0.38942	0.47943	0.56464	0.64422

**解** 作差分表如表 2.4.

**表 2.4 差分表**

$x$	$\sin x$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$
0.4	0.38942	0.09001	0.00480	-0.00083
0.5	0.47943	0.08521	-0.00563	
0.6	0.56464	0.07958		
0.7	0.64422			

使用向前 Newton 插值公式, 取  $x_0 = 0.5, x_1 = 0.6, x_2 = 0.7, x = x_0 + th, h = 0.1$ , 则

$$t = (x - x_0)/h = (0.57891 - 0.5)/0.1 = 0.7891,$$

于是

$$\begin{aligned}
N_2(0.57891) &= f_0 + t\Delta f_0 + t(t-1)\frac{\Delta^2 f_0}{2} \\
&= 0.47943 + 0.7891 \times 0.08521 \\
&\quad + 0.7891 \times (0.7891 - 1) \frac{-0.00563}{2} \\
&= 0.54714,
\end{aligned}$$

故得  $\sin 0.57891 \approx 0.54714$ .

$$\begin{aligned} \text{误差 } R_2(x) &= \frac{0.1^3}{3!} 0.7891(0.7891-1)(0.7891-2) \\ &\quad \cdot (-\cos \xi), \quad 0.5 < \xi < 0.7, \end{aligned}$$

则  $|R_2(x)| \leq 3.36 \times 10^{-5} |\cos 0.5| = 2.95 \times 10^{-5}$ .

若用向后 Newton 插值公式, 则可取  $x_0 = 0.6, x_{-1} = 0.5, x_{-2} = 0.4, x = x_0 + th, t = -0.2109$ . 于是

$$\begin{aligned} N_2(0.57891) &= f_0 + t \nabla f_0 + \frac{t(t+1)}{2} \nabla^2 f_0 \\ &= 0.56464 + (-0.2109) \times 0.08521 \\ &\quad + \frac{(-0.2109)(-0.2109+1)}{2} \times 0.00480 \\ &= 0.54707. \end{aligned}$$

故得  $\sin 0.57891 \approx 0.54707$ .

$$\begin{aligned} \text{误差 } R_2(x) &= \frac{0.1^3}{3!} (-0.2109)(-0.2109+1) \\ &\quad \cdot (-0.2109+2)(-\cos \xi), \quad 0.4 < \xi < 0.6. \end{aligned}$$

则  $|R_2(x)| \leq 4.57 \times 10^{-5}$ .

**例 5** 给定数据表如下.

$x$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$f(x)$	21	25	23	20	21	24

(1) 用三次插值多项式计算  $f(0.7)$  的近似值;

(2) 用二次插值多项式计算  $f(0.95)$  的近似值;

(3) 用分段二次插值计算  $f(x)$  ( $0.2 \leq x \leq 1.2$ ) 的近似值能保证有几位有效数字(不计舍入误差)? 其中已知  $\max_{0.2 \leq x \leq 1.2} |f'''(x)| \leq 600$ .

**解** 由于节点等距, 故可用向前、向后 Newton 插值公式进行计算. 先造差分表如表 2.5.

表 2.5 差分表

$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
21	4	-6	5	0	-7
25	-2	-1	5	-7	
23	-3	4	-2		
20	1	2			
21	3				
24					

(1) 选  $x_1 = 0.4, x_2 = 0.6, x_3 = 0.8, x_4 = 1.0$  为节点, 构造三次向前 Newton 插值多项式

$$\begin{aligned}
 N_3(x_1 + th) &= y_1 + \Delta y_1 t + \frac{\Delta^2 y_1}{2!} t(t-1) \\
 &\quad + \frac{\Delta^3 y_1}{3!} t(t-1)(t-2), \\
 N_3(0.4 + 0.2t) &= 25 - 2t - \frac{1}{2} t(t-1) \\
 &\quad + \frac{5}{6} t(t-1)(t-2).
 \end{aligned}$$

由  $0.4 + 0.2t = 0.7$  解得  $t = 1.5$ , 所以

$$f(0.7) \approx N_3(0.7) = 21.3125.$$

(2) 选  $x_3 = 0.8, x_4 = 1.0, x_5 = 1.2$  为节点, 构造二次向前 Newton 插值多项式,

$$\begin{aligned}
 N_2(x_3 + th) &= y_3 + \Delta y_3 t + \frac{\Delta^2 y_3}{2!} t(t-1), \\
 N_2(0.8 + 0.2t) &= 20 + t + t(t-1).
 \end{aligned}$$

由  $0.8 + 0.2t = 0.95$  解得  $t = 0.75$ , 所以

$$f(0.95) \approx N_2(0.95) = 20.5625.$$

$$(3) \text{ 由 } R_2(x_0 + th) = \frac{f'''(\xi)}{3!} h^3 t(t-1)(t-2),$$

$$0.2 < \xi < 1.2, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

$$\begin{aligned}
\text{有 } |R_2(x_i + 0.2t)| &= \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} 0.2^3 t(t-1)(t-2) \right| \\
&\leq \frac{600}{3!} \times 0.008 \max_{0 \leq t \leq 2} |t(t-1)(t-2)| \\
&= \frac{600}{3!} \times 0.008 \times 0.384900 \\
&= 0.30792 < 0.5.
\end{aligned}$$

$f(x)$  有两位整数, 故能保证有两位有效数字.

**例 6** 现要对平方根表作线性插值, 已知  $10 \leq x \leq 999$ , 步长  $h = 1$ , 试给出按插值求出的  $\sqrt{x}$  的误差限, 并估计有效数字的位数, 假定表上已给的函数值足够精确.

**解** 令  $f(x) = \sqrt{x}$ , 若以  $x_0, x_1$  为表中任意两相邻点, 则作线性插值时的误差为

$$R(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2} f''(\xi) = \frac{1}{2} t(t-1) h^2 f''(\xi),$$

其中  $x_1 = x_0 + h, x = x_0 + th, 0 \leq t \leq 1, x_0 < \xi < x_1$ . 故

$$|R(x)| = \left| \frac{1}{2} t(t-1) h^2 f''(\xi) \right| \leq \frac{1}{2} t(1-t) M h^2,$$

其中  $M = \max |f''(x)|$ .

当  $t \in [0, 1]$  时,

$$t(1-t) \leq \left[ \frac{t+(1-t)}{2} \right]^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{故 } |R(x)| \leq \frac{1}{8} M h^2.$$

因  $|\sqrt{x}|'' = \frac{1}{4x^{3/2}}$ , 分两段讨论  $|R(x)|$ .

(1)  $10 \leq x \leq 100$  时,

$$|\sqrt{x}|'' = \frac{1}{4x^{3/2}} \leq \frac{1}{4 \times 10^{3/2}} \approx 0.0079 = M.$$

截断误差

$$|R(x)| \leq \frac{1}{8} M h^2 = \frac{1}{8} \times 0.0079 \approx 0.00099.$$

由于  $3 \leq \sqrt{x} \leq 10$ , 故  $\sqrt{x}$  可以具有 3 位有效数字.

(2)  $100 \leq x \leq 999$  时,

$$|(\sqrt{x})''| = \frac{1}{4x^{3/2}} \leq \frac{1}{4 \times 100^{3/2}} \approx 0.25 \times 10^{-3} = M.$$

截断误差

$$|R(x)| \leq \frac{1}{8} M h^2 = \frac{1}{8} \times 0.25 \times 10^{-3} = 0.0000313.$$

由于  $10 \leq \sqrt{x} \leq 32$ , 故  $\sqrt{x}$  可以具有 6 位有效数字.

**例 7** 设  $f(x) \in C^2[a, b]$  且  $f(a) = f(b) = 0$ , 求证

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8} (b-a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

**证** 以  $a, b$  为节点进行线性插值, 得

$$P_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

因  $f(a) = f(b) = 0$ , 故  $P_1(x) = 0$ . 而

$$f(x) - P_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x-a)(x-b), \quad a < \xi < b.$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| &\leq \max_{a \leq x \leq b} \frac{|f''(x)|}{2} \left[ \frac{b-a}{2} \right]^2 \\ &= \frac{1}{8} (b-a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|. \end{aligned}$$

**例 8** 设  $f(x) = e^x$ , 在区间  $[0, 1]$  上给出  $f$  的  $n+1$  个等距节点  $x_i$  处的函数值表, 这时

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1, \quad x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

(1) 若依据所给函数表用线性插值求  $e^x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) 的近似值, 使绝对误差不超过  $\frac{1}{2} \times 10^{-6}$ , 问  $n$  应取多大?

(2) 每个数值表值  $f(x_i)$  应取几位有效数字?

**解** (1) 由于  $x \in [0, 1]$ , 故必有一个  $i (1 \leq i \leq n)$ , 使得  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ . 如果  $p_1(x)$  是  $f(x)$  在  $[x_{i-1}, x_i]$  上的线性插值多项式, 且用  $p_1(x)$  的值作为  $f(x) = e^x$  的近似值. 那么从

$$|R_1(x)| \leq \frac{1}{2!} \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} |(x - x_{i-1})(x - x_i)|$$

及

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} e^x \leq e,$$

$$\max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} |(x - x_{i-1})(x - x_i)| \leq \frac{1}{4} (x_i - x_{i-1})^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{n^2},$$

可得

$$|R_1(x)| \leq \frac{1}{2!} e \cdot \frac{1}{4n^2} = \frac{e}{8n^2}.$$

于是, 欲使绝对误差不超过  $\frac{1}{2} \times 10^{-6}$ , 只须

$$\frac{e}{8n^2} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-6},$$

由此可取  $n \geq 825$ . 造表时一种合适的选取是  $n = 1000$ , 这时节点间距(也称步长)

$$h = x_i - x_{i-1} = 0.001 (1 \leq i \leq n).$$

(2) 因为  $0 \leq x \leq 1$  时,  $1 \leq e^x \leq e$ , 所以每个表值  $f(x_i)$  至少应取 7 位有效数字.

**例 9** 给定函数  $f(x)$  的数据表如下.

$x$	0	1
$f(x)$	1	2
$f'(x)$	0	

(1) 构造二次插值多项式  $P_2(x)$ ;

(2) 试根据插值余项确定一个常数  $C$ , 使不等式

$$|f(x) - P_2(x)| \leq C \max_{0 \leq x \leq 1} |f'''(x)|$$

对任意  $x \in [0, 1]$  能保持成立.

**解** (1) 由于在  $x=0$  处有直到一阶导数值的插值条件, 所以它是“二重节点”, 因此, 利用重节点差商公式:

$$\begin{aligned} f[x, x, \dots, x]_{k+1} &= \lim_{x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \rightarrow x} f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x] \\ &= \frac{f^{(k)}(x)}{k!}, \end{aligned}$$

可以作出差商表 2.6.

**表 2.6 差商表**

$x_i$	$f_i$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1		
0	1	0	
1	2	1	1

根据 Newton 插值公式, 插值多项式为

$$P_2(x) = 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 = x^2 + 1.$$

$$(2) \text{ 因 } f(x) - P_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} x^2 (x-1), \xi \in [0, 1],$$

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{1}{3!} \max_{0 \leq x \leq 1} |f'''(x)| \max_{0 \leq x \leq 1} |x^2(x-1)|,$$

而 
$$\max_{0 \leq x \leq 1} |x^2(x-1)| = \frac{4}{27},$$

故 
$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{2}{81} \max_{0 \leq x \leq 1} |f'''(x)|.$$

即 
$$C = \frac{2}{81}.$$

**例 10** 求一个四次插值多项式  $H(x)$ , 使  $x=0$  时,  $H(0)=-1$ ,  $H'(0)=-2$ ; 而  $x=1$  时,  $H(1)=0$ ,  $H'(1)=10$ ,  $H''(1)=40$ . 并写出插值余项的表达式.

**解** 由于在  $x=0$  处有直到一阶导数值的插值条件, 所以它是“二重节点”; 而在  $x=1$  处有直到二阶导数值的插值条件, 所以

$x = 1$  是“三重节点”. 因此, 利用重节点差商公式可以作出差商表 2.7.

表 2.7 差商表

$x_i$	$f(x_i)$	一阶	二阶	三阶	四阶
0	-1				
0	-1	-2			
1	0	1	3		
1	0	10	9	6	
1	0	10	$40/2! = 20$	11	5

根据 Newton 插值公式, 插值多项式为

$$H(x) = -1 - 2x + 3x^2 + 6x^2(x-1) + 5x^2(x-1)^2,$$

且插值余项为

$$R(x) = f(x) - H(x) = \frac{1}{5!} f^{(5)}(\xi) x^2 (x-1)^2,$$

$$0 < \xi < 1,$$

其中  $f(x)$  是被插值函数.

**例 11** 已知函数  $f(x)$  的数据如下.

$x_i$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
$f_i$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	3
$f'_i$		1	

(1) 若  $f(x)$  原本是二次式, 试利用插值多项式求  $f(x) = 0$  在  $[0, 2]$  内的根;

(2) 若  $f(x)$  原本不是二次式, 而  $f^{(4)}(x) \in C[-1/2, 2]$ , 且  $|f^{(4)}(x)| < 1, \forall x \in [-1/2, 2]$ , 试证  $|f(x^*)| < 1/64$ , 其中  $x^*$  为 (1) 中的根.

**解** (1) 利用重节点的 Newton 插值公式, 为此作差商表 2.8.

表 2.8 差商表

$x_i$	$f_i(x)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$			
$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	1	1	
2	3	$\frac{5}{2}$	1	0

由 Newton 插值公式得

$$P_3(x) = -\frac{3}{4} + (x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = x^2 - 1.$$

因  $f(x)$  原本是二次式,故所做插值多项式  $P_3(x)$  就是  $f(x)$  本身. 令

$$P_3(x) = 0, \text{得 } x = \pm 1.$$

即  $x = 1$  为  $f(x) = 0$  在  $[0, 2]$  内的根.

$$\begin{aligned} (2) \quad |f(x) - P_3(x)| &= \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})^2(x - 2) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{4!} (x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})(x - 2) \right|. \end{aligned}$$

令  $x = x^* = 1$ , 因  $P_3(x^*) = 0$ , 故得

$$|f(x^*)| \leq \left| \frac{1}{4!} (1 + \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2})^2(1 - 2) \right| = \frac{1}{4!} \frac{3}{8} = \frac{1}{64}.$$

**例 12** 试分析线性插值的总误差, 包括截断误差与舍入误差.

**解** 设插值点为  $x_0, x_1$ ,

$$f(x_0) = f_0 + \mathfrak{e}_0,$$

$$f(x_1) = f_1 + \mathfrak{e}_1,$$

其中  $f_0, f_1$  是给出的函数近似值,  $\mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_1$  是相应的绝对误差, 假定  $|\mathfrak{e}_1| < \epsilon, |\mathfrak{e}_0| < \epsilon, f(x_0), f(x_1)$  是准确函数值.

$$\text{总误差} = f(x) - \frac{x-x_1}{x-x_1} f_0 - \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f_1, \quad x_0 \leq x \leq x_1.$$

用  $f_0 = f(x_0) - \epsilon_0$ ,  $f_1 = f(x_1) - \epsilon_1$  代入上式, 有

$$\begin{aligned} \text{总误差} &= f(x) - \frac{(x_1-x)f(x_0) + (x-x_0)f(x_1)}{x_1-x_0} \\ &\quad + \frac{(x_1-x)\epsilon_0 + (x-x_0)\epsilon_1}{x_1-x_0} \\ &= R_1(x) + r_1(x), \end{aligned}$$

其中, 截断误差

$$R_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1), \quad \xi \in [x_0, x_1].$$

易证明  $|(x-x_0)(x-x_1)| \leq \frac{h^2}{4}$  ( $h = x_1 - x_0$ ),

$$\begin{aligned} |r_1(x)| &= \left| \frac{(x_1-x)\epsilon_0 + (x-x_0)\epsilon_1}{x_1-x_0} \right| \\ &\leq \frac{(|x_1-x| + |x-x_0|)\epsilon}{|x_1-x_0|} = \epsilon. \end{aligned}$$

(因  $|\epsilon_0|, |\epsilon_1| \leq \epsilon$ ,  $|x_1-x| + |x-x_0| = (x_1-x) + (x-x_0) = x_1-x_0 = |x_1-x_0|$ )

故

$$\text{总误差} \leq \frac{h^2}{8} \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |f''(x)| + \max\{|\epsilon_0|, |\epsilon_1|\}.$$

**例 13** 考虑下述的插值法问题: 求二次多项式  $P(x)$ , 满足

$$P(x_0) = y_0, \quad P'(x_1) = y'_1, \quad P(x_2) = y_2,$$

其中  $x_0 \neq x_2$ ,  $y_0, y'_1, y_2$  是已给的数据. 并给出使这一问题的解存在且唯一的条件.

**解** 设  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , 则  $P'(x) = 2ax + b$ .

由已知条件有

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = y_0, \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2, \\ 2ax_1 + b = y'_1. \end{cases}$$

故原问题的唯一可解性就归结为上述方程组的唯一可解性. 而后者唯一可解的充要条件为

$$\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ 2x_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

即 
$$2x_1(x_0 - x_2) - (x_0^2 - x_2^2) \neq 0,$$
  

$$x_1 \neq \frac{x_0 + x_2}{2} \quad (\text{因 } x_0 - x_2 \neq 0).$$

这就是  $P(x)$  存在且唯一的条件.

**例 14** 下面的数据取自一个多项式, 试确定这个多项式的次数.

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$P_i(x)$	-5	1	1	1	7	25

**解** 作差商表 2.9.

**表 2.9 差商表**

$x$	$f(x)$	一阶	二阶	三阶	四阶
-2	-5				
-1	1	6			
0	1	0	-3		
1	1	0	0	1	
2	7	6	3	1	0
3	25	18	6	1	0

由此表可看出, 函数  $f(x)$  的三阶差商为常数, 由差商与导数的关系知, 三阶导数也是常数, 故  $f(x)$  应是三次多项式.

**例 15** 证明  $\frac{d}{dx}f[x_0, x]$  一般不等于  $f'[x_0, x]$ , 除非  $f(x)$  是线性函数 ( $f[x_0, x]$  是  $f(x)$  的一阶差商,  $f'[x_0, x]$  是  $f'(x)$  的一阶差商).

**证** 
$$\frac{d}{dx}f[x_0, x] = \frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]$$

$$= \frac{f'(x)(x-x_0) - [f(x) - f(x_0)]}{(x-x_0)^2},$$

而

$$f'[x_0, x] = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

要使二者相等, 必须有

$$f'(x)(x-x_0) - f(x) + f(x_0) = (f'(x) - f'(x_0))(x-x_0).$$

整理可得

$$f(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$

即  $f(x)$  是线性函数.

**例 16** 利用差分证明

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2. \quad (2.24)$$

证 令  $g(n) = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ , 则

$$\begin{aligned} \Delta g(n) &= g(n+1) - g(n) \\ &= \left[ \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 - \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \\ &= (n+1)^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故左边} &= \sum_{i=1}^n i^3 = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta g(i) \\ &= (g(1) - g(0)) + (g(2) - g(1)) + \cdots \\ &\quad + (g(n) - g(n-1)) \\ &= g(n) - g(0) = g(n) = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2. \end{aligned}$$

即(2.24)式成立.

**例 17** 证明: Lagrange 插值公式  $L_n(x)$  的误差可表为

$$R(x) = f(x) - L_n(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{i=0}^n \frac{f(x) - f(x_i)}{(x - x_i) \omega'_{n+1}(x_i)},$$

其中  $x_0, x_1, \dots, x_n$  为插值节点,

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

证 由 Lagrange 插值公式

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} f(x_i). \quad (2.25)$$

取  $f(x) \equiv 1$ , 有

$$1 = \sum_{i=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}. \quad (2.26)$$

(2.26) 式两边乘以  $f(x)$ , 再减去 (2.25) 式, 有

$$R(x) = f(x) - L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f(x) - f(x_i)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} \omega_{n+1}(x),$$

得证.

**例 18** 记 Lagrange 插值多项式最高幂次的系数为  $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ , 证明:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}.$$

证 以  $x_0, x_1, \dots, x_n$  为插值节点, 关于  $f(x)$  的 Lagrange 插值多项式为

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} f(x_i),$$

其中  $\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)} = (x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$  为  $n$  次多项式 ( $i=0, 1, \dots, n$ ) 且首项系数 (即  $n$  次项系数) 为 1.

所以  $L_n(x)$  的首项系数为  $\sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}$ .

**例 19** 设  $x_0, x_1, \dots, x_n$  为  $n+1$  个互异的插值节点,  $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$  为 Lagrange 基函数, 令  $c_i = l_i(0), i=0, 1, \dots, n$ . 证明:

$$\sum_{i=0}^n c_i x_i^k = \begin{cases} 1, & k=0, \\ 0, & k=1, 2, \dots, n, \\ (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n, & k=n+1. \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^n l_i(x) \equiv 1.$$

证 设  $a = \min_{0 \leq i \leq n} \{x_i, 0\}$ ,  $b = \max_{0 \leq i \leq n} \{x_i, 0\}$ , 则  $[a, b]$  为插值区间, 且  $0 \in [a, b]$ , 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有直到  $n+1$  阶的连续导数, 这时, 由 Lagrange 插值公式, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= L_n(x) + R_n(x) \\ &= \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i) + \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in [a, b], \end{aligned} \quad (2.27)$$

其中  $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$ .

取  $f(x) = x^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n, n+1$ . 则由 (2.27) 式有

$$x^k = \sum_{i=0}^n l_i(x) x_i^k + \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!} [(x^k)^{(n+1)}]_{x=\xi}. \quad (2.28)$$

当  $k = 0$  时,  $x^k \equiv 1$ , 故  $(x^k)^{(n+1)} \equiv 0$ .

由 (2.28) 式有,  $\sum_{i=0}^n l_i(x) = 1$ .

当  $k = 1, 2, \dots, n$  时,  $(x^k)^{(n+1)} = 0$ .

在 (2.28) 式中, 取  $x = 0$ , 由  $l_i(0) = c_i$ , 便有  $\sum_{i=0}^n c_i x_i^k = 0$ .

当  $k = n+1$  时,  $(x^{n+1})^{(n+1)} = (n+1)!$ .

在 (2.28) 式中, 取  $x = 0$ , 由  $\omega(0) = (-1)^{n+1} x_0 x_1 \cdots x_n$ , 有  $0 =$

$\sum_{i=0}^n c_i x_i^{n+1} + \omega(0)$ , 则

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n c_i x_i^{n+1} &= -(-1)^{n+1} x_0 x_1 \cdots x_n \\ &= (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n. \end{aligned}$$

例 20 证明:  $x = \sum_{i=0}^n \left[ \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \left( \frac{x-k}{i-k} \right) \right] i$ .

证 等式的右端可看作是函数  $y = x$  在  $x_i = i (i = 0, 1, \dots, n)$  处的  $n$  次 Lagrange 插值多项式, 则有

$$x \approx \sum_{i=0}^n l_i(x) x_i = \sum_{i=0}^n \left[ \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - k}{i - k} \right] i.$$

又

$$R_n(x) = x - \sum_{i=0}^n l_i(x) x_i = \frac{(x)^{(n+1)}}{(n+1)!} \Big|_{x=\xi} \prod_{i=0}^n (x - x_i) = 0,$$

故

$$x = \sum_{i=0}^n l_i(x) x_i = \sum_{i=0}^n \left[ \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - k}{i - k} \right] i.$$

**例 21** 利用 Lagrange 插值多项式, 证明公式

$$\frac{1}{m-n} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{C_m^n C_n^k}{m-k}, (m > n),$$

其中

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!}.$$

**证** 设  $f(x) = 1$ , 取插值节点  $x_k = k (k = 0, 1, \dots, n)$ , 对  $f(x)$  构造次数不高于  $n$  的 Lagrange 插值多项式, 有

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) = 1.$$

令  $x = m (m > n)$ , 则

$$\begin{aligned} L_n(m) &= \sum_{k=0}^n l_k(m) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k-1)}{k(k-1)(k-2)\cdots(k-k-1)} \\ &\quad \cdot \frac{(m-k+1)\cdots(m+n)}{(k-k+1)\cdots(k-n)} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{m!(m-n)}{k!(n-k)! (m-k)(m-n)!}. \end{aligned}$$

而

$$C_m^n \cdot C_n^k = \frac{m!}{(m-n)!n!} \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{m!}{(m-n)!k!(n-k)!},$$

于是有

$$L_n(m) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{m-n}{m-k} C_m^n \cdot C_n^k \quad (m > n).$$

即

$$\frac{1}{m-n} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{C_m^n C_n^k}{m-k}.$$

**例 22** 已知函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  内  $n+1$  次可微,  $x_i (i=1, 2, \dots, n)$  是  $[a, b]$  上互异的节点, 且  $f(x_1) = 1, f'(x_i) = 0, i=1, 2, \dots, n$ . 求作一个不高于  $n$  次的插值多项式  $P(x)$ , 使其满足:  $P(x_1) = f(x_1) = 1, P'(x_i) = f'(x_i) = 0, i=1, 2, \dots, n$ , 并证明当  $x \in [a, b]$  时, 有估计

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|.$$

**证** 由插值条件及插值的唯一性知  $P(x) \equiv 1$ . 又由条件  $P'(x_i) = f'(x_i) = 0, i=1, 2, \dots, n$ , 知

$$f'(x) - P'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

显然有

$$\int_{x_1}^x (f'(x) - P'(x)) dx = \int_{x_1}^x \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \prod_{i=1}^n (x - x_i) dx,$$

即

$$f(x) - P(x) = \int_{x_1}^x \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \prod_{i=1}^n (x - x_i) dx.$$

故

$$\begin{aligned} |f(x) - P(x)| &\leq \int_{x_1}^x \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{n!} \left| \prod_{i=1}^n (x - x_i) \right| dx \\ &\leq \int_a^b \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{n!} (b-a)^n dx \\ &\leq \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| \int_a^b \frac{1}{n!} (b-a)^n dx \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|. \end{aligned}$$

**例 23** 已知数据表

$x_i$	1	2	4	5
$f_i$	1	3	4	2

求满足自然边界条件  $S''(1) = S''(5) = 0$  的三次样条插值函数  $S(x)$ , 并计算  $f(3)$  的近似值.

**解** 作差商表 2.10.

**表 2.10 差商表**

$i$	$x_i$	$f_i$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1	1		
1	2	3	2	
2	4	4	0.5	-0.5
3	5	2	-2	-0.833333

由自然边界条件得,  $M_0 = M_3 = 0$ , 又

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6f[x_0, x_1, x_2] - \mu_1 M_0 \\ 6f[x_1, x_2, x_3] - \lambda_2 M_3 \end{bmatrix},$$

其中

$$\lambda_1 = \frac{h_1}{h_0 + h_1} = \frac{2}{1+2} = 0.666666,$$

$$\lambda_2 = \frac{h_2}{h_1 + h_2} = \frac{1}{2+1} = 0.333334,$$

$$\mu_1 = 1 - \lambda_1 = 0.333334, \mu_2 = 1 - \lambda_2 = 0.666666.$$

即得关于  $M_1, M_2$  的线性方程组为

$$\begin{bmatrix} 2 & 0.666666 \\ 0.666666 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4.999998 \end{bmatrix}.$$

解此方程组, 得

$$M_1 = -0.750001, \quad M_2 = -2.249997.$$

由于  $3 \in [2, 4]$ , 所以有

$$\begin{aligned} S(x) = & M_1 \frac{(x_2 - x)^3}{6h_1} + M_2 \frac{(x - x_1)^3}{6h_1} \\ & + \left[ f_1 - M_1 \frac{h_1^2}{6} \right] \frac{x_2 - x}{h_1} + \left[ f_2 - M_2 \frac{h_1^2}{6} \right] \frac{x - x_1}{h_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -0.750001 \times \frac{(4-x)^3}{12} - 2.249999 \times \frac{(x-2)^3}{12} \\
&\quad + 3.500001 \times \frac{4-x}{2} + 5.499999 \times \frac{x-2}{2}, \\
&\quad x \in [2, 4].
\end{aligned}$$

在上式中, 令  $x = 3$ , 得

$$f(3) \approx S(3) = 4.250000.$$

**例 24** 已知数据表如下.

$x$	0	0.15	0.30	0.45	0.60
$f$	1	0.97800	0.91743	0.83160	0.73529

求满足边界条件  $S'(0) = 0, S'(0.60) = -0.64879$  的三次样条插值函数  $S(x)$ .

**解** 按已知数据作差商表 2.11.

**表 2.11 差商表**

$i$	$x_i$	$f_i$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	0	1		
1	0.15	0.97800	-0.14667	
2	0.30	0.91743	-0.40380	-0.85710
3	0.45	0.83160	-0.57220	-0.56133
4	0.60	0.73529	-0.64207	-0.23290

由于是等距节点, 所以有

$$h_i = x_{i+1} - x_i = 0.15, \quad \lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} = 0.5,$$

$$\mu_i = 1 - \lambda_i = 0.5, \quad i = 1, 2, 3.$$

并且  $m_0 = 0, m_4 = -0.64879$ , 因而得到关于  $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4$  的线性方程组

$$\begin{bmatrix}
2 & 1 & & & \\
0.5 & 2 & 0.5 & & \\
& 0.5 & 2 & 0.5 & \\
& & 0.5 & 2 & 0.5 \\
& & & 1 & 2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
M_0 \\
M_1 \\
M_2 \\
M_3 \\
M_4
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-5.86680 \\
-5.14260 \\
-3.36798 \\
-1.39740 \\
-0.26880
\end{bmatrix}.$$

解此方程组,得

$$\begin{aligned} M_0 &= -2.04462, & M_1 &= -1.77757, & M_2 &= -1.13031, \\ M_3 &= -0.43716, & M_4 &= 0.08418. \end{aligned}$$

因此,得三次样条插值函数

$$S(x) = \begin{cases} 0.29672x^3 - 1.02231x^2 + 1, & x \in [0, 0.15], \\ 0.71918x^3 - 1.21242x^2 \\ \quad + 0.02851x + 0.99858, & x \in [0.15, 0.30], \\ 0.77017x^3 - 1.25831x^2 \\ \quad + 0.04228x + 0.99720, & x \in [0.30, 0.45], \\ 0.57927x^3 - 1.00059x^2 \\ \quad - 0.07370x + 1.01461, & x \in [0.45, 0.60]. \end{cases}$$

**例 25** 已给插值条件为

$x$	1	2	3
$y$	2	4	12
$y'$	1		-1

求三次样条插值函数.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lambda_0 &= \frac{h_0}{h_0 + h_1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad \mu_1 = 1 - \lambda_1 = \frac{1}{2}, \\ g_1 &= 3[f[x_0, x_1]]\lambda_1 + f[x_1, x_2]\mu_1 \\ &= 3\left[\frac{1}{2}(4-2) + \frac{1}{2}(12-4)\right] = 15. \end{aligned}$$

于是由

$$\lambda_1 m_0 + 2m_1 + \mu_1 m_2 = g_1,$$

得

$$m_1 = \frac{15}{2}.$$

则由区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的 Hermite 插值公式,可得

$$\begin{aligned} S_0 &= (2-x)^2(x-1) - \frac{15}{2}(x-1)^2(2-x) \\ &\quad + 2(2-x)^2[2(x-1)+1] + 4(x-1)^2[2(2-x)+1] \\ &= (2-x)(x-1)\left[2-x - \frac{15}{2}x + \frac{15}{2} + 4(2-x)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8(x-1)] + 2(2-x)^2 + 4(x-1)^2 \\
& = \frac{9}{2}x^3 - 17x^2 + \frac{43}{2}x - 7, \\
S_i & = \frac{15}{2}(3-x)^2(x-2) + (x-2)^2(3-x) + 4(3-x)^2 \\
& \quad \cdot [2(x-2)+1] + 12(x-2)^2[2(3-x)+1] \\
& = (3-x)(x-2)\left[\frac{45}{2} - \frac{15}{2}x + x - 2 + 24 - 8x\right. \\
& \quad \left.+ 24x - 48\right] + 4(9 - 6x + x^2) + 12(x^2 - 4x + 4) \\
& = -\frac{19}{2}x^3 + 67x^2 - \frac{293}{2}x + 105.
\end{aligned}$$

故所求的样条插值函数为

$$S(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}x^3 - 17x^2 + \frac{43}{2}x - 7, & x \in [1, 2], \\ -\frac{19}{2}x^3 + 67x^2 - \frac{293}{2}x + 105, & x \in (2, 3]. \end{cases}$$

## 四、习题

1. 根据范德蒙行列式的定义, 令

$$\begin{aligned}
V_n(x) & = V_n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) \\
& = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

证明  $V_n(x)$  是  $n$  次多项式, 它的根是  $x_0, \dots, x_{n-1}$ , 且

$$V_n(x) = V_{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}).$$

2. 当  $x = 1, -1, 2$  时,  $f(x) = 0, -3, 4$ , 求  $f(x)$  的二次插值多项式.

3. 给出  $f(x) = \ln x$  的数值表如下, 用线性插值及二次插值求  $\ln 0.54$  的近似值.

$x$	0.4	0.5	0.6
$\ln x$	-0.916291	-0.693147	-0.510826
$x$	0.7	0.8	
$\ln x$	-0.357765	-0.223144	

4. 给出  $\cos x, 0^\circ \leq x \leq 90^\circ$  的函数表, 步长  $h = 1' = (1/60)^\circ$ , 若函数表具有 5 位有效数字, 研究用线性插值求  $\cos x$  近似值时的总误差界.

5. 设  $x_k = x_0 + kh, k = 0, 1, 2, 3$ . 求  $\max_{x_0 \leq x \leq x_3} |l(x)|$ .

6. 设  $x_j$  为互异节点 ( $j = 0, 1, \dots, n$ ), 求证:

$$(1) \sum_{j=0}^n x_j^k l_j(x) \equiv x^k (k = 0, 1, \dots, n);$$

$$(2) \sum_{j=0}^n (x_j - x)^k l_j(x) \equiv 0 (k = 1, 2, \dots, n).$$

7. 已知  $\sin(0.32) = 0.314567, \sin(0.34) = 0.333487$  有 6 位有效数字.

(1) 用线性插值求  $\sin(0.33)$  的近似值.

(2) 证明在区间  $[0.32, 0.34]$  上用线性插值计算  $\sin x$  时至少有 4 位有效数字.

8. 在  $-4 \leq x \leq 4$  上给出  $f(x) = e^x$  的等距节点函数表, 若用二次插值求  $e^x$  的近似值, 要使截断误差不超过  $10^{-6}$ , 问函数表的步长  $h$  应取多少?

9. 若  $y_n = 2^n$ , 求  $\Delta^4 y_n$  及  $\delta^4 y_n$ .

10. 如果  $f(x)$  是  $m$  次多项式, 记  $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ , 证明  $f(x)$  的  $k$  阶差分  $\Delta^k f(x)$  ( $0 \leq k \leq m$ ) 是  $m-k$  次多项式, 并且  $\Delta^{m+l} f(x) = 0$  ( $l$  为正整数).

11. 证明  $\Delta(f_k g_k) = f_k \Delta g_k + g_{k+1} \Delta f_k$ .

$$12. \sum_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k = f_n g_n - f_0 g_0 - \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1} \Delta f_k.$$

13. 证明  $\sum_{j=0}^{n-1} \Delta^2 y_j = \Delta y_n - \Delta y_0$ .

14. 若  $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$  有  $n$  个不同实根  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 证明:

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{f'(x_j)} = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq n-2, \\ a_n^{-1}, & k = n-1. \end{cases}$$

15. 证明  $n$  阶均差有下列性质:

(1) 若  $F(x) = cf(x)$ , 则  $F(x_0, x_1, \dots, x_n) = cf(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ;

(2) 若  $F(x) = f(x) + g(x)$ , 则

$$F[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_0, x_1, \dots, x_n] + g[x_0, x_1, \dots, x_n].$$

16.  $f(x) = x^7 + x^4 + 3x + 1$ , 求

$$f[2^0, 2^1, \dots, 2^7] \text{ 及 } f[2^0, 2^1, \dots, 2^8].$$

17. 证明两点三次 Hermite 插值余项是

$$R_3(x) = f^{(4)}(\xi)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2/4!, \quad \xi \in (x_k, x_{k+1}),$$

并由此求出分段三次 Hermite 插值的误差限.

18. 求一个次数不高于 4 次的多项式  $P(x)$ , 使它满足  $P(0) = P'(0) = 0, P(1) = P'(1) = 1, P(2) = 1$ , 并写出其余项表达式.

19. 已知数据表如下.

$x$	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x)$	0.1995	0.3965	0.5881	0.7721	0.9461

利用反插值, 求方程  $f(x) = 0.4500$  的根的近似值.

20. 设  $f(x) \in C[a, b]$ , 把  $[a, b]$  分为  $n$  等分, 试构造一个阶梯形的零次分段插值函数  $\varphi_n(x)$ , 并证明当  $n \rightarrow \infty$  时  $\varphi_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛到  $f(x)$ .

21. 设  $f(x) = 1/(1+x^2)$ , 在  $-5 \leq x \leq 5$  上取  $n = 10$ , 按等距节点求分段线性插值函数  $I_h(x)$ , 计算各节点间中点处的  $I_h(x)$  与  $f(x)$  的值, 并估计误差.

22. 求  $f(x) = x^2$  在  $[a, b]$  上的分段线性插值函数  $I_h(x)$ , 并

估计误差.

23. 求  $f(x) = x^4$  在  $[a, b]$  上的分段 Hermite 插值, 并估计误差.

24. 给定数据表如下.

$x_j$	0	1	2	3
$y_j$	0	0	0	0

(1) 求满足边界条件  $S''(0) = 1, S''(3) = 0$  的三次样条插值函数  $S(x)$ ;

(2) 求满足边界条件  $S'(0) = 1, S'(3) = 0$  的三次样条插值函数  $S(x)$ .

25. 若  $f(x) \in C^2[a, b], S(x)$  是三次样条函数, 证明:

$$\begin{aligned}(1) \int_a^b [f''(x)]^2 dx - \int_a^b [S''(x)]^2 dx \\= \int_a^b [f''(x) - S''(x)]^2 dx \\+ 2 \int_a^b S''(x) [f''(x) - S''(x)] dx;\end{aligned}$$

(2) 若  $f(x_i) = S(x_i) (i = 0, 1, \dots, n)$ , 式中  $x_i$  为插值节点, 且  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , 则

$$\begin{aligned}\int_a^b S''(x) [f''(x) - S''(x)] dx \\= S''(b) [f'(b) - S'(b)] - S''(a) [f'(a) - S'(a)].\end{aligned}$$

26. 填空题:

(1)  $f(x) = 3x^2 + 1$  则  $f[1, 2, 3] = \underline{\hspace{2cm}}, f[1, 2, 3, 4] = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 设  $x_i (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$  为互异节点,  $l_i(x)$  为对应的 5 次 Lagrange 插值基函数, 则  $\sum_{i=0}^5 x_i^5 l_i(0) = \underline{\hspace{2cm}}, \sum_{i=0}^5 (x_i^5 + 2x_i^4 + x_i^3 + 1) l_i(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3)  $f(x) = x^5 + 1, x_i = \frac{1}{2}i$ , 其中  $i = 0, 1, 2, \dots$ , 则  $\Delta^6 f_0 =$

$$\underline{\hspace{2cm}}, \Delta^2 f_2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(4) S(x) = \begin{cases} x^3 + x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x^3 + bx^2 + cx - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \text{是以 } 0, 1, 2 \text{ 为}$$

节点的三次样条函数, 则  $b = \underline{\hspace{2cm}}, c = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 满足条件  $P(0) = P'(0) = 0, P(1) = 1, P(2) = 2$  的插值多项式  $P(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

## 五、习题解答

1. 解 将  $V_n(x)$  按最后一行展开, 即知  $V_n(x)$  是  $n$  次多项式.

由于

$$V_n(x_i) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_i & x_i^2 & \cdots & x_i^n \end{vmatrix},$$

$$i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

故知  $V_n(x_i) = 0$ , 即  $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$  是  $V_n(x)$  的根.

又  $V_n(x)$  的最高次幂  $x^n$  的系数为

$$V_{n-1}(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n-2} & x_{n-2}^2 & \cdots & x_{n-2}^{n-1} \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{0 \leq j < i \leq n-1} (x_i - x_j).$$

故知  $V_n(x) = V_{n-1}(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$

2. 解 利用二次 Lagrange 插值多项式公式, 这里  $x_0 = -1, x_1 = 1, x_2 = 2, y_0 = -3, y_1 = 0, y_2 = 4$ . 得

$$L_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

$$\begin{aligned}
&= -3 \times \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} + 0 \\
&\quad + 4 \times \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} \\
&= -\frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2) + \frac{4}{3}(x^2 - 1) \\
&= \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

3. 解 选取  $x_0 = 0.5, x_1 = 0.6, x = 0.54$  代入 Lagrange 线性插值多项式, 得

$$\begin{aligned}
\ln 0.54 &\approx L_1(0.54) = \frac{0.54 - 0.60}{0.50 - 0.60} \times (-0.693147) \\
&\quad + \frac{0.54 - 0.5}{0.6 - 0.5} \times (-0.510826) \\
&\approx -0.620219.
\end{aligned}$$

又选取  $x_0 = 0.4, x_1 = 0.5, x_2 = 0.6, x = 0.54$  代入 Lagrange 二次插值多项式, 得

$$\begin{aligned}
\ln 0.54 &\approx L_2(0.54) = \frac{(0.54 - 0.5)(0.54 - 0.6)}{(0.4 - 0.5)(0.4 - 0.6)} \\
&\quad \times (-0.916291) + \frac{(0.54 - 0.4)(0.54 - 0.6)}{(0.5 - 0.4)(0.5 - 0.6)} \\
&\quad \times (-0.693147) + \frac{(0.54 - 0.4)(0.54 - 0.5)}{(0.6 - 0.4)(0.6 - 0.5)} \\
&\quad \times (-0.510826) \approx -0.615320.
\end{aligned}$$

4. 解 由题设知  $0^\circ \leq x \leq 90^\circ, h = x_{i+1} - x_i = (\frac{1}{60})^\circ$ . 记  $x_i$

处的准确值为  $f_i$ , 带有误差的值为  $f_i$ , 则

$$\begin{aligned}
L_l(x) &= \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f_{i+1}, \\
L_l(x) &= \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f_{i+1}, \\
R_{\text{总}} &= f(x) - L_l(x) = [f(x) - L_l(x)] + [L_l(x) - L_l(x)] \\
&= R_{\text{截}} + R_{\text{舍}} \\
&= \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_i)(x - x_{i+1}) + \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \delta_i \\
&\quad + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \delta_{i+1},
\end{aligned}$$

其中  $\delta_i = f_i - f_i, \delta_{i+1} = f_{i+1} - f_{i+1}$ .

$$\begin{aligned}
|R_{\text{总}}| &\leq |R_{\text{截}}| + |R_{\text{舍}}| = \left| \frac{\cos \xi}{2} \right| |(x - x_i)(x - x_{i+1})| \\
&\quad + \left| \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \delta_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \delta_{i+1} \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{4} + \delta \left[ \left| \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right| + \left| \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right| \right] \\
&\quad [\delta = \max\{|\delta_i|, |\delta_{i+1}|\}] \\
&= \frac{h^2}{8} + \delta \left| \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right| = \frac{h^2}{8} + \delta \\
&\leq \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180} \right]^2 + \frac{1}{2} \times 10^{-5} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{因表值有 5 位有效数} \\ \text{字, 故 } \delta \leq 0.5 \times 10^{-5} \end{array} \right] \\
&\approx 1.06 \times 10^{-8} + \frac{1}{2} \times 10^{-5} = 5.0106 \times 10^{-6}.
\end{aligned}$$

5. 解 由题意知

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}.$$

令  $l'_2(x) = 0$ , 得

$$3x^2 - (6x_0 + 8h)x + 3x_0^2 + 8x_0h + 3h^2 = 0,$$

驻点为

$$x = x_0 + \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

经比较知  $|l_2(x)|$  在  $x = x_0 + \frac{4 + \sqrt{7}}{3}$  处达到最大值, 即

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_3} |l_2(x)| = \frac{10 + 7\sqrt{7}}{27} \approx 1.0563.$$

6. 解 (1) 设  $f(x) = x^k$ . 当  $k = 0, 1, \dots, n$  时, 有

$$f^{(n+1)}(x) = 0.$$

对  $f(x)$  构造 Lagrange 插值多项式,

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n x_j^k l_j(x),$$

其

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) = 0,$$

$\xi$  介于  $x_j$  之间,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

故  $f(x) = L_n(x)$ , 即

$$\sum_{j=0}^n x_j^k l_j(x) = x^k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

特别地, 当  $k = 0$  时,

$$\sum_{j=0}^n l_j(x) = 1.$$

(2) 方法 1:

$$\sum_{j=0}^n (x_j - x)^k l_j(x) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^k (-1)^i \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} x_j^{k-i} x^i l_j(x)$$

$$\stackrel{\text{利用(1)}}{=} \sum_{i=0}^k (-1)^i \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} x_j^{k-i} x^i = (x_j - x_j)^2 = 0.$$

方法 2: 令  $g(t) = (t - x)^k, k = 0, 1, \dots, n$ . 对  $g(t)$  构造  $n$  次 Lagrange 插值多项式, 得

$$L_n(t) = \sum_{j=0}^n (x_i - x)^k l_j(t).$$

由(1)的结果知

$$\sum_{j=0}^n (x_j - x)^k l_j(t) = (t - x)^k$$

对一切  $t$  均成立. 特别地, 取  $t = x$ , 上式仍成立, 即

$$\sum_{j=0}^n (x_j - x)^k l_j(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

7. 解 (1) 选取  $x_0 = 0.32, x_1 = 0.34, x = 0.33$  代入 Lagrange 线性插值多项式, 得

$$\begin{aligned} \sin(0.33) &\approx L_1(0.33) = \frac{0.33 - 0.34}{0.32 - 0.34} \times 0.314567 \\ &\quad + \frac{0.33 - 0.32}{0.34 - 0.32} \times 0.333487 \\ &= \frac{1}{2} (0.314567 + 0.333487) = 0.324027. \end{aligned}$$

(2) 由余项表达式(2.8)知, 在区间  $[0.32, 0.34]$  上用线性插值计算  $\sin x$  的余项满足

$$\begin{aligned} |R_1(x)| &= \left| \frac{\sin \xi}{2} (x - 0.32)(x - 0.34) \right|, \quad \xi \in (0.32, 0.34) \\ &\leq \frac{0.333487}{8} (0.34 - 0.32)^2 \\ &\leq 0.000017 < \frac{1}{2} \times 10^{-4}, \quad \forall x \in [0.32, 0.34] \end{aligned}$$

因此结果至少有 4 位有效数字.

8. 解 记  $f(x) = e^x$  的二次插值多项式为  $P_2(x)$ , 则

$$f(x) - P_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} (x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1}),$$

$$\begin{aligned} &\max_{-4 \leq x \leq 4} |f(x) - P_2(x)| \\ &\leq \frac{e^4}{6} \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}} |(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})|. \end{aligned}$$

令  $g(x) = (x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})$ .

因插值节点等距, 设  $x = x_{i-1} + th$ , 故得

$$g(x_{i-1} + th) = h^3 t(t-1)(t-2) = h^3 \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq 2.$$

令

$$\varphi'(t) = 3t^2 - 6t + 2 = 0, \text{得 } t = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

经比较知  $|\varphi(t)|$  的最大值为  $\sqrt{2}$ , 则有

$$\max_{-4 \leq x \leq 4} |f(x) - P_2(x)| \leq \frac{e^4}{6} \cdot \sqrt{2} h^3 < 10^{-6}.$$

所以

$$h \leq 0.006.$$

9. 解 由差分性质知

$$\begin{aligned} \Delta^4 y_n &= (E - I)^4 y_n = \sum_{j=0}^4 (-1)^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} y_{n+4-j} \\ &= y_{n+4} - 4y_{n+3} + 6y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n \\ &= 16 \cdot 2^n - 4 \times 8 \cdot 2^n + 24 \cdot 2^n - 8 \cdot 2^n + 2^n = 2^n. \end{aligned}$$

仿上,

$$\begin{aligned} \delta^4 y_n &= [E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}]^4 y_n \\ &= \sum_{j=0}^4 (-1)^j (E^{\frac{1}{2}})^{4-j} (E^{-\frac{1}{2}})^j y_n \\ &= \sum_{j=0}^4 (-1)^j \begin{bmatrix} 4 \\ j \end{bmatrix} y_{n+2-j} \\ &= y_{n+2} - 4y_{n+1} + 6y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2} \\ &= 4 \cdot 2^n - 8 \cdot 2^n + 6 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n + 2^{n-2} \\ &= 2^{n-2}. \end{aligned}$$

10. 解 方法 1: 依题意可设  $f(x) = ax^m + bx^{m-1} + \cdots + d$ .

于是

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) = a(x+h)^m + \cdots \\ &\quad + d - ax^m - \cdots - d \\ &= a'x^{m-1} + b'x^{m-2} + \cdots + d' \end{aligned}$$

为  $m-1$  次式. 依次类推, 可知  $\Delta^k f(x)$  是  $m-k$  次多项式.

由差分与微商的关系知

$$\begin{aligned}\Delta^{m+l} f(x) &= (m+l)! h^{m+l} f^{(m+l)}[x_0, \dots, x_{m+l}] \\ &= (m+l)! h^{m+l} \frac{1}{(m+l)!} f^{(m+l)}(\xi).\end{aligned}$$

因  $f^{(m+l)}(x) = 0$ , 故  $f^{(m+l)}(\xi) = 0$ . 即  $\Delta^{m+l} f(x) = 0$ .

方法 2: 设  $f(x)$  是  $m$  次多项式, 则

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots$$

显然是  $m-1$  次多项式.

假设  $\Delta^{k-1} f(x)$  是  $m - (k-1)$  次多项式, 则  $\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x))$  是  $[m - (k-1)] - 1 = m - k$  次多项式 ( $0 \leq k \leq m$ ). 当  $k = m$  时  $\Delta^k f(x)$  为常数. 故当  $m+l > m$  时,  $\Delta^{(m+l)} f(x) = 0$ .

11. 解

$$\begin{aligned}\Delta(f_k g_k) &= f_{k+1} g_{k+1} - f_k g_k \\ &= f_{k+1} g_{k+1} - g_{k+1} f_k + g_{k+1} f_k - f_k g_k \\ &= g_{k+1} (f_{k+1} - f_k) + f_k (g_{k+1} - g_k) \\ &= g_{k+1} \Delta f_k + f_k \Delta g_k.\end{aligned}$$

12. 解

$$\begin{aligned}\text{左边} &= \sum_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k = f_0 \Delta g_0 + f_1 \Delta g_1 + \dots + f_{n-1} \Delta g_{n-1} \\ &= f_0 (g_1 - g_0) + f_1 (g_2 - g_1) + \dots + f_{n-1} (g_n - g_{n-1}) \\ &= f_0 g_1 - f_0 g_0 + f_1 g_2 - f_1 g_1 + \dots + f_{n-1} g_n - f_{n-1} g_{n-1} . \\ \text{右边} &= f_n g_n - f_0 g_0 - \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1} \Delta f_k \\ &= f_n g_n - f_0 g_0 - g_1 (f_1 - f_0) - g_2 (f_2 - f_1) - \dots \\ &\quad - g_n (f_n - f_{n-1}) \\ &= f_0 g_1 - f_0 g_0 + f_1 g_2 - f_1 g_1 + \dots \\ &\quad + f_{n-1} g_n - f_{n-1} g_{n-1}\end{aligned}$$

左边 = 右边.

$$13. \text{ 解} \quad \sum_{j=0}^{n-1} \Delta^2 y_j = \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta y_{j+1} - \Delta y_j)$$

$$\begin{aligned}
 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 + \Delta y_2 - \Delta y_1 + \cdots + \Delta y_n - \Delta y_{n-1} \\
 &= \Delta y_n - \Delta y_0.
 \end{aligned}$$

14. 解 设  $f(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ ,  $g(x) =$

$x^k$ , 记  $\omega_n(x) = \prod_{j=1}^n (x-x_j)$ , 则

$$f(x) = a_n \omega_n(x), \quad f'(x_j) = a_n \omega'_n(x_j).$$

由差商的性质知

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{f'(x_j)} &= \sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{a_n \omega'_n(x_j)} = \frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{\omega'_n(x_j)} \\
 &= \frac{1}{a_n} g[x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{1}{a_n} \frac{g^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!},
 \end{aligned}$$

$\xi$  介于  $x_1, \dots, x_n$  之间.

当  $0 \leq k \leq n-2$  时,  $g^{(n-1)}(\xi) = 0$ ,

当  $k = n-1$  时,  $g^{(n-1)}(\xi) = (n-1)!$ ,

故

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{f'(x_j)} = \frac{1}{a_n} \frac{g^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!} = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq n-2, \\ a_n^{-1}, & k = n-1. \end{cases}$$

15. 证 (1) 由差商的性质,  $k$  阶差商可表为函数值  $f(x_j)$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ ) 的线性组合, 即

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\omega'_k(x_j)}.$$

则有

$$\begin{aligned}
 F[x_0, x_1, \dots, x_n] &= \sum_{j=0}^n \frac{F(x_j)}{\omega'_n(x_j)} = \sum_{j=0}^n \frac{Cf(x_j)}{\omega'_n(x_j)} \\
 &= C \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\omega'_n(x_j)} = Cf[x_0, x_1, \dots, x_n].
 \end{aligned}$$

(2) 同理,

$$F[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n \frac{F(x_j)}{\omega'_n(x_j)} = \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j) + g(x_j)}{\omega'_n(x_j)}$$

$$= \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\omega'_n(x_j)} + \sum_{j=0}^n$$

$$\frac{g(x_j)}{\omega_n(x_j)}$$

$$= f[x^0, x^1, \dots, x^n] +$$

$$g[x^0, x^1, \dots, x^n].$$

16. 解 根据差商与微商的关系,有

$$f[2^0, 2^1, \dots, 2^7] = \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!} = \frac{7!}{7!} = 1,$$

$$f[2^0, 2^1, \dots, 2^8] = \frac{f^{(8)}(\xi)}{8!} = \frac{0}{8!} = 0.$$

( $f(x) = x^7 + x^4 + 3x + 1$  是 7 次多项式,故  $f^{(7)}(x) = 7!$ ,  $f^{(8)}(x) = 0$ ).

17. 解 设余项为

$$R(x) = k(x)(x - x_k)^2(x - x_{k+1})^2,$$

任意固定  $x \in [x_k, x_{k+1}]$ ,构造函数

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= R(t) - k(x)(t - x_k)^2(t - x_{k+1})^2 \\ &= f(t) - H_3(t) - k(x)(t - x_k)^2(t - x_{k+1})^2, \end{aligned}$$

其中  $f(t)$  在  $[x_k, x_{k+1}]$  上 4 阶导函数  $f^{(4)}(x)$  有界,  $H_3(t)$  是  $f(t)$  的三次插值多项式.

易见  $\varphi(t)$  在  $[x_k, x_{k+1}]$  上至少有 5 个零点,即  $t = x, x_k, x_{k+1}$ , (包括重的). 对  $\varphi(t)$  在  $[x_k, x_{k+1}]$  上应用 4 次 Rolle 中值定理,知必存在一点  $\xi$ ,使  $\varphi^{(4)}(\xi) = 0$ .而

$$\varphi^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - k(x)4!,$$

故

$$f^{(4)}(\xi) - k(x)4! = 0,$$

即

$$k(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}.$$

亦即  $R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_k)^2(x - x_{k+1})^2, \xi \in (x_k, x_{k+1})$ .

$$|R(x)| \leqslant \frac{1}{4!} \max_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} |f^{(4)}(x)| \left[ \frac{h}{2} \right]^2 \left[ \frac{h}{2} \right]^2$$

$$\leq \frac{h^4}{384} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|.$$

18. 解 方法 1: 由题意可设

$$P(x) = x^2(ax^2 + bx + c).$$

由插值条件  $P(1) = P'(1) = 1$  及  $P(2) = 1$ , 有

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+3b+2c=1 \\ 4(4a+2b+c)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4}, \\ b=-\frac{3}{2}, \\ c=\frac{9}{4}. \end{cases}$$

故

$$P(x) = x^2 \left[ \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} \right].$$

方法 2: 由  $P_3(0) = P'_3(0) = 0$ ,  $P_3(1) = P'_3(1) = 1$ , 依两点三次 Hermite 插值公式可得

$$P_3(x) = x^2(2-x).$$

再设

$$P(x) = P_3(x) + Ax^2(x-1)^2,$$

由  $P(2) = 1$ , 得  $A = \frac{1}{4}$ , 故

$$P(x) = x^2(2-x) + \frac{1}{4}x^2(x-1)^2 = \frac{1}{4}x^2(x-3)^2.$$

方法 3: 利用 Newton 插值公式, 制作带重节点的差商表 2.12.

表 2.12 差商表

x	y	差 商			
		一阶	二阶	三阶	四阶
0	0				
0	0	0			
1	1	1	1		
1	1	1	0	-1	
2	1	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

则

$$\begin{aligned}
 P_4(x) &= 0 + 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x^2(x-1) + \frac{1}{4}x^2(x-1)^2 \\
 &= \frac{1}{4}x^2(x-1)^2 + x^2(2-x) \\
 &= \frac{1}{4}x^2(x-3)^2.
 \end{aligned}$$

其余项表达式为

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^2(x-1)^2(x-2), \quad \xi \in (0, 2)$$

19. 解 作差商表 2.13.

表 2.13 差商表

$f_i$	$x_i$	差 商			
		一阶	二阶	三阶	四阶
0.1995	0				
0.3965	0.2	1.015228			
0.5881	0.4	1.043841	0.073631		
0.7721	0.6	1.086957	0.114792	0.071884	
0.9461	0.8	1.149425	0.174492	0.108624	0.049209

将  $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$  及  $f = 0.4500$  代入四阶 Newton 插值多项式, 得

$$\begin{aligned}
 x &\approx 0 + 1.015228(0.4500 - 0.1995) + 0.073631 \\
 &\quad \cdot (0.4500 - 0.1995)(0.4500 - 0.3965) + 0.071884 \\
 &\quad \cdot (0.4500 - 0.1995)(0.4500 - 0.3965)(0.4500 - 0.5881) \\
 &\quad + 0.049209(0.4500 - 0.1995)(0.4500 - 0.3965) \\
 &\quad \cdot (0.4500 - 0.5881)(0.4500 - 0.7721) = 0.255198.
 \end{aligned}$$

20. 解 设  $\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x).$

因  $\varphi_n(x)$  是插值所得, 即  $\varphi_n(x_i) = f(x_i)$ , 且  $\varphi_n(x)$  是零次的  
阶梯形函数, 故可取

$$l_i(x) = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

又  $f(x) \in C[a, b]$ , 故  $f(x)$  在  $[a, b]$  上一致连续, 即  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 设  $x', x'' \in [a, b]$ , 当  $|x' - x''| < \delta$  时,  $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$  成立. 对上述  $\delta > 0$ ,  $\exists N > 0$ , 当  $n > N$ ,  $0 < \frac{b-a}{n} < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(x_i)| < \epsilon$  ( $x_i \leq x < x_{i+1}$ ), 故  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists N > 0$ , 当  $n > N$  时, 有

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |f(x) - f(x_i)| < \epsilon.$$

即当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\varphi_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛到  $f(x)$ .

21. 解 因  $n = 10$ , 故  $h = \frac{5+5}{10} = 1$ . 由分段线性插值公式

知, 此处有线性插值函数为

$$I_h(x) = \sum_{i=-5}^5 \frac{1}{1+t^2} l_i(x),$$

其中

$$l_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = x - x_{i-1}, & x_{i-1} < x < x_i, \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} = x_{i+1} - x, & x_i < x < x_{i+1}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

节点间中点处  $x_p = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ . 代入其  $f(x)$  及  $I_h(x)$  中, 计算可得各节点间中点处的值  $I_h(x_p)$ ,  $f(x_p)$  ( $i = -5, -4, -3, -2, 0, 1, 2, 3, 4$ ). 余项

$$R_1(x) = f(x) - I_h(x) = \frac{f''(\xi)}{2} (x - x_i)(x - x_{i+1}),$$

$$|R_1(x)| = |f(x) - I_h(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{-5 \leq x \leq 5} |f''(x)| \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2}.$$

而  $\max_{-5 \leq x \leq 5} |f''(x)| = 2$ , 故

$$|R_1(x)| \leq \frac{1}{4} h^2.$$

22. 解 同 21 题, 得其分段线性插值函数

$$I_h(x) = \sum_{i=0}^n x_i^2 l_i(x),$$

其中

$$l_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x < x_i, \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x_i \leq x < x_{i+1}, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |R_1(x)| &= |f(x) - I_h(x)| = \left| \frac{f''(\xi)}{2} (x - x_i)(x - x_{i+1}) \right| \\ &\leq \frac{2}{2} \frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{4} \quad \left[ h = \frac{b-a}{n}, f''(\xi) = 2 \right]. \end{aligned}$$

23. 解 由分段三次 Hermite 插值公式知, 其分段三次 Hermite 插值多项式

$$\begin{aligned} I_h(x) &= \sum_{i=0}^n f_i \alpha_i(x) + f'_i \beta_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^n x_i^4 \alpha_i(x) + 4 x_i^3 \beta_i(x), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_i(x) &= \begin{cases} \left[ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right]^2 \left[ 1 + 2 \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \right], & x_{i-1} \leq x \leq x_i, j \neq 0, \\ \left[ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right]^2 \left[ 1 + 2 \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right], & x_i \leq x \leq x_{i+1}, j \neq n, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \\ \beta_i(x) &= \begin{cases} \left[ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right]^2 (x - x_i), & x_{i-1} \leq x \leq x_i, i \neq 0, \\ \left[ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right]^2 (x - x_i), & x_i \leq x \leq x_{i+1}, i \neq n, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \end{aligned}$$

由 17 题知,其余项估计为

$$|R(x)| = |x^4 - I_h(x)| \leq \frac{h^4}{384} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|.$$

而  $f^{(4)}(x) = (x^4)^{(4)} = 4!$ , 故

$$|R(x)| \leq \frac{h^4}{384} \cdot 4! = \frac{1}{16} h^4.$$

24. 解 (1) 取  $M_i (i = 1, 2)$  作为参数, 由

$$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_i = 1 - \mu_i = \frac{1}{2},$$

$$d_i = f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] = 0.$$

以及  $\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \quad (i = 1, 2),$

得 
$$\begin{cases} \frac{1}{2} M_0 + 2M_1 + \frac{1}{2} M_2 = 0, \\ \frac{1}{2} M_1 + 2M_2 + \frac{1}{2} M_3 = 0. \end{cases}$$

将已知条件  $M_0 = 1, M_2 = 0$  代入上方程组, 得

$$\begin{cases} 4M_1 + M_2 = -1, \\ M_1 + 4M_2 = 0. \end{cases}$$

解得  $M_1 = -4/15, M_2 = 1/15.$

利用公式(2.21), 有

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{90} x(1-x)(19x-26), & x \in [0, 1], \\ \frac{1}{90} (x-1)(x-2)(5x-12), & x \in [1, 2], \\ \frac{1}{90} (3-x)(x-2)(x-4), & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

(2) 取  $x_i$  处的一阶导数  $m_i (i = 1, 2)$  作为参数, 由

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} = \frac{1}{2}, \quad \mu_i = 1 - \lambda_i = \frac{1}{2},$$

$$g_i = 3\{\lambda_i f[x_{i-1}, x_i] + \mu_i f[x_i, x_{i+1}]\} = 0,$$

以及

$$\lambda m_{i-1} + 2m_i + \mu m_{i+1} = g_i \quad (i = 1, 2),$$

得

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_0 + 2m_1 + \frac{1}{2}m_2 = 0, \\ \frac{1}{2}m_1 + 2m_2 + \frac{1}{2}m_3 = 0. \end{cases}$$

将  $m_0 = 1, m_3 = 0$  代入上两方程, 得

$$\begin{cases} 4m_1 + m_2 = -1, \\ m_1 + 4m_2 = 0. \end{cases}$$

解得  $m_1 = -4/15, m_2 = 1/15$ .

利用公式(2.14) 得

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{15}x(x-1)(15-11x), & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{15}(x-1)(x-2)(7-3x), & x \in [1, 2], \\ \frac{1}{15}(x-3)^2(x-2), & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

25. 解 (1)

$$\begin{aligned} \text{右边} &= \int_a^b [f''(x) - S''(x)]^2 dx \\ &\quad + 2 \int_a^b S''(x)[f''(x) - S''(x)] dx \\ &= \int_a^b [f''^2(x) - 2f''(x)S''(x) + S''^2(x) \\ &\quad + 2S''(x)f''(x) - 2S''^2(x)] dx \\ &= \int_a^b [f''^2(x) - S''^2(x)] dx \\ &= \int_a^b [f''(x)]^2 dx - \int_a^b [S''(x)]^2 dx \\ &= \text{左边}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 左边} &= \int_a^b S''(x)(f''(x) - S''(x)) dx \\ &= S''(x)(f'(x) - S'(x)) \Big|_a^b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\int_a^b (f'(x) - S'(x)) S''(x) dx \\
& = S''(b)(f'(b) - S'(b)) - S''(a)(f'(a) - S'(a)) \\
& = \text{右边}.
\end{aligned}$$

(因  $S(x)$  是三次式, 故  $S'''(x)$  为常数, 则  $\int_a^b (f'(x) - S'(x)) dx = f(x) - S(x) \big|_a^b = 0$ ).

$$26. \text{ 解 } (1) f[1, 2, 3] = \frac{f''(\xi)}{2!} = \frac{6}{2} = 3, f[1, 2, 3, 4] = 0.$$

$$(2) \sum_{i=0}^5 x_i^5 l_i(0) = 0, \sum_{i=0}^5 (x_i^5 + 2x_i^4 + x_i^3 + 1) l_i(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 1.$$

$$(3) \Delta^6 f_0 = h^6 f^{(6)}(\xi) = 0, \Delta^2 f_2 = 17.8125.$$

$$(4) \text{ 由 } \lim_{x \rightarrow 1^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) \text{ 及 } \lim_{x \rightarrow 1^+} S'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S'(x),$$

得  $b = -2, c = 3$ .

$$(5) \text{ 设 } P(x) = x^2(ax + b), \text{ 得 } P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2.$$

# 第三章 函数逼近与计算

## 一、内容提要

在实际问题中,常常遇到用各种方式定义的函数,有的函数的表达式用来计算函数值很不方便,因此,有时希望用一个简单的函数  $P(x)$  来近似替代给定的函数  $f(x)$ ,这称为函数逼近问题.  $P(x)$  称为逼近函数,  $f(x)$  称为被逼近函数. 插值问题实际上也是函数逼近问题. 函数逼近问题可叙述为:对于某个函数类  $A$  中给定的函数  $f(x)$ ,要求在另一较简单的函数类  $B \subset A$  中求一函数  $P(x) \in B$ ,使  $P(x)$  与  $f(x)$  之差在某种度量意义下为最小.

逼近误差的度量标准常用的有两种:一种是

$$\|f(x) - P(x)\|_{\infty} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)|,$$

在这种度量意义下的函数逼近称为一致逼近或均匀逼近;另一种度量标准是

$$\|f(x) - P(x)\|_2 = \sqrt{\int_a^b [f(x) - P(x)]^2 dx},$$

用这种度量的函数逼近称为平方逼近或均方逼近.

### 1. 最佳一致逼近多项式

设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的连续函数,  $H_n$  是所有次数不超过  $n$  的多项式的集合,在  $H_n$  中求  $P_n^*(x)$  逼近  $f(x)$ ,使其误差

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n^*(x)| = \min_{P_n \in H_n} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)|.$$

这就是通常所谓最佳一致逼近或 Chebyshev 逼近.

**定义 3.1**  $P_n(x) \in H_n, f(x) \in C[a, b]$ ,称

$$\Delta(f, P_n) = \|f - P_n\|_{\infty} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)|$$

为  $f(x)$  与  $P_n(x)$  在  $[a, b]$  上的偏差.

称  $E_n = \inf_{P_n \in H_n} \{\Delta(f, P_n)\} = \inf_{P_n \in H_n} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)|$  为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最小偏差.

**定义 3.2** 假定  $f(x) \in C[a, b]$ , 若存在  $P_n^*(x) \in H_n$ , 使

$$\Delta(f, P_n^*) = E_n,$$

则称  $P_n^*(x)$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最佳一致逼近多项式或最小偏差逼近多项式, 简称最佳逼近式.

**定理 3.1** 若  $f(x) \in C[a, b]$ , 则总存在  $P_n^*(x) \in H_n$ , 使

$$\|f(x) - P_n^*(x)\|_{\infty} = E_n.$$

此定理给出了最佳逼近多项式的存在性.

为了考虑最佳逼近多项式的唯一性问题, 有以下偏差点的定义.

**定义 3.3** 设  $f(x) \in C[a, b]$ ,  $P(x) \in H_n$ , 若在  $x = x_0$  上有

$$|P(x_0) - f(x_0)| = \max_{a \leq x \leq b} |P(x) - f(x)| = \mu,$$

则称  $x_0$  是  $P(x)$  的偏差点.

若  $P(x_0) - f(x_0) = \mu$ , 称  $x_0$  为“正”偏差点.

若  $P(x_0) - f(x_0) = -\mu$ , 称  $x_0$  为“负”偏差点.

**定理 3.2** 若  $P(x) \in H_n$  是  $f(x) \in C[a, b]$  的最佳逼近多项式, 则  $P(x)$  同时存在正、负偏差点.

这是最佳逼近多项式的偏差点性质. 下面是反映最佳逼近多项式特征的 Chebyshev 定理.

**定理 3.3**  $P(x) \in H_n$  是  $f(x) \in C[a, b]$  的最佳逼近多项式的充分必要条件是,  $P(x)$  在  $[a, b]$  上至少有  $n+2$  个轮流为“正”、“负”的偏差点, 即有  $n+2$  个点  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq b$ , 使

$$P(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma \|P(x) - f(x)\|_{\infty}, \quad \sigma = \pm 1.$$

这样的点组称为 **Chebyshev 交错点组**.

**推论 3.3.1** 若  $f(x) \in C[a, b]$ , 则在  $H_n$  中存在唯一的最佳

逼近多项式.

**推论 3.3.2** 若  $f(x) \in C[a, b]$ , 则其最佳逼近多项式  $P_n^* \in H_n$  就是  $f(x)$  的一个 Lagrange 插值多项式.

最佳逼近多项式的一些最简单情形.

1° 最佳一次逼近多项式

设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二次可微, 且  $f''(x)$  在  $(a, b)$  内恒正或恒负, 它的一次最佳一致逼近式为

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x,$$

由 Chebyshev 定理推得,

$$\begin{cases} a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_2), \\ a_0 = \frac{f(a) + f(x_2)}{2} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{a + x_2}{2}. \end{cases} \quad (3.1)$$

即

$$P_1(x) = \frac{f(a) + f(x_2)}{2} + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left( x - \frac{a + x_2}{2} \right).$$

2° 用 Chebyshev 多项式逼近函数

设所有  $n$  次多项式中  $x^n$  的系数是 1 的多项式集合为  $H_n$ .

**定理 3.4** 在区间  $[-1, 1]$  上, 最高次项系数为 1 的一切  $n$  次多项式中,  $\omega_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$  与零的偏差最小, 其偏差为  $\frac{1}{2^{n-1}}$ .

其中  $T_n(x) = \cos(\arccos x), \quad x \in [-1, 1].$

## 2. 最佳平方逼近

用均方误差最小作为度量标准, 研究函数  $f(x) \in C[a, b]$  的逼近多项式, 称为最佳平方逼近问题. 若存在  $P_n^*(x) \in H_n$ , 使

$$\|f - P_n^*\|_2 = \sqrt{\int_a^b [f(x) - P_n^*(x)]^2 dx} = \inf_{P_n \in H_n} \|f - P_n\|_2;$$

则  $P_n^*(x)$  就是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最佳平方逼近多项式.

1° 内积空间

**定义 3.4** 区间  $(a, b)$  上的非负函数  $\rho(x)$  若满足条件:

1)  $\int_a^b |x|^n \rho(x) dx$  存在 ( $n = 0, 1, \dots$ );

2) 对非负连续函数  $g(x)$ , 若  $\int_a^b g(x) \rho(x) dx = 0$ , 则在  $(a, b)$  上  $g(x) \equiv 0$ .

称  $\rho(x)$  为区间  $(a, b)$  上的权函数.

**定义 3.5** 设  $f(x), g(x) \in C[a, b]$ ,  $\rho(x)$  是  $[a, b]$  上的权函数, 积分

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx$$

称为函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $[a, b]$  上的内积.

满足内积定义的函数空间称为内积空间.

**定义 3.6** 设  $f(x) \in C[a, b]$ , 量

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx} = \sqrt{(f, f)},$$

称为  $f(x)$  的欧氏范数.

**定理 3.5** 对任何  $f, g \in C[a, b]$ , 下列结论成立.

1)  $|(f, g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$  (此式称为 Cauchy-Schwarz 不等式).

2)  $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$  (三角不等式).

3)  $\|f + g\|_2^2 + \|f - g\|_2^2 = 2(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2)$  (平行四边形定律).

**定义 3.7** 若  $f(x), g(x) \in C[a, b]$ , 满足

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = 0.$$

称  $f$  与  $g$  在  $[a, b]$  上带权  $\rho(x)$  正交. 若函数族  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  满足关系

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_a^b \rho(x) \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ A_k > 0, & j = k, \end{cases}$$

称  $\{\varphi_k\}$  是  $[a, b]$  上带权  $\rho(x)$  的正交函数族. 若  $A_k \equiv 1$ , 称  $\{\varphi_k\}$  为

## 标准正交函数族.

$\mathbf{R}^n$  空间中任一向量都可用它的一组基表示, 内积空间的任一元素  $f(x) \in C[a, b]$  也同样可用内积空间的基表示.

**定义 3.8** 若  $\varphi_0(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 如果

$$a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_{n-1} \varphi_{n-1}(x) = 0$$

当且仅当  $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$  时成立, 则称  $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$  在  $[a, b]$  上是线性无关的; 若函数族  $\{\varphi_k\} (k=0, 1, \dots)$  中的任何有限个  $\varphi_k$  线性无关, 则称  $\{\varphi_k\}$  为线性无关函数族.

**定理 3.6**  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$  在  $[a, b]$  上线性无关的充分必要条件是它的 Gramer 行列式  $G_{n-1} \neq 0$ ,

$$G_{n-1} = G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \\ = \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \dots & (\varphi_0, \varphi_{n-1}) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_1, \varphi_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_{n-1}, \varphi_0) & (\varphi_{n-1}, \varphi_1) & \dots & (\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

## 2° 函数的最佳平方逼近

设  $f(x) \in C[a, b]$  及  $C[a, b]$  中的一个子集  $\Phi = \text{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ , 若存在  $S^*(x) \in \Phi$ , 使

$$\|f - S^*(x)\|_2^2 = \inf_{S \in \Phi} \|f - S\|_2^2 \\ = \inf_{S \in \Phi} \int_a^b \rho(x) [f(x) - S(x)]^2 dx.$$

则称  $S^*(x)$  是  $f(x)$  在子集  $\Phi \subset C[a, b]$  中的最佳平方逼近函数.

此问题的提法也可叙述为: 求  $a_k^* (k=0, 1, \dots, n)$ , 使

$$\|f(x) - S^*(x)\|_2^2 = \|f(x) - \sum_{k=0}^n a_k^* \varphi_k(x)\|_2^2 \\ = \inf_{S(x) \in \Phi} \|f(x) - S(x)\|_2^2.$$

求  $S^*(x) = \sum_{k=0}^n a_k^* \varphi_k(x)$  的过程等价于求关于  $a_0, \dots, a_n$  的多元函数

$$I(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int_a^b \rho(x) [f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)]^2 dx$$

的最小值问题.

为了确定参数  $a_k (k=0, 1, \dots, n)$ , 由多元函数极值存在的必要条件, 有

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n),$$

即有

$$\sum_{j=0}^n (\varphi_k, \varphi_j) a_j = (f, \varphi_k) \quad (k=0, 1, \dots, n). \quad (3.2)$$

这是关于  $a_0, a_1, \dots, a_n$  的线性方程组, 称为法方程组. 由于  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  线性无关, 故方程组 (3.2) 的系数行列式  $G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \neq 0$ . 于是法方程组有唯一解  $a_k = a_k^* (k=0, 1, \dots, n)$ . 从而得到

$$S^*(x) = a_0^* \varphi_0(x) + a_1^* \varphi_1(x) + \dots + a_n^* \varphi_n(x).$$

$S^*(x)$  即为最佳平方逼近函数.

### 3. 正交多项式

若首项系数  $a_n \neq 0$  的  $n$  次多项式序列  $\{g_n(x)\}$  满足

$$\int_a^b \rho(x) g_j(x) g_k(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ A_k > 0, & j = k \end{cases} \quad (j, k=0, 1, \dots),$$

则称多项式序列  $g_0(x), g_1(x), \dots$ , 在  $[a, b]$  上带权  $\rho(x)$  正交, 并称  $g_n(x)$  是  $[a, b]$  上带权  $\rho(x)$  的  $n$  次正交多项式.

一般来说, 当权  $\rho(x)$  及区间  $[a, b]$  给定后, 由序列  $\{1, x, \dots, x^n, \dots\}$  就可构造出下列几类较重要的正交多项式.

1° Legendre 多项式

定义 3.9 由

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

确定的  $P_n(x) (n=0, 1, \dots)$  称为 Legendre 多项式.

Legendre 多项式有以下重要性质:

性质 1 Legendre 多项式系  $\{P_n(x)\}$  是区间  $[-1, 1]$  上的正交多项式系, 即

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1}, & n = m. \end{cases}$$

性质 2  $P_n(x)$  的最高次项系数为

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

性质 3  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ .

性质 4  $P_n(x)$  满足递推关系

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

$$P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

性质 5 在所有最高项系数为 1 的  $n$  次多项式中, Legendre 多项式的首 1 多项式  $P_n(x)$  在  $[-1, 1]$  上与零的平方误差最小.

性质 6  $P_n(x)$  在区间  $[-1, 1]$  内有  $n$  个不同的实零点.

2° Chebyshev 多项式

定义 3.10 设  $n$  为非负整数, 称

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

为 Chebyshev 多项式.

Chebyshev 多项式有以下重要性质:

性质 1 Chebyshev 多项式系  $\{T_n(x)\}$  是区间  $[-1, 1]$  上带权  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  的正交多项式系, 即

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \frac{\pi}{2}, & i = j \neq 0, \\ \pi, & i = j = 0. \end{cases}$$

性质 2  $T_n(x)$  是  $x$  的  $n$  次多项式, 并且当  $n \geq 1$  时,  $T_n(x)$  的

最高次项系数为

$$a_n = 2^{n-1}.$$

性质 3  $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$ .

性质 4  $T_n(x)$  满足递推关系

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \\ T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{cases}$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x, T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

性质 5  $T_n(x)$  在区间  $[-1, 1]$  上有  $n$  个零点

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

性质 6  $T_n(x)$  对零的偏差最小.

3° 第二类 Chebyshev 多项式

在区间  $[-1, 1]$  上带权  $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$  的正交多项式

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

称为**第二类 Chebyshev 多项式**, 且

$$\int_{-1}^1 U_n(x) U_m(x) \sqrt{1-x^2} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n. \end{cases}$$

4° Laguerre 多项式

在区间  $[0, +\infty)$  上带权  $e^{-x}$  的正交多项式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

称为**Laguerre 多项式**, 且

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ (n!)^2, & m = n. \end{cases}$$

5° Hermite 多项式

在区间  $(-\infty, +\infty)$  上带权  $e^{-x^2}$  的正交多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

称为 **Hermite 多项式**, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & m = n. \end{cases}$$

#### 4. 正交多项式在最佳平方逼近中的应用

对于一般的基底  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ , 当  $n$  稍大时, 计算法方程组中的  $(\varphi_k, \varphi_j)$  以及求解法方程组的计算量都是很大的. 若采用  $1, x, \dots, x^n$  作基底, 当  $\rho(x) \equiv 1$  时, 虽然  $(\varphi_k, \varphi_j) = (x^k, x^j)$  容易计算, 但由此形成的法方程组系数矩阵  $G$  在  $n \geq 4$  时是病态矩阵. 为避免上述的弊端, 可采用正交基底.

设  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  是区间  $[a, b]$  上带权  $\rho(x)$  的正交函数组, 即

$$(\varphi_k(x), \varphi_j(x)) = \int_a^b \rho(x) \varphi_k(x) \varphi_j(x) dx = 0, \quad k \neq j,$$

则法方程(3.2)的解为

$$a_k^* = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}.$$

##### 1° Legendre 多项式的应用

设  $f(x) \in C[-1, 1]$ ,  $H_n = \text{span}\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ , 其中  $P_k(x)$  是  $k$  次 Legendre 多项式, 此时, 法方程组(3.2)的解为

$$a_k^* = \frac{(f, P_k)}{(P_k, P_k)} = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 P_k(x) f(x) dx. \quad (3.3)$$

所求的  $n$  次最佳平方逼近多项式为

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k^* P_k(x), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

注: 若所给区间不是  $[-1, 1]$ , 而是一般的有限区间  $[a, b]$ , 则可通过变量置换

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t,$$

将它转化为区间  $-1 \leq t \leq 1$  上的情形处理.

## 2° Chebyshev 多项式的应用

设  $f(x) \in C[-1, 1]$ ,  $H_n = \text{span}\{T_0, T_1, \dots, T_n\}$ ,

其中  $T_k(x)$  是  $k$  次 Chebyshev 多项式. 此时, 法方程组 (3.2) 的解为

$$\begin{cases} a_0^* = \frac{(f, T_0)}{(T_0, T_0)} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \\ a_k^* = \frac{(f, T_k)}{(T_k, T_k)} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.4)$$

所求的  $n$  次最佳平方逼近多项式为

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k^* T_k(x), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

## 5. 近似最佳一致逼近多项式

1° 截断 Chebyshev 级数.

2° Lagrange 插值余项的极小化.

3° Taylor 级数项数的节约.

## 6. 曲线拟合的最小二乘法

问题的提法是, 对于给定的数据  $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, N)$ , 选取线性无关的函数族  $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  及权函数  $\omega(x)$ , 要求在函数类  $\Phi = \text{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  中寻找一个函数  $\varphi^*(x) = a_0^* \varphi_0 + a_1^* \varphi_1 + \dots + a_m^* \varphi_m (m < N)$ , 使

$$\sum_{i=1}^N \omega(x_i) [y_i - \varphi^*(x_i)]^2 = \min.$$

上式是  $m+1$  个变量  $a_0, a_1, \dots, a_m$  的二次函数

$$I(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^N \omega(x_i) \left[ y_i - \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x_i) \right]^2$$

的极值问题, 由多元函数极值的必要条件可知  $a_0^*, a_1^*, \dots, a_m^*$  是方程组

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_m) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_m, \varphi_0) & (\varphi_m, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_m, \varphi_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_0, y) \\ (\varphi_1, y) \\ \cdots \\ (\varphi_m, y) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

的解,其中

$$\begin{cases} (\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{i=1}^N \omega(x_i) \varphi_k(x_i) \varphi_j(x_i), \\ (\varphi_k, y) = \sum_{i=1}^N \omega(x_i) y_i \varphi_k(x_i), \quad j, k = 0, 1, \cdots, m. \end{cases} \quad (3.6)$$

此方程组称为**法方程组**,其系数矩阵是对称正定的.

若  $\varphi_k(x) = x^k, k = 0, 1, \cdots, m, \omega(x) = 1$ , 则拟合函数为

$$\varphi^*(x) = \sum_{k=0}^m a_k^* x^k,$$

此时法方程组为

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_i & \cdots & \sum_{i=1}^N x_i^m \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^N x_i^{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^N x_i^m & \sum_{i=1}^N x_i^{m+1} & \cdots & \sum_{i=1}^N x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N y_i \\ \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^N x_i^m y_i \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

若用  $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_m$  构成  $N \times (m+1)$  矩阵 **A**, 即

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_m(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_m(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_0(x_N) & \varphi_1(x_N) & \cdots & \varphi_m(x_N) \end{bmatrix},$$

又引入向量  $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_m)^T$ ,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ , 则法方程组(3.5)可写成以下的矩阵形式:

$$A^T A \alpha = A^T Y. \quad (3.8)$$

## 二、基本要求

- 1) 理解最佳一致逼近与最佳平方逼近的概念.
- 2) 会用 Chebyshev 逼近定理去构造最佳逼近函数.
- 3) 能正确应用法方程组, 获得最佳平方逼近函数.
- 4) 掌握曲线拟合的最小二乘方法, 并能应用该方法解决一些实际问题. 如曲线拟合, 解矛盾方程等.
- 5) 熟知正交多项式的有关性质, 能用正交多项式获得最佳平方逼近多项式及近似最佳一致逼近多项式.

## 三、例题选讲

**例 1** 求函数  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$  在  $[0, 1]$  上的一次最佳一致逼近多项式, 并求其偏差.

**解** 因  $f'(x) = x/\sqrt{1+x^2}$ ,  $f''(x) = 1/(1+x^2)^{3/2}$ , 所以在  $[0, 1]$  上  $f''(x)$  恒为正, 故由公式(3.1)知

$$a_1 = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142.$$

由  $f'(x_2) = x_2/\sqrt{1+x_2^2} = \sqrt{2} - 1$ , 得

$$x_2 = \left[ \frac{\sqrt{2}-1}{2} \right]^{1/2} \approx 0.4551,$$

且  $f(x_2) = \sqrt{1+x_2^2} \approx 1.0986$ ,  
所以

$$a_0 = \frac{1}{2}[f(0) + f(x_2)] - a_1 \frac{0 + x_2}{2} \approx 0.955.$$

于是得到  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$  在  $[0, 1]$  上一次最佳一致逼近多项式

$$P_1(x) = 0.955 + 0.4142x.$$

又因区间端点必属于 Chebyshev 交错点组,故

$$\begin{aligned}\Delta(f, P_1) &= \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - P_1| \\ &= |f(0) - P_1(0)| = 0.045.\end{aligned}$$

**例 2** 设  $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + x + 1$ , 试在  $[-1, 1]$  上寻找一个次数不超过 2 的多项式  $P_2(x)$ , 使它为  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上的最佳一致逼近多项式.

**解** 由题意, 所求  $P_2(x)$  应该满足

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - P_2(x)| = \min.$$

由定理 3.4 并注意到  $f(x)$  的首项系数为 4, 有

$$\frac{1}{4}[f(x) - P_2(x)] = \frac{1}{2^2}T_3(x) = \frac{1}{4}(4x^3 - 3x).$$

从而

$$P_2(x) = f(x) - (4x^3 - 3x) = 2x^2 + 4x + 1.$$

**例 3** 用 Lagrange 插值余项极小化方法, 求  $f(x) = e^{-x}$  在  $[0, 1]$  上的三次近似最佳一致逼近多项式, 使其误差不超过  $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$ .

**解** Lagrange 插值余项为

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \omega_{n+1}(x),$$

因此

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)| |\omega_{n+1}(x)|.$$

设  $\max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$ , 则

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|.$$

要让  $|\omega_{n+1}(x)|$  最小, 只须将  $[0, 1]$  变到  $[-1, 1]$ , 取 Chebyshev 多项式  $T_{n+1}(x)$  的零点作为  $x_i$  即可.

令  $M_{n+1} = \max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)|$ , 则

$$M_{n+1} = \max_{0 \leq x \leq 1} |(-1)^{n+1} e^{-x}| = 1,$$

故有  $|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|.$

令  $x = \frac{1}{2}(t+1)$ , 则当  $x \in [0, 1]$  时,  $t \in [-1, 1]$ . 取插值节点

$$x_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2k+1}{2(n+1)}\pi, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

则  $\omega_{n+1}(x)$  就是 Chebyshev 多项式  $\frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$ , 它对零的偏差最小, 此时有截断误差估计

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

即  $n = 3$ , 就有

$$|R_3(x)| \leq \frac{1}{2^7} \cdot \frac{1}{4!} = 0.0003255 < \frac{1}{2} \times 10^{-3}.$$

因此取插值节点为

$$x_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{8} \approx 0.9693,$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{3\pi}{8} \approx 0.69134,$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{5\pi}{8} \approx 0.30865,$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{7\pi}{8} \approx 0.03806.$$

用这些点所作的插值多项式为

$$P_3(x) = 0.99977 - 0.99290x + 0.46323x^2 - 0.10240x^3.$$

注: 关于插值节点的最佳选择, 根据最小零偏差多项式定理

(定理 3.4), 在  $[-1, 1]$  上,  $\omega_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$  与

零的偏差最小, 即  $\omega_{n+1}(x)$  应取成  $\frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$ ,  $x_k$  应取成  $T_{n+1}(x)$  的

零点:  $x_k = \cos \frac{2k+1}{2(n+1)}\pi$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), 这时有估计式

$$\begin{aligned} \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - P_n(x)| &\leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{-1 \leq x \leq 1} |\omega_{n+1}(x)| \\ &\leq \frac{1}{2^n} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

若插值区间为  $[a, b]$ , 作变换

$$x = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)t,$$

当  $x$  在  $[a, b]$  上变化时,  $t$  在  $[-1, 1]$  变化, 插值节点应取

$$x_k = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

这时, 有截断误差估计

$$\begin{aligned} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| &\leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)| \\ &\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

其中  $M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$ .

**例 4** 设在  $0 \leq x \leq 1$  上给定  $P(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$  试在允许误差为 0.008 的要求下降低  $P(x)$  的次数.

**解** 令  $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$ , 则当  $x \in [0, 1]$  时,  $t \in [-1, 1]$ .

由  $1 = T_0, t = T_1, t^2 = \frac{T_0 + T_2}{2}, t^3 = \frac{1}{4}(3T_1 + T_3), t^4 = \frac{1}{8}(3T_0 + 4T_2 + T_4)$ . 得

$$\begin{aligned} P(x) = f(t) &= 1 - \frac{1}{2}(t+1) + \left[\frac{1}{2}(t+1)\right]^2 \\ &\quad - \left[\frac{t+1}{2}\right]^3 + \left[\frac{t+1}{2}\right]^4 \\ &= \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right] + \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^2}\right]t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{1}{2^2} - \frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^3} \right] t^2 + \left[ -\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} \right] t^3 + \frac{1}{2^4} t^4 \\
& = \frac{11}{16} T_0 + \left[ -\frac{1}{8} \right] T_1 + \frac{1}{8} (T_0 + T_2) + \frac{1}{32} (3T_1 + T_3) \\
& \quad + \frac{1}{27} (3T_0 + 4T_2 + T_4) \\
& = \frac{107}{128} T_0 - \frac{1}{32} T_1 + \frac{5}{32} T_2 + \frac{1}{32} T_3 + \frac{1}{128} T_4.
\end{aligned}$$

因为  $\frac{1}{128} < 0.008$ ,  $\frac{1}{32} + \frac{1}{128} > 0.008$ , 故去掉含  $T_4$  的末项不会影响允许误差, 所以

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{107}{128} - \frac{1}{32}t + \frac{5}{32}(2t^2 - 1) + \frac{1}{32}(4t^3 - 3t) \\
&= \frac{87}{128} - \frac{1}{8}t + \frac{5}{16}t^2 + \frac{1}{8}t^3, \quad t \in [-1, 1].
\end{aligned}$$

将  $t = 2x - 1$  代入上式, 得  $[0, 1]$  上允许误差为 0.008 的近似多项式

$$\begin{aligned}
P(x) &= \frac{87}{128} - \frac{1}{8}(2x - 1) + \frac{5}{16}(2x - 1)^2 + \frac{1}{8}(2x - 1)^3 \\
&= \frac{127}{128} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + x^3, \quad x \in [0, 1].
\end{aligned}$$

**例 5** 将  $f(x) = \arcsin x$  在  $[-1, 1]$  上展开为 Chebyshev 级数, 并判断 Chebyshev 级数和 Taylor 级数哪一个收敛快?

**解** 先求  $f(x) = \arcsin x$  在  $[-1, 1]$  上的 Chebyshev 级数, 由 Chebyshev 级数的系数公式:

$$\begin{aligned}
a_0^* &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \\
a_k^* &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad k = 1, 2, \dots.
\end{aligned}$$

并注意到  $f(x)$  是奇函数, 有

$$a_{2l+1}^* = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\arcsin x \cos[(2l+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \theta \right] \cos(2l+1)\theta d\theta$$

$$\stackrel{\text{令 } x = \cos \theta}{=} \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2l+1)^2}, \quad l = 0, 1, 2, \dots.$$

故  $\arcsin x$  在  $[-1, 1]$  上的 Chebyshev 级数为

$$\arcsin x = \frac{4}{\pi} \left[ T_1(x) + \frac{1}{9} T_3(x) + \frac{1}{25} T_5(x) + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{(2l+1)^2} T_{2l+1}(x) + \dots \right].$$

而  $f(x)$  的 Taylor 级数为

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} x^{2k+1}, \quad x \in [-1, 1],$$

其中 
$$b_{2k+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \cdot \frac{1}{2k+1}.$$

比较  $a_{2k+1}^*$  与  $b_{2k+1}$ , 有

$$\frac{a_{2k+1}^*}{b_{2k+1}} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)} \cdot \frac{1}{2k+1}$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2k+1} d\theta.$$

上式当  $k$  增大时, 很快趋于零, 说明  $a_{2k+1}^*$  比  $b_{2k+1}$  更快地趋于零, 故 Chebyshev 级数收敛得快.

**例 6** (1) 求  $y = \arctan x$  在  $[0, 1]$  上的一次最佳一致逼近多项式;

(2) 利用 Chebyshev 级数的截断在  $[0, 1]$  上求  $y = \arctg x$  的一次近似最佳一致逼近多项式;

(3) 比较两者的偏差.

**解** (1) 在  $[0, 1]$  上  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0,$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0,$$

故

$$a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\arctg 1 - \arctg 0}{1 - 0} = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854.$$

由  $f'(x_2) = \frac{1}{1+x_2^2} = \frac{\pi}{4}$ , 得

$$x_2^2 = \sqrt{\frac{\pi}{4} - 1} \approx 0.5227,$$

且  $f(x_2) = \arctg(0.5227) \approx 0.48166.$

故 
$$a_0 = \frac{1}{2}[f(0) + f(x_2)] - a_1 \frac{0 + x_2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[0.48166 - 0.7854 \times 0.5227] \approx 0.0356.$$

故  $y = \arctg x$  在  $[0, 1]$  上的一次最佳一致逼近多项式为

$$P_1(x) = 0.0356 + 0.7854x.$$

(2) 设  $x = \frac{1}{2}(t+1)$ , 则

$$f(t) = f(x) = \arctg\left[\frac{t+1}{2}\right], \quad -1 \leq t \leq 1.$$

按 Chebyshev 级数的系数计算公式, 并求数值积分, 得

$$a_0^* = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\cos\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \arctan\left[\frac{\cos\theta+1}{2}\right] d\theta$$

$$\approx 0.4271.$$

$$a_1^* = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos\theta) \cos\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \arctg\left[\frac{\cos\theta+1}{2}\right] \cos\theta d\theta$$

$$\approx 0.3947.$$

故 
$$\arctg x \approx a_0^* T_0(t) + a_1^* T_1(t) = a_0^* + a_1^* t$$

$$= a_0^* + a_1^* (2x - 1) = 0.0324 + 0.789x,$$

即  $P_1(x) = 0.0324 + 0.789x$  是  $\arctg x$  在  $[0, 1]$  上的一次近似最佳一致逼近多项式.

(3) 由  $P_1(x)$  的性质知

$$\Delta(f, P_1) = \max_{0 \leq x \leq 1} |\arctan x - P_1(x)|$$

$$= |f(0) - P_1(0)| = 0.0356.$$

对于  $P_1(x)$ , 可令  $R(x) = \arctan x - P_1(x)$ , 则

$$R'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 0.7894.$$

解得  $R(x)$  的极值点为  $\tilde{x} = \left[ \frac{1}{0.7894} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \approx 0.5165$ ,

$$R(\tilde{x}) \approx 0.0366,$$

所以

$$\Delta(f, P_1) = \max\{|R(0)|, |R(\tilde{x})|, |R(1)|\} = 0.0366.$$

由此可见, 二者相差不大.

**例 7** 利用正交化方法求  $[0, 1]$  上带权  $\rho(x) = \ln \frac{1}{x}$  的前三个正交多项式  $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ .

**解**  $\rho(x) = \ln \frac{1}{x} = -\ln x$ , 利用公式

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = (x - \alpha) P_0(x),$$

$$P_2(x) = (x - \alpha) P_1(x) - \beta_1 P_0(x),$$

$$\beta_k = \frac{(P_1, P_1)}{(P_0, P_0)}, \quad \alpha_{k+1} = \frac{(xP_k, P_k)}{(P_k, P_k)}, \quad k = 0, 1,$$

以及内积定义:  $(f, g) = \int_0^1 \rho(x) f(x) g(x) dx$ , 得

$$(P_0, P_0) = -\int_0^1 \ln x dx = 1,$$

$$(xP_0, P_0) = -\int_0^1 \ln x \cdot x dx = \frac{1}{4}.$$

$$\alpha = \frac{(xP_0, P_0)}{(P_0, P_0)} = \frac{1}{4}, \quad P_1(x) = x - \frac{1}{4}.$$

再由  $(P_1, P_1) = \int_0^1 (-\ln x) \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 dx = \frac{7}{144},$

$$(xP_1, P_1) = \int_0^1 (-\ln x) x \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 dx = \frac{13}{576}.$$

得  $\alpha = \frac{(xP_1, P_1)}{(P_1, P_1)} = \frac{13}{28}, \quad \beta_1 = \frac{(P_1, P_1)}{(P_0, P_0)} = \frac{7}{144},$

$$\begin{aligned} \text{得} \quad P_2(x) &= \left[ x - \frac{13}{28} \right] \left[ x - \frac{1}{4} \right] - \frac{7}{144} \\ &= x^2 - \frac{5}{7}x + \frac{17}{252}. \end{aligned}$$

**例 8** 设  $g_2(x) = x^2 + ax + b$ , 对于任意常数  $C_0, C_1$  均满足条件

$$\int_0^1 g_2(x)(C_0 + C_1 x) dx = 0,$$

试求  $a, b$ .

**解** 因  $C_0, C_1$  可任意, 故不妨设  $C_0 = 1, C_1 = 0$  或  $C_0 = 0, C_1 = 1$ , 因满足

$$\int_0^1 g_2(x) dx = 0 \quad \text{及} \quad \int_0^1 g_2(x) x dx = 0,$$

于是得

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 + ax + b) dx &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}a + b = 0, \\ \int_0^1 (x^2 + ax + b) x dx &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = 0. \end{aligned}$$

解之得  $a = -1, b = \frac{1}{6}$ , 即  $g_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ .

**例 9** 定义内积  $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ , 试在  $H_1 = \text{span}\{1, x\}$  中寻求对于  $f(x) = \sqrt{x}$  的最佳平方逼近元素  $P(x)$ .

**解** 这里实际要求的是  $(0, 1)$  上的一次最佳平方逼近多项式  $P_1(x)$

在法方程(3.2)中, 取  $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x$ , 经计算  $(\varphi_0, \varphi_0) = \int_0^1 1 dx = 1$ ,  $(\varphi_0, \varphi_1) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ ,  $(\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ ,  $(f, \varphi_0) = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}$ ,  $(f, \varphi_1) = \int_0^1 x \sqrt{x} dx = \frac{2}{5}$ . 得法方程组为

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix},$$

解得  $a_0^* = \frac{4}{15}$ ,  $a_1^* = \frac{12}{15}$ . 故所求的最佳平方逼近元素

$$P(x) = \frac{4}{15} + \frac{12}{15}x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

平方误差

$$\begin{aligned} \|\delta\|_2^2 &= (f - P, f - P) = (f, f) - \sum_{k=0}^1 a_k^* (f, \varphi_k) \\ &= \int_0^1 x dx - \sum_{k=0}^1 a_k^* \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{15} \times \frac{2}{3} - \frac{12}{15} \times \frac{2}{5} = 0.002222. \end{aligned}$$

**例 10** 求  $f(x) = e^x$  在  $[-1, 1]$  上的三次最佳平方逼近多项式.

**解** 这里可取 Legendre 多项式  $P_n(x)$  作基函数, 即  $H_3 = \text{span}\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ .

由公式(3.3)知

$$a_k^* = \frac{(f, P_k)}{(P_k, P_k)} = \frac{2}{2k+1} \int_{-1}^1 P_k(x) f(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

而

$$\int_{-1}^1 P_0(x) f(x) dx = \int_{-1}^1 e^x dx = e - \frac{1}{e} = 2.3504,$$

$$\int_{-1}^1 P_1(x) f(x) dx = \int_{-1}^1 x e^x dx = 2e^{-1} = 0.7358,$$

$$\int_{-1}^1 P_2(x) f(x) dx = \int_{-1}^1 \left[ \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right] e^x dx = e - \frac{7}{e} = 0.1431,$$

$$\int_{-1}^1 P_3(x) f(x) dx = \int_{-1}^1 \left[ \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \right] e^x dx$$

$$= 37 \frac{1}{e} - 5e = 0.02013,$$

所以

$$a_0^* = \frac{1}{2} \times 2.3504 = 1.1752, \quad a_1^* = \frac{3}{2} \times 0.7358 = 1.1036,$$

$$a_2^* = \frac{5}{2} \times 0.1431 = 0.3578, \quad a_3^* = \frac{7}{2} \times 0.02013 = 0.07046,$$

于是得

$$\begin{aligned} S_3^*(x) &= a_0^* P_0(x) + a_1^* P_1(x) + a_2^* P_2(x) + a_3^* P_3(x) \\ &= a_0^* \cdot 1 + a_1^* \cdot x + a_2^* \left[ \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right] \\ &\quad + a_3^* \left[ \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \right] \\ &= 0.9963 + 0.9979x + 0.5367x^2 + 0.1761x^3. \end{aligned}$$

平方误差

$$\begin{aligned} \|\delta\|_2^2 &= \|e^x - S_3^*(x)\|_2^2 = \int_{-1}^1 e^{2x} dx - \sum_{k=0}^3 \frac{2}{2k+1} a_k^{*2} \\ &= 0.88 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

**例 11** 求  $f(x) = \sqrt{x}$  在区间  $[0, 1]$  上的一次最佳平方逼近多项式, 要求用  $P_0, P_1$  作基函数.

**解** 因 Legendre 多项式  $P_n(x)$  是  $[-1, 1]$  上带权  $\rho(x) = 1$  的正交多项式, 故需做变量代换. 令  $x = \frac{1}{2}(1+t)$ , 则

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1+t} = \varphi(t), \quad -1 \leq t \leq 1.$$

先求  $\varphi(t)$  在区间  $[-1, 1]$  上的一次最佳平方逼近多项式  $q_1(t)$ . 由

$$a_0^* = \frac{1}{2}(\varphi, P_0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1+t} dt = \frac{2}{3},$$

$$a_1^* = \frac{3}{2}(\varphi, P_1) = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{2}} \sqrt{1+t} dt = \frac{6}{15},$$

可知

$$q(t) = \frac{2}{3}P_0(t) + \frac{6}{15}P_1(t) = \frac{2}{3} + \frac{6}{15}t, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

将  $t = 2x - 1$  代入  $q(t)$ , 就得  $\sqrt{x}$  在区间  $[0, 1]$  上的一次最佳平方逼近多项式

$$S_1^*(x) = \frac{2}{3} + \frac{6}{15}(2x - 1) = \frac{4}{15} + \frac{12}{15}x.$$

**例 12** 用 Chebyshev 多项式求  $e^x$  在  $[-1, 1]$  上的最佳平方逼近多项式.

**解** 利用 Chebyshev 多项式系, 可以得到区间  $[-1, 1]$  上的函数  $f(x)$  对应于正交多项式系  $\{T_n(x)\} (n = 0, 1, \dots)$  的广义 Fourier 级数:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2}a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + a_2T_2(x) + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x), \end{aligned}$$

其中 
$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad k = 0, 1, \dots$$

如取上述级数的部分和

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k T_k(x),$$

则  $S_n(x)$  实际上就是  $f(x)$  在线性空间  $\Phi = \text{span}\{T_0, T_1, \dots, T_n\}$  中的最佳平方逼近多项式.

$f(x) = e^x$  的 Chebyshev 展开式的前几项的系数如下表所示.

$k$	0	1	2	3	4	5
$a_k$	2.532132	1.130318	0.271495	0.0443368	0.00547424	0.00054293

利用这个系数表, 可以求得  $e^x$  在  $[-1, 1]$  上的一次和三次最佳平方逼近多项式分别为

$$\begin{aligned} S_1(x) &= 1.266066 + 1.130318x, \\ S_3(x) &= 1.266066 + 1.130318x + 0.271495(2x^2 - 1) \\ &\quad + 0.0443368(4x^3 - 3x) \end{aligned}$$

$$= 0.994571 + 0.997308x + 0.54299x^2 + 0.177347x^3.$$

**例 13** 对某个长度测量  $n$  次, 得  $n$  个近似值  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 通常取其平均值

$$x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

作为所求的长度值, 试说明理由.

**解** 由误差方程组

$$x - x_i = r_i, \quad i = 1, \dots, n$$

作平方和

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2.$$

令

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2 \sum_{i=1}^n (x - x_i) = 0.$$

解得

$$x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

这表明, 所得结果在最小二乘的意义下使误差最小.

**例 14** 已知一组实验数据如下, 求它的拟合曲线.

$x_i$	1	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_i$	10	5	4	2	1	1	2	3	4

**解** 通常可按下列步骤求解.

(1) 描草图

由已知数据描出粗略的图形如图 3.1.

从图看出它近似为一条抛物线.

(2) 造型

由草图可设拟合曲线为

$$y = \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

(3) 建立包含未知数  $a_0, a_1, a_2$  的正规方程组. 若应用(3.7)式先列表(表 3.1)算出以下各数值:

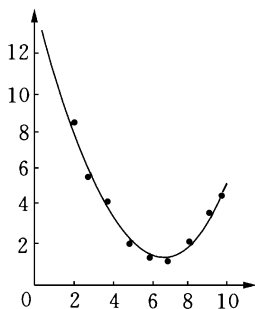


图 3.1

$$\sum_{i=1}^9 x_i, \sum_{i=1}^9 x_i^2, \sum_{i=1}^9 x_i^3, \sum_{i=1}^9 x_i^4, \sum_{i=1}^9 y_i, \sum_{i=1}^9 x_i y_i, \sum_{i=1}^9 x_i^2 y_i.$$

表 3.1 计算列表

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum_{i=1}^9$
$x_i$	1	3	4	5	6	7	8	9	10	53
$y_i$	10	5	4	2	1	1	2	3	4	32
$x_i y_i$	10	15	16	10	6	7	16	27	40	147
$x_i^2$	1	9	16	25	36	49	64	81	100	381
$x_i^2 y_i$	10	45	64	50	36	49	128	243	400	1025
$x_i^3$	1	27	64	125	216	343	512	729	1000	3017
$x_i^4$	1	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10000	25317

由表的最后一列的数值可得法方程组

$$\begin{cases} 9a_0 + 53a_1 + 381a_2 = 32, \\ 53a_0 + 381a_1 + 3017a_2 = 147, \\ 381a_0 + 3017a_1 + 25317a_2 = 1025. \end{cases}$$

(4) 求解法方程组得

$$a_0 = 13.45966, \quad a_1 = -3.60531, \quad a_2 = 0.26757.$$

故所求的二次拟合曲线为

$$y = \varphi(x) = 13.45966 - 3.60531x + 0.26757x^2.$$

**例 15** 已知一组实验数据如下,求它的拟合曲线.

$x_i$	1	2	3	4	5
$f_i$	4	4.5	6	8	8.5
$\omega_i$	2	1	3	1	1

**解** 在坐标纸上标出所给数据,如图 3.2. 从图看到各点在一条直线附近,故可选择线性函数作拟合曲线,即令

$$S_1(x) = a_0 + a_1 x.$$

这里(3.5)式中的  $N = 5, m = 1, \varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x$ ,故其法方程为

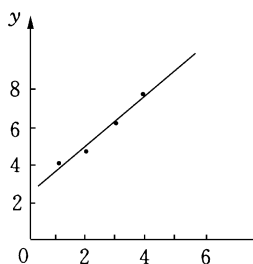


图 3.2

$$\sum_{j=0}^1 (\varphi_k, \varphi_j) a_j = (f, \varphi_k), \quad k = 0, 1,$$

其中

$$\begin{cases} (\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{i=1}^5 \omega(x_i) \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i), \\ (f, \varphi_k) = \sum_{i=1}^5 \omega(x_i) f(x_i) \varphi_k(x_i), \end{cases}$$

$$j, k = 0, 1.$$

即

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=1}^5 \omega_i = 8,$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_1, \varphi_0) = \sum_{i=1}^5 \omega_i x_i = 22,$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=1}^5 \omega_i x_i^2 = 74, \quad (\varphi_0, f) = \sum_{i=1}^5 \omega_i f_i = 47,$$

$$(\varphi_1, f) = \sum_{i=1}^5 \omega_i x_i f_i = 145.5.$$

于是得法方程组

$$\begin{cases} 8a_0 + 22a_1 = 47, \\ 22a_0 + 74a_1 = 145.5. \end{cases}$$

解得

$$a_0 = 2.77, \quad a_1 = 1.13.$$

于是所求拟合曲线为

$$S_1(x) = 2.77 + 1.13x.$$

**例 16** 求形如  $y = ae^{bx}$  ( $a, b$  为常数) 的经验公式, 使它能和下表给出的数据相拟合.

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y$	15.3	20.5	27.4	36.6	49.1	65.6	87.8	117.6

**解** 对经验公式两边取常用对数得

$$\lg y = \lg a + bx \lg e,$$

作变换令  $u = \lg y, A = \lg a, B = \lg e$ , 得

$$u = A + Bx.$$

这样可将原来的指数型拟合问题转化为一次多项式拟合来求解.  
为了得出法方程组需算出以下数值:

$$\sum_{i=1}^8 x_i, \quad \sum_{i=1}^8 u_i = \sum_{i=1}^8 \lg y_i, \quad \sum_{i=1}^8 x_i u_i, \quad \sum_{i=1}^8 x_i^2.$$

这些数值可由表 3.2 算出.

表 3.2 计算列表

$x_i$	$y_i$	$\lg y_i$	$x_i \lg y_i$	$x_i^2$
1	15.3	1.184691	1.184691	1
2	20.5	1.311754	2.623508	4
3	27.4	1.437751	4.313252	9
4	36.6	1.563481	6.253924	16
5	49.1	1.691081	8.455407	25
6	65.6	1.816241	10.89745	36
7	87.8	1.943495	13.60446	49
8	117.6	2.070407	16.56326	64
$\sum_{i=1}^8 36$	419.8	13.01890	63.89595	204

由上表得出的法方程组为

$$\begin{cases} 8A + 36B = 13.0189, \\ 36A + 204B = 63.89595. \end{cases}$$

求解得  $A = 1.058337, \quad B = 0.12645,$

由此得  $a = 11.43776, \quad b = 0.291162.$

因此, 所求的经验公式为

$$y = 11.43776e^{0.291162x}.$$

**例 17** 在某化学反应里, 根据实验所得生成物的浓度与时间关系如下表, 求浓度  $y$  与时间  $t$  的拟合曲线  $y = F(t)$ .

时间 $t(\text{分})$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
浓度 $y \times 10^{-3}$		6.40		8.80		9.50		9.86		10.20		10.42		10.55		10.60
	4.00		8.00		9.22		9.70		10.00		10.32		10.50		10.58	

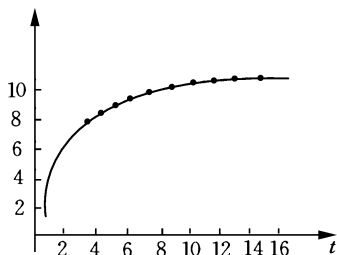


图 3.3

**解** 将数据标在坐标纸上,得图 3.3.我们看到开始时浓度增加较快,后来逐渐减弱,到一定时间就基本稳定在一个数值上,即当  $t \rightarrow \infty$  时,  $y$  趋于某个常数,故有一水平渐近线.另外,  $t=0$  时,反应未开始,浓度为 0. 根据这些特点,可设想  $y = F(t)$  是双曲线型

$$\frac{1}{y} = a + \frac{1}{t}, \text{ 即 } y = \frac{t}{(at + b)}.$$

为了确定  $a, b$ , 令  $\bar{y} = \frac{1}{y}, x = \frac{1}{t}$ , 于是可用  $x$  的线性函数  $S_1(x) = a + bx$  拟合数据  $(x_i, \bar{y}_i) (i=1, \dots, 16)$ .  $x_i, \bar{y}_i$  可由原始数据  $(t_i, y_i)$  根据变换计算出来. 由(3.5)式, 这里  $N = 16, m = 1$ ,  $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x$ . 用公式(3.6)求得  $(\varphi_k, \varphi_j), (\bar{y}, \varphi_k) j, k = 0, 1$  代入(3.5)式得法方程组

$$\begin{cases} 16a + 3.38073b = 1.8372 \times 10^3, \\ 3.38073a + 1.58435b = 0.52886 \times 10^3. \end{cases}$$

解得  $a = 80.6621, b = 161.6822$ .

从而得到

$$y = \frac{t}{80.6621t + 161.6822} = F^{(1)}(t).$$

误差为  $\delta_i^{(1)} = y_i - F^{(1)}(t_i) \quad (i=1, \dots, 16)$ .

由图所示,符合给定数据的函数还可选指数形式. 此时可令拟合曲线如

$$y = ae^{b/t}.$$

显然,当  $t \rightarrow \infty$  时  $y \rightarrow a$ ; 当  $t \rightarrow 0$  时,  $b < 0$ , 则  $y \rightarrow 0$ , 且  $t$  增加时  $y$  增加, 与给出数据规律大致相同. 为了确定  $a$  与  $b$ , 对上式两边取对数, 得

$$\ln y = \ln a + \frac{b}{t}.$$

令  $\hat{y} = \ln y$ ,  $A = \ln a$ ,  $x = \frac{1}{t}$ . 于是由  $(t_i, y_i)$  计算出  $(x_i, \hat{y}_i)$ , 拟合数据  $(x_i, \hat{y}_i)$  的曲线仍设为

$$S_1(x) = A + bx.$$

由(3.7)式, 这里  $N = 16, m = 1$ ,  $\sum_{i=1}^N x_i = 3.38073$ ,  $\sum_{i=1}^N x_i^2 = 1.58435$ ,  $\sum_{i=1}^N \hat{y}_i = -75.26394$ ,  $\sum_{i=1}^N x_i \hat{y}_i = -16.82229$ ,

得法方程组

$$\begin{cases} 16A + 3.38073b = -75.26394, \\ 3.38073A + 1.58435b = -16.82229. \end{cases}$$

解得

$$A = -4.48072, \quad b = -1.0567,$$

从而

$$a = e^A = 11.3253 \times 10^{-3}.$$

最后求得

$$y = 11.3253 \times 10^{-3} e^{-1.0567t} = F^{(2)}(t).$$

误差为

$$\delta_i^{(2)} = y_i - F^{(2)}(t_i), \quad (i = 1, 2, \dots, 16).$$

注: 1) 怎样比较这两个数学模型的好坏呢? 只要分别计算各点误差, 从中挑选误差较小的模型即可. 本例经过计算可得

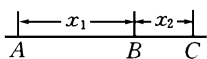
$$\max_i |\delta_i^{(1)}| = 0.568 \times 10^{-3}, \quad \max_i |\delta_i^{(2)}| = 0.277 \times 10^{-3},$$

而均方误差为

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (\delta_i^{(1)})^2} = 1.19 \times 10^{-3}, \quad \sqrt{\sum_{i=1}^m (\delta_i^{(2)})^2} = 0.34 \times 10^{-3}.$$

由此可知  $\|\delta_2^{(2)}\|_2$  及  $\|\delta_2^{(2)}\|_\infty$  都比较小, 所以用  $y = F^{(2)}(t)$  作拟合曲线比较好. 从本题看到, 选择拟合曲线的数学模型, 并不是一开始就能选好, 往往需通过分析若干模型后, 经过实际计算才能选到较好的模型, 如本题的指数模型就比双曲线模型好得多.

2) 用多项式  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  去近似一个给定的列表函数时, 需要确定的参数是  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , 其  $P_n(x)$  可以看成是  $a_0, a_1, \dots, a_n$  的线性函数. 但是, 有时利用观测(或实验)数据去确定一个经验公式时, 往往要确定的函数和待定参数之间不具有线性关系. 这样问题就变得有些复杂. 通常的处理方法是通过变量代换使其线性化. 如例 16、例 1 两题那样.



**例 18** 如图 3.4,  $AB$  长为  $x_1$ ,  $BC$  长为  $x_2$ , 某人测量的结果为  $x_1 = 15.5$  米,  $x_2 =$

图 3.4

6.1 米, 为控制丈量的准确性, 又测量  $AC =$

$x_1 + x_2 = 20.9$  米, 试合理地决定  $x_1$  和  $x_2$  的长度.

**解** 令  $x_1^*$  为  $AB$  的所求值,  $x_2^*$  为  $AC$  的所求值, 则

$$x_1 = 15.5 = x_1^* + \epsilon_1, \quad x_2 = 6.1 = x_2^* + \epsilon_2,$$

$$x_1 + x_2 = 20.9 = x_1^* + x_2^* + \epsilon_3.$$

$$\text{故} \quad \begin{cases} \epsilon_1 = 15.5 - x_1^*, \\ \epsilon_2 = 6.1 - x_2^*, \\ \epsilon_3 = 20.9 - (x_1^* + x_2^*). \end{cases}$$

在最小二乘意义下, 要

$$f = \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2$$

达到极小, 亦即求

$$f = (x_1^* - 15.5)^2 + (x_2^* - 6.1)^2 + (x_1^* + x_2^* - 20.9)^2$$

的极小点.

$$\text{令} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1^*} = 2(x_1^* - 15.5) + 2(x_1^* + x_2^* - 20.9) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2^*} = 2(x_2^* - 6.1) + 2(x_1^* + x_2^* - 20.9) = 0.$$

解得  $x_1^* = 15.2667, \quad x_2^* = 5.8667.$

故应取  $x_1 \approx 15.2667, \quad x_2 \approx 5.8667.$

**例 19** 在某个低温过程中, 函数  $y$  依赖于温度  $Q^\circ\text{C}$  的试验数据如下.

$Q$	1	2	3	4
$y$	0.8	1.5	1.8	2.0

而且已知经验公式是

$$g(Q) = aQ + bQ^2.$$

试用最小二乘法求出  $a, b$ .

**解** 因为所求的经验公式是关于  $Q$  的二次多项式, 但其中常数项为零, 所以, 不能直接套用法方程组 (3.7) 来求得  $a, b$ . 为此, 按最小二乘法的定义来推导其求法.

设其偏差平方和为

$$\varphi(a, b) = \sum_{i=0}^3 (aQ_i + bQ_i^2 - y_i)^2.$$

要使  $\varphi(a, b)$  达到极小, 必有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 2 \sum_{i=0}^3 (aQ_i + bQ_i^2 - y_i) Q_i = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = 2 \sum_{i=0}^3 (aQ_i + bQ_i^2 - y_i) Q_i^2 = 0,$$

从而, 得

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^4 Q_i^2 + b \sum_{i=1}^4 Q_i^3 = \sum_{i=1}^4 y_i Q_i, \\ a \sum_{i=1}^4 Q_i^3 + b \sum_{i=1}^4 Q_i^4 = \sum_{i=1}^4 y_i Q_i^2. \end{cases}$$

由已知数据计算出

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 Q_i^2 &= 30, & \sum_{i=1}^4 Q_i^3 &= 100, & \sum_{i=1}^4 Q_i^4 &= 354, \\ \sum_{i=1}^4 y_i Q_i &= 17.2, & \sum_{i=1}^4 y_i Q_i^2 &= 55. \end{aligned}$$

代入上式得

$$\begin{cases} 30a + 100b = 17.2, \\ 100a + 354b = 55. \end{cases}$$

解得

$$a = \frac{58.88}{62}, \quad b = -\frac{7}{62}.$$

故所求的经验公式为

$$g(Q) = \frac{58.88}{62}Q - \frac{7}{62}Q^2 = (0.9497 - 0.1129Q)Q.$$

**例 20** 给定数据表如下.

$i$	1	2	3	4	5
$x_i$	-2	-1	0	1	2
$y_i$	-0.1	0.1	0.4	0.9	1.6

试分别用二次和三次多项式以最小二乘法拟合表中的数据, 并比较优劣.

**解** (1) 设拟合函数  $y(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$ , 利用法方程的矩阵形式(3.8):

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{A}^T \mathbf{Y}.$$

这里  $\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2,$

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T, \mathbf{Y} = (-0.1, 0.1, 0.4, 0.9, 1.6)^T.$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^T \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 4.2 \\ 7 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 4.2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

解之得

$$a_1 = 0.4086, \quad a_2 = 0.42, \quad a_3 = 0.0857.$$

故所求的二次多项式为

$$y(x) = 0.4086 + 0.42x + 0.0857x^2.$$

误差平方和

$$\sigma_2 = \mathbf{Y}^T(\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{a}) = 0.00116.$$

(2) 设拟合函数  $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ , 利用法方程的矩阵形式(3.8)式, 则其中  $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2, \varphi_3(x) = x^3, \mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ , 于是有

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 34 \\ 10 & 0 & 34 & 0 \\ 0 & 34 & 0 & 130 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Y} = (2.9, 4.2, 7, 14.4)^T.$$

即法方程为

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 34 \\ 10 & 0 & 34 & 0 \\ 0 & 34 & 0 & 130 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 4.2 \\ 7 \\ 14.4 \end{bmatrix}.$$

解之得

$$a_0 = 0.4086, \quad a_1 = 0.39167, \quad a_2 = 0.0857, \quad a_3 = 0.00833.$$

得所求三次多项式为

$$y(x) = 0.4086 + 0.39167x + 0.0857x^2 + 0.00833x^3.$$

误差平方和为

$$\sigma_3 = \mathbf{Y}^T(\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{a}) = 0.000194.$$

由于  $\sigma_3 < \sigma_2$ , 所以, 用三次多项式拟合所给数据优于用二次多项式去拟合.

**例 21** 求矛盾方程的最小二乘解, 已知

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ -x_1 + x_2 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 = 3, \\ -3x_1 + x_2 = 4. \end{cases}$$

解 因  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ .

则法方程(3.8)的系数矩阵及右端项分别为

$$A^T A = \begin{bmatrix} 15 & -9 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}, \quad A^T Y = \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

即法方程为

$$\begin{bmatrix} 15 & -9 \\ -9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

解之得  $x_1 = -29/12$ ,  $x_2 = -39/12$ .

#### 四、习题

1. (1) 利用区间变换推出区间  $[a, b]$  的 Bernstein 多项式.

(2) 对  $f(x) = \sin x$  在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上求一次和三次 Bernstein 多项式, 并与相应的 Maclaurin 级数的部分和误差做比较.

2. 求证:

(1) 当  $m \leq f(x) \leq M$  时,  $m \leq B_n(f, x) \leq M$ ;

(2) 当  $f(x) = x$  时,  $B_n(f, x) = x$ .

3. 在次数不超过 6 的多项式中, 求  $f(x) = \sin 4x$  在  $[0, 2\pi]$  的最佳一致逼近多项式.

4. 假设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 求  $f(x)$  的零次最佳一致逼近多项式.

5. 选取常数  $a$ , 使  $\max_{0 \leq x \leq 1} |x^3 - ax|$  达到极小, 又问这个解是否

唯一?

6. 求  $f(x) = \sin x$  在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上的最佳一次逼近多项式, 并估计误差.

7. 求  $f(x) = e^x$  在  $[0, 1]$  上的最佳一次逼近多项式.

8. 如何选取  $r$ , 使  $p(x) = x^2 + r$  在  $[-1, 1]$  上与零偏差最小?  $r$  是否唯一?

9. 设  $f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$ , 在  $[0, 1]$  上求三次最佳逼近多项式.

10. 令  $T_n^*(x) = T_n(2x - 1)$ ,  $x \in [0, 1]$ , 求  $T_0^*(x)$ 、 $T_1^*(x)$ 、 $T_2^*(x)$ 、 $T_3^*(x)$ .

11. 试证  $\{T_n^*(x)\}$  是在  $[0, 1]$  上带权  $\rho = \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}$  的正交多项式.

12. 在  $[-1, 1]$  上利用插值极小化求  $f(x) = \arctan x$  的三次近似最佳逼近多项式.

13. 设  $f(x) = e^x$  在  $[-1, 1]$  上的插值极小化近似最佳逼近多项式为  $L_n(x)$ , 若  $\|f - L_n\|_\infty$  有界, 证明对任何  $n \geq 1$ , 存在常数  $\alpha_n, \beta_n$ , 使

$$\alpha_n |T_{n+1}(x)| \leq |f(x) - L_n(x)| \leq \beta_n |T_{n+1}(x)|, \\ -1 \leq x \leq 1.$$

14. 设在  $[-1, 1]$  上

$$\varphi(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{24}x^3 - \frac{15}{384}x^4 - \frac{165}{3840}x^5,$$

试将  $\varphi(x)$  降低到三次多项式并估计误差.

15. 在  $[-1, 1]$  上利用幂级数项数节约求  $f(x) = \sin x$  的三次逼近多项式, 使误差不超过 0.005.

16. 求  $a, b$  使  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax + b - \sin x)^2 dx$  为最小, 并与第 1 题及第 6 题的一次逼近多项式误差作比较.

17.  $f(x), g(x) \in C^1[a, b]$ , 定义

$$(1) (f, g) = \int_a^b f'(x) g'(x) dx,$$

$$(2) (f, g) = \int_a^b f'(x) g'(x) dx + f(a) g(a),$$

问它们是否构成内积?

18. 用 Cauchy-Schwarz 不等式估计  $\int_0^1 \frac{x^6}{1+x} dx$  的上界, 并用积分中值定理估计同一积分的上下界, 并比较其结果.

19. 选择  $a$ , 使下列积分取得最小值:

$$\int_{-1}^1 (x - ax)^2 dx, \quad \int_{-1}^1 |x - ax^2| dx.$$

20. 设  $\Phi_1 = \text{span}(1, x)$ ,  $\Phi_2 = \text{span}(x^{100}, x^{101})$ , 分别在  $\Phi_1, \Phi_2$  上求一元素, 使其为  $x^2 \in C[0, 1]$  的最佳平方逼近, 并比较其结果.

21.  $f(x) = |x|$  在  $[-1, 1]$  上定义, 求在  $\Phi = \text{span}(1, x^2, x^4)$  上的最佳平方逼近.

22.  $u_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$  是第二类 Chebyshev 多项式,

证明它有递推关系

$$u_{n+1}(x) = 2xu_n(x) - u_{n-1}(x).$$

23. 将  $f(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$  在  $[-1, 1]$  上按 legendre 多项式及 Chebyshev 多项式展开, 求三次最佳平方逼近多项式并画出误差图形, 再计算均方误差.

24. 将  $f(x) = \arccos x$  在  $[-1, 1]$  上展开 Chebyshev 级数.

25. 用最小二乘法求一个形如  $y = a + bx^2$  的经验公式, 使它与下列数据相拟合, 并计算均方误差.

$x_i$	19	25	31	38	44
$y_i$	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

26. 观测物体的直线运动, 得出以下数据.

时间 $t$ / 秒	0	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
距离 $s$ / 秒	0	10	30	50	80	110

求运动方程.

27. 在某化学反应里, 根据实验所得分解物的浓度与时间关系如下表.

时间 $t$ / 分	0	5	10	15	20	25
浓度 $y(\times 10^{-4})$	0	1.27	2.16	2.86	3.44	3.87
时间 $t$ / 分	30	35	40	45	50	55
浓度 $y(\times 10^{-4})$	4.15	4.37	4.51	4.58	4.62	4.64

用最小二乘拟合求  $y = F(t)$ .

28. 填空题

(1)  $n$  次 Chebyshev 多项式  $T_n(x)$  在  $[-1, 1]$  中有 \_\_\_\_\_ 个不同的实零点, 其零点  $x_k =$  \_\_\_\_\_.

(2)  $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$  是区间  $[0, 1]$  上权函数  $\rho(x) = x$  的最高项系数为 1 的正交多项式族, 其中  $\varphi_0(x) = 1$ , 则  $\int_0^1 x\varphi_3(x)dx =$  \_\_\_\_\_,  $\varphi_1(x) =$  \_\_\_\_\_.

(3) 设  $P_n(x)$  为 Legendre 多项式, 则  $\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx =$  \_\_\_\_\_.

(4) 在所有首项系数为 1 的  $n$  次多项式中, 首项系数为 1 的  $n$  次 \_\_\_\_\_ 多项式在  $[-1, 1]$  上与零的平方逼近误差最小.

## 五、习题解答

1. 解 (1) 令  $x = \frac{t-a}{b-a}$ , 则  $t = (b-a)x + a$ . 当  $x \in [0, 1]$  时,  $t \in [a, b]$ , 故

$$B_n(f, t) = \sum_{k=0}^n f \left[ \frac{k}{n} (b-a) + a \right] P_n(t),$$

其中

$$P_n(t) = \binom{n}{k} \left[ \frac{t-a}{b-a} \right]^k \left[ 1 - \frac{t-a}{b-a} \right]^{n-k}.$$

(2) 利用(1)中  $B_n(f, t)$ , 取  $a = 0, b = \frac{\pi}{2}$ , 得

$$\begin{aligned} B_1(f, t) &= \sum_{k=0}^1 \sin \left[ \frac{\pi}{2} k \right] P_1(t) \\ &= \sum_{k=0}^1 \sin \frac{\pi}{2} k \binom{1}{k} \left[ \frac{2}{\pi} t \right]^k \left[ 1 - \frac{2}{\pi} t \right]^{1-k} \\ &= 0 + \frac{2}{\pi} t = \frac{2}{\pi} t. \\ B_3(f, t) &= \sum_{k=0}^3 \sin \left[ \frac{\pi}{6} k \right] \binom{3}{k} \left[ \frac{2}{\pi} t \right]^k \left[ 1 - \frac{2}{\pi} t \right]^{3-k} \\ &= 0 + 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\pi} t \left[ 1 - \frac{2}{\pi} t \right]^2 \\ &\quad + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{2}{\pi} t \right]^2 \left[ 1 - \frac{2}{\pi} t \right] + \left[ \frac{2}{\pi} t \right]^3 \\ &= \frac{3}{\pi} t \left[ 1 - \frac{4}{\pi} t + \frac{4t^2}{\pi^2} \right] + \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} t^2 \left[ 1 - \frac{2}{\pi} t \right] + \frac{8}{\pi^3} t^3 \\ &= \frac{3}{\pi} t + \frac{6}{\pi^2} (\sqrt{3} - 2) t^2 + \frac{1}{\pi^3} (20 - 12\sqrt{3}) t^3. \end{aligned}$$

相应的 Maclaurin 级数为

$$\sin t \approx t, \quad \sin t \approx t - \frac{t^3}{3!}.$$

比较误差:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{2}{\pi} t - \sin t \right\|_{\infty} &= \max_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} \left| \frac{2}{\pi} t - \sin t \right| \\ &= \left| \frac{2}{\pi} \arccos \frac{2}{\pi} - \sin \arccos \frac{2}{\pi} \right| \\ &\approx 0.2105136, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|t - \sin t\|_{\infty} &= \max_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} |t - \sin t| \\
&= \left| \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \right| \approx 0.5707996. \\
\|B_3(f, t) - \sin t\|_{\infty} &= 0.075, \\
\|t - \frac{t^3}{3!} - \sin t\|_{\infty} &= 0.0796927.
\end{aligned}$$

结论: Berntein 多项式比相应的 Maclaurin 级数部分和更逼近  $\sin t$ .

2. 证明 (1) 因  $m \leq f(x) \leq M$ , 取

$$B_n(m, x) \leq B_n(f, x) \leq B_n(M, x),$$

即 
$$m \sum_{k=0}^n P_k(x) \leq B_n(f, x) \leq M \sum_{k=0}^n P_k(x).$$

因  $\sum_{k=0}^n P_k(x) = 1$ , 故

$$m \leq B_n(f, x) \leq M.$$

(2) 当  $f(x) = x$  时, 其 Bernstein 多项式

$$\begin{aligned}
B_n(f, x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{n-1}{k-1} \right] x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{n-1}{k} \right] x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{n-1}{k} \right] x^k (1-x)^{(n-1)-k} \cdot x \\
&= [x + (1-x)]^{n-1} \cdot x = x.
\end{aligned}$$

3. 解 因  $|\sin 4x - 0|$  在  $[0, 2\pi]$  上有 8 个交错点组, 故由定理 3.3 知  $\sin 4x$  的最佳一致逼近多项式为  $P(x) = 0$ .

4. 解 因  $f(x) \in C[a, b]$ , 故  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有最大、最小

值,分别记为  $M$  与  $m$ . 取  $P(x) = (M+m)/2$ , 可验证  $P(x)$  就是 0 次最佳一致逼近多项式. 这是因为

$$\begin{aligned}\max\left[f(x) - \frac{M+m}{2}\right] &= \frac{M-m}{2}, \\ \min\left[f(x) - \frac{M+m}{2}\right] &= -\frac{M-m}{2}.\end{aligned}$$

有二个交错点组, 故  $P(x) = (M+m)/2$  即为所求.

5. 解 设  $f(x) = x^3$ ,  $P_1(x) = ax$ .  $f''(x)$  在  $[0, 1]$  上不变号且连续,  $P_1(x)$  是  $f(x)$  的最佳一次逼近式.

因  $[f'(x) - P'_1(x)] = 3x^2 - a$  在区间内只有一个零点(这是因为  $f'(x)$  单调), 记为  $x_1 = \sqrt{a/3}$ , 故另外两个偏差点必在区间端点达到, 即有  $x_2 = 1$ , 且满足

$$-(x^3 - ax)|_{x_1=\sqrt{\frac{a}{3}}} = (x^3 - ax)|_{x_2=1},$$

即

$$\frac{2a}{3} \sqrt{\frac{a}{3}} = 1 - a,$$

$$(4a-3)(a-3)^2 = 0.$$

解得  $a = 3/4$ ,  $a = 3$ .

当  $a = 3$  时,  $x_1 = \sqrt{\frac{3}{3}} = 1 = x_2$ , 舍去.

故只可唯一取  $a = 3/4$ . 当  $a = 3/4$  时,  $x_1 = 1/2$ .

6. 解 设  $P_1(x) = a_0 + a_1 x$  为所需的最佳一次逼近式. 由公式 (3.1) 得

$$a_1 = f'(x_2) = (\sin x)'|_{x=x_2} = \cos x_2 = \frac{2}{\pi},$$

$$x_2 = \arccos \frac{2}{\pi} = 0.880688538,$$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{f(a) + f(x_2)}{2} - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \frac{a + x_2}{2} \\ &= \frac{\sin 0.880688538}{2} - \frac{2}{\pi} \frac{0.880688538}{2} = 0.105256594.\end{aligned}$$

故  $P_1(x) = \frac{2}{\pi}x + 0.105256594$  即为所求.

$$\begin{aligned}\|P_1(x) - \sin x\|_{\infty} &= \max_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} \left| \frac{2}{\pi}x + 0.105256594 - \sin x \right| \\ &= \left| \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} + 0.105256594 - 1 \right| \\ &\approx 0.105256594.\end{aligned}$$

7. 解 设  $P_1(x) = a_0 + a_1x$  为所求最佳逼近式, 由公式 (3.1) 得

$$a_1 = \frac{e^1 - e^0}{1} = e - 1.$$

又  $f'(x) = (e^x)' = e^x$ . 故由

$$e^{x_2} = e - 1, \text{ 得 } x_2 = \ln(e - 1).$$

$$f(x_2) = e^{\ln(e-1)} = e - 1,$$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{e^0 + e - 1}{2} - \frac{e - 1}{1} \frac{\ln(e - 1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}[e - (e - 1)\ln(e - 1)].\end{aligned}$$

故  $P_1(x) = \frac{1}{2}[e - (e - 1)\ln(e - 1)] + (e - 1)x$ .

8. 解 因  $p(x) = x^2 + r, x \in [-1, 1]$ . 由定理 3.4 知

$$x^2 + r = \frac{1}{2}T_2(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 1).$$

故知  $r = -\frac{1}{2}$  且唯一.

9. 解 令  $t = 2x - 1$ , 则当  $x \in [0, 1]$  时,  $t \in [-1, 1]$ . 得

$$\begin{aligned}f\left[\frac{t+1}{2}\right] &= \left[\frac{t+1}{2}\right]^4 + 3\left[\frac{t+1}{2}\right]^3 - 1 \\ &= \frac{1}{16}t^4 + \frac{5}{8}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{5}{8} = g(t).\end{aligned}$$

由定理 3.4 知

$$g(t) - P_3^*(t) = \frac{1}{8 \times 16} T_4(t)$$

与零的偏差最小,即

$$\begin{aligned} P_3^*(t) &= g(t) - \frac{1}{8 \times 16} T_4(t) \\ &= g(t) - \frac{1}{8 \times 16} (8t^4 - 8t^2 + 1) \\ &= \frac{1}{16} t^4 + \frac{5}{8} t^3 + \frac{3}{2} t^2 + \frac{3}{2} t - \frac{1}{16} t^4 + \frac{1}{16} t^2 - \frac{1}{8 \times 16} \\ &= \frac{5}{8} t^3 + \frac{25}{16} t^2 + \frac{3}{2} t - \frac{1}{128}. \\ P^*(2x-1) &= 5x^3 - \frac{5}{4} x^2 + \frac{1}{4} x - \frac{129}{128}. \end{aligned}$$

故  $P(x) = 5x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{129}{128}$  即为  $f(x) = x^4 + 3x^3 - 1$  在  $[0, 1]$  上的最佳三次逼近式.

10. 解 当  $x \in [0, 1]$  时,  $2x-1 \in [-1, 1]$ , 则

$$\begin{aligned} T_0^*(x) &= T_0(2x-1) = 1, \\ T_1^*(x) &= T_1(2x-1) = (2x-1), \\ T_2^*(x) &= T_2(2x-1) = 2(2x-1)^2 - 1 = 8x^2 - 8x + 1, \\ T_3^*(x) &= T_3(2x-1) = 4(2x-1)^3 - 3(2x-1) \\ &= 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \text{ 解 } & \int_0^1 T_n^*(x) T_m^*(x) \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 T_n(2x-1) T_m(2x-1) \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx \\ &= \frac{\text{令 } t=2x-1}{\int_{-1}^1 T_n(t) T_m(t) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt} \\ &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

12. 解 利用插值极小化法求近似最佳一致逼近多项式, 就是求以 chebyshev 多项式的零点为插值节点的那个插值多项式, 这样的插值多项式的插值余项能达到近似最小. 本题中要求三次多项式, 则插值节点应是  $T_4(x)$  的零点.

取  $T_4(x)$  的零点

$$x_k^* = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad n=4, k=1, 2, 3, 4$$

作为插值节点, 具体计算得

$$\begin{aligned} x_1^* &= \cos \frac{\pi}{8} \approx 0.9238795, & x_2^* &= \cos \frac{3\pi}{8} \approx 0.3826834, \\ x_3^* &= \cos \frac{5\pi}{8} \approx -0.3826834, & x_4^* &= \cos \frac{7\pi}{8} \approx -0.9238795. \end{aligned}$$

重新排序进行插值, 列表如下.

$i$	0	1	2	3
$x_i$	-0.9238795	-0.3826834	0.3826834	0.9238795
$y_i$	-0.745852643	-0.365489756	0.365489756	0.745852643

依据此表构造三次 Newton 插值多项式, 因

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] &= 0.702818972, & f[x_0, x_1, x_2] &= 0.193065229, \\ f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= -0.208972306. \end{aligned}$$

故由(2.3)式得

$$\begin{aligned} P_3(x) &= -0.745852643 + 0.702818922(x + 0.9238795) \\ &\quad + 0.193065229(x + 0.9238795)(x + 0.3826834) \\ &\quad - 0.208972306(x + 0.9238795)(x + 0.3826834) \\ &\quad \cdot (x - 0.3826834) \\ &\approx -0.208972306 x^3 + 0.985674118 x. \end{aligned}$$

13. 证 因为  $L_n(x)$  是  $f(x) = e^x$  在  $[-1, 1]$  上的插值极小化近似最佳一致逼近多项式, 故

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \omega_{n+1}(x)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x), \quad \xi \in (-1, 1).$$

从而有

$$|f(x) - L_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{2^n(n+1)!} |T_{n+1}(x)|, \quad \xi \in (-1, 1).$$

又由于  $e^{-1} < f^{(n+1)}(\xi) < e$ , 故

$$\begin{aligned} \frac{e^{-1}}{2^n(n+1)!} |T_{n+1}(x)| &\leq |f(x) - L_n(x)| \\ &\leq \frac{e}{2^n(n+1)!} |T_{n+1}(x)|. \end{aligned}$$

令  $\alpha_n = e^{-1}/2^n(n+1)!$ ,  $\beta_n = e/2^n(n+1)!$ , 则对任何  $n \geq 1, x \in [-1, 1]$ , 都有

$$\alpha_n |T_{n+1}(x)| \leq |f(x) - L_n(x)| \leq \beta_n |T_{n+1}(x)|.$$

14. 解 用 Chebyshev 多项式降低已知多项式的次数, 就是用  $T_k(x)$  来表示  $x^k$ , 然后舍去高次 Chebyshev 多项式的项, 即可降低多项式的次数. 由

$$\begin{aligned} x^5 &= \frac{1}{16} T_5(x) + \frac{5}{4} x^3 - \frac{5}{16} x, \\ x^4 &= \frac{1}{8} T_4(x) + x^2 - \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

代入  $\varphi(x)$  中, 得

$$\varphi(x) = P_3(x) + R_3(x),$$

其中

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 1.0048828 - 0.4914551x - 0.1640625x^2 \\ &\quad - 0.1591797x^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |R_3(x)| &= |\varphi(x) - P_3(x)| \\ &= \left| -\frac{15}{384 \times 8} T_4 - \frac{105}{3840 \times 16} T_5 \right| \\ &\leq \frac{15}{384 \times 8} + \frac{105}{3840 \times 16} \approx 0.0066. \end{aligned}$$

15. 解 用 Taylor 级数, 取  $n = 5$ , 其误差不超过 0.0002.

用幂级数节约可降低到 3 次:

$$P_3(x) = 0.9773958x - 0.15625x^3,$$

$$|P_3(x)| \leq \frac{1}{5} |T_5(x)| + 0.0002 < 0.005.$$

16. 解 题意即为在  $\Phi = \text{span}\{1, x\}$  中求  $f(x) = \sin x$  的最佳平方逼近元  $\varphi_1(x) = ax + b$ , 故  $a, b$  满足法方程

$$\begin{cases} b(\varphi_0, \varphi_0) + a(\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_0, f), \\ b(\varphi_1, \varphi_0) + a(\varphi_1, \varphi_1) = (\varphi_1, f). \end{cases}$$

经计算有

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}b + \frac{\pi^2}{8}a = 1 \\ \frac{\pi^2}{8}b + \frac{\pi^2}{24}a = 1 \end{cases}$$

解得  $a \approx 0.6644389, \quad b \approx 0.1147707.$

故  $\varphi_1(x) \approx ax + b = 0.6644389x + 0.1147707.$

而

$$\begin{aligned} \|\varphi_1(x) - \sin x\|_{\infty} &= \max_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} |0.6644389x + 0.1147707 - \sin x| \\ &= |0.6644389 \times \frac{\pi}{2} + 0.1147707 - \sin \frac{\pi}{2}| \\ &\approx 0.158468002. \end{aligned}$$

与第 1 题与第 6 题所作的一次逼近多项式误差比较

$$\left\| \frac{2}{\pi}t - \sin t \right\|_{\infty} \geq \|\varphi_1(x) - \sin x\|_{\infty} \geq \|P_1(x) - \sin x\|_{\infty}.$$

17. 解 (1) 显然有

$$(f, g) = (g, f),$$

$$(Cf, g) = C(f, g), C \text{ 为常数.}$$

$$(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$$

但不满足“当且仅当  $f = 0$  时  $(f, f) = 0, (f, f) \geq 0$ ”, 这是因为

$$(f, f) = \int_a^b (f'(x))^2 dx = 0,$$

推出  $f'(x) = 0$ , 即  $f$  为常数, 但不一定为 0. 故 1) 不构成内积.

(2) 显然内积公理的 1)、2)、3) 均满足. 考察第 4 条,

$$(f, f) = \int_a^b (f'(x))^2 dx + f^2(a),$$

若  $f = 0$ , 则必有  $(f, f) = 0$ . 反之, 若  $(f, f) = 0$ , 则  $f'(x) = 0$  且  $f^2(a) = 0$ . 由此可推得  $f = 0$ . 即内积公理第 4) 条满足. 故 2) 构成内积.

18. 解 利用 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{x^6}{1+x} dx \right| &\leq \sqrt{\int_0^1 \left( \frac{1}{1+x} \right)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 (x^6)^2 dx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \approx 0.1961161. \end{aligned}$$

再利用积分中值定理估计.

$$\int_0^1 \frac{x^6}{1+x} dx = \frac{1}{1+\xi} \int_0^1 x^6 dx = \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{1}{7}, \quad 0 < \xi < 1.$$

故 
$$\frac{1}{7} < \int_0^1 \frac{x^6}{1+x} dx < \frac{1}{14}.$$

经两者误差界的比较可知, 利用积分中值估计的上下界小于 Cauchy-Schwarz 不等式得到上下界.

19. 解 令  $I(a) = \int_{-1}^1 (x - ax^2)^2 dx$  则

$$\frac{\partial I}{\partial a} = -2 \int_{-1}^1 (x - ax^2) x^2 dx = 4 \int_0^1 ax^4 dx = \frac{4}{5} a.$$

令  $\frac{\partial I}{\partial a} = 0$ , 得  $a = 0$ , 即当  $a = 0$  时,  $I(0) = \frac{2}{3}$  为最小值.

再令 
$$J(a) = \int_{-1}^1 |x - ax^2| dx.$$

当  $|a| \leq 1$  时,

$$\begin{aligned} J(a) &= \int_{-1}^0 |x - ax^2| dx + \int_0^1 |x - ax^2| dx \\ &= \int_{-1}^0 (ax^2 - x) dx + \int_0^1 (x - ax^2) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{a}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{a}{3} = 1;$$

当  $a > 1$  时,

$$\begin{aligned} J(a) &= \int_{-1}^0 (ax^2 - x)dx + \int_0^{\frac{1}{a}} (x - ax^2)dx + \int_{\frac{1}{a}}^1 (ax^2 - x)dx \\ &= \frac{a}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2a^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{3a^{\frac{2}{3}}} + \frac{a}{3} \left[ 1 - \frac{1}{a^3} \right] - \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{a^2} \right] \\ &= \frac{1}{3a^{\frac{2}{3}}} + \frac{2}{3}a; \end{aligned}$$

当  $a < -1$  时,

$$\begin{aligned} J(a) &= \int_{-1}^{\frac{1}{a}} (x - ax^2)dx + \int_{\frac{1}{a}}^0 (ax^2 - x)dx + \int_0^1 (x - ax^2)dx \\ &= \frac{1}{3a^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{3}a. \end{aligned}$$

故

$$J(a) = \begin{cases} 1, & |a| \leq 1, \\ \frac{1}{3a^{\frac{2}{3}}} + \frac{2a}{3}, & a > 1, \\ \frac{1}{3a^{\frac{2}{3}}} - \frac{2a}{3}, & a < -1. \end{cases}$$

$a > 1$  时,  $J'(a) = -\frac{2}{3} \frac{1}{a^{\frac{4}{3}}} + \frac{2}{3} > 0$ , 则  $J(a)$  单调增且  $J(a) >$

$$J(1) = 1;$$

$a < -1$  时,  $J'(a) = -\frac{2}{3} \frac{1}{a^{\frac{4}{3}}} - \frac{2}{3} < 0$ , 则  $J(a)$  单调减且  $J(a)$

$$> J(-1) = 1.$$

所以, 当  $|a| \leq 1$  时,  $J(a)$  取最小值 1.

20. 解 在  $\Phi$  上取元  $S_1(x) = a_0 + a_1 x$ , 有法方程

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \end{bmatrix}.$$

由

$$(\varphi_0, \varphi_1) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \quad (\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_0^1 1 dx = 1, \quad (f, \varphi_0) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$(f, \varphi_1) = \int_0^1 x^2 \cdot x dx = \frac{1}{4}.$$

$$\text{得} \quad \begin{cases} a_0 + \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{3} a_1 = \frac{1}{4}, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a_0 = -\frac{1}{6}, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

$$\text{即} \quad S_1(x) = x - \frac{1}{6}.$$

在  $\Phi_2$  上取元  $S_2(x) = a_0 x^{100} + a_1 x^{101}$  算得

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_0^1 x^{200} dx = \frac{1}{201}, \quad (\varphi_0, \varphi_1) = \int_0^1 x^{201} dx = \frac{1}{202},$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 x^{202} dx = \frac{1}{203}, \quad (f, \varphi_0) = \int_0^1 x^{102} dx = \frac{1}{103},$$

$$(f, \varphi_1) = \int_0^1 x^{103} dx = \frac{1}{104}.$$

则有法方程:

$$\begin{cases} \frac{1}{201} a_0 + \frac{1}{202} a_1 = \frac{1}{103}, \\ \frac{1}{202} a_0 + \frac{1}{203} a_1 = \frac{1}{104}, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a_0 \approx 375.24253, \\ a_1 \approx -375.14825. \end{cases}$$

$$\text{故} \quad S_2(x) = 375.24253 x^{100} - 375.14825 x^{101}.$$

其误差

$$\|f - S_1\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^1 a_j (f, \varphi_j) \approx 0.0056,$$

$$\|f - S_2\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^1 a_j (f, \varphi_j) \approx 0.164.$$

显然用  $S_1$  逼近  $f(x) = x^2$  较用  $S_2$  逼近  $f(x) = x^2$  好.

21. 解 取  $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x^2, \varphi_2 = x^4$ , 则所求最佳平方逼近元

可设为  $S(x) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4$ . 经计算可得法方程:

$$\begin{cases} 2a_0 + \frac{2}{3}a_1 + \frac{2}{5}a_2 = 1, \\ \frac{2}{3}a_0 + \frac{2}{5}a_1 + \frac{2}{7}a_2 = \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{5}a_0 + \frac{2}{7}a_1 + \frac{2}{9}a_2 = \frac{1}{3}, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a_0 \approx 0.1171875, \\ a_1 \approx 1.640625, \\ a_2 \approx -0.8203125. \end{cases}$$

故  $S(x) = 0.1171875 + 1.640625x^2 - 0.8203125x^4$ .

此题还可设  $f(t) = \sqrt{t} = \sqrt{x^2}$ ,  $t \in [0, 1]$ ,

$$\Phi = \text{span}\{1, t, t^2\},$$

22. 证 因  $\sin(n+2)\theta = 2\sin(n+1)\theta \cdot \cos\theta - \sin n\theta$ , 则

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= \frac{\sin[(n+2)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2\sin(n+1)\arccos x \cdot x - \sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 2x \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 2xu_n(x) - u_{n-1}(x). \end{aligned}$$

故得递推关系

$$u_{n+1}(x) = 2xu_n(x) - u_{n-1}(x).$$

23. 解 用 Legendre 多项式展开, 即

$$f(x) \sim a_0^* P_0(x) + a_1^* P_1(x) + \cdots + a_n^* P_n(x) + \cdots,$$

其中

$$a_k^* = \frac{(f, P_k)}{(P_k, P_k)} = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx.$$

由  $P_0 = 1$ , 得  $a_0^* = 0$

$$P_1 = x, \text{ 得 } a_1^* = \frac{2+1}{2} \int_{-1}^1 \sin \frac{\pi}{2} x \cdot x dx \approx 1.2158542,$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \text{ 得 } a_2^* = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 \sin \frac{\pi}{2} x \cdot P_2(x) dx = 0,$$

$$a_3^* = \frac{7}{2} \int_{-1}^1 \sin \frac{\pi}{2} x P_3(x) dx \approx 0.2248914.$$

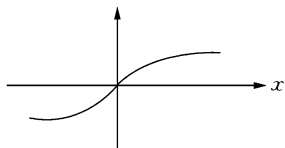


图 3.5

故所求三次最佳平方逼近多项式为

$$\begin{aligned} S_3^*(x) &= a_0^* P_0(x) + a_3^* P_3(x) \\ &= 1.5531913x - 0.5622285x^3. \\ \|\delta_3\|_2^2 &= 0.000154, \\ \|\delta_3\|_\infty &= 0.0039. \end{aligned}$$

24. 解 展为 Chebyshev 级数, 即

$$f(x) \sim \frac{C_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^* T_k(x),$$

$$C_0^* = \int_{-1}^1 \arccos x dx = \pi.$$

$$C_k^* = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \cos k(\arccos x) dx = \frac{2}{k^2 \pi} (\cos k\pi - 1).$$

故 
$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2 \pi} (\cos k\pi - 1) T_k(x).$$

25. 解 由题意知  $\Phi = \text{span}\{1, x^2\}$ ,  $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x^2$ . 经计算

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=1}^5 1^2 = 5, \quad (\varphi_0, \varphi_1) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 5327,$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=1}^5 x_i^4 = 7277699, \quad (\varphi_0, y) = \sum_{i=1}^5 y_i = 271.4,$$

$$(\varphi_1, y) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 y_i = 369321.5,$$

得法方程组

$$\begin{cases} 5a + 5327b = 271.4, \\ 5327a + 7277699b = 369321.5, \end{cases}$$

解之得

$$a = 0.9726046, \quad b = 0.0500351.$$

故

$$y = 0.9726046 + 0.0500351x^2.$$

均方误差为

$$\|\delta\|_2 = [\|y\|_2^2 - a(\varphi_0, y) - b(\varphi_1, y)]^{1/2}$$

$$= (0.0150232)^{1/2} = 0.123.$$

26. 解 设运动方程为  $S = at + b$ .

$$\sum_{i=1}^6 1 = 6, \quad \sum_{i=1}^6 x_i = 14.7, \quad \sum_{i=1}^6 x_i^2 = 53.63,$$

$$\sum_{i=1}^6 y_i = 280, \quad \sum_{i=1}^6 x_i y_i = 1078.$$

得法方程

$$\begin{cases} 6b + 14.7a = 280, \\ 14.7b + 53.63a = 1078, \end{cases}$$

解之得  $b = -7.8550478, \quad a = 22.25376.$

故  $S = 22.25376t - 7.8550478.$

27. 解 描草图, 如图 3.6 所示.

观察此曲线近似于指数函数, 故设

$y = ae^{\frac{b}{t}}$ , 此时  $y$  关于  $a, b$  是非线性的.

对上式两边取对数, 得

$$\ln y = \ln a + \frac{b}{t}.$$

记  $\bar{y} = \ln y, A = \ln a$ , 则有

$$\bar{y} = A + b \frac{1}{t},$$

即  $\Phi = \text{span}\{1, \frac{1}{t}\}, \quad \varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = \frac{1}{t}.$

算得

$$\sum_{i=1}^{11} \frac{1}{t_i} = 0.6039755, \quad \sum_{i=1}^{11} \frac{1}{t_i^2} = 0.06232136.$$

得法方程  $\begin{cases} 11A + 0.6039755b = 13.639649, \\ 0.6039755A + 0.06232136b = 0.5303303. \end{cases}$

解之有

$$b = -7.4961692, \quad A = 1.6515592 \Rightarrow a = 5.2151048.$$

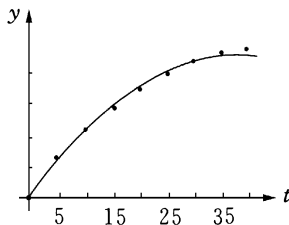


图 3.6

故

$$y = 5.2151048e^{-7.4961692\frac{1}{t}}.$$

28. 解 (1) 有  $n$  个不同的实零点;  $x_k = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi, k = 1,$

$2, \dots, n.$

(2)  $\int_0^1 x\varphi_3(x)dx = 0, \varphi(x) = x - \frac{2}{3}.$  提示: 设  $\varphi(x) = x +$

$C.$  则由

$$\int_0^1 x(x+C)dx = \frac{1}{3} + \frac{C}{2} = 0, \text{ 解出 } C = -\frac{2}{3}.$$

$$(3) \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1}, & n = m. \end{cases}$$

(4) Legendre.

## 第四章 数值积分与数值微分

### 一、内容提要

微积分在科学和工程中有着广泛的应用.在微积分的教材中,只提供了一些简单或特殊函数的积分与微分的解析表达式,如一些函数在 $[a, b]$ 上的积分,可用 Newton-Leibniz 公式

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

计算.但若  $f(x)$  的原函数不能用初等函数表出,或即便  $f(x)$  的原函数可用初等函数表出,但过于复杂不便于计算其数值,还有,若函数关系用表格形式给出,等等,这些都不便使用 Newton-Leibniz 公式.因此,采用数值的方法计算定积分就是很必要且很有效的.

#### 1. 数值求积公式的概念

对于积分

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

所谓用数值方法求  $I(f)$  的值,就是用被积函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上一些节点  $x_k$  处的函数值  $f(x_k)$  的线性组合

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \quad (4.1)$$

去近似  $I(f)$ .称  $x_k$  为求积节点,  $A_k$  为求积系数,  $I_n(f)$  为近似求积公式.一旦  $x_k$ 、 $A_k$  确定,则近似求积公式  $I_n$  也就确定了.

**定义 4.1** 若定积分  $I(f)$  的某个近似求积公式  $I_n(f)$  对于一切不高于  $m$  次的代数多项式  $P_m$  准确成立,即  $I(P_m) = I_n(P_m)$ ,而对于某个  $m+1$  次多项式并不准确成立,即  $I_n(P_{m+1}) \neq I(P_{m+1})$ ,则称近似求积公式  $I_n(f)$  具有  $m$  次代数精度.

余项:  $R(f) = I(f) - I_n(f)$ .

**定义 4.2** 在数值求积公式(4.1)中,若求积系数由

$$A_k = \int_a^b l_k(x) dx = \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} dx$$

确定,则称(4.1)式为**插值型求积公式**.

**定理 4.1** 形如  $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$  的求积公式至少有  $n$  次代数精度的充要条件是,它是插值型的求积公式.

## 2. Newton-Cotes 求积公式

Newton-Cotes 求积公式是节点等距的插值型求积公式.将  $[a, b]$   $n$  等分,其节点为  $x_k = a + kh, k=0, 1, 2, \dots, n, h = \frac{b-a}{n}$ , 节点  $x_k$  处的函数值为  $f(x_k)$ , 则 Newton-Cotes 求积公式为

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) = (b-a) \sum_{k=0}^n C_k f(x_k). \quad (4.2)$$

其中  $C_k$  为 Cotes 系数,

$$C_k = \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot k! (n-k)!} \int_0^n t(t-1) \cdots (t-k+1)(t-k-1) \cdots (t-n) dt, \\ k=0, 1, \dots, n.$$

$C_k$  只依赖于  $n$ , 与积分区间及被积函数都无关.

$n=1$  时,求积公式为梯形公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)], \quad (4.3)$$

余项 
$$R(f) = -\frac{1}{12} (b-a)^3 f''(\eta), \quad a \leq \eta \leq b. \quad (4.4)$$

$n=2$  时,求积公式为 Simpson 公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right], \quad (4.5)$$

余项 
$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta), \quad a \leq \eta \leq b. \quad (4.6)$$

$n=4$  时,求积公式为 Cotes 公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{90} [7f(a) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(b)]. \quad (4.7)$$

$$x_k = a + kh, \quad k=1, 2, 3, \quad h = \frac{b-a}{4},$$

$$\text{余项} \quad R(f) = -\frac{2(b-a)}{945} \left[ \frac{b-a}{4} \right]^6 f^{(6)}(\eta), \quad a \leq \eta \leq b. \quad (4.8)$$

**定理 4.2** 当  $n$  为偶数时, Newton-Cotes 公式(4.2)至少有  $n+1$  次代数精度.

### 3. 复化求积公式

将积分区间  $[a, b]$  划分为  $n$  等分, 步长  $h = \frac{b-a}{n}$ , 分点为  $x_k = a + kh, k=0, 1, \dots, n$ . 所谓复化求积法, 是指先用低阶的 Newton-Cotes 公式求得每个子区间  $[x_k, x_{k+1}]$  上的积分值  $I_k$ , 然后再求和, 用  $\sum_{k=0}^{n-1} I_k$  作为所求积分  $I$  的近似值.

复化梯形公式

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \\ &= \frac{h}{2} [f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\text{余项} \quad R(f) = I - T_n = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta), \quad \eta \in [a, b]. \quad (4.10)$$

复化 Simpson 公式

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{6} [f(x_k) + 4f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})] \\ &= \frac{h}{6} [f(a) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)], \end{aligned} \quad (4.11)$$

其中  $x_{k+\frac{1}{2}}$  是子区间  $[x_k, x_{k+1}]$  的中点.

$$\text{余项} \quad R(f) = I - S_n = -\frac{b-a}{180} \left( \frac{h}{2} \right)^4 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [a, b]. \quad (4.12)$$

复化 Cotes 公式

$$C_n = \frac{h}{90} \left[ 7f(a) + 32 \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_{k+\frac{1}{4}}\right) + 12 \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + 32 \sum_{k=1}^{n-1} f\left(x_{k+\frac{3}{4}}\right) + 14 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 7f(b) \right], \quad (4.13)$$

其中  $x_{k+\frac{1}{4}}, x_{k+\frac{1}{2}}, x_{k+\frac{3}{4}}$  是依次插入子区间  $[x_k, x_{k+1}]$  的内等分点.

$$\text{余项} \quad I - C_n = -\frac{2(b-a)}{945} \left[ \frac{h}{4} \right]^6 f^{(6)}(\eta), \quad \eta \in [a, b]. \quad (4.14)$$

**定义 4.3** 若一种复化求积公式  $I_n$  当  $h \rightarrow 0$  时成立渐近关系式

$$\frac{I - I_n}{h^p} \rightarrow c, \quad (c \neq 0 \text{ 定数}).$$

则称求积公式  $I_n$  是  $p$  阶收敛的.

在这种意义下,复化的梯形法、Simpson 法和 Cotes 法分别具有二阶、四阶和六阶收敛性.而当  $h$  很小时,对于复化的梯形法、Simpson 法和 Cotes 法分别有下列误差渐近估计式:

$$\begin{aligned} I - T_n &\approx -\frac{h^2}{12} [f'(b) - f'(a)], \\ I - S_n &\approx -\frac{1}{180} \left[ \frac{h}{2} \right]^4 [f'''(b) - f'''(a)], \\ I - C_n &\approx -\frac{2}{945} \left[ \frac{h}{4} \right]^6 [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)]. \end{aligned}$$

#### 4. Romberg 算法

Romberg 算法是在区间逐次二分的过程中,对梯形值进行加权平均以获得准确程度较高的积分值的一种方法,具有公式简练、计算结果准确程度较高、使用方便及稳定等优点,适宜求积节点等距的情形.

对于计算定积分  $I = \int_a^b f(x) dx$  的复化梯形公式  $T_n$ ,其余项

$$\begin{aligned} T_n - I &= \frac{f'(b) - f'(a)}{12} h^2 - \frac{f'''(b) - f'''(a)}{4! \times 30} h^4 + \dots \\ &+ \frac{B_{2k}(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a))}{(2k)!} h^{2k} + \dots \end{aligned}$$

$$= \alpha h^2 + \alpha h^4 + \alpha h^6 + \cdots + \alpha h^{2k} + \cdots,$$

其中,  $B_{2k}$  为 Bernoulli 常数.

将积分区间  $[a, b]$  逐次折半, 假设  $f^{(2k-1)}(a) \neq f^{(2k-1)}(b)$ ,  $k=1, 2, \cdots$ , 以保证复化梯形公式余项系数是非零的, 则构成相应的外推算法称为 Romberg 算法:

$$\begin{cases} T_0^{(0)} = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)], \\ T_0^{(l)} = \frac{1}{2} \left[ T_1^{(l-1)} + \frac{b-a}{2^{l-1}} \sum_{i=1}^{2^{l-1}} f \left[ a + (2i-1) \frac{b-a}{2^l} \right] \right], \quad l=1, 2, \cdots \\ T_m^{(k)} = \frac{4^m T_{m-1}^{(k+1)} - T_{m-1}^{(k)}}{4^m - 1}, \quad k=0, 1, \cdots, l-m, m=1, 2, \cdots, l. \end{cases} \quad (4.15)$$

直到  $|T_m^{(0)} - T_{m-1}^{(0)}| < \epsilon$  或  $\left| \frac{T_m^{(0)} - T_{m-1}^{(0)}}{T_m^{(0)}} \right| < 0$ . 其中,  $T_0^{(l)}$  表示将  $[a, b]$  作  $2^l$  等分的复化梯形公式, 下标  $m$  表示外推得到的第  $m$  个算法.  $T_0^{(l)}$  中的求和项包括了每次外推后新增加点上的函数值. 注意若对某个  $k$ , 被积函数有性质  $f^{(2k-1)}(a) = f^{(2k-1)}(b)$ . 说明余项中  $a_k = 0$ , 则 (4.15) 式中的外推法要作相应的修改, 否则外推可能失效.

## 5. Gauss 求积公式

为了一般性, 考虑带权定积分

$$I(f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx,$$

其中  $\rho(x) \geq 0$  为权函数. 当  $\rho(x) = 1$  时, 即是普通积分.

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \quad (4.16)$$

**定义 4.4** 若形如 (4.16) 的插值型求积公式的代数精度为  $2n+1$ , 则称该求积公式为 **Gauss 型求积公式**, 相应的求积节点称为 **Gauss 点**.

**定理 4.2** 对于插值型求积公式 (4.16), 其节点  $x_0, x_1, \cdots, x_n$  是 Gauss 点的充要条件是

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

与任意不超过  $n$  次的多项式  $P(x)$  带权正交, 即

$$\int_a^b \rho(x) P(x) \omega_{n+1}(x) dx = 0.$$

**推论**  $[a, b]$  上带权  $\rho(x)$  正交的多项式  $\varphi_{n+1}(x)$  的零点是 Gauss 点.

**定理 4.3** 设  $f \in C^{2n+2}[a, b]$ , 则 Gauss 求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

的余项

$$R(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b \rho(x) \omega_{n+1}^2(x) dx, \quad \eta \in (a, b).$$

**定义 4.5** 若  $\delta \leq c\epsilon$ , 其中  $c$  是与  $\epsilon$  无关的常数, 则称求积公式是数值稳定的. 这里  $\epsilon = \max_{0 \leq k \leq n} |\epsilon_k|$ ,  $\epsilon_k = f(x_k) - \tilde{f}(x_k)$  为函数  $f(x)$  的舍入误差,  $\delta = |I_n(f) - I_n(\tilde{f})|$ ,  $I_n(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ .

**定理 4.4** Gauss 求积公式  $\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$  是数值稳定的.

**定理 4.5** 设  $f \in C[a, b]$ , 则 Gauss 公式收敛, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx.$$

常用的 Gauss 型求积公式.

(1) Gauss-Legendre 求积公式

Legendre 多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n],$$

是区间  $[-1, 1]$  上权函数  $\rho(x) = 1$  的正交多项式, 以 Legendre 多项式的零点为 Gauss 点的求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

称为 Gauss-Legendre 求积公式.

当  $\rho(x) = 1$ , 积分区间为  $[a, b]$  时, 作变量代换:  $x = (a+b)/2$

$+(b-a)t/2$ , 使  $x \in [a, b]$  时  $t \in [-1, 1]$ , 则有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt \\ &\approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=0}^n A_k f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_k\right),\end{aligned}$$

其中  $t_k$  和  $A_k$  用表 4.1 中相应的值.

**表 4.1 Gauss-Legendre 求积公式的求积节点和求积系数**

$n$	点数	$x_k$	$A_k$
1	2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1.0
2	3	$\pm \sqrt{3/5}$	5/9
		0	8/9
3	4	$\pm 0.861136$	0.347855
		$\pm 0.339981$	0.652145
4	5	$\pm 0.906180$	0.236927
		$\pm 0.538469$	0.478629
		0	0.568889
5	6	$\pm 0.9324695$	0.1713245
		$\pm 0.6612094$	0.3607616
		$\pm 0.2386192$	0.4679139

## (2) Gauss-Chebyshev 求积公式

Chebyshev 正交多项式

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

是区间  $[-1, 1]$  上权函数为  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  的正交多项式, 选取其

$n+1$  次多项式的零点

$$x_k = \cos\left[\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right], \quad k=0, 1, 2, \dots, n$$

为 Gauss 点, 相应的求积系数

$$A_k = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} l_k(x) dx = \frac{\pi}{n+1}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n,$$

其中  $l_k(x)$  是关于所选节点的 Lagrange 插值基函数, 由此得到的求积公式

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k).$$

称为 Gauss-Chebyshev 求积公式.

表 4.2 是 Gauss-Chebyshev 求积公式的求积节点.

**表 4.2 Gauss-Chebyshev 求积公式的求积节点**

$n$	1	2	3	4
$x_k$	$\pm 0.7071068$	0,	$\pm 0.3826834$	0
		$\pm 0.8660254$	$\pm 0.9238795$	$\pm 0.9510565$ $\pm 0.5877853$
$n$	5	6	7	
$x_k$	$\pm 0.2588190$	0	$\pm 0.1950903$	
	$\pm 0.7071068$	$\pm 0.4338937$	$\pm 0.5555702$	
	$\pm 0.6959258$	$\pm 0.7818315$	$\pm 0.8314961$	
		$\pm 0.9749279$	$\pm 0.9807853$	

## 6. 数值微分

如果函数  $f(x)$  是以表格形式给出, 近似地求函数在某点的导数值, 或者说某点上函数的导数  $f'(x)$  用该点附近节点处的函数值近似表示, 称为数值微分.

数值微分的求法, 总的来说有两大类方法: Taylor 展开法和用插值函数求微分方法.

## 二、基本要求

1) 掌握数值积分的基本思想, 基本公式以及处理问题的基本方法.

2) 理解代数精度的概念及插值型数值求积公式的概念.

3) 注意 Newton-Cotes 型求积公式与 Gauss 型求积公式的异同点.

4) 掌握各类求积公式的构造方法.

5) 会讨论复化求积公式的收敛性及各类求积公式的数值稳定性.

6) 会用外推原理提高计算精度.

7) 掌握 Gauss 型求积公式的一些特点, 如: 求积系数全大于 0, 余项、稳定性及代数精度等.

8) 会利用正交多项式构造 Gauss 求积公式及用 Gauss-Legendre 求积公式和 Gauss-Chebyshev 求积公式求积分的近似值.

9) 会利用插值法构造数值微分公式.

### 三、例题选讲

**例 1** 验证梯形求积公式  $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$  的代数精度为 1.

**证** 由于次数不超过  $m$  的多项式全体, 加上零多项式, 构成一个线性空间  $P_m[x]$ , 且  $\{1, x, \dots, x^m\}$  是这个线性空间的基, 所以若求积公式分别对  $1, x, \dots, x^m$  都能准确成立, 则此求积公式的代数精度至少是  $m$  次的.

因此, 令  $f(x) = 1$ , 有

$$\text{左边} = \int_a^b 1 dx = b - a, \quad \text{右边} = \frac{b-a}{2} [1+1] = b-a,$$

故 左边 = 右边.

令  $f(x) = x$ , 则有

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}, \\ \text{右边} &= \frac{b-a}{2} [b+a] = \frac{b^2 - a^2}{2}, \end{aligned}$$

故 左边 = 右边.

即公式对  $f(x) = 1, x$  均准确成立. 但当  $f(x) = x^2$  时,

$$\text{左边} = \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3},$$

$$\text{右边} = \frac{b-a}{2} [b^2 + a^2].$$

左边  $\neq$  右边.

因此梯形公式只具一次代数精度.

**例 2** 设某物体垂直于  $x$  轴的可变截面面积为  $S(x)$ , 且设  $S(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$  ( $a \leq x \leq b$ ) 其中  $A, B, C, D$  为任意常数. 试证明: 此物体界于  $x=a$  及  $x=b$  间的体积  $V$  由下式给出:

$$V = \frac{b-a}{6} \left[ S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b) \right]. \quad (4.17)$$

**证** 由于 Simpson 公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

对于不超过三次的多项式精确成立, 故对  $S(x)$  应成立

$$\int_a^b S(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[ S(a) + 4\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b) \right].$$

上式左边即为所求的体积  $V$ , 故 4.17 式成立.

**例 3** 导出计算球、球台的体积公式.

**解** (1) 先考虑半球.  $S(a) = 0, S(b) = \pi R^2$ , 中截面半径  $r^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} R^2$ ,

$$\text{中截面面积} = \pi r^2 = \frac{3}{4} \pi R^2.$$

由 3 题知, 半球的体积

$$V_1 = \frac{R}{6} \left[ 0 + 4 \cdot \frac{3}{4} \pi R^2 + \pi R^2 \right] = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

故球体积  $V = 2V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3$ .

(2) 球台. 只讨论两底面位于同一个半球的情形(图 4.1):

$$r^2 = R^2 - a^2, \quad (4.18)$$

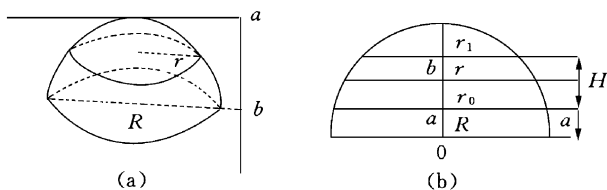


图 4.1

$$r^2 = R^2 - \left[ a + \frac{H}{2} \right]^2 = R^2 - \left[ a^2 + aH + \frac{H^2}{4} \right], \quad (4.19)$$

$$r^2 = R^2 - (a + H)^2 = R^2 - (a^2 + 2aH + H^2), \quad (4.20)$$

$$(4.18) \text{式} - (4.19) \text{式}, \quad r_0^2 - r^2 = aH + \frac{H^2}{4},$$

$$\text{故} \quad aH = r_0^2 - r^2 - \frac{H^2}{4},$$

(4.19)式 - (4.20)式得,

$$r^2 - r_1^2 = aH + \frac{3}{4} H^2 = \left[ r_0^2 - r^2 - \frac{H^2}{4} \right] + \frac{3}{4} H^2.$$

$$\text{故} \quad r^2 = \frac{1}{2} \left[ r_0^2 + r_1^2 + \frac{H^2}{2} \right].$$

则由例 2 知

$$\begin{aligned} V &= \frac{H}{6} (S_0 + 4S + S_1) = \frac{\pi H}{6} \left[ r_0^2 + 2 \left[ r_1^2 + r_0^2 + \frac{H^2}{2} \right] + r_1^2 \right] \\ &= \frac{\pi H}{6} [3(r_1^2 + r_0^2) + H^2]. \end{aligned}$$

**例 4** 试构造形如

$$\int_0^{3h} f(x) dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(h) + A_2 f(2h)$$

的数值求积公式,使其代数精度尽可能高,并指出其代数精度的阶数.

**解** 令公式对  $f(x) = 1, x, x^2$  均准确成立,则有

$$\begin{cases} 3h = A_0 + A_1 + A_2, \\ \frac{9}{2}h^2 = 0 + A_1 h + A_2 2h, \\ 9h^3 = 0 + A_1 h^2 + 4h^2 A_2. \end{cases}$$

解之得

$$A_0 = \frac{3}{4}h, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{9}{4}h.$$

故求积公式的形式为

$$\int_0^{3h} f(x) dx \approx \frac{3h}{4} f(0) + \frac{9h}{4} f(2h).$$

由公式的构造过程知,公式至少有 2 次代数精度,而当  $f(x) = x^3$  时,公式的左边  $= \frac{81}{4}h^4$ , 右边  $= 18h^4$ . 左边  $\neq$  右边, 说明此公式对  $f(x) = x^3$  不能准确成立. 因此, 公式只具 2 次代数精度.

**例 5** 试建立下述形式的求积公式, 并确定它的代数精度 (应使代数精度尽可能地高).

$$\int_0^h f(x) dx \approx h[a_0 f(0) + a_1 f(h) + h^2(b_0 f'(0) + b_1 f'(h))].$$

**解** 令公式对  $f(x) = 1, x, x^2, x^3$  都准确成立, 则有

$$\begin{cases} 1 = a_0 + a_1, \\ \frac{1}{2} = a_0 + b_0 + b_1, \\ \frac{1}{3} = a_0 + 2b_1, \\ \frac{1}{4} = a_0 + 3b_1. \end{cases}$$

解之可得,  $a_0 = a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $b_0 = -b_1 = \frac{1}{12}$ , 故所求公式为

$$\int_0^h f(x) dx \approx \frac{h}{2}[f(0) + f(h)] + \frac{h^2}{12}[f'(0) - f'(h)].$$

当  $f(x) = x^4$  时,

$$\text{左边} = \frac{1}{5}h^5,$$

$$\text{右边} = \frac{h^5}{2} + \frac{h^2}{12}(-4h^3) = \frac{1}{6}h^5,$$

右边  $\neq$  左边, 所以原公式只具有 3 次代数精度.

**例 6** 给定求积节点  $x_0 = 1/4, x_1 = 3/4$ , 试推出计算积分  $\int_0^1 f(x)dx$  的插值型求积公式, 并写出它的截断误差.

**解** 因要求所构造的求积公式是插值型的, 故其求积系数可表示为

$$A_0 = \int_0^1 l_0(x)dx = \int_0^1 \frac{x - \frac{3}{4}}{x_0 - x_1} dx = \int_0^1 -\frac{1}{2}(4x - 3)dx = \frac{1}{2}.$$

$$A_1 = \int_0^1 l_1(x)dx = \int_0^1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(4x - 1)dx = \frac{1}{2}.$$

故求积公式为

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2} \left[ f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right].$$

若  $f''(x)$  在  $[0, 1]$  上存在, 则该求积公式的截断误差为

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2} \left[ f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right] \\ &= \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 P_1(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} f''(\xi) \left[ x - \frac{1}{4} \right] \left[ x - \frac{3}{4} \right] dx, \end{aligned}$$

其中  $\xi \in (0, 1)$  并依赖于  $x$ ,  $P_1(x)$  是以  $x_0, x_1$  为节点的关于  $f(x)$  的线性插值函数.

**例 7** 对  $\int_0^3 f(x)dx$  构造一个至少具有 3 次代数精度的求积公式.

**解** 具有 4 个求积节点的插值型求积公式, 至少有 3 次代数精度. 如果在  $[0, 3]$  上取节点为 0, 1, 2, 3, 则插值型求积公式为

$$\int_0^3 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(2) + A_3 f(3).$$

下面求  $A_i (i=0, 1, 2, 3)$ .

$$A_0 = \int_0^3 l_0(x)dx = \int_0^3 \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} dx$$

$$= -\frac{1}{6} \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx = \frac{3}{8}.$$

同理可求得

$$A_1 = \frac{9}{8}, \quad A_2 = \frac{9}{8}, \quad A_3 = \frac{3}{8}.$$

即有

$$\int_0^3 f(x) dx \approx \frac{3}{8} f(0) + \frac{9}{8} f(1) + \frac{9}{8} f(2) + \frac{3}{8} f(3).$$

**例 8** 试分别使用梯形公式和 Simpson 公式计算积分  $\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx$  的近似值, 并估计截断误差.

**解** 用梯形公式计算:

$$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx \approx \frac{2-1}{2} (e + e^{\frac{1}{2}}) = 2.1835.$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}, \quad f''(x) = \left[ \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right] e^{\frac{1}{x}},$$

$$\max_{1 \leq x \leq 2} |f''(x)| = f''(1) = 8.1548.$$

估计截断误差为

$$|R_1| \leq \frac{(2-1)^3}{12} \max_{1 \leq x \leq 2} |f''(x)| = 0.6796.$$

用 Simpson 公式计算:

$$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx \approx \frac{2-1}{6} (e + 4e^{\frac{1}{1.5}} + e^{\frac{1}{2}}) = 2.0263.$$

$$f^{(4)}(x) = \left[ \frac{1}{x^8} + \frac{12}{x^7} + \frac{36}{x^6} + \frac{24}{x^5} \right] e^{\frac{1}{x}}.$$

$$\max_{1 \leq x \leq 2} |f^{(4)}(x)| = f^{(4)}(1) = 198.43.$$

估计截断误差为

$$|R_2| \leq \frac{(2-1)^5}{2880} \max_{1 \leq x \leq 2} |f^{(4)}(x)| = 0.06890.$$

**例 9** 把区间  $[1, 2]$  分为 5 等份, 用复化 Simpson 公式计算积分  $\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx$  的近似值, 并估计截断误差.

解 此处  $h = \frac{2-1}{5} = 0.2$ , 求积节点为

$$x_k = 1 + 0.1k, \quad k = 0, 1, \dots, 10.$$

先列出结点处的函数值, 见表 4.3.

表 4.3 结点处函数值

$k$	$x_k$	$e^{1/x_k}$	$k$	$x_k$	$e^{1/x_k}$
0	1.0	2.718282	6	1.6	1.868246
1	1.1	2.482065	7	1.7	1.800808
2	1.2	2.300976	8	1.8	1.742909
3	1.3	2.158106	9	1.9	1.692685
4	1.4	2.042727	10	2.0	1.648721
5	1.5	1.947734			

由公式(4.11)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{6} [f(a) + f(b) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)],$$

$$\begin{aligned} \text{得} \quad \int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx &\approx \frac{0.2}{6} [e + e^{\frac{1}{2}} + 4 \sum_{k=0}^4 e^{\frac{1}{x_{k+\frac{1}{2}}}} + 2 \sum_{k=1}^4 e^{\frac{1}{x_k}}] \\ &= 2.020077. \end{aligned}$$

又由截断误差公式

$$R_s = -\frac{b-a}{180} \left( \frac{h}{2} \right)^4 f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [a, b].$$

得截断误差估计

$$\begin{aligned} |R_s| &\leq \frac{2-1}{180} (0.1)^4 \max_{1 \leq x \leq 2} |f^{(4)}(x)| = \frac{(0.1)^4}{180} \times 198.43 \\ &= 0.0001102. \end{aligned}$$

**例 10** 分别用复化梯形公式与复化 Simpson 公式计算积分

$I = \int_0^1 e^x dx$  的近似值, 要求其截断误差  $|R_N(f)| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$ , 问各需取多少个节点?

解 令  $f(x) = e^x$ , 则  $f''(x) = f^{(4)}(x) = e^x$ ; 在区间  $[0, 1]$  上,

$$\max |f''(x)| = \max |f^{(4)}(x)| = e.$$

用复化梯形公式求积, 由

$$R_N[f] = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta), \quad a < \eta < b$$

得  $|R_N[f]| \leq \frac{e}{12} h^2 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4},$

由此得  $h \leq 0.0149$ . 取  $h = 0.0148$ , 则应  $N > 67.6$ , 取  $N+1 = 69$  个节点.

用复化 Simpson 公式, 由

$$R_N[f] = -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(4)}(\eta), \quad a \leq \eta \leq b$$

得  $|R_N[f]| \leq \frac{e}{2880} h^4 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4},$

由此得  $h \leq 0.4798$ . 取  $h = 0.4797$ , 则应  $N \geq \frac{1}{h} = 2.085$ . 取  $N = 3$ , 则只需取  $2N+1 = 7$  个节点.

**例 11** 用区间逐次二分的梯形公式计算

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx,$$

要求误差不超过  $\epsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-5}$ .

**解** 利用

$$\begin{cases} T_1 = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)], \\ T_{2N} = \frac{1}{2} T_N + \frac{b-a}{2N} \sum_{i=1}^N f\left[a + (2i-1)\frac{b-a}{2N}\right], \\ N = 2^{k-1}, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

编程序计算, 结果如表 4.4 所示.

表 4.4

$2^k = N$	$T_N$	$ T_{2N} - T_N $
$2^0$	3.0	
$2^1$	3.1	0.1
$2^2$	3.131177	0.03
$2^3$	3.138989	0.007
$2^4$	3.140942	0.001
$2^5$	3.141430	0.0004
$2^6$	3.141553	0.0001
$2^7$	3.141583	0.00003
$2^8$	3.141590	0.000007
$2^9$	3.141592	0.000002

因  $|T_{2^9} - T_{2^8}| = 0.000002 < \frac{1}{2} \times 10^{-5}$ , 故

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx \approx 3.141592.$$

**例 12** 用 Romberg 积分法计算积分  $\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx$  的近似值, 要求  $|T_m^{(0)} - T_{m-1}^{(0)}| < 10^{-5}$ .

**解** 用 Romberg 算法公式:

$$T_0^{(0)} = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)],$$

$$T_0^{(l)} = \frac{1}{2} T_0^{(l-1)} + \frac{b-a}{2^l} \sum_{i=1}^{2^{l-1}} f\left[a + (2i-1) \frac{b-a}{2^l}\right], \quad l=1, 2, \dots$$

$$T_m^{(k)} = \frac{4^m T_{m-1}^{(k+1)} - T_{m-1}^{(k)}}{4^m - 1}, \quad k=0, 1, \dots, l-m; m=1, 2, \dots$$

得

$$T_0^{(0)} = \frac{1}{2} (e + e^{\frac{1}{2}}),$$

$$T_0^{(l)} = \frac{1}{2} T_0^{(l-1)} + \frac{1}{2^l} \sum_{i=1}^{2^{l-1}} e^{\frac{1}{a + (2i-1) \frac{b-a}{2^l}}}, \quad l=1, 2, \dots$$

计算结果见表 4.5.

表 4.5

$l$	$T_0^{(D)}$	$T_1^{(D)}$	$T_2^{(D)}$	$T_3^{(D)}$	$T_4^{(D)}$
0	2.183501550	2.026323210	2.020273094	2.020062306	2.020058651
1	2.065617795	2.02651226	2.020065599	2.020058665	
2	2.031892868	2.020102201	2.0200058773		
3	2.023049868	2.020061487			
4	2.020808583				

因  $|T_4^{(0)} - T_3^{(0)}| < 10^{-5}$ , 故得

$$\int_{-1}^2 e^{\frac{1}{x}} dx \approx T_4^{(0)} = 2.020058651.$$

**例 13** 利用正交多项式构造计算积分  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  的具有两个节点的 Gauss 型求积公式.

**解** 设所求公式的形式为

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

已知 Legendre 多项式是  $[-1, 1]$  上带权  $\rho(x) = 1$  的正交多项式, 故可选取二次式  $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$  的零点作为其 Gauss 点.

令  $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = 0$ , 得零点

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

则有  $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 f\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\right] + A_1 f\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right],$

其中  $A_0 = \int_{-1}^1 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} dx = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{x - \frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}} dx = 1,$

$$A_1 = \int_{-1}^1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} dx = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{x + \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}} dx = 1.$$

故得 
$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\right] + f\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right].$$

**例 14** 构造公式  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$ ,

使其具有 3 次代数精度.

**解** 构造带权  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  的 Gauss 型求积公式即可, 因此取二

次 Chebyshev 多项式的零点作为 Gauss 点.

由 Chebyshev 多项式的零点公式:

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \quad (k=0, 1, \dots).$$

得 
$$x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故有

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx A_0 f\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right] + A_1 f\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

令公式对  $f(x)=1, x$  准确成立, 得

$$\begin{cases} \pi = A_0 + A_1, \\ 0 = A_0 \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right] + A_1 \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]. \end{cases}$$

解之得  $A_0 = A_1 = \frac{\pi}{2}$ . 则

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \frac{\pi}{2} \left[ f\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right] + f\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \right].$$

**例 15** 用 Gauss-Legendre 求积公式计算

$$I = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx.$$

**解** 以 Legendre 多项式  $L_{n+1}(x)$  的零点作 Gauss 点得到的求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

称为 Gauss-Legendre 求积公式.

作变换  $x = \frac{\pi}{2}(1+t)$ , 则得

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^x \cos x dx &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 e^{\frac{\pi}{2}(1+t)} \cos \left[ \frac{\pi}{2}(1+t) \right] dt \\ &= -\frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^1 e^{\frac{\pi}{2}t} \cos \frac{\pi}{2} t dt.\end{aligned}$$

取 2 个节点计算, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^x \cos x dx &= -\frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^1 e^{\frac{\pi}{2}t} \cos \frac{\pi}{2} t dt \\ &\approx -\frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi}{2}} \left[ e^{-\frac{\pi}{2} \times 0.5773503} \cos \left[ \frac{\pi}{2} \times (-0.5773503) \right] \right. \\ &\quad \left. + e^{\frac{\pi}{2} \times 0.5773503} \cos \frac{\pi}{2} \times 0.5773503 \right] \\ &\approx -12.3362105.\end{aligned}$$

取 4 个节点计算, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^x \cos x dx &= -\frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^1 e^{\frac{\pi}{2}t} \cos \frac{\pi}{2} t dt \\ &\approx -\frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi}{2}} \left[ 0.3478548 (e^{-\frac{\pi}{2} \times 0.8611363} \cos \frac{\pi}{2} \times 0.8611363 \right. \\ &\quad \left. + e^{\frac{\pi}{2} \times 0.8611363} \cos \frac{\pi}{2} \times 0.8611363) \right. \\ &\quad \left. + 0.6521452 (e^{-\frac{\pi}{2} \times 0.3398810} \cos \frac{\pi}{2} \times 0.3398810 \right. \\ &\quad \left. + e^{\frac{\pi}{2} \times 0.3398810} \cos \frac{\pi}{2} \times 0.3398810) \right] \\ &\approx -12.0701895.\end{aligned}$$

取 6 个节点计算, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^x \cos x dx &= -\frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^1 e^{\frac{\pi}{2}t} \cos \frac{\pi}{2} t dt \\ &\approx -\frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi}{2}} \left[ 0.1713245 (e^{-\frac{\pi}{2} \times 0.9324695} \cos \frac{\pi}{2} \times 0.9324695 \right. \\ &\quad \left. + e^{\frac{\pi}{2} \times 0.9324695} \cos \frac{\pi}{2} \times 0.9324695) \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +0.3607616(e^{-\frac{\pi}{2} \times 0.6612094} \cos \frac{\pi}{2} \times 0.6612094 \\
& +e^{\frac{\pi}{2} \times 0.6612094} \cos \frac{\pi}{2} \times 0.6612094) \\
& +0.4679139(e^{-\frac{\pi}{2} \times 0.2386192} \cos \frac{\pi}{2} \times 0.2386192 \\
& +e^{\frac{\pi}{2} \times 0.2386192} \cos \frac{\pi}{2} \times 0.2386192)] \approx -12.0703463.
\end{aligned}$$

而  $I$  的准确值为  $-\frac{1}{2}(1+e^{\pi})=-12.0703463\dots$ . 可见 Gauss 型求积公式的精度是较高的.

**例 16** 试构造下列形式的 Gauss 求积公式

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

**解** 方法 1: 令公式对  $f(x)=1, x, x^2, x^3$  准确成立, 得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \frac{2}{3}, \\ x_0 A_0 + x_1 A_1 = \frac{2}{5}, \\ x_0^2 A_0 + x_1^2 A_1 = \frac{2}{7}, \\ x_0^3 A_0 + x_1^3 A_1 = \frac{2}{9}. \end{cases} \quad (4.21)$$

由于

$$x_0 A_0 + x_1 A_1 = x_0 (A_0 + A_1) + (x_1 - x_0) A_1.$$

利用(4.21)的第 1 式, 可将第 2 式化为

$$\frac{2}{3} x_0 + (x_1 - x_0) A_1 = \frac{2}{5}. \quad (4.22)$$

同样地, 利用第 2 式化第 3 式, 利用第 3 式化第 4 式, 分别得

$$\frac{2}{5} x_0 + (x_1 - x_0) x_1 A_1 = \frac{2}{7}, \quad (4.23)$$

$$\frac{2}{7} x_0 + (x_1 - x_0) x_1^2 A_1 = \frac{2}{9}. \quad (4.24)$$

从(4.22)、(4.23)、(4.24)式消去  $(x_1 - x_0) A_1$ , 得

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x_0 + \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}x_0\right)x_1 = \frac{2}{7}, \\ \frac{2}{7}x_0 + \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{5}x_0\right)x_1^2 = \frac{2}{9}; \end{cases}$$

进一步整理得

$$\begin{cases} \frac{2}{5}(x_0 + x_1) - \frac{2}{3}x_0x_1 = \frac{2}{7}, \\ \frac{2}{7}(x_0 + x_1) - \frac{2}{5}x_0x_1 = \frac{2}{9}. \end{cases}$$

由此解出

$$x_0x_1 = \frac{5}{21}, \quad x_0 + x_1 = \frac{10}{9}.$$

从而求出

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.821162, & x_1 &= 0.289949, \\ A_0 &= 0.389111, & A_1 &= 0.277556. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx &\approx 0.389111 f(0.821162) \\ &\quad + 0.277556 f(0.289949) \end{aligned}$$

即为所求的 Gauss 公式

方法 2: 设  $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)$  为区间  $[0, 1]$  上带权  $\sqrt{x}$  的正交多项式, 依照正交多项式的性质, 得

$$\int_0^1 \sqrt{x} \omega(x) dx = 0, \quad \int_0^1 \sqrt{x} \omega(x) x dx = 0.$$

注意  $\omega(x) = x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0x_1$ , 可得

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \sqrt{x} (x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0x_1) dx \\ &= \frac{2}{7} - \frac{2}{5}(x_0 + x_1) + \frac{2}{3}x_0x_1 = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \sqrt{x} (x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0x_1) x dx \\ &= \frac{2}{9} - \frac{2}{7}(x_0 + x_1) + \frac{2}{5}x_0x_1 = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

令  $x_0 + x_1 = v$ ,  $x_0x_1 = u$ , 由 (4.25)、(4.26) 两式得

$$\begin{cases} \frac{2}{5}v - \frac{2}{3}u = \frac{5}{7}, \\ \frac{2}{7}v - \frac{2}{5}u = \frac{2}{9}. \end{cases}$$

解之得  $u = \frac{5}{21}, \quad v = \frac{10}{9}.$

由韦达定理, 知  $x_0, x_1$  是方程

$$x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{5}{21} = 0$$

的两个根, 再解之得

$$\begin{cases} x_0 = 0.821162, \\ x_1 = 0.289949. \end{cases}$$

此外, 注意到公式对  $f(x) = 1, x$  准确成立, 从而又有

$$\begin{cases} \frac{2}{3} = \int_0^1 \sqrt{x} dx = A_0 + A_1, \\ \frac{2}{5} = \int_0^1 x \sqrt{x} dx = A_0 x_0 + A_1 x_1. \end{cases}$$

解之得  $A_0 = 0.389111, A_1 = 0.277556.$

故 
$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx \approx 0.389111 f(0.821162) + 0.277556 f(0.289949).$$

**例 17** 计算积分  $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

**解** 选用  $n=2$  的 Gauss-Chebyshev 求积公式计算, 即

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

这时

$$x_0 = \cos \frac{5}{6}\pi = -0.866025403, \quad x_1 = \cos \frac{3}{6}\pi = 0,$$

$$x_2 = \cos \frac{1}{6}\pi = 0.866025403,$$

$$A_k = \frac{\pi}{3}, \quad k=0, 1, 2.$$

于是有

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{2+x}{1-x^2}} dx &\approx \frac{\pi}{3} (\sqrt{2+x_0} + \sqrt{2+x_1} + \sqrt{2+x_2}) \\ &= 4.368939556. \end{aligned}$$

注: 在 Gauss-Chebyshev 求积公式

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

$$\begin{aligned} \text{中,} \quad x_k &= \cos \frac{2k+1}{2(n+1)} \pi, \quad A_k = \frac{\pi}{n+1} \\ k &= 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

**例 18** 试证明求积公式

$$\int_1^3 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(2 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(2) + \frac{5}{9} f\left(2 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

具有 5 次代数精度.

**证** 令  $x = t + 2$ , 则

$$\int_1^3 f(x) dx = \frac{3-1}{2} \int_{-1}^1 f(t+2) dt = \int_{-1}^1 g(t) dt.$$

Legendre 多项式  $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$  的零点为

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}},$$

故若公式

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx \sum_{k=0}^2 A_k g(t_k)$$

中节点取  $P_3(t)$  的零点, 系数  $A_k = \int_{-1}^1 l_k(x) dx$  ( $l_k(x)$  是关于节点  $t_0, t_1, t_2$  的 Lagrange 基函数), 则该公式必是 Gauss 型求积公式, 即代数精度为 5 次.

经计算得  $A_1 = \frac{8}{9}, A_0 = A_2 = \frac{5}{9}$ . 故

$$\begin{aligned}\int_1^3 f(x) dx &= \int_{-1}^1 g(t) dt \approx \frac{5}{9} g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} g(0) + \frac{5}{9} g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \\ &\approx \frac{5}{9} f\left(2 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(2) + \frac{5}{9} f\left(2 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\end{aligned}$$

必具有 5 次代数精度.

**例 19** 设  $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$  是 Gauss 型的求积公式, 证明此公式是稳定的.

**证** 考察

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

它是  $n$  次多项式, 因而  $l_k^2(x)$  是  $2n$  次多项式, 故上述 Gauss 公式对它能准确成立, 即有

$$\int_a^b l_k^2(x) dx = \sum_{j=0}^n A_j l_k^2(x_j).$$

注意到  $l_k(x_j) = \delta_{kj}$ , 上式右端实际上即等于  $A_k$ . 从而有

$$A_k = \int_a^b l_k^2(x) dx > 0.$$

又当  $f(x) = 1$  时, 有

$$\int_a^b dx = b - a = \sum_{k=0}^n A_k.$$

记在  $x_k$  处  $f(x_k)$  的误差为  $\tilde{f}(x_k)$ ,  $\epsilon_k = |f(x_k) - \tilde{f}(x_k)|$ ,  $\epsilon = \max_{0 \leq k \leq n} \epsilon_k$ , 则

$$\begin{aligned}& \left| \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) - \sum_{k=0}^n A_k \tilde{f}(x_k) \right| \leq \sum_{k=0}^n |A_k| |f(x_k) - \tilde{f}(x_k)| \\ & \leq \max_{0 \leq k \leq n} |f(x_k) - \tilde{f}(x_k)| \sum_{k=0}^n |A_k| = \epsilon \sum_{k=0}^n A_k \\ & = \epsilon(b - a).\end{aligned}$$

上式表明此 Gauss 公式是稳定的.

**例 20** 设求积公式  $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$  是 Gauss 型的. 证明此公式对  $f(x) \in C[a, b]$  是收敛的, 即对任何有限区间  $[a, b]$  上

的连续函数  $f(x)$  及任意的  $\epsilon > 0$ , 总存在自然数  $N$ , 使当  $n > N$  时

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \right| < \epsilon, \quad (4.27)$$

其中  $x_k (k=0, 1, \dots, n)$  为 Gauss 点,  $A_k$  为 Gauss 求积系数.

**证** 因为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 由 Weierstrass 定理知, 总存在多项式  $P(x)$  (设其为  $m$  次) 满足

$$|f(x) - P(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

用记号  $Q_n(f)$  表示  $\sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ , 则

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x) dx - Q_n(f) \right| \\ &= \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b P(x) dx + \int_a^b P(x) dx \right. \\ & \quad \left. - Q_n(P) + Q_n(P) - Q_n(f) \right| \\ &\leq \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b P(x) dx \right| + \left| \int_a^b P(x) dx - Q_n(P) \right| \\ & \quad + |Q_n(P) - Q_n(f)|. \end{aligned}$$

对上式右端三项分别估计如下:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b P(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f(x) - P(x)| dx \\ &\leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

因多项式  $P(x)$  为  $m$  次, 当  $m \leq 2n+1$ , 即  $n \geq \frac{m-1}{2}$  时, Gauss 求积公式准确成立, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b P(x) dx - Q_n(P) \right| &= 0. \\ |Q_n(P) - Q_n(f)| &= \left| \sum_{k=0}^n A_k [P(x_k) - f(x_k)] \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |A_k| |P(x_k) - f(x_k)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^n |A_k| = \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

由上可知, 当  $n > N \left[ > \frac{m-1}{2} \right]$  时, (4.27) 式恒成立.

**例 21** 设 Gauss 型求积公式为

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i),$$

其中  $\omega(x)$  为权函数,  $x_i (i=1, \dots, n)$  为节点; 设  $Q(x)$  是  $[a, b]$  上关于权函数  $\omega(x)$  的  $n$  次规格化正交多项式, 试证明:

$$(1) A_i = \frac{1}{Q'(x_i)} \int_a^b \frac{\omega(x) Q_n(x)}{x - x_i} dx,$$

$$(2) A_i = \frac{a_n}{a_{n-1} Q'_n(x_i) Q_{n-1}(x_i)}, i=1, 2, \dots, n,$$

其中  $a_k$  为  $Q_k(x)$  的最高次项的系数.

**证** 记  $Q_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ ,

$$P_{(i)}(x) = \frac{Q_n(x)}{x - x_i} = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n),$$

显然,  $P_{(i)}(x)$  为  $n-1$  次多项式. 易证明

$$P_{(i)}(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ Q'_n(x_i), & j = i. \end{cases}$$

由 Gauss 求积公式的性质, 有

$$\begin{aligned} \int_a^b \omega(x) P_{(i)}(x) dx &= \int_a^b \frac{\omega(x) Q_n(x)}{x - x_i} dx \\ &= \sum_{j=1}^n A_j P_{(i)}(x_j) = A_i Q'_n(x_i). \end{aligned}$$

$$\text{故 } A_i = \frac{1}{Q'_n(x_i)} \int_a^b \omega(x) P_{(i)}(x) dx = \frac{1}{Q'_n(x_i)} \int_a^b \frac{\omega(x) Q_n(x)}{x - x_i} dx.$$

即(1)式得证.

将  $P_{(i)}(x)$  用正交系  $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1}\}$  线性表示, 得

$$P_{(i)}(x) = \alpha Q_{n-1}(x) + \beta_{n-2} Q_{n-2}(x) + \cdots + \beta_0 Q_0(x). \quad (4.28)$$

比较上式两边最高次项系数, 得

$$a_n = \alpha a_{n-1}.$$

故

$$\alpha = \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

将(4.28)式两边乘以  $Q_{n-1}(x)$ , 并关于权函数  $\omega(x)$  求积分, 利用

$Q_{n-1}(x)$  的标准正交性, 可得

$$\int_a^b \omega(x) P_{(i)}(x) Q_{n-1}(x) dx = \alpha.$$

但左边被积函数为  $2n-2$  次多项式, 故 Gauss 型求积公式精确成立, 所以

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_a^b \omega(x) P_{(i)}(x) Q_{n-1}(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j P_{(i)}(x_j) Q_{n-1}(x_j) \\ &= A_i P_{(i)}(x_i) Q_{n-1}(x_i) = A_i Q'_{n-1}(x_i) Q_{n-1}(x_i). \end{aligned}$$

又由  $\alpha = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ , 得

$$A_i Q'_{n-1}(x_i) Q_{n-1}(x_i) = \frac{a_n}{a_{n-1}},$$

即

$$A_i = \frac{a_n}{a_{n-1} Q'_{n-1}(x_i) Q_{n-1}(x_i)}.$$

(2) 式得证.

**例 22** 设  $P(x)$  为  $[a, b]$  上关于权函数  $\omega(x)$  的  $n$  次正交多项式, 以  $P(x)$  的零点为节点, 建立 Lagrange 插值多项式的基函数  $\{l_i(x)\}$ , 证明:

$$\int_a^b \omega(x) l_i(x) dx = \int_a^b \omega(x) [l_i(x)]^2 dx, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

**证**  $l_i(x)$  和  $l_i^2(x)$  分别为  $n-1$  次和  $2n-2$  次多项式,  $n$  个节点的 Gauss 型求积公式对它们准确成立, 设求积公式的系数为  $A_i, i=1, 2, \dots, n$ , 则有

$$\text{左边} = \int_a^b \omega(x) l_i(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j l_i(x_j) = A_i (\text{利用 } l_i(x_j) = \delta_{ij}).$$

$$\text{右边} = \int_a^b \omega(x) l_i^2(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j l_i^2(x_j) = A_i.$$

故左边 = 右边, 即

$$\int_a^b \omega(x) l_i(x) dx = \int_a^b \omega(x) [l_i(x)]^2 dx.$$

**例 23** 如果在  $[-1, 1]$  上对  $2n$  阶导数有界的函数  $f(x)$  用  $n$  点 Hermite 公式在  $[-1, 1]$  上进行内插, 若用  $\omega^2(x)$  的积分作为度量误差的尺度, 那么  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的最佳选择是什么? 其中

$$\omega(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

解 由 Gauss 求积公式的余项表达式,有

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \right| \\ & \leq \frac{\max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(2n)}(x)|}{(2n)!} \int_{-1}^1 (x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2 dx. \end{aligned}$$

依题意知,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  之选择应使

$$\frac{\max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(2n)}(x)|}{(2n)!} \int_{-1}^1 (x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2 dx$$

达最小,即  $x_i (i=1, \dots, n)$  应取为 Legendre 多项式  $P_n(x)$  的零点 (这是因为在所有次数为  $n$ , 首项系数为 1 的多项式  $\tilde{\pi}_n(x)$  中, 使  $\int_a^b [\tilde{\pi}_n(x)]^2 \rho(x) dx$  最小的是  $P_n(x)$ , 其中  $\{P_n(x)\}$  是在  $[a, b]$  上关于权函数  $\rho(x)$  正交的多项式序列, 事实上记

$$\tilde{\pi}_n(x) = P_n(x) + \sum_{r=0}^{n-1} a_r P_r(x).$$

则

$$\begin{aligned} & \int_a^b \tilde{\pi}_n^2(x) \rho(x) dx \\ & = \int_a^b P_n^2(x) \rho(x) dx + 2 \sum_{r=0}^{n-1} a_r \int_a^b P_n(x) P_r(x) \rho(x) dx \\ & \quad + \sum_{r,s=0}^{n-1} a_r a_s \int_a^b P_r(x) P_s(x) \rho(x) dx \\ & = \int_a^b P_n^2(x) \rho(x) dx + \sum_{r=0}^{n-1} (a_r k_r)^2. \end{aligned}$$

其中

$$K_r^2 = \int_a^b P_r^2(x) \rho(x) dx, \quad r=0, 1, \dots, n-1.$$

所以

$$\int_a^b P_n^2(x) \rho(x) dx \leq \int_a^b \tilde{\pi}_n^2(x) \rho(x) dx.$$

此题中,  $\rho(x) \equiv 1, a=-1, b=1$ .

**例 24** 已知函数  $y=e^x$  的下列数值.

$x$	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
$y$	12.1825	13.4637	14.8797	16.4446	18.1741

试用二点、三点微分公式计算  $x=2.7$  处的一阶、二阶导数值.

**解** 本题没有明确指出用哪些点处的函数值来求  $f'(2.7)$  和  $f''(2.7)$ . 因此, 随着步长  $h$  不同, 导数值有可能不同. 另外, 用两点函数值时, 只能求一阶导数值.

方法 1: 取  $h=0.1$  时, 两点公式有两种取法. 当  $x_0=2.6$ ,  $x_1=2.7$  时,

$$\begin{aligned}f'(2.7) &\approx \frac{1}{0.1}[f(2.7) - f(2.6)] = \frac{1}{0.6}[14.8797 - 13.4637] \\&= 14.1600.\end{aligned}$$

当  $x_0=2.7$ ,  $x_1=2.8$  时,

$$f'(2.7) \approx \frac{1}{0.1}[f(2.8) - f(2.7)] = 15.6490.$$

三点公式取  $x_0=2.6$ ,  $x_1=2.7$ ,  $x_2=2.8$ , 得

$$\begin{aligned}f'(2.7) &\approx \frac{1}{2 \times 0.1}[f(2.8) - f(2.6)] = 14.9045. \\f''(2.7) &\approx \frac{1}{0.1^2}[f(2.8) - 2f(2.7) + f(2.6)] = 14.8900.\end{aligned}$$

方法 2: 取  $h=0.2$ , 此时两点公式仍有两种取法. 当  $x_0=2.5$ ,  $x_1=2.7$  时,

$$f'(2.7) \approx \frac{1}{0.2}[f(2.7) - f(2.5)] = 13.4860.$$

当  $x_0=2.7$ ,  $x_1=2.9$  时,

$$f'(2.7) \approx \frac{1}{0.2}[f(2.9) - f(2.7)] = 16.4720.$$

三点公式取  $x_0=2.5$ ,  $x_1=2.7$ ,  $x_2=2.9$ , 则

$$\begin{aligned}f'(2.7) &\approx \frac{1}{2 \times 0.2}[f(2.9) - f(2.5)] = 14.9790. \\f''(2.7) &\approx \frac{1}{0.2^2}[f(2.9) - 2f(2.7) + f(2.5)] = 14.9300.\end{aligned}$$

注:  $f'(2.7)$  和  $f''(2.7)$  的真值都是  $14.87973\cdots$ , 上面的计算表明:

1) 当使用两点公式时,应取步长较小的函数值;

2) 一般情况下,同样步长的两点公式没有三点公式准确,步长越小越精确.但如果高阶导数无界或舍入误差超过截断误差时,这个结论就不一定对了.

**例 25** (1) 试推导四点数值微分公式:

$$f'(x_0) = \frac{1}{6h}[-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3] - \frac{h^3}{4}f^{(4)}(\xi),$$

其中  $x_{i+1} - x_i = h (i=0, 1, 2)$ ,  $x_0 < \xi < x_3$ .

(2) 已知函数表

$x$	1.0	1.5	2.0	2.5
$f(x)$	8.00	13.75	21.00	29.75

求  $f'(1.0)$  的近似值.

**解** (1) 因为公式中实际用到四个等距节点,故由 Newton 插值公式,得

$$\begin{aligned} f(x) &= N_3(x) + R_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &\quad + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\omega(x), \quad x_0 < \xi < x_3. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f'(x_0) &\approx N'_3(x_0) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](x_0 - x_1) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \\ &= \frac{1}{h}(f_1 - f_0) + \frac{1}{2h}(-f_0 + 2f_1 - f_2) \\ &\quad + \frac{1}{3h}(-f_0 + 3f_1 - 3f_2 + f_3) \\ &= \frac{1}{6h}[-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3], \end{aligned}$$

$$R'_3(x_0) = \frac{1}{4!} \left[ f^{(4)}(\xi) \frac{d}{dx} \omega_1(x) + \omega_1(x) \frac{d}{dx} f^{(4)}(\xi) \right] \Bigg|_{x=x_0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \\
&= -\frac{h^3}{4} f^{(4)}(\xi), \quad x_0 < \xi < x_3.
\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \frac{1}{6h} [-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3] - \frac{1}{4} h^3 f^{(4)}(\xi), \\
&\quad x_0 < \xi < x_3.
\end{aligned}$$

(2) 利用上述公式, 得

$$\begin{aligned}
f'(1, 0) &= \frac{1}{6 \times 0.5} [-11 \times 8.00 + 18 \times 13.75 \\
&\quad - 9 \times 21.00 + 2 \times 29.75] = 10.00.
\end{aligned}$$

**例 26** 设  $f(x) \in C^5[x_0 - 2h, x_0 + 2h]$ ,  $h > 0$ ,  $x_k = x_0 + kh$ ,  $f_k = f(x_k)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2$ . 求证:

$$(1) \quad f'(x_0) = \frac{1}{12h} [f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2] + O(h^4);$$

$$(2) \quad f''(x_0) = \frac{1}{h^2} [f_{-1} - 2f_0 + f_1] + O(h^2).$$

**证** 本题用 Taylor 公式来做.

$$\begin{aligned}
(1) \quad f(x_0 \pm 2h) &= f(x_0) \pm 2hf'(x_0) + \frac{1}{2!}(2h)^2 f''(x_0) \\
&\quad \pm \frac{1}{3!}(2h)^3 f'''(x_0) + \frac{1}{4!}(2h)^4 f^{(4)}(x_0) \\
&\quad + O(h^5),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x_0 \pm h) &= f(x_0) \pm hf'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x_0) \\
&\quad \pm \frac{1}{3!}h^3 f'''(x_0) + \frac{1}{4!}h^4 f^{(4)}(x_0) + O(h^5).
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h) \\
&= 12hf'(x_0) + O(h^5).
\end{aligned}$$

即 
$$f'(x_0) = \frac{1}{12h} [f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2] + O(h^4).$$

(2) 利用(1)中  $f(x_0 \pm h)$  的展开式, 得

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} [f_{-1} - 2f_0 + f_1] + O(h^2).$$

## 四、习题

1. 确定下列求积公式中的待定参数, 使其代数精度尽量高, 并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度.

$$(1) \int_{-h}^h f(x) dx \approx A_{-1} f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h);$$

$$(2) \int_{-2h}^{2h} f(x) dx \approx A_{-1} f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h);$$

$$(3) \int_{-1}^1 f(x) dx \approx [f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]/3;$$

$$(4) \int_0^h f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(0) + f(h)] + ah^2 [f'(0) - f'(h)].$$

2. 分别运用梯形公式、Simpson 公式、Cotes 公式计算积分  $\int_0^1 e^x dx$ , 并估计各种方法的误差(要求小数点后至少保留 5 位).

3. 推导下列三种矩形求积公式:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(a) + \frac{f'(a)}{2}(b-a)^2;$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(b) - \frac{f'(b)}{2}(b-a)^2;$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3.$$

$$4. \text{ 已知 } x_0 = \frac{1}{4}, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{4},$$

(1) 推导以这三个点作为求积节点在  $[0, 1]$  上的插值型求积公式,

(2) 指明求积公式所具有的代数精度,

(3) 用所求公式计算  $\int_0^1 x^2 dx$ .

5. 利用  $n=5$  的复化 Simpson 公式计算积分,  $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ , 并估计截断误差.

6. 取 7 个点的函数值, 分别用复化梯形公式、复化 Simpson 公式计算积分  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4 - \sin^2 \varphi} d\varphi$ .

7. 给定积分  $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ .

(1) 利用复化梯形公式计算上述积分值, 使其截断误差不超过  $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$ .

(2) 取同样的求积节点, 改用复化 Simpson 公式计算时, 截断误差是多少?

(3) 要求截断误差不超过  $10^{-6}$ , 如果用复化 Simpson 公式, 应取多少个函数值?

8. 从地面发射一枚火箭, 在最初 80s 内记录其加速度如下表, 试求火箭在第 80s 时的速度.

$t(s)$	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$a(m \cdot s^{-2})$	30.00	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.29	46.69	50.67

9. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 证明当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\int_a^b f(x) dx$  的复化梯形公式和复化 Simpson 公式, 趋于积分值  $\int_a^b f(x) dx$ .

10. 计算椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  的周长, 使结果具有五位有效数字.

11. 用复化梯形公式和复化 Simpson 公式的事后误差估计计算定积分  $I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$ , 要求精确到  $10^{-3}$ .

12. 用 Romberg 算法计算积分  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x} dx$ , 要求误差不超过  $10^{-5}$ .

13. 使用两个及三个求积节点, 运用 Newton-Cotes 求积公式及 Gauss-Legendre 求积公式计算积分  $\int_{-1}^1 \sqrt{x+1.5} dx$ .

14. 用下列方法计算积分  $\int_1^3 \frac{1}{y} dy$ .

(1) Romberg 算法.

(2) 三点及五点 Gauss-Legendre 求积公式.

(3) 将积分区间分为四等分, 用复化两点 Gauss 公式.

15. 建立 Gauss 型求积公式

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

16. 对于 Gauss 求积公式  $\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ , 证明:

(1) 求积系数  $A_k > 0, k = 0, 1, 2, \dots, n$  且

$$\sum_{k=0}^n A_k = \int_a^b \rho(x) dx;$$

(2) 求积系数  $A_k = \int_a^b \rho(x) l_k(x) dx = \int_a^b \rho(x) l_k^2(x) dx$ . 其中  $l_k(x)$  是以  $x_0, x_1, \dots, x_k$  为插值节点的 Lagrange 插值基函数,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

17. 证明求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{9} [5f(\sqrt{0.6}) + 8f(0) + 5f(-\sqrt{0.6})]$$

对于次数不高于 5 的多项式准确成立, 并计算积分  $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x} dx$ .

18. 验证 Gauss 型求积公式

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

的系数及节点分别为

$$A_0 = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}, \quad A_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}},$$

$$x_0 = 2 - \sqrt{2}, \quad x_1 = 2 + \sqrt{2}.$$

19. 设  $\{\varphi_n(x)\}$  是  $[a, b]$  上带权  $\rho(x)$  的正交多项式序列,  $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$  为  $\varphi_{n+1}(x)$  的零点,  $l_i(x) (i = 0, 1, \dots, n)$  是以  $\{x_i\}$  为节点的 Lagrange 插值基函数,  $\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$  为 Gauss 型求积公式, 证明:

$$(1) \text{ 当 } 0 \leq k, l \leq n, k \neq l \text{ 时 } \sum_{i=0}^n A_i \varphi_k(x_i) \varphi_l(x_i) = 0;$$

$$(2) \int_a^b \rho(x) l_k(x) l_j(x) dx = 0, k \neq j;$$

$$(3) \sum_{k=0}^n \int_a^b \rho(x) l_k^2(x) dx = \int_a^b \rho(x) dx.$$

20. 设  $P_2(x)$  是对  $f(x)$  的二次插值多项式, 插值节点为  $0, h, 2h$ , 用  $P_2(x)$  导出积分  $I = \int_0^{3h} f(x) dx$  的数值积分公式  $I_h$ , 并用 Taylor 展开证明:

$$I - I_h = \frac{3}{8} h^4 f'''(0) + O(h^5).$$

21. 证明等式

$$n \sin \frac{\pi}{n} = \pi - \frac{\pi^3}{3! n^2} + \frac{\pi^5}{5! n^4} - \dots.$$

试依据  $n \sin(\pi/n) (n = 3, 6, 12)$  的值, 用外推算法求  $\pi$  的近似值.

22. 用 3 点公式求  $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$  在  $x = 1.0, 1.1, 1.2$  处的

导数值, 并估计误差.  $f(x)$  的函数值由下表给出.

$x_i$	1.0	1.1	1.2
$f(x_i)$	0.250000	0.226757	0.206612

### 23. 用中点差商公式

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

计算  $f(x) = \sqrt{x}$  在  $x = 2$  处的一阶导数的近似值, 取  $h = 0.5, 0.05, 0.005, 0.0005, 0.00005$ , 观测计算结果, 解释所发生的现象. 设计高精度的算法, 并重新计算.

### 24. 证明数值微分公式

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h} [f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$$

对任意 4 次多项式精确成立, 进一步求出微分公式的余项.

### 25. 填空题:

(1) 若用复化梯形公式计算积分  $\int_0^{1.5} e^{-x} dx$ , 区间  $[0, 1.5]$  应等分为  $n = \underline{\hspace{2cm}}$  才能使截断误差不超过  $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$ .

(2) 当  $n$  为奇数时,  $N-C$  求积公式  $I_n = (b-a) \sum_{i=1}^n C_i f(x_i)$  的代数精度至少为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(3) 插值型求积公式  $\sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \approx \int_a^b f(x) dx$  的求积系数之和  $\sum_{k=0}^n A_k = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(4) 设  $f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 4$ , 求积公式  $\sum_{k=0}^2 A_k f(x_k) \approx \int_a^b f(x) dx$  是 Gauss 型的, 则  $\int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^2 A_k f(x_k) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

## 五、习题解答

1. 解 (1) 求积公式中含有三个待定参数, 即  $A_{-1}, A_0, A_1$ , 将  $f(x) = 1, x, x^2$  分别代入求积公式, 并令其左右相等, 得

$$\begin{cases} A_{-1} + A_0 + A_1 = 2h, \\ -h(A_{-1} - A_1) = 0, \\ h^2(A_{-1} + A_1) = \frac{2}{3}h^3. \end{cases}$$

解得  $A_{-1} = A_1 = \frac{1}{3}h, A_0 = \frac{4}{3}h$ . 所求公式至少具有 2 次代数精度. 又由于

$$\int_{-h}^h x^3 dx = \frac{h}{3}(-h)^3 + \frac{h}{3}(h^3),$$

$$\int_{-h}^h x^4 dx \neq \frac{h}{3}(-h)^4 + \frac{h}{3}(h^4).$$

故  $\int_{-h}^h f(x) dx \approx \frac{h}{3}f(-h) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{h}{3}f(h)$  具有三次代数精度

.

(2) 求积公式中含有三个待定系数:  $A_{-1}, A_0, A_1$ , 故令公式对  $f(x) = 1, x, x^2$  准确成立, 得

$$\begin{cases} A_{-1} + A_0 + A_1 = 4h, \\ -h(A_{-1} - A_1) = 0, \\ h^2(A_{-1} + A_1) = \frac{16}{3}h^3. \end{cases}$$

解得 
$$A_{-1} = A_1 = \frac{8}{3}h,$$

$$A_0 = 4h - 2A_1 = 4h - \frac{16}{3}h = -\frac{4}{3}h,$$

故

$$\int_{-2h}^{2h} f(x) dx \approx \frac{8}{3}h[f(-h) + f(h)] - \frac{4}{3}hf(0).$$

因

$$\int_{-2h}^{2h} x^3 dx = 0,$$

而

$$\frac{8}{3}h[(-h)^3 + (h)^3] = 0,$$

又

$$\int_{-2h}^{2h} x^4 dx = \frac{2^6 h^5}{5} \neq \frac{16h^5}{3} = \frac{8}{3}h[h^4 + h^4],$$

所以求积公式只具三次代数精度。

(3) 求积公式中含两个待定常数  $x_1, x_2$ , 当令公式对  $f(x) = 1$  准确成立时, 得到

$$\int_{-1}^1 dx = 2 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3),$$

此等式不含有待定量  $x_1, x_2$ , 无用, 故需令公式对  $f(x) = x, x^2$  准确成立, 即

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 x dx = 0 = \frac{1}{3}(-1 + 2x_1 + 3x_2), \\ \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(1 + 2x_1^2 + 3x_2^2), \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 2x_1^2 + 3x_2^2 = 1. \end{cases} \quad (4.29)$$

$$(4.30)$$

解上述方程组得

$$\begin{cases} x_2 = -0.12660, \\ x_1 = 0.68990 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_2 = 0.52660, \\ x_1 = -0.28990. \end{cases}$$

故有

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{3}[f(-1) + 2f(0.68990) + 3f(-0.12660)]$$

或

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{3}[f(-1) + 2f(-0.28990) + 3f(0.52660)].$$

将  $f(x) = x^3$  代入上已确定的求积公式中,

$$\int_{-1}^1 x^3 dx \neq \frac{1}{3}[-1 + 2x_1^3 + 3x_2^3].$$

故求积公式具有 2 次代数精度.

(4) 求积公式中只含有一个待定参数  $a$ , 当  $f(x) = 1, x$  时, 有

$$\int_0^h 1 dx = \frac{h}{2}(1+1) + 0,$$

$$\int_0^h x dx = \frac{h}{2}(0+h) + ah^2(1-1).$$

故令  $f(x) = x^2$  时, 求积公式精确成立, 即

$$\int_0^h x^2 dx = \frac{h}{2}(0+h^2) + ah^2(2 \times 0 + 2h).$$

解得  $a = \frac{1}{12}$ .

故有

$$\int_0^h f(x) dx \approx \frac{h}{2}[f(0) + f(h)] + \frac{h^2}{12}[f'(0) - f'(h)].$$

将  $f(x) = x^3$  代入上述已确定的求积公式中, 有

$$\int_0^h x^3 dx = \frac{h^4}{4} = \frac{h}{2}[0+h] + \frac{h^2}{12}[0-3h^2] = \frac{h^4}{4};$$

再令  $f(x) = x^4$  代入求积公式时有

$$\int_0^h f(x) dx \neq \frac{h}{2}[0+h^4] + \frac{h^2}{12}[0-4h^3],$$

故所求求积公式具有 3 次代数精度.

2. 解 运用梯形公式,

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1}{2}[e^0 + e^1] = 1.8591409.$$

其误差

$$|R(f)| = \left| -\frac{1}{12}e^{\xi}(1-0)^3 \right| \leq \frac{1}{12}e = 0.2265235, \quad \xi \in (0,1)$$

(实际误差为  $|\int_0^1 e^x dx - 1.8591409| = 0.1408591$ ).

运用 Simpson 公式,

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1}{6}[e^0 + 4e^{\frac{1}{2}} + e^1] = 1.7188612.$$

其误差

$$|R(f)| = \left| -\frac{1}{2880} e^{\xi} \right| \leq \frac{e}{2880} = 0.00094385.$$

运用 Cotes 公式,

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x dx &\approx \frac{1}{90} [7e^0 + 32e^{\frac{1}{4}} + 12e^{\frac{1}{2}} + 32e^{\frac{3}{4}} + 7e^1] \\ &= 1.718282688. \end{aligned}$$

其误差

$$\begin{aligned} |R(f)| &= \left| -\frac{2 \times 1}{945} \left(\frac{1}{4}\right)^6 e^{\xi} \right| \leq \frac{2e}{945 \times 4^6} \\ &= 0.000001404. \end{aligned}$$

3. 解 将  $f(x)$  在  $x = a$  处 Taylor 展开, 得

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a), \quad \xi \in [a, x].$$

两边在  $[a, b]$  上积分, 得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b f(a) dx + \int_a^b f'(\xi)(x-a) dx \\ &= (b-a)f(a) + \int_a^b f'(\xi)(x-a) dx \\ &= (b-a)f(a) + f'(\eta) \int_a^b (x-a) dx \\ &= (b-a)f(a) + \frac{1}{2} f'(\eta)(b-a)^2, \quad \eta \in [a, b]. \end{aligned}$$

将  $f(x)$  在  $x = b$  处 Taylor 展开. 得

$$f(x) = f(b) + f'(\xi)(x-b).$$

两边在  $[a, b]$  上积分, 得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b f(b) dx + \int_a^b f'(\xi)(x-b) dx \\ &= (b-a)f(b) + f'(\eta) \int_a^b (x-b) dx \\ &= (b-a)f(b) - \frac{1}{2} f'(\eta)(b-a)^2, \quad \eta \in [a, b]. \end{aligned}$$

将  $f(x)$  在  $\frac{a+b}{2}$  处 Taylor 展开, 得

$$f(x) = f\left[\frac{a+b}{2}\right] + f'\left[\frac{a+b}{2}\right]\left[x - \frac{a+b}{2}\right] + \frac{1}{2}f''(\xi)\left[x - \frac{a+b}{2}\right]^2, \xi \in [a, b].$$

两边在  $[a, b]$  上积分, 得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= (b-a)f\left[\frac{a+b}{2}\right] + f'\left[\frac{a+b}{2}\right] \int_a^b \left[x - \frac{a+b}{2}\right] dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi) \left[x - \frac{a+b}{2}\right]^2 dx \\ &= (b-a)f\left[\frac{a+b}{2}\right] + \frac{1}{2}f''(\eta)(b-a)^3, \eta \in [a, b]. \end{aligned}$$

4. 解 (1) 所求公式的形式为

$$\int_0^1 f(x) dx \approx A_0 f\left(\frac{1}{4}\right) + A_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 f\left(\frac{3}{4}\right).$$

因所要构造的公式应为插值型的, 则

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_0^1 l_0(x) dx = \int_0^1 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{4})}{(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})(\frac{1}{4}-\frac{3}{4})} dx = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 l_1(x) dx = \int_0^1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(x-\frac{1}{4})(x-\frac{3}{4})}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})(\frac{1}{2}-\frac{3}{4})} dx = -\frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$A_2 = \int_0^1 l_2(x) dx = \int_0^1 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2})}{(\frac{3}{4} - \frac{1}{4})(\frac{3}{4} - \frac{1}{2})} dx = \frac{2}{3}.$$

故

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{3} [2f(\frac{1}{4}) - f(\frac{1}{2}) + 2f(\frac{3}{4})].$$

(2) 因上述求积公式为 3 点的插值型公式, 由定理 4.1 知, 此公式至少有两代数精度. 再将  $f(x) = x^3, x^4$  代入上述求积公式,

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} = \frac{1}{3} [2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 - \left(\frac{2}{4}\right)^3 + 2 \left(\frac{3}{4}\right)^3],$$

$$\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{3} [2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 - \left(\frac{2}{4}\right)^4 + 2 \left(\frac{3}{4}\right)^4].$$

故所求求积公式具有 3 次代数精度.

(3) 因所得求积公式有 3 次代数精度, 从而用求积公式计算

$\int_0^1 x^2 dx$  的值应是精确值, 即

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} [2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{2}{4}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2] = \frac{1}{3}.$$

5. 解 区间长度  $b-a=1, n=5$ , 故  $h=\frac{1}{5}=0.2$ , 节点  $x_i$

$= ih (i=0, 1, 2, \dots, 5)$ . 在每个小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  中还需计算  $x_{i-\frac{1}{2}}$

$= x_{i-1} + \frac{1}{2}h, i=1, 2, 3, 4, 5$ . 得

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} \left[ \frac{1}{1+0} + 2 \times \left( \frac{1}{1+0.2} + \frac{1}{1+0.4} + \frac{1}{1+0.6} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{1+0.8} \right) + 4 \times \left( \frac{1}{1+0.1} + \frac{1}{1+0.3} + \frac{1}{1+0.5} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{1+0.7} + \frac{1}{1+0.9} \right) + \frac{1}{1+1} \right] \end{aligned}$$

$$= 0.69315.$$

其截断误差估计为

$$|R_n(f)| = \left| -\frac{1}{2880} h^4 f^{(4)}(\zeta) \right| \leq \frac{h^4}{2880} \cdot \max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(4)}(x)|.$$

由于  $f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$ ,  $\max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(4)}(x)| = 24$ , 故

$$|R_n(f)| \leq \frac{h^4}{2880} \cdot 24 = 1.3333 \times 10^{-5}.$$

6. 解 设  $f(\varphi) = \sqrt{4 - \sin^2 \varphi}$ , 取  $h = \frac{1}{6} \times \frac{\pi}{6} = \frac{1}{36}\pi$ , 计算

7 个点处的函数值如下.

$\varphi$	0	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{2\pi}{36}$	$\frac{3\pi}{36}$
$f(\varphi)$	2	1.9981001	1.9924473	1.9831825
$\varphi$	$\frac{4\pi}{36}$	$\frac{5\pi}{36}$	$\frac{6\pi}{36}$	
$f(\varphi)$	1.9705386	1.9548386	1.9364917	

用复化梯形公式计算时, 区间等分数为 6. 故

$$\begin{aligned} T_6 &= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{36} [2 + 2 \times (1.9981001 + 1.9924473 \\ &\quad + 1.9831825 + 1.9705386 + 1.9548386) + 1.9364917] \\ &= 1.035621912. \end{aligned}$$

用复化 Simpson 公式计算时, 区间等分数为 3, 故

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{1}{6} \times \frac{\pi}{18} [2 + 4 \times (1.9981001 + 1.9831825 \\ &\quad + 1.9548386) + 2 \times (1.9924473 + 1.9705386) \\ &\quad + 1.9364917] \\ &= 1.035764141. \end{aligned}$$

7. 解 由于  $f(x) = \frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos(xt) dt$ , 所以

$$f^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{d^k}{dx^k} \cos(kt) dt = \int_0^1 t^k \cos(xt + \frac{k\pi}{2}) dt.$$

故

$$|f^{(k)}(x)| \leq \int_0^1 t^k |\cos(xt + \frac{k\pi}{2})| dt \leq \int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}.$$

(1) 为使复化梯形公式满足误差要求,只需

$$|R_n(f)| = \left| -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi) \right| \leq \frac{1}{12} h^2 \cdot \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

即可,这只需  $h \leq 0.1342$ .

$$n \geq \frac{b-a}{0.1342} = \frac{1}{0.1342} = 7.4516,$$

故只需 8 等分即可. 此时  $h = \frac{1}{8} = 0.125$ , 则

$$\begin{aligned} I \approx T_8 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} \{1 + 2 \times (0.9973979 + 0.9896159 \\ &+ 0.9767266 + 0.958851 + 0.9361557 + 0.9088517 \\ &+ 0.8771926) + 0.8414710\} = 0.9456911. \end{aligned}$$

(2) 对于同样点数用复化 Simpson 公式时,  $h = \frac{1}{4}$ , 其截断误差为

$$\begin{aligned} |R_n(f)| &= \left| -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(4)}(\xi) \right| \leq \frac{1}{2880} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \frac{1}{5} \\ &= 0.000000271 = 0.271 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

(3) 为了在使用复化 Simpson 求积公式时误差不超过  $10^{-6}$ , 只

需

$$\begin{aligned} |R_n(f)| &= \left| -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(4)}(\xi) \right| \leq \frac{1}{2880} h^4 \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{2880 \times 5} \left[ \frac{1}{n} \right]^4 < 10^{-6}, \end{aligned}$$

解得

$$n^4 \geq 69.444444, \quad n \geq 2.88675.$$

故至少需将  $[0, 1]$  3 等分, 即取  $2 \times 3 + 1 = 7$  个节点处的函数

值.

8. 解 因速度  $v(t)$  对时间  $t$  的导数为加速度, 故有

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t) dt,$$

$$v(80) = v(0) + \int_0^{80} a(t) dt.$$

应用复化 Simpson 公式计算, 此题中  $b-a=80$ , 9 个节点, 故  $n=4, h=80/4=20$ . 由于火箭从地面向上发射,  $v(0)=0$ , 因此

$$\begin{aligned} v(80) &= \int_0^{80} a(t) dt \\ &\approx \frac{1}{6} \times 20 [30.00 + 4 \times (31.63 + 35.47 + 40.33 \\ &\quad + 46.69) + 2 \times (33.44 + 37.75 + 43.29) + 50.67] \\ &= 3087.03333. \end{aligned}$$

即火箭在第 80s 时的速度约为 3087.03333m/s.

9. 证 由于  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 故由定积分的定义可知,

对  $[a, b]$  的任一分划  $\Delta$  所作黎曼和的极限  $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$  存在. 该积分对于等距分划和特殊  $\xi_i$  当然成立.

复化梯形公式为

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) h + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) h \right], \quad h = \frac{b-a}{n}. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n &= \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih) h + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(a+(i+1)h) h \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_a^b f(x) dx + \int_a^b f(x) dx \right] = \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

复化 Simpson 公式为

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{6} [f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})].$$

则

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{1}{6} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) h + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) h \right. \\ &\quad \left. + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) h \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[ \int_a^b f(x) dx + 4 \int_a^b f(x) dx + \int_a^b f(x) dx \right] \\ &= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

10. 解 椭圆周长的计算公式为

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2_{\theta} + y'^2_{\theta}} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\sin^2 \theta} d\theta. \end{aligned}$$

由于  $\frac{\pi}{2} < \frac{1}{4} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\sin^2 \theta} d\theta < 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$ , 因此  $\frac{I}{4}$  有一位整数; 又由于要求结果有 5 位有效数字, 故需截断误差  $\leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$  (因被积函数  $f(\theta) = \sqrt{1 + 3\sin^2 \theta}$  的高阶导较复杂, 不便于估算, 此处用事后误差估计处理) 列表计算如下.

$k$	等分 $2^k$	$T_{2^k}$	$\frac{1}{3}  T_{2^k} - T_{2^{k-1}} $
0	1	2.3561945	
1	2	2.41992078	0.0212421
2	4	2.42210310	0.00072744
3	8	2.42211206	0.000002986

$0.000002986 < \frac{1}{2} \times 10^{-4}$ , 故取  $\frac{1}{4} I \approx T_8 = 2.4221$  即可, 从而

$$I \approx 9.6884.$$

11. 解 依事后误差估计式有

$$I \approx T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n),$$

$$T_{2n} = \frac{1}{2} T_n + \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}).$$

及 
$$I \approx S_{2n} + \frac{1}{15}(S_{2n} - S_n),$$

$$S_{2n} = \frac{4}{3} T_{2n} - \frac{1}{3} T_n.$$

计算列表如下(表 4.6).

表 4.6

$k$	等分 $2^k$	$T_{2^k}$	$\frac{1}{3}   T_{2^k} - T_{2^{k-1}}  $	$S_{2^{k-1}}$	$\frac{1}{15}   S_{2^{k-1}} - S_{2^{k-2}}  $
0	1	3			
1	2	3.1		3.133333	
2	4	3.131176471		3.141568627	
3	8	3.138988495		3.141592503	$0.00000159 < 10^{-3}$
4	16	3.140941612	$0.000651 < 10^{-3}$	3.141592651	$0.000000009$

因此,由梯形公式得

$$I \approx T_{16} = 3.140941612,$$

精确到  $10^{-3}$ . 由复化 Simpson 公式得到

$$I \approx S_4 = 3.141592503,$$

精确到  $10^{-5}$ . 若取

$$I \approx S_8 = 3.141592651,$$

则精确到  $10^{-8}$ .

12. 解 用 Romberg 方法计算积分  $\int_0^1 e^{-x} dx$ , 应用公式 (4.15), 计算结果见表 4.7.

表 4.7

$k$	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$
0	0.683940	0.632333	0.632122	0.632120
1	0.645235	0.632135	0.632126	
2	0.635410	0.632121		
3	0.632943			

所求积分

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x} dx \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times 0.632120 \approx 0.71327,$$

而积分准确值为 0.713272.

13. 解 使用两个求积节点时,  
梯形公式

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{x+1.5} dx &\approx \frac{1+1}{2} [\sqrt{-1+1.5} + \sqrt{1+1.5}] \\ &= 2.2882456. \end{aligned}$$

Gauss-Legendre 公式

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{x+1.5} dx &\approx \sqrt{1.5-0.577350} + \sqrt{1.5+0.577350} \\ &= 2.401848. \end{aligned}$$

使用三个求积节点时,

Simpson 公式

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{x+1.5} dx &\approx \frac{2}{6} [\sqrt{1.5-1} + 4\sqrt{1.5+0} + \sqrt{1.5+1}] \\ &= 2.395742. \end{aligned}$$

Gauss-Legendre 公式

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{x+1.5} dx &\approx 0.555556 (\sqrt{1.5-0.774596} \\ &\quad + \sqrt{1.5+0.774596}) \\ &\quad + 0.888889 \sqrt{1.5+0} = 2.399709. \end{aligned}$$

积分  $\int_{-1}^1 \sqrt{x+1.5} dx$  的准确值为 2.399529, 说明在求积节点数相同时, Gauss 型求积公式精确度高.

14. 解 (1) 用 Romberg 算法

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0^{(0)} = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)], \\ T_0^{(l)} = \frac{1}{2} T_0^{(l-1)} + \frac{b-a}{2^l} \sum_{i=1}^{2^{l-1}} f[a + (2i-1) \frac{b-a}{2^l}], \\ T_m^{(k)} = \frac{4^m T_{m-1}^{(k+1)} - T_{m-1}^{(k)}}{4^m - 1}, \quad k = 0, 1, \dots, l-m; m = 1, 2, \dots, l \end{array} \right. \quad l = 1, 2, \dots,$$

计算, 计算结果如表 4.8.

表 4.8

$k$	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$
0	1.333333	1.111111	1.099258	1.098630
1	1.166667	1.099999	1.098640	
2	1.116666	1.098725		
3	1.103210			

故  $\int_1^3 \frac{1}{y} dy \approx 1.098630$

(2) 用三点及五点 Gauss-Legendre 求积公式, 需先对求积区间  $[1, 3]$  作如下变换: 令

$$y = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)t = t+2.$$

则当  $y \in [1, 3]$  时,  $t \in [-1, 1]$ , 且  $dy = dt$ ,

$$\int_1^3 \frac{1}{y} dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{t+2} dt.$$

三点 Gauss 公式

$$\int_1^3 \frac{1}{y} dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{t+2} dt$$

$$\begin{aligned}
&\approx 0.5555556 \left[ \frac{1}{2+0.7745967} + \frac{1}{2-0.7745967} \right] \\
&\quad + 0.8888889 \times \frac{1}{2.0+0} \\
&= 1.098039283.
\end{aligned}$$

五点 Gauss 公式

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{1}{y} dy &= \int_{-1}^1 \frac{1}{t+2} dt \\
&\approx 0.2369269 \left[ \frac{1}{2-0.9061798} + \frac{1}{2+0.9061798} \right] \\
&\quad + 0.4786289 \times \left[ \frac{1}{2-0.5384693} + \frac{1}{2+0.5384693} \right] \\
&\quad + 0.5688889 \times \frac{1}{2} \\
&= 1.098609289.
\end{aligned}$$

(3) 用复化的两点 Gauss 求积公式计算, 需将  $[1, 3]$  4 等分, 则

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{1}{y} dy &= \int_1^{1.5} \frac{1}{y} dy + \int_{1.5}^2 \frac{1}{y} dy + \int_2^{2.5} \frac{1}{y} dy + \int_{2.5}^3 \frac{1}{y} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{2.5+0.5t} + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{3.5+0.5t} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{4.5+0.5t} + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{5.5+0.5t} \\
&\approx \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2.5+0.5 \times (-3^{-1/2})} + \frac{1}{2.5+0.5 \times 3^{-1/2}} \right. \\
&\quad + \frac{1}{3.5+0.5 \times (-3^{-1/2})} + \frac{1}{3.5+0.5 \times 3^{-1/2}} \\
&\quad + \frac{1}{4.5+0.5 \times (-3^{-1/2})} + \frac{1}{4.5+0.5 \times 3^{-1/2}} \\
&\quad \left. + \frac{1}{5.5+0.5 \times (-3^{-1/2})} + \frac{1}{5.5+0.5 \times 3^{-1/2}} \right] \\
&= 1.098537573.
\end{aligned}$$

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{y} dy \text{ 的真值为 } I = 1.098612289.$$

15. 解 此题可用两种方法求解:第一种利用代数精度,得到关于  $A_0$ 、 $A_1$ 、 $x_0$ 、 $x_1$  的一个非线性方程组,求解此方程组,得  $A_0$ 、 $A_1$ 、 $x_0$ 、 $x_1$ ;第二种方法,利用正交多项式的零点作为 Gauss 点. 下面用第二种求解法.

因此公式是两点的 Gauss 求积公式,故可设  $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)$  为  $[0, 1]$  上带权  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  的正交多项式,则有

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \omega_2(x) dx = 0,$$

与 
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}} \omega_2(x) dx = 0.$$

即 
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \omega_2(x) dx = \int_0^1 \left( x^{\frac{3}{2}} - x_0 x^{\frac{1}{2}} - x_1 x^{\frac{1}{2}} + x_0 x_1 x^{-\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{2}{3} x_0 - \frac{2}{3} x_1 + 2 x_0 x_1$$

$$= 0,$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}} \omega_2(x) dx = \int_0^1 \left( x^{\frac{5}{2}} - x_0 x^{\frac{3}{2}} - x_1 x^{\frac{3}{2}} + x_0 x_1 x^{\frac{1}{2}} \right) dx$$

$$= \frac{2}{7} - \frac{2}{5} x_0 - \frac{2}{5} x_1 + \frac{2}{3} x_0 x_1$$

$$= 0.$$

整理得

$$\begin{cases} x_0 x_1 - \frac{1}{3}(x_0 + x_1) = -\frac{1}{5}, \\ \frac{1}{3} x_0 x_1 - \frac{1}{5}(x_0 + x_1) = -\frac{1}{7}. \end{cases}$$

令  $u = x_0 x_1$ ,  $v = x_0 + x_1$ , 由上式得

$$\begin{cases} \frac{1}{3} v - u = \frac{1}{5}, \\ \frac{1}{5} v - \frac{1}{3} u = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

解之得  $v = +\frac{6}{7}$ ,  $u = \frac{3}{35}$ .

由韦达定理知  $x_0, x_1$  是方程  $x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{3}{35} = 0$  的两个根, 解之得

$$x_0 = \frac{3}{7} - \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}, x_1 = \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

此外, 注意到公式对  $f(x) = 1, x$  准确成立, 从而又有

$$\begin{cases} 2 = A_0 + A_1, \\ \frac{2}{3} = A_0 x_0 + A_1 x_1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 1 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}}, \\ A_1 = 1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}}. \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) dx &\approx \left(1 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}}\right) f\left(\frac{3}{7} - \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}\right) \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}}\right) f\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}\right). \end{aligned}$$

16. 证 (1) 因求积公式是 Gauss 型的, 故它的代数精度为  $2n+1$  次, 因此, 对  $2n$  次的多项式  $l_k^2(x) (k=0, 1, 2, \dots, n)$ , 求积公式是精确的, 即有

$$\int_a^b \rho(x) l_k^2(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i l_k^2(x_i).$$

又  $l_k(x)$  是 Lagrange 插值基函数, 满足  $l_k(x_i) = \delta_{ki}$ , 所以有

$$\int_a^b \rho(x) l_k^2(x) dx = A_k > 0, \quad k=0, 1, \dots, n.$$

特别当  $f(x) = 1$  时, 求积公式准确成立, 有

$$\int_a^b \rho(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k.$$

(2) 由上述知  $A_k = \int_a^b \rho(x) l_k^2(x) dx$ , 另一方面, Gauss 型求积公式也是插值型的, 故由定义知, 其求积系数  $A_k = \int_a^b \rho(x) l_k(x) dx$ , 故

$$A_k = \int_a^b \rho(x) l_k(x) dx = \int_a^b \rho(x) l_k^2(x) dx.$$

17. 证 方法一: 代入  $f(x) = x^i (i = 0, 1, 2, \dots, 5)$ , 直接验证, 知求积公式有 5 次代数精度.

方法二: 验证所给的求积公式是 Gauss-Legendre 求积公式.

因为三次 Legendre 多项式为

$$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

它的 3 个零点分别为  $x_0 = -\sqrt{0.6}$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \sqrt{0.6}$ .

于是有

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 f(-\sqrt{0.6}) + A_1 f(0) + A_2 f(\sqrt{0.6}).$$

令公式对  $f(x) = 1, x, x^2$  准确成立, 得

$$\begin{cases} 2 = A_0 + A_1 + A_2, \\ 0 = -\sqrt{0.6} A_0 + \sqrt{0.6} A_2, \\ \frac{2}{3} = 0.6 A_0 + 0.6 A_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = \frac{5}{9}, \\ A_1 = \frac{8}{9}, \\ A_2 = \frac{5}{9}. \end{cases}$$

故公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{9} [5f(-\sqrt{0.6}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{0.6})]$$

是 Gauss 型的, 且恰为三点 Gauss-Legendre 求积公式. 其代数精度为 5.

也可直接查表得  $A_0, A_1, A_2$ .

计算积分  $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x} dx$ :

令  $x = \frac{1}{2}(1+t)$ , 则

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\sin\left[\frac{1+t}{2}\right]}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}t} dt = \int_{-1}^1 \frac{\sin\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right]}{3+t} dt$$

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{1}{9} \left[ 5 \times \frac{\sin \left[ -\frac{\sqrt{0.6}}{2} + \frac{1}{2} \right]}{3 - \sqrt{0.6}} \right. \\
&\quad \left. + 8 \times \frac{\sin \frac{1}{2}}{3} + 5 \times \frac{\sin \left[ \frac{\sqrt{0.6}}{2} + \frac{1}{2} \right]}{3 + \sqrt{0.6}} \right] \\
&= 0.2842485.
\end{aligned}$$

18. 证 (1) 因  $\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$  是 Gauss 型求积公式, 故对于次数不超过  $2n+1$  的多项式均准确成立. 由于  $\varphi_k(x)\varphi_l(x)$  是  $k+l$  次的多项式,  $k+l \leq 2n$ , 故对于  $\varphi_k(x)\varphi_l(x)$ , 求积公式精确成立, 即有

$$\int_a^b \rho(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i \varphi_k(x_i) \varphi_l(x_i).$$

又由于  $k \neq l$  时, 有  $\int_a^b \rho(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = 0$ . 因此,

$$\sum_{i=0}^n A_i \varphi_k(x_i) \varphi_l(x_i) = 0, \quad k \neq l, k, l \leq n.$$

(2)  $l_k(x), l_j(x)$  是  $n$  次 Lagrange 插值基函数, 满足  $l_k(x_i) = \delta_{ki}, l_j(x_i) = \delta_{ji}$ , 且  $l_k(x)l_j(x)$  是  $2n$  次多项式, 故

$$\int_a^b \rho(x) l_k(x) l_j(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i l_k(x_i) l_j(x_i).$$

当  $k \neq j$  时,  $l_k(x_i)l_j(x_i) = 0 (i = 0, 1, \dots, n)$ , 因此

$$\int_a^b \rho(x) l_k(x) l_j(x) dx = 0.$$

(3) 由 16 题知,

$$\sum_{k=0}^n A_k = \int_a^b \rho(x) dx,$$

而

$$\sum_{k=0}^n A_k = \sum_{k=0}^n \int_a^b \rho(x) l_k(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_a^b \rho(x) l_k^2(x) dx,$$

故有

$$\sum_{k=0}^n \int_a^b \rho(x) l_k(x) dx = \int_a^b \rho(x) dx.$$

19. 解 方法 1: 直接利用代数精度得到关于  $A_0$ 、 $A_1$ 、 $x_0$ 、 $x_1$  的方程组, 求解即得.

方法 2: 使用两点 Gauss-Laguerre 求积公式证明. 由

$$L_2(x) = e^x \frac{d^2}{dx^2}(x^2 e^{-x}) = 2 - 4x + x^2,$$

令  $L_2(x) = 0$ , 得

$$x_0 = 2 - \sqrt{2}, \quad x_1 = 2 + \sqrt{2}.$$

再由 Gauss-Laguerre 求积系数,

$$A_k = \frac{[(n+1)!]^2}{x_k [L'_{n+1}(x_k)]^2}, \quad n=1, k=0, 1$$

得

$$A_0 = \frac{2^2}{(2-\sqrt{2})[-4+2(2-\sqrt{2})]^2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}},$$

$$A_1 = \frac{2^2}{(2+\sqrt{2})[-4+2(2+\sqrt{2})]^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}.$$

公式得证.

20. 解 依题意可设

$$P_2(x) = f(0)l_0(x) + f(h)l_1(x) + f(2h)l_2(x).$$

其中

$$l_0(x) = \frac{(x-h)(x-2h)}{(0-h)(0-2h)} = \frac{1}{2h^2}(x^2 - 3hx + 2h^2),$$

$$l_1(x) = \frac{(x-0)(x-2h)}{(h-0)(h-2h)} = \frac{-1}{h^2}(x^2 - 2hx),$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-h)}{(2h-0)(2h-h)} = \frac{1}{2h^2}(x^2 - hx).$$

将  $P_2(x)$  在  $[0, 3h]$  上积分, 得

$$\int_0^{3h} P_2(x) dx = \frac{3}{4} hf(0) + \frac{9}{4} hf(2h).$$

所以

$$I_h = \int_0^{3h} P_2(x) dx = \frac{3}{4} h[f(0) + 3f(2h)].$$

这就是所求的积分公式.

为了求得其余项  $I - I_h$ . 将  $f(2h)$  在  $x = 0$  处 Taylor 展开, 得

$$\begin{aligned} f(2h) &= f(0) + 2hf'(0) + \frac{1}{2}(2h)^2 f''(0) + \frac{1}{6}(2h)^3 f'''(0) \\ &\quad + \frac{1}{4!}(2h)^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (0, 2h). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} I_h &= 3hf(0) + \frac{9}{2}h^2 f'(0) + \frac{9}{2}h^3 f''(0) + 3h^4 f'''(0) \\ &\quad + O(h^5). \end{aligned}$$

再将  $f(x)$  在  $x = 0$  处 Taylor 展开, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\eta)x^4, \quad \eta \in (0, x). \end{aligned}$$

两边在  $[0, 3h]$  上积分得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{3h} f(x) dx = 3hf(0) + \frac{1}{2}(3h)^2 f'(0) + \frac{1}{6}(3h)^3 f''(0) \\ &\quad + \frac{1}{24}(3h)^4 f'''(0) + O(h^5) \\ &= 3hf(0) + \frac{9}{2}h^2 f'(0) + \frac{9}{2}h^3 f''(0) + \frac{27}{8}h^4 f'''(0) \\ &\quad + O(h^5). \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} I - I_h &= \frac{27}{8}h^4 f'''(0) - 3h^4 f'''(0) + O(h^5) \\ &= \frac{3}{8}h^4 f'''(0) + O(h^5). \end{aligned}$$

21. 证 将  $\sin \frac{\pi}{n}$  在  $x = 0$  处 Taylor 展开, 得

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} - \frac{1}{3!} \left( \frac{\pi}{n} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left( \frac{\pi}{n} \right)^5 - \dots$$

整理得

$$n \sin \frac{\pi}{n} = \pi - \frac{\pi^3}{3! n^2} + \frac{\pi^5}{5! n^4} - \dots$$

由于余项仅含  $\frac{1}{n}$  的偶次项, 故可用外推技术, 利用算式 (4.15) 计算结果如表 4.9.

表 4.9

$n$	$n \sin \frac{\pi}{n}$		
3	2.598076	3.133975	3.141580
6	3.010000	3.141105	
12	3.105829		

故取  $\pi$  的近似值为 3.141580.

22. 解 三点求导公式为

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi_1),$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h} [-f(x_0) + f(x_2)] - \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi_1),$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h} [f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] + \frac{1}{3} h^2 f'''(\xi_2).$$

上表中取  $x_0 = 1, x_1 = 1.1, x_2 = 1.2$ , 分别将有关数值代入上三式, 即可得导数的近似值, 由于

$$|f'''(\xi_i)| \leq \max_{1.0 \leq x \leq 1.2} |f'''(x)| = \max_{1.0 \leq x \leq 1.2} \left| \frac{-4!}{(1+x)^5} \right| = \frac{4!}{2^5} = 0.75.$$

故可得误差及导数值如表 4.10.

表 4.10

$x$	1.0	1.1	1.2
三点公式	-0.24792	-0.21694	-0.18596
$f'(x)$	-0.25000	-0.21596	-0.18783
理论误差值	0.00250	0.00125	0.00250
实际误差值	0.00208	0.00098	0.00187

23. 解 对于  $f(x) = \sqrt{x}$ , 中点差商公式为

$$f'(2) \approx \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2-h}}{2h}$$

在计算过程中保留 6 位有效数字, 计算结果列于表 4.11, 准确值(6 位有效数字)  $f'(2) = 0.353553$ .

表 4.11

$h$	$\sqrt{2+h}$	$\sqrt{2-h}$	$\frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2-h}}{2h}$	$f'(2) - \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2-h}}{2h}$
0.5	1.58114	1.22474	0.356400	-0.002847
0.05	1.43178	1.39642	0.353600	-0.000047
0.005	1.41598	1.41244	0.354000	-0.000447
0.0005	1.41439	1.41404	0.350000	0.003553
0.00005	1.41423	1.41420	0.300000	0.053553

由表可知当  $h = 0.05$  时计算效果最佳, 当  $h < 0.05$  时, 中心差商公式的分子是相近的两数相减, 由于舍入误差的影响, 精度降低,  $h$  越小, 计算效果越差.

为了减少误差, 把中点差商公式改写为

$$f'(2) = \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2-h}}$$

表 4.12 列出了用上述公式计算的结果, 可见当  $h$  越小时, 精度越高.

表 4.12

$h$	$\sqrt{2+h}$	$\sqrt{2-h}$	$\frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2-h}}$	$f'(2) - \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2-h}}$
0.5	1.58114	1.22474	0.356394	-0.002864
0.05	1.43178	1.39642	0.353582	-0.000029
0.005	1.41598	1.41244	0.353554	-0.000001
0.0005	1.41439	1.41404	0.353553	0.000000
0.00005	1.41423	1.41420	0.353555	0.000000

24. 解 当  $f(x) = 1$  时, 左边 = 0, 右边 = 0

左边 = 右边;

当  $f(x) = x$  时, 左边 = 1,

$$\begin{aligned} \text{右边} &= \frac{1}{12h}[(x_0 - 2h) - 8(x_0 - h) + 8(x_0 + h) \\ &\quad - (x_0 + 2h)] = 1, \end{aligned}$$

左边 = 右边;

当  $f(x) = x^2$  时, 左边 =  $2x_0$ ,

$$\begin{aligned} \text{右边} &= \frac{1}{12h}[(x_0 - 2h)^2 - 8(x_0 - h)^2 + 8(x_0 + h)^2 \\ &\quad - (x_0 + 2h)^2] = 2x_0, \end{aligned}$$

左边 = 右边;

当  $f(x) = x^3$  时, 左边 =  $3x_0^2$ ,

$$\begin{aligned} \text{右边} &= \frac{1}{12h}[(x_0 - 2h)^3 - 8(x_0 - h)^3 + 8(x_0 + h)^3 \\ &\quad - (x_0 + 2h)^3] = 3x_0^2 \end{aligned}$$

左边 = 右边;

当  $f(x) = x^4$  时, 左边 =  $4x_0^3$ ,

$$\begin{aligned} \text{右边} &= \frac{1}{12h}[(x_0 - 2h)^4 - 8(x_0 - h)^4 + 8(x_0 + h)^4 \\ &\quad - (x_0 + 2h)^4] = 4x_0^3 \end{aligned}$$

左边 = 右边.

综上可得所给微分公式对任意四次多项式是精确成立的.

记  $x_i = x_0 + ih, i = -2, -1, 0, 1, 2$ , 作四次多项式  $P(x)$  满足如下插值条件:

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = -2, -1, 0, 1, 2,$$

则由插值多项式的理论知,  $P(x)$  是唯一存在的, 且有

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \prod_{i=-2}^2 (x - x_i),$$

$\xi \in (x_0 - 2h, x_0 + 2h)$  且与  $x$  有关.

$$\text{记} \quad g(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \prod_{\substack{i=-2 \\ i \neq 0}}^2 (x - x_i),$$

$$\text{则} \quad f(x) - P(x) = g(x)(x - x_0),$$

求导得

$$f'(x) - P'(x) = g'(x)(x - x_0) + g(x).$$

令  $x = x_0$  得

$$\begin{aligned} f'(x_0) - P'(x_0) &= g(x_0) \\ &= \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \prod_{\substack{i=-2 \\ i \neq 0}}^2 (x_0 - x_i) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{30} h^4. \end{aligned}$$

由于微分公式对 4 次多项式精确成立, 又  $P(x)$  为 4 次多项式, 所以

$$\begin{aligned} P'(x_0) &= \frac{1}{12h} [P(x_0 - 2h) - 8P(x_0 - h) \\ &\quad + 8P(x_0 + h) - P(x_0 + 2h)]. \end{aligned}$$

再由插值条件得

$$\begin{aligned} P'(x_0) &= \frac{1}{12h} [f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) \\ &\quad + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} f'(x) - P'(x) &= f'(x) - \frac{1}{12h} [f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) \\ &\quad + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] \\ &= \frac{f^{(5)}(\xi)}{30} h^4, \quad \xi \in (x_0 - 2h, x_0 + 2h). \end{aligned}$$

25. 解 (1)  $n = 75$ . (2) 代数精度至少为  $n$  次.

(3)  $\sum_{k=0}^n A_k = b - a$ . (4) 因公式的代数精度为 5, 故

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^2 A_k f(x_k) = 0.$$

# 第五章 常微分方程数值解法

## 一、内容提要

在工程技术及自然科学领域中,常常会遇到常微分方程的求解问题.除了简单的、常系数线性的、典型的方程外,要用传统的数学分析方法找出复杂的变系数的或非线性问题解的解析表达式是困难的,甚至是不可能的;而许多实际问题,往往只需获得解在若干个点上的近似值就行了,因此,需要研究和掌握数值解法,即算出解域内离散点上解的近似值的方法.

本书着重考察一阶方程的数值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in [a, b] \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

为保证(5.1)的解存在且唯一,总假定右端函数  $f(x, y)$  关于  $y$  满足 Lipschitz 条件,即

$$\forall y, \bar{y}, \text{ 有 } |f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L |y - \bar{y}|.$$

### 1. 算法构造的主要途径

将微分方程的连续问题(5.1)离散化,即取一系列离散点

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots,$$

其中  $x_n = x_0 + nh$ ,  $n=0, 1, \cdots$ ,  $h = x_{n+1} - x_n$ , 并总假定步长  $h$  是常数.

将微分方程离散化,通常有三种方法:

(1) 差商逼近法

即是用适当差商逼近导数值.

(2) 数值积分法

其基本思想是先将问题(5.1)转化为积分方程

$$y(x_m) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_m} f(x, y(x)) dx \quad (y(x_0) = y_0 \quad m > n).$$

然后将上式右端采用第四章介绍的数值积分离散化,从而获得原初值问题的一个离散差分格式.

### (3) Taylor 展开法

其基本思想是首先构造一个关于真解及其有关信息的含参算子,将算子中诸项在某点处按 Taylor 展式展开,合并该展式中的同类项并截去余项,然后令诸同类项系数为零,由此即可确定出原算子中的全部(或部分)参数,从而获得一个(或一类)关于数值解的差分方程.

## 2. 几种常用的差分格式

### (1) 显式 Euler 法

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n). \quad (5.2)$$

### (2) 隐式 Euler 法

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}). \quad (5.3)$$

### (3) 梯形格式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]. \quad (5.4)$$

### (4) 改进的 Euler 格式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]. \quad (5.5)$$

### (5) 显式 Runge-Kutta(龙格-库塔)方法

一般形式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^m \lambda_i K_i, \\ K_i = f(x_n + a_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j), \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (5.6)$$

其中,  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, a_i = 0, a_i \leq 1 (i \neq 1), \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} = 1, m$  为所使用  $f$

值的个数,  $b_{ij}$  均为待定参数. 随着  $m$  取不同的正整数值, 便得到各阶显式 Runge-Kutta 格式. 特别当  $m = 4$  时可得四阶经典的 Runge-Kutta 格式:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \\ K_1 = hf(x_n, y_n), \\ K_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}K_1), \quad n=0, 1, 2, \dots \\ K_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}K_2), \\ K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3), \end{cases} \quad (5.7)$$

以上各差分格式均为单步的, 即计算  $y_{n+1}$  时只利用了前面一步的信息  $y_n$ . 格式 (5.2)、(5.5) 称显式格式, (5.3)、(5.4) 称隐式格式. 一般隐式格式的计算多采用迭代法, 或预测—校正技术, 即先用显式方法计算, 预测一个值  $\bar{y}_{n+1}$ , 为隐式格式提供一个好的迭代初值, 然后用隐式格式迭代一次, 得到  $y_{n+1}$ . 如改进的 Euler 格式是先用显式 Euler 公式预测, 然后用梯形公式校正而得到的.

#### (6) 线性多步法

利用前面已经算出的  $r$  个值  $y_{n-r+1}, \dots, y_{n-1}, y_n$  计算  $y_{n+1}$ , 这种差分格式称为多步法. 一般公式为

$$y_{n+1} = \sum_{k=0}^r \alpha_k y_{n-k} + h \sum_{k=1}^r \beta_k f_{n-k}. \quad (5.8)$$

当  $\beta_1 = 0$  时, 则称 (5.8) 式为显式多步法; 当  $\beta_1 \neq 0$  时, 则称 (5.8) 式是隐式多步法. 它们关于  $y_k$  和  $f_k$  是线性的, 所以, 又称它们为线性多步法.

当  $r+1$  个点  $x_{n-r}, x_{n-r+1}, \dots, x_n$  及对应函数值  $f_{n-r}, f_{n-r+1}, \dots, f_n$  已知时, 则可得 Adams 显式公式:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{k=0}^r \beta_k f_{n-k}. \quad (5.9)$$

系数  $\{\beta_k\}$  可查表获得.

特别地,当  $r=0$  时,(5.9)式为显式 Euler 公式.

当  $r=1$  时,(5.9)式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}). \quad (5.10)$$

当  $r=3$  时,(5.9)式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}). \quad (5.11)$$

若  $r+1$  个点  $x_{n+1}, x_n, \dots, x_{n-r+1}$  及对应函数值  $f_{n+1}, f_n, \dots, f_{n-r+1}$  已知时,则可得 Adams 隐式公式:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{k=0}^r \beta_k^* f_{n-k+1}. \quad (5.12)$$

其中  $\beta_k^*$  也可查表而得.

当  $r=0$  时,5.12 式为隐式 Euler 格式;当  $r=1$  时,(5.12)式为梯形公式;当  $r=3$  时,(5.12)式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}). \quad (5.13)$$

### 3. 局部截断误差和方法的阶

单步法可写成如下统一形式:

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, x_{n+1}, y_n, y_{n+1}, h). \quad (5.14)$$

其中,  $\varphi$  与微分方程右端函数有关.若  $\varphi$  中不含  $y_{n+1}$ ,则方法是显式的,否则是隐式的.

从  $x_0$  开始计算,如果考虑每一步产生的误差,直到  $x_n$ ,则有误差  $e_n = y(x_n) - y_n$ ,称为方法在  $x_n$  点的整体截断误差.分析和求得整体截断误差  $e_n$  是复杂的,为此,仅考虑从  $x_n$  到  $x_{n+1}$  的局部情况,并假设  $x_n$  之前的计算没有误差,即  $y_n = y(x_n)$ .

**定义 5.1** 设  $y(x)$  是微分方程的精确解,则

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y_{n+1} \\ &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\varphi(x_n, x_{n+1}, y(x_n), y(x_{n+1}), h) \end{aligned}$$

称为单步法(5.13)的局部截断误差.将右端各项在  $x_n$  点作 Taylor 展开,就得到局部截断误差的具体表达式.

**定义 5.2** 若给定方法的局部截断误差是

$$T_{n+1} = O(h^{p+1}),$$

则称该方法是  $p$  阶的, 或具有  $p$  阶精度.

显式 Euler 格式与隐式 Euler 格式均为一阶方法, 其局部截断误差的首项分别为  $\frac{h^2}{2} y''(x_n)$  与  $-\frac{h^2}{2} y''(x_n)$ ; 梯形格式为二阶方法, 其局部截断误差的首项为  $-\frac{1}{12} h^3 y'''(x_n)$ .

**定义 5.3** 称

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - \left[ \sum_{k=0}^r \alpha_k y(x_{n-k}) + h \sum_{k=1}^r \beta_k f(x_{n-k}, y(x_{n-k})) \right] \\ &= y(x_{n+1}) - \left[ \sum_{k=0}^r \alpha_k y(x_{n-k}) + h \sum_{k=1}^r \beta_k y'(x_{n-k}) \right] \end{aligned}$$

为线性多步格式(5.7)的局部截断误差.

若要使公式(5.7)具有  $p$  阶精度, 则其局部截断误差为

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \left[ 1 - \sum_{k=1}^r (-k)^{p+1} \alpha_k + (p+1) \sum_{k=1}^r (-k)^p \beta_k \right] \\ &\quad \cdot y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}). \end{aligned}$$

公式(5.10)的局部截断误差的首项为  $\frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(x_n)$  是四阶方法,

公式(5.12)也是四阶方法, 局部截断误差的首项为  $-\frac{19}{720} h^5 y^{(5)}(x_n)$ .

#### 4. 单步法的收敛性与稳定性

单步法的显形式是

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h). \quad (5.15)$$

称  $\varphi(x, y, h)$  为增量函数.

差分格式(5.15)在理论上是否合理, 要看差分方程的解  $y_n$  是否收敛于原微分方程的精确解  $y(x_n)$ , 这是差分格式的收敛性问题; 是否有  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(x, y, h) = f(x, y)$  成立, 这是差分格式与微分方程是否相容的问题; 若计算中某一步  $y_n$  有舍入误差, 逐步推进, 这舍

入误差传播情况如何,这是差分格式的稳定性问题.这里讨论的单步法都是相容的.

**定义 5.4** 对于任意固定的  $x_n = x_0 + nh$ , 当  $h \rightarrow 0$  (必然同时  $n \rightarrow \infty$ ) 时, 单步法(5.15)产生的近似解  $y_n$  均有  $\lim_{h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} y_n = y(x_n)$ , 则称方法是收敛的.

**定理 5.1** 对于一个  $p$  阶的显式单步法(5.14), 若满足如下条件:

1) 增量函数  $\varphi$  关于  $y$  满足 Lipschitz 条件, 即存在常数  $L_\varphi > 0$ , 使

$$|\varphi(x, y_1, h) - \varphi(x, y_2, h)| \leq L_\varphi |y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbf{R} \text{ 成立};$$

2) 微分方程的初值是精确的, 则该方法收敛, 其整体截断误差为

$$|y(x_n) - y_n| = O(h^p).$$

**推论 5.1.1** 对于一个  $p$  阶的显式单步法(5.15), 若微分方程的右端函数  $f$  关于  $y$  满足 Lipschitz 条件, 且初值是精确的, 则显式 Euler 法、改进 Euler 法和 R-K 方法是收敛的.

**定义 5.5** 若一种数值方法在节点值  $y_n$  上有大小为  $\delta$  的扰动, 而以后各节点值  $y_m (m > n)$  上产生的偏差均不超过  $\delta$ , 则称该方法是稳定的.

稳定性问题比较复杂, 为简化讨论, 仅考察模型方程

$$y' = \lambda y, \quad \lambda < 0. \quad (5.16)$$

任何一种单步法应用于模型方程(5.16), 其中  $\lambda = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ , 均有

$$y_{n+1} = E(\lambda h) y_n. \quad (5.17)$$

对于不同的差分方法,  $E(\lambda h)$  有不同的表达式.

**定义 5.6** 若(5.17)式中  $|E(\lambda h)| \leq 1$ , 则称该单步法是绝对稳定的. 在复平面上,  $\lambda h$  满足  $|E(\lambda h)| \leq 1$  的区域称为方法的绝对稳定区域, 它与实轴的交称为绝对稳定区间.

表 5.1 列出了几种单步法的绝对稳定区域.

表 5.1 单步法的绝对稳定区间

方 法	$E(\lambda h)$	绝对稳定区间
显式 Euler 法	$1 + \lambda h$	$-2 \leq \lambda h \leq 0$
改进 Euler 法	$1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2}$	$-2 \leq \lambda h \leq 0$
3 阶 R-K 法	$1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{3!}$	$-2.51 \leq \lambda h \leq 0$
4 阶 R-K 法	$1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!}$	$-2.785 \leq \lambda h \leq 0$
隐式 Euler 法	$\frac{1}{1 - \lambda h}$	$-\infty \leq \lambda h \leq 0$
梯形公式	$\frac{1 + \lambda h/2}{1 - \lambda h/2}$	$-\infty \leq \lambda h \leq 0$

## 5. Adams 预测—校正系统

将四阶显式 Adams 公式作为预测公式,四阶隐式 Adams 公式作为校正公式,构成 Adams 预测—校正公式:

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}).$$

它们的局部截断误差分别是

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - \bar{y}_{n+1} = \frac{251}{720}h^5 y^{(5)}(x_n) + O(h^6),$$

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{19}{720}h^5 y^{(5)}(x_n) + O(h^6).$$

利用外推原理,将上两式作线性组合,消去局部截断误差首项,可使计算精度至少提高一阶.同时得到两个修正公式,将它们和上两式组合,可进一步加工成下列计算方案:

$$\text{预测} \quad p_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}),$$

$$\text{改进} \quad m_{n+1} = p_{n+1} + \frac{251}{270}(C_n - p_n);$$

$$\text{校正} \quad C_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9f(x_{n+1}, m_{n+1}) + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}),$$

$$\text{改进} \quad y_{n+1} = C_{n+1} - \frac{19}{270}(C_{n+1} - p_{n+1}).$$

在计算时,调节计算步长  $h$ ,使  $|\frac{19}{270}(p_{n+1} - C_{n+1})| < \epsilon$ ,由同阶单步法提供初值  $y_0, y_1, y_2, y_3$ .当计算  $y_4$  时,可取  $p_3 = C_3$ .

## 二、基本要求

1) 了解常微分方程数值解法的研究内容,掌握构成方法的基本思想及其各方法的异同点.

2) 掌握 Euler 法和改进 Euler 法、隐式 Euler 法和梯形方法的基本公式和构造.

3) 理解 Runge-Kutta 方法的基本思想.会进行二阶 Runge-Kutta 方法的推导,能用四阶经典 Runge-Kutta 公式求解微分方程.

4) 会求差分格式的局部截断误差及方法的阶.

5) 能利用单步法收敛性定理判断方法的收敛性.

6) 能给出一般单步法的绝对稳定性区域.

7) 掌握线性多步法的构造原理,能构造线性多步格式.

8) 会利用差分格式的预测——校正技术,能用外推技术获得预测—改进—校正方案.

9) 掌握隐式差分公式的计算.

## 三、例题选讲

**例 1** 用 Euler 法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -\frac{0.9}{1+2x}y, & x \in (0, 1) \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

当  $x=0, 0.02, 0.04, \dots, 0.10$  时的数值解.

**解** 将  $f(x, y) = -\frac{0.9}{1+2x}y$  代入 Euler 计算公式(5.2), 注意到  $h=0.02$ , 可得

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n - h \frac{0.9}{1+2x_n} y_n \\ &= \left[ 1 - \frac{0.018}{1+2x_n} \right] y_n, \quad n=0, 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

具体计算结果如表 5.2 所示.

表 5.2

$n$	$x_n$	$y_n$	$y(x_n)$	$\epsilon_n = y(x_n) - y_n$
0	0	1.0000	1.0000	0
1	0.02	0.9820	0.9825	0.0005
2	0.04	0.9655	0.9660	0.0005
3	0.06	0.9489	0.9503	0.0014
4	0.08	0.9336	0.9354	0.0018
5	0.10	0.91	0.9213	

表中  $y(x_n)$  的一列是所求问题的准确解  $y(x)$  在  $x=x_n$  处的值. 利用变量分离法容易求得准确解为

$$y(x) = (1+2x)^{-0.45}.$$

$\epsilon_n$  为近似值  $y_n$  的误差. 从表中可以看出, 随着  $n$  的增大, 误差也在增大, 所以说, Euler 法计算简便, 对一些问题有较大的使用价值, 但是它的误差较大, 所得数值解精确度不高.

**例 2** 用改进 Euler 法解如下初值问题,

$$\begin{cases} y' = -\frac{0.9}{1+2x}y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

**解** 取  $h=0.02$ . 由(5.5)式得

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))] \\ &= y_n + \frac{h}{2} \left[ -\frac{0.9}{1+2x_n} y_n - \frac{0.9}{1+2x_{n+1}} \left[ y_n + h \left( -\frac{0.9}{1+2x_n} y_n \right) \right] \right], \end{aligned}$$

则

$$y_1 = 1 - \frac{0.02}{2} \left[ \frac{0.9}{1+0} \times 1 + \frac{0.9}{1+0.04} \times \left( 1 - 0.02 \times \frac{0.9}{1+0} \times 1 \right) \right] \\ = 0.9825.$$

与例 1 表 5.1 中的准确解  $y(0.02)=0.9825$  以及 Euler 法所得的数值解  $y_1=0.9820$  比较,说明改进 Euler 法比 Euler 法精确度高.

**例 3** 用经典的四阶 Runge-Kutta 公式解初值问题

$$\begin{cases} y' = x + y, & 0 < x < 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

取  $h=0.2$ .

**解** 此问题的经典四阶 R-K 公式是

$$y_{n+1} = y_n + \frac{0.2}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

$$K_1 = x_n + y_n,$$

$$K_2 = x_n + 0.1 + y_n + 0.1K_1,$$

$$K_3 = x_n + 0.1 + y_n + 0.1K_2,$$

$$K_4 = x_n + 0.2 + y_n + 0.2K_2.$$

记  $\Delta y_n = \frac{0.2}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$ , 则  $y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$ . 计算结果见表 5.3.

**表 5.3**

$x_n$	$y_n$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$\Delta y_n$	$y(x_n)$
0	1	1	1.2	1.22	1.44	0.2428	1
0.2	1.242800	1.442800	1.687080	1.711508	1.985102	0.340836	1.242806
0.4	1.583636	1.983636	2.282000	2.311836	2.646003	0.460577	1.583649
0.6	2.044213	2.644213	3.008634	3.045076	3.453228	0.606829	2.044238
0.8	2.651042	3.451042	3.896146	3.940657	4.439173	0.785461	2.651082
1.0	3.436503						3.436564

**例 4** 用 Adams 显式公式(5.11)求解初值问题

$$\begin{cases} y' = 3x - 2y, & 0 \leq x \leq 0.5, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

取步长  $h=0.1$ , 小数点后至少保留六位.

**解** 先用四阶经典 Runge-Kutta 法求出  $y_1, y_2, y_3$ . 由于  $f(x, y)=3x-2y$ , 于是

$$K_1 = hf(x_n, y_n) = 0.3x_n - 0.2y_n,$$

$$K_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}) = 0.27x_n - 0.18y_n + 0.015,$$

$$K_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}) = 0.273x_n - 0.182y_n + 0.0135,$$

$$K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3) = 0.2454x_n - 0.163y_n + 0.0273,$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$= 0.2719x_n + 0.818733y_n + 0.01405.$$

由  $y(0)=y_0=1$ , 计算得

$$y(0.1) \approx y_1 = 0.832783,$$

$$y(0.2) \approx y_2 = 0.723067,$$

$$y(0.3) \approx y_3 = 0.660429.$$

再由 Adams 公式(5.11)得

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n + \frac{0.1}{24} [ & (165x_n - 110y_n) + (-177x_{n-1} + 118y_{n-1}) \\ & + (111x_{n-2} - 74y_{n-2}) + (-27x_{n-3} + 18y_{n-3}) ]. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} y(0.4) \approx y_4 = y_3 + 0.1 [ & (165x_3 - 110y_3) + (-177x_2 + 118y_2) \\ & + (111x_1 - 74y_1) + (-27x_0 + 18y_0) ] / 24 \\ = & 0.636466, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(0.5) \approx y_5 = y_4 + 0.1 [ & (165x_4 - 110y_4) + (-177x_3 + 118y_3) \\ & + (111x_2 - 74y_2) + (-27x_1 + 18y_1) ] / 24 \\ = & 0.643976. \end{aligned}$$

注: 由于公式(5.11)是四阶显式 Adams 格式, 所以这里也用

四阶 R-K 格式提供初值  $y_1$ 、 $y_2$ 、 $y_3$ ，以保证所用方法阶的匹配性。

**例 5** 用梯形公式计算积分

$$y = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

在  $x=0.5, 0.75, 1$  时的近似值。

**解** 此积分问题可化为微分问题，即将上式两端对  $x$  求导，得

$$\begin{cases} y' = e^{-x^2}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

取步长  $h=0.25$ 。求解微分方程的梯形公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})],$$

代入  $f(x, y) = e^{-x^2}$ ，有

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (e^{-x_n^2} + e^{-x_{n+1}^2}).$$

当  $y(0) = y_0 = 0$  时可计算得

$$y(0.25) \approx y_1 = 0.242427,$$

$$y(0.50) \approx y_2 = 0.457204,$$

$$y(0.75) \approx y_3 = 0.625777,$$

$$y(1.00) \approx y_4 = 0.742985.$$

**例 6** 取步长  $h=0.1$ ，用 Adams 预估—改进—校正系统求解初值问题

$$\begin{cases} y' = y - \frac{2x}{y}, & 0 < x < 0.5, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

**解** 所需的  $y_1$ 、 $y_2$ 、 $y_3$  用经典四阶 Runge-Kutta 公式算出，然后依预估—改进—校正系统进行计算。计算结果如表 5.4。

表 5.4

$i$	$x_i$	$y_i$	$p_{i+1}$	$m_{i+1}$	$c_{i+1}$
0	0	1			
1	0.1	1.095446			
2	0.2	1.183217			
3	0.3	1.264912	1.341551	1.341551	1.341641
4	0.4	1.341635	1.414039	1.414123	1.414204
5	0.5	1.414192			

**例 7** 用二阶 Taylor 展开法求初值问题

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2, \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

的解在  $x=1.5$  时的近似值(取步长  $h=0.25$ , 小数点后至少保留 5 位).

**解** 二阶 Taylor 展开公式为

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + O(h^3).$$

用  $y' = x^2 + y^2$ ,  $y'' = 2x + 2yy' = 2x + 2y(x^2 + y^2)$  代入上式并略去高阶项  $O(h^3)$ , 则得求解公式

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n^2 + y_n^2) + \frac{h^2}{2}[2x_n + 2y_n(x_n^2 + y_n^2)].$$

由  $y(1) = y_0 = 1$ , 计算得

$$y(1.25) \approx y_1 = 1.6875,$$

$$y(1.50) \approx y_2 = 3.333298.$$

**例 8** 试证明由

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h[4f(x_n, y_n) + 2f(x_{n+1}, y_{n+1}) + hf'(x_n, y_n)]$$

所定义的隐式单步格式为三阶的.

**证** 只需证明此公式的局部截断误差阶为  $O(h^4)$ .

设  $y_n = y(x_n)$ ,

$$f(x_{n+1}, y_{n+1}) \triangleq y'(x_{n+1}) = y'(x_n) + hy''(x_n) + \frac{h^2}{2} y'''(x_n) + \frac{h^3}{6} y^{(4)}(x_n) + O(h^4).$$

则  $y_{n+1}$  在  $x_n$  处的 Taylor 展式为

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y(x_n) + \frac{1}{6} h \{ 4y'(x_n) + 2[y'(x_n) + hy''(x_n) \\ &\quad + \frac{h^2}{2} y'''(x_n) + \frac{h^3}{6} y^{(4)}(x_n) + O(h^4)] + hy''(x_n) \} \\ &= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) \\ &\quad + \frac{h^4}{18} y^{(4)}(x_n) + O(h^5). \end{aligned}$$

而  $y(x_{n+1})$  在  $x_n$  处的 Taylor 展式为

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2} h^2 + \frac{y'''(x_n)}{3!} h^3 \\ &\quad + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(x_n) + O(h^5). \end{aligned}$$

于是有

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{1}{72} h^4 y^{(4)}(x_n) + O(h^5) = O(h^4).$$

**例 9** 证明如下 Runge-Kutta 公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (K_2 + K_3), \\ K_1 = f(x_n, y_n), \\ K_2 = f(x_n + th, y_n + thK_1), \\ K_3 = f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hK_1) \end{cases}$$

对任意参数  $t$  是二阶公式.

**解** 设  $y_n = y(x_n)$  (作局部化的假设),  $y'(x) = f(x, y)$ , 则  $y''(x) = f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot f(x, y)$ , 所以  $y(x_{n+1})$  在  $x_n$  处的 Taylor 展开式可写为

$$\begin{aligned}
y(x_{n+1}) &= y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3) \\
&= y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{h^2}{2}[f'_x(x_n, y(x_n)) \\
&\quad + f'_y(x_n, y(x_n)) \cdot f(x_n, y(x_n))] + O(h^3).
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
K_2 &= f(x_n, y(x_n)) + f'_x(x_n, y(x_n))th \\
&\quad + f'_y(x_n, y(x_n))thf(x_n, y(x_n)) + O(h^2), \\
K_3 &= f(x_n, y(x_n)) + f'_x(x_n, y(x_n))(1-t)h \\
&\quad + f'_y(x_n, y(x_n))(1-t)hf(x_n, y(x_n)) + O(h^2). \\
K_2 + K_3 &= 2f(x_n, y(x_n)) + hf'_x(x_n, y(x_n)) \\
&\quad + hf'_y(x_n, y(x_n))f(x_n, y(x_n)) + O(h^2).
\end{aligned}$$

则  $y_{n+1}$  在  $x_n$  处的 Taylor 展式为

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(K_2 + K_3) \\
&= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2}[f'_x(x_n, y(x_n)) \\
&\quad + f'_y(x_n, y(x_n))f(x_n, y(x_n))] + O(h^3).
\end{aligned}$$

得局部截断误差

$$R_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3).$$

故所给的 Runge-Kutta 公式对任意参数  $t$  是二阶的.

**例 10** 确定下面公式的阶数:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]. \quad (5.18)$$

设所给的微分方程为  $y'(x) = f(x, y)$ .

**解** 此题可同于例 8、例 9, 求其局部截断误差, 从而确定公式的阶数. 此处我们直接依据公式阶的含义确定出阶数.

为确定公式的阶, 应讨论公式对多少次代数多项式精确.

令  $y = a$  (常数), 由公式 (5.18) 得

$$y_{n+1} = a + \frac{h}{2}[0 + 0] = a = y(x_{n+1}).$$

故公式(5.18)对  $y=a$  准确成立.

令  $y=x$ , 由公式(5.18)得

$$y_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}[1+1] = x_n + h = x_{n+1} = y(x_{n+1}).$$

故公式(5.18)对  $y=x$  准确成立.

令  $y=x^2$ , 由公式(5.18)得

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_n^2 + \frac{h}{2}[2x_n + 2(x_n + h)] = (x_n + h)^2 \\ &= y(x_{n+1}). \end{aligned}$$

再令  $y=x^3$ , 由公式(5.18)得

$$y_{n+1} = x_n^3 + \frac{h}{2}[3x_n^2 + 3(x_n + h)^2] \neq (x_n + h)^3 = y(x_{n+1}).$$

故公式(5.18)对不超过二次的多项式精确, 对三次式不精确, 所以公式是二阶的.

**例 11** 试建立求解初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的如下数值算法

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}).$$

其中  $f_i = f(x_i, y_i), (i = n-1, n, n+1)$ .

**解** 数值积分是建立常微分方程差分格式的基本途径之一.

将方程  $y' = f(x, y)$  两边从  $x_{n-1}$  到  $x_{n+1}$  积分得

$$y(x_{n+1}) - y(x_{n-1}) = \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx.$$

采用 Simpson 数值求积公式有

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &\approx y(x_{n-1}) + \frac{2h}{6}[f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + 4f(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + f(x_{n-1}, y(x_{n-1}))]. \end{aligned}$$

得

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}).$$

**例 12** 试建立求解初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = a \end{cases}$$

的如下差分格式:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}).$$

**解** Taylor 展开法也是建立差分格式的一种重要方法. 利用 Taylor 展开法还能较方便地得知差分格式的阶数.

将  $y(x_{n+1})$  在  $x_n$  处 Taylor 展开有

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + \frac{y'''(\xi)}{3!}h^3, \quad (5.19)$$

$$\xi \in (x_n, x_{n+1}).$$

而  $y(x_n) + \frac{h}{2}[3y'(x_n) - y'(x_{n-1})]$  在  $x_n$  处的 Taylor 展开为

$$\begin{aligned} & y(x_n) + \frac{h}{2}[3y'(x_n) - y'(x_n) + y''(x_n)h - \frac{y'''(\eta)}{2}h^2] \\ &= y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{h^2}{2}y''(x_n) - \frac{h^3}{4}y'''(\eta), \quad (5.20) \\ & \eta \in (x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

将(5.19)式与(5.20)式作比较知,

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{2}[3y'(x_n) - y'(x_{n-1})] + O(h^3). \quad (5.21)$$

由(5.21)式可建立差分格式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})]. \quad (5.22)$$

假设  $y_n = y(x_n)$ ,  $y_{n-1} = y(x_{n-1})$ , (5.22)式的局部截断误差

$$R_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3),$$

即所建立的差分格式(5.22)是二阶的.

**例 13** 设有求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的如下线性二步显格式

$$y_{n+1} = \alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n-1} + h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n-1}),$$

其中  $f_n = f(x_n, y_n)$ ,  $f_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})$ . 试确定参数  $\alpha_0$ 、 $\alpha_1$ 、 $\beta_0$  和  $\beta_1$ , 使差分格式的阶尽可能高.

**解** 要差分格式的阶尽可能高, 即是要求其局部截断误差的阶尽可能高.

考虑局部截断误差, 假设  $y_n = y(x_n)$ ,  $y_{n-1} = y(x_{n-1})$ , 则所给差分格式可写成

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \alpha_0 y(x_n) + \alpha_1 y(x_{n-1}) + h(\beta_0 f(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + \beta_1 f(x_{n-1}, y(x_{n-1}))) \\ &= \alpha_0 y(x_n) + \alpha_1 y(x_{n-1}) + h\beta_0 y'(x_n) + h\beta_1 y'(x_{n-1}). \end{aligned} \quad (5.23)$$

分别将  $y(x_{n-1})$ 、 $y'(x_{n-1})$  在  $x_n$  处 Taylor 展开有

$$\begin{aligned} y(x_{n-1}) &= y(x_n) - y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 - \frac{y'''(x_n)}{3!}h^3 + \frac{y^{(4)}(\xi)}{4!}h^4, \\ x_{n-1} &< \xi < x_n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(x_{n-1}) &= y'(x_n) - y''(x_n)h + \frac{y'''(x_n)}{2!}h^2 - \frac{y^{(4)}(\eta)}{3!}h^3, \\ x_{n-1} &< \eta < x_n. \end{aligned}$$

将它们代入(5.23)式整理后得

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (\alpha_0 + \alpha_1)y(x_n) + (-\alpha_1 + \beta_0 + \beta_1)hy'(x_n) \\ &\quad + \left[ \frac{\alpha_1}{2} - \beta_1 \right] h^2 y''(x_n) + (-\alpha_1 + 3\beta_1) \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) \\ &\quad + \frac{\alpha_1 h^4}{4!} y^{(4)}(\xi) - \frac{\beta_1 h^4}{3!} y^{(4)}(\eta). \end{aligned} \quad (5.24)$$

再将  $y(x_{n+1})$  在  $x_n$  处 Taylor 展开, 有

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi),$$

$$x_n < \xi < x_{n+1}. \quad (5.25)$$

比较(5.23)式与(5.24)式的右端,令其同类项的系数相等,得

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha = 1, \\ -\alpha + \beta_1 + \beta_2 = 1, \\ \frac{\alpha}{2} - \beta_1 = \frac{1}{2}, \\ -\alpha + 3\beta_2 = 1. \end{cases} \quad (5.26)$$

解方程组(5.26)得  $\alpha_0 = -4, \alpha = 5, \beta_1 = 4, \beta_2 = 2$ , 将代入  $\alpha, \beta$  后的(5.25)式与(5.24)式相减,得

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(\xi) - \frac{5h^4}{4!} y'''(\xi) + \frac{2h^4}{3!} y'''(\eta) \\ &= O(h^4). \end{aligned}$$

故所给格式为

$$y_{n+1} = -4y_n + 5y_{n-1} + h(4f_n + 2f_{n-1}),$$

是三阶方法.

#### 例 14 试确定公式

$$y_{n+1} = ay_n + by_{n-1} + cy_{n-2} + h(dy'_{n+1} + ey'_n + fy'_{n-1}) \quad (5.27)$$

中的系数  $a, b, c, d, e, f$ , 使之成为一个四阶方法.

**解** 求解此类问题通常按例 13 的方法,但还有一种解法是,若某一差分格式对  $y$  取  $1, x, \dots, x^k$  均准确成立,则该差分格式至少为  $k$  阶方法.利用 Taylor 展式可证这两种阶的定义等价.

要使(5.25)式为四阶的,则它应对直到 4 次的多项式都精确成立.为此分别取  $y=1, x, x^2, x^3, x^4$  代入(5.25)式,并设  $x_{n+i} = x_n + ih$  ( $i=-2, -1, 0, 1$ ),便可得系数  $a, b, c, d, e, f$  应满足的 5 个方程:

$$\begin{cases} a = \frac{27}{24}(1-b), \\ c = -\frac{3}{24}(1-b), \\ d = \frac{1}{24}(9-b), \\ e = \frac{1}{24}(18+14b), \\ f = \frac{1}{24}(-9+17b). \end{cases}$$

5 个方程含有 6 个未知量, 可选一个为自由参数, 例如选  $b$ , 解之便得当  $b=1$  时,

$$a=0, \quad c=0, \quad d=\frac{1}{3}, \quad e=\frac{4}{3}, \quad f=\frac{1}{3},$$

即 
$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(y'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1}).$$

此格式称为 Milne 方法, 是四阶的.

**例 15** 已知初值问题

$$\begin{cases} y' = ax + b, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

有精确解  $y(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx$ , 求证用 Euler 法以  $h$  为步长所得近似解  $y_n$  的整体截断误差为

$$\epsilon_n = y(x_n) - y_n = \frac{1}{2}ahx_n.$$

**证明** Euler 公式为

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

代入  $f(x, y) = ax + b$ , 则

$$y_n = y_{n-1} + h(ax_{n-1} + b).$$

由  $y(0) = y_0 = 0$  得

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + h(ax_0 + b) = bh, \\
y_2 &= y_1 + h(ax_1 + b) = 2bh + ahx_1, \\
y_3 &= y_2 + h(ax_2 + b) = 3bh + ah(x_1 + x_2), \\
&\dots\dots\dots \\
y_n &= y_{n-1} + h(ax_{n-1} + bh) \\
&= nbh + ah(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}).
\end{aligned}$$

因  $x_n = nh$ , 于是

$$\begin{aligned}
y_n &= bx_n + ah^2(1+2+\dots+(n-1)) \\
&= bx_n + ah^2 \frac{(n-1)n}{2} = \frac{a}{2} x_n x_{n-1} + bx_n,
\end{aligned}$$

所以其整体截断误差

$$\epsilon_n = y(x_n) - y_n = \frac{a}{2}(x_n - x_{n-1})x_n = \frac{a}{2}hx_n.$$

**例 16** 对初值问题

$$\begin{cases} y' = -y, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

证明用改进 Euler 公式(5.5)所求得的近似解为

$$y(nh) \approx y_n = \left[ \frac{2-h}{2+h} \right]^n \quad (x = nh);$$

证明当  $h \rightarrow 0$  时, 它收敛于精确解  $e^{-x}$ .

**证** 将  $f(x, y) = -y$  代入改进 Euler 公式(5.5)中, 得

$$y_n = y_{n-1} - \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n).$$

经整理得

$$y_n = \frac{2-h}{2+h} y_{n-1}.$$

从而

$$y_n = \frac{2-h}{2+h} y_{n-1} = \left[ \frac{2-h}{2+h} \right]^2 y_{n-2} = \dots = \left[ \frac{2-h}{2+h} \right]^n y_0.$$

因  $y_0 = 1$ , 故

$$y_n = \left[ \frac{2-h}{2+h} \right]^n.$$

下面证明, 当  $h \rightarrow 0$  时, 它收敛于精确解  $e^{-x}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} y_n &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{2-h}{2+h} \right]^n = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ 1 - \frac{2h}{2+h} \right]^{\frac{x_n}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \left[ 1 - \frac{2h}{2+h} \right]^{-\frac{2+h}{2h}} \right]^{-\frac{2x_n}{2+h}} \\ &= e^{-x_n} = y(x_n), \quad x_n = nh. \end{aligned}$$

**例 17** 证明下列梯形格式的迭代过程

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n), \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})], \end{cases}$$

$$k=0, 1, \dots, n=0, 1, 2, \dots, N;$$

当  $|f'_y(x, y)| \leq L$  且  $\frac{hL}{2} < 1$  时, 对任意  $n \geq 1$  关于  $k$  的迭代是收敛的.

**证** 设  $y_{n+1}$  满足如下方程:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})].$$

由所给格式与其相减有

$$\begin{aligned} |y_{n+1}^{(k+1)} - y_{n+1}| &= \left| \frac{h}{2} f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) - \frac{h}{2} f(x_{n+1}, y_{n+1}) \right| \\ &= \left| \frac{h}{2} f'_y(x_{n+1}, \xi) (y_{n+1}^{(k)} - y_{n+1}) \right| \\ &\leq \left| \frac{hL}{2} \right| |y_{n+1}^{(k)} - y_{n+1}|. \end{aligned}$$

继续递推有

$$|y_{n+1}^{(k+1)} - y_{n+1}| \leq \left[ \frac{hL}{2} \right]^{k+1} |y_{n+1}^{(0)} - y_{n+1}|.$$

由于非负数  $\frac{hL}{2} < 1$ , 故当  $k \rightarrow \infty$  时,  $y_{n+1}^{(k+1)} \rightarrow y_{n+1}$ .

**例 18** 用如下 Euler 预测—校正格式

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n), \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})], \end{cases}$$

$$k=0, 1, 2, \dots, n=0, 1, 2, \dots, N$$

求解初值问题

$$\begin{cases} y' = e^x \sin(xy), \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

时, 如何选取步长  $h$ , 能使上述格式关于  $k$  的迭代收敛.

**解** 在此问题中,  $f(x, y) = e^x \sin(xy)$ ,

$$f'_y(x, y) = e^x \cos(xy) \cdot x.$$

故  $|f'_y(x, y)| = |e^x \cos(xy)x| \leq |e^x \cdot x| \leq e \quad (0 \leq x \leq 1)$ .

于是由例 17 知, 当  $\frac{he}{2} < 1$ , 即  $h < \frac{2}{e}$  时, 上述格式关于  $k$  的迭代是收敛的.

**例 19** 证明经典四阶 Runge-Kutta 法的收敛性.

**证** 由收敛性定理 5.1 知, 验证经典四阶 R-K 方法的收敛性, 只需证明其增量

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, h) = & \frac{1}{6} [K_1(x, y) + 2K_2(x, y, h) + 2K_3(x, y, h) \\ & + K_4(x, y, h)] \end{aligned}$$

关于  $y$  满足 Lipschitz 条件即可, 其中

$$K_1(x, y) = f(x, y),$$

$$K_2(x, y, h) = f\left[x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hK_1(x, y)\right],$$

$$K_3(x, y, h) = f\left[x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hK_2(x, y, h)\right],$$

$$K_4(x, y, h) = f(x+h, y+hK_3(x, y, h)).$$

由于  $f(x, y)$  满足 Lipschitz 条件, 反复利用这一条件, 陆续可得

$$|K_1(x, y) - K_1(x, \bar{y})| \leq L |y - \bar{y}| \stackrel{\text{记}}{=} c_1 |y - \bar{y}|, \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} & |K_2(x, y, h) - K_2(x, \bar{y}, h)| \\ & \leq L \left| \left[ y + \frac{1}{2} h K_1(x, y) \right] - \left[ \bar{y} + \frac{1}{2} h K_1(x, \bar{y}) \right] \right| \\ & = L \left| (y - \bar{y}) + \frac{1}{2} h (K_1(x, y) - K_1(x, \bar{y})) \right| \\ & \leq L (|y - \bar{y}| + \frac{1}{2} h c_1 |y - \bar{y}|) \\ & = L \left[ 1 + \frac{1}{2} h c_1 \right] |y - \bar{y}| \stackrel{\text{记}}{=} c_2 |y - \bar{y}|, \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} & |K_3(x, y, h) - K_3(x, \bar{y}, h)| \\ & \leq L \left| (y - \bar{y}) + \frac{1}{2} h (K_2(x, y, h) - K_2(x, \bar{y}, h)) \right| \\ & \leq L |y - \bar{y}| + \frac{1}{2} h L c_2 |y - \bar{y}| \\ & = \left[ L + \frac{1}{2} h L c_2 \right] |y - \bar{y}| \stackrel{\text{记}}{=} c_3 |y - \bar{y}|, \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} & |K_4(x, y, h) - K_4(x, \bar{y}, h)| \\ & \leq L \left| (y - \bar{y}) + h (K_3(x, y, h) - K_3(x, \bar{y}, h)) \right| \\ & \leq L |y - \bar{y}| + L h c_3 |y - \bar{y}| \\ & = (L + L h c_3) |y - \bar{y}| \stackrel{\text{记}}{=} c_4 |y - \bar{y}|. \end{aligned} \quad (5.31)$$

利用(5.28)、(5.29)、(5.30)、(5.31)式, 则

$$\begin{aligned} & |\varphi(x, y, h) - \varphi(x, \bar{y}, h)| = \frac{1}{6} | [K_1(x, y) - K_1(x, \bar{y})] \\ & + 2[K_2(x, y, h) - K_2(x, \bar{y}, h)] + 2[K_3(x, y, h) - K_3(x, \bar{y}, h)] \\ & + [K_4(x, y, h) - K_4(x, \bar{y}, h)] | \\ & \leq \frac{1}{6} [c_1 |y - \bar{y}| + 2c_2 |y - \bar{y}| + 2c_3 |y - \bar{y}| + c_4 |y - \bar{y}|] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} (c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4) |y - \bar{y}|.$$

由定理 5.1 知, 经典四阶 Runge-Kutta 方法是收敛的.

**例 20** 求出梯形格式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

的绝对稳定性区域.

**解** 对模型方程  $y' = \lambda y (\operatorname{Re} \lambda < 0)$ , 其梯形格式为

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2} h (\lambda y_n + \lambda y_{n+1}) \\ &= y_n + \frac{1}{2} h \lambda y_n + \frac{1}{2} h \lambda y_{n+1}, \end{aligned}$$

所以 
$$\left( 1 - \frac{1}{2} h \lambda \right) y_{n+1} = \left( 1 + \frac{1}{2} h \lambda \right) y_n,$$

$$\left| \frac{y_{n+1}}{y_n} \right| = \left| \frac{1 + \frac{1}{2} h \lambda}{1 - \frac{1}{2} h \lambda} \right|.$$

令  $\lambda = a + bi$ , 则

$$\left| 1 + \frac{1}{2} h \lambda \right| = \left| 1 + \frac{a}{2} h + i \frac{b}{2} h \right| = \sqrt{\left( 1 + \frac{a}{2} h \right)^2 + \left( \frac{b}{2} h \right)^2}.$$

注意到  $a = \operatorname{Re} \lambda$ ,  $|\lambda|^2 = a^2 + b^2$ , 可得

$$\left| 1 + \frac{1}{2} h \lambda \right| = \sqrt{1 + h \operatorname{Re} \lambda + \frac{h^2}{4} |\lambda|^2}.$$

同理得 
$$\left| 1 - \frac{1}{2} h \lambda \right| = \sqrt{1 - h \operatorname{Re} \lambda + \frac{h^2}{4} |\lambda|^2}.$$

故

$$\left| \frac{y_{n+1}}{y_n} \right| = \left| \frac{1 + h \operatorname{Re} \lambda + \frac{1}{4} h^2 |\lambda|^2}{1 - h \operatorname{Re} \lambda + \frac{1}{4} h^2 |\lambda|^2} \right|^{1/2}.$$

当  $\operatorname{Re}\lambda < 0$  时, 上式右端小于 1, 因此, 梯形格式的绝对稳定性区域是  $h\lambda$  复平面的整个左半平面, 见图 5.1.

**例 21** 求经典四阶 Runge-Kutta 方法的绝对稳定性区域.

**解** 对于模型方程  $y' = \lambda y (\operatorname{Re}\lambda < 0)$ , 经典四阶 Runge-Kutta 方法为:

令  $f(x, y) = \lambda y$ , 由 (5.7) 可得

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_n, y_n) = \lambda y_n, \\ K_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_1\right) \\ &= \lambda\left[y_n + \frac{1}{2}h\lambda y_n\right] = \lambda y_n + \frac{h}{2}\lambda^2 y_n, \\ K_3 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_2\right) \\ &= \lambda\left[y_n + \frac{1}{2}h\left(\lambda y_n + \frac{h}{2}\lambda^2 y_n\right)\right] \\ &= \lambda y_n + \frac{1}{2}h\lambda^2 y_n + \frac{h^2}{4}\lambda^3 y_n, \\ K_4 &= f(x_n + h, y_n + hK_3) \\ &= \lambda\left[y_n + h\left(\lambda y_n + \frac{1}{2}h\lambda^2 y_n + \frac{1}{4}h^2\lambda^3 y_n\right)\right] \\ &= \lambda y_n + \lambda^2 h y_n + \frac{1}{2}h^2\lambda^3 y_n + \frac{1}{4}h^4\lambda^4 y_n. \end{aligned}$$

所以经典四阶 R-K 方法为

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ &= y_n + \frac{h}{6}\left[6\lambda y_n + 3h\lambda^2 y_n + h^2\lambda^3 y_n + \frac{1}{4}h^3\lambda^4 y_n\right] \\ &= \left[1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \frac{1}{6}h^3\lambda^3 + \frac{1}{24}h^4\lambda^4\right] y_n. \end{aligned}$$

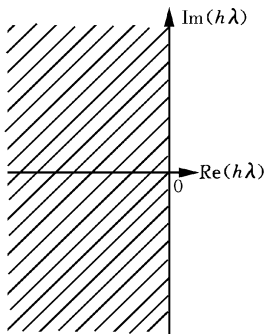


图 5.1

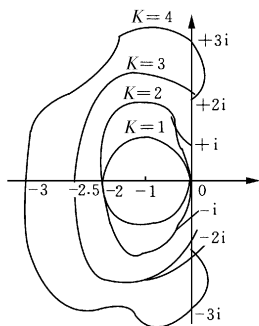


图 5.2

令  $h = h\lambda$ , 则

$$y_{n+1} = \left[ 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{24}h^4 \right] y_n.$$

由此可知, 绝对稳定性区域在  $h = h\lambda$  复平面上满足

$$\left| 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{24}h^4 \right| \leq 1$$

的区域, 也就是由曲线

$$1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{24}h^4 = e^{i\theta}$$

所围成的区域. 如图 5.2 所示.

**例 22** 用 Euler 法求解

$$\begin{cases} y' = -5y + x, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad x_0 \leq x \leq X.$$

从绝对稳定性考虑, 对步长  $h$  有何限制?

**解** 对于模型方程  $y' = \lambda y$  ( $\lambda < 0$  为实数) 这里  $\lambda = \frac{\partial f}{\partial y} = -5$ .

由

$$|1 + h\lambda| = |1 - 5h| < 1$$

得到对  $h$  的限制为:  $0 < h < 0.4$ .

## 四、习题

1. 取步长  $h = 0.2$ , 用 Euler 法解初值问题

$$\begin{cases} y' = -y - xy^2, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (0 \leq x \leq 0.6),$$

2. 用梯形公式解初值问题

$$\begin{cases} y' = 8 - 3y, \\ y(1) = 2, \end{cases} \quad (1 \leq x \leq 2),$$

取步长  $h=0.2$ , 小数点后至少保留 5 位.

3. 用改进的 Euler 公式计算初值问题

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x}y - \frac{1}{x}y^2, & 1 < x < 1.5, \\ y(1) = 0.5, \end{cases}$$

取步长  $h=0.1$ , 并与精确解  $y(x) = \frac{x}{1+x}$  比较.

4. 写出用梯形格式的迭代算法求解初值问题

$$\begin{cases} y' + y = 0, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的计算公式, 取步长  $h=0.1$ , 并求  $y(0.2)$  的近似值, 要求迭代误差不超过  $10^{-5}$ .

5. 写出用四阶经典 Runge-Kutta 法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = 8 - 3y, \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

的计算公式, 取步长  $h=0.2$ , 并计算  $y(0.4)$  的近似值, 小数点后至少保留 4 位.

6. 证明公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{9}(2K_1 + 3K_2 + 4K_3), \\ K_1 = f(x_n, y_n), \\ K_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right), \\ K_3 = f\left(x_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}hK_2\right), \end{cases}$$

至少是三阶方法.

7. 试构造形如

$$y_{n+1} = \alpha(y_n + y_{n-1}) + h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n-1})$$

的差分格式, 使其为二阶方法, 并求出其局部截断误差的首项.

8. 导出具有下列形式的三阶方法:

$$y_{n+1} = a y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + h(b_0 y'_n + b_1 y'_{n-1} + b_2 y'_{n-2}).$$

9. 证明

$$y_{n+1} = \frac{1}{3}(4y_n - y_{n-1}) + \frac{2}{3}hy'_{n+1}$$

是二阶公式.

10. 就初值问题  $y' = ax + b, y(0) = 0$  导出改进 Euler 方法的近似解的表达式, 并与准确解  $y = \frac{1}{2}ax^2 + bx$  相比较.

11. 用 Adams 显式公式作预估公式, Adams 隐式公式作校正公式, 求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -y - 2\sin x, & 0 < x < 2, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

取  $h=0.2$ , 已知  $y_1=0.781138, y_2=0.531307, y_3=0.260435$ .

12. 已知三阶 Adams 显式公式及截断误差

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}),$$

$$T_1 = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(\xi), \quad x_{n-2} < \xi < x_{n+1}$$

和三阶 Adams 隐式公式及截断误差

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}),$$

$$T_2 = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{-1}{24}h^4 y^{(4)}(\xi), \quad x_{n-1} < \xi < x_{n+1},$$

试求其预估—改进—校正系统.

13. 设有常微分方程初值问题  $\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$  的单步法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}[f(x_n, y_n) + 2f(x_{n+1}, y_{n+1})],$$

证明该方法是无条件稳定的.

14. 对任意选取的步长  $h$ , 试证明改进 Euler 法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))],$$

中点公式

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_1\right) \quad (\text{其中 } K_1 = f(x_n, y_n))$$

及 Heun 公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4} \left[ f(x_n, y_n) + 3f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n)\right) \right],$$

分别对初值问题  $\begin{cases} y' = -2y - 4x, \\ y(0) = 2 \end{cases}$  给出相同的逼近, 为什么?

15. 证明解初值问题  $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$  的二步法

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}) + \frac{h}{4}(4f_{n+1} - f_n + 3f_{n-1}) \quad (f_i = f(x_i, y_i))$$

是二阶的, 并求其局部截断误差主项.

16. 证明线性多步法

$$y_{n+1} + \alpha(y_n - y_{n-1}) - y_{n-2} = \frac{1}{2}(3 + \alpha)h(f_n + f_{n-1})$$

存在  $\alpha$  的一个值, 使方法是四阶的.

17. 证明线性二步法

$$y_{n+1} + (b-1)y_n - by_{n-1} = \frac{1}{4}h[(b+3)f_{n+1} + (3b+1)f_{n-1}],$$

当  $b \neq -1$  时方法为二阶的, 当  $b = -1$  时方法为三阶的.

18. 用经典四阶 R-K 方法计算初值问题

$$\begin{cases} y' = -20y & (0 \leq x \leq 1), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

试分析当步长分别取  $h=0.1$  及  $0.2$  时, 计算的稳定性.

19. 讨论求解初值问题  $\begin{cases} y' = \lambda y, & \lambda < 0, \\ y(0) = a \end{cases}$  的二阶中点公式

$$y_{n+1} = y_n + hf \left[ x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) \right]$$

的稳定性.

20. 对于初值问题

$$\begin{cases} y' = -1000(y - g(x)) + g'(x), \\ y(0) = g(0), \end{cases}$$

其中  $g(x)$  为已知函数, 其解  $y(x) = g(x)$ .

(1) 若用 Euler 法求解, 从稳定性考虑步长应在什么范围内选取?

(2) 若用隐式 Euler 法解题, 从稳定性考虑, 步长有没有限制?

(3) 若  $g(x)$  为不超过一次的多项式, 用 Euler 法求解此问题时, 从精确阶考虑, 步长的选取有没有限制?

21. 填空题

(1) 解初值问题  $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$  的梯形格式  $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$  是\_\_\_\_阶方法.

(2) 解初值问题  $y' = 10y - \frac{x}{y}, 1 \leq x \leq 2$ , 若用梯形法求解, 要使迭代法  $y_{n+1}^{(m+1)} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(m)})], m = 0, 1, \dots$  收敛, 步长  $h < \underline{\hspace{1cm}}$ ?

(3) 用隐式 Euler 法求解  $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ , 要使数值计算是稳定的, 步长  $0 < h < \underline{\hspace{1cm}}$ .

(4) 显式 Euler 格式的绝对稳定区间为\_\_\_\_.

## 五、习题解答

1. 解  $f(x, y) = -y - xy^2$ , Euler 格式为

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + 0.2(-y_n - x_n y_n^2) \\ &= 0.8y_n - 0.2x_n y_n^2.\end{aligned}$$

由  $y_0 = 1$  计算得

$$\begin{aligned}y(0.2) &\approx y_1 = 0.8, \\ y(0.4) &\approx y_2 = 0.5888, \\ y(0.6) &\approx y_3 = 0.3895.\end{aligned}$$

2. 解  $f(x, y) = 8 - 3y$ , 梯形公式为

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \\ &= y_n + \frac{0.2}{2}[8 - 3y_n + 8 - 3y_{n+1}].\end{aligned}$$

整理得显格式为

$$y_{n+1} = \frac{7}{13}y_n + \frac{16}{13}.$$

由  $y(1) = y_0 = 2$  计算得

$$\begin{aligned}y(1.2) &\approx y_1 = 2.30769, \\ y(1.4) &\approx y_2 = 2.47337, \\ y(1.6) &\approx y_3 = 2.56258, \\ y(1.8) &\approx y_4 = 2.61062, \\ y(2.0) &\approx y_5 = 2.63649.\end{aligned}$$

3. 解  $f(x, y) = \frac{1}{x}y - \frac{1}{x}y^2$ , 改进的 Euler 公式为

$$\begin{cases} y_0 = 0.5, \\ \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \\ \Delta y_n = \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})], \\ y_{n+1} = y_n + \Delta y_n, \quad i=0, 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

计算结果见表 5.5.

表 5.5

$n$	$x_n$	$y_n$	$f(x_n, y_n)$	$\bar{y}_{n+1}$	$f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})$	$\Delta y_n$	$y(x_n)$
0	1	0.5	0.25	0.525	0.226704	0.023835	0.5
1	1.1	0.523835	0.226756	0.546511	0.206531	0.021664	0.523809
2	1.2	0.545499	0.206608	0.566160	0.188941	0.019777	0.545455
3	1.3	0.565276	0.189030	0.584179	0.173510	0.018127	0.565216
4	1.4	0.583403	0.173603	0.600783	0.159898	0.016675	0.58333
5	1.5	0.600078					0.600000

## 4. 解 梯形格式的迭代算法为

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n),$$

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})],$$

$$k=0, 1, 2, \dots, n=0, 1, 2, \dots.$$

于是取  $f(x, y) = -y$ , 有

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = 0.9x_n, \\ y_{n+1}^{(k+1)} = 0.95y_n - 0.05y_{n+1}^{(k)}. \end{cases}$$

由  $y(0) = y_0 = 1$ , 经计算有

$$y_1^{(0)} = 0.9, \quad y_1^{(1)} = 0.905, \quad y_1^{(2)} = 0.90475,$$

$$y_1^{(3)} = 0.9047625, \quad y_1^{(4)} = 0.904761875.$$

因

$$|y_1^{(4)} - y_1^{(3)}| = 6.25 \times 10^{-7} < 10^{-5},$$

于是取

$$y(0.1) \approx y_1 = y_1^{(4)} = 0.904761875,$$

则

$$y_2^{(0)} = 0.814286, \quad y_2^{(1)} = 0.818809,$$

$$y_2^{(3)} = 0.818583, \quad y_2^{(4)} = 0.818595,$$

$$y_2^{(5)} = 0.818594.$$

因

$$|y_2^{(5)} - y_2^{(4)}| = 10^{-6} < 10^{-5},$$

故得

$$y(0.2) \approx y_2 = y_2^{(5)} = 0.818594.$$

5. 解  $f(x, y) = 8 - 3y$ , 四阶经典 Runge-Kutta 格式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \\ K_1 = hf(x_n, y_n) = 1.6 - 0.6y_n, \\ K_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}) = 1.12 - 0.42y_n, \\ K_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}) = 1.264 - 0.474y_n, \\ K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3) = 1.2208 - 0.4578y_n. \end{cases}$$

$$y_{n+1} = 1.2648 + 0.5257y_n.$$

故

由于  $y(0) = y_0 = 2$ , 故

$$y(0.2) \approx y_1 = 2.3162,$$

$$y(0.4) \approx y_2 = 2.4824.$$

6. 证 只需证明公式的局部截断误差为  $O(h^4)$  即可.

为求局部截断误差, 假设  $y_n = y(x_n)$ , 因

$$K_1 = f(x_n, y_n) = f(x_n, y(x_n)) = y'(x_n),$$

$$\begin{aligned} K_2 &= y'(x_n) + \frac{h}{2} [f_x(x_n, y(x_n)) + f_y(x_n, y(x_n)) y'(x_n)] \\ &\quad + \frac{1}{2!} \frac{h^2}{4} [f_{xx}(x_n, y(x_n)) + 2f_{xy}(x_n, y(x_n)) y'(x_n) \\ &\quad + f_{yy}(x_n, y(x_n)) (y'(x_n))^2] + O(h^3) \\ &= y'(x_n) + \frac{h}{2} y''(x_n) + \frac{h^2}{8} [f_{xx}(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + 2f_{xy}(x_n, y(x_n)) y'(x_n) + f_{yy}(x_n, y(x_n)) (y'(x_n))^2] \\ &\quad + O(h^3) \\ &= y'(x_n) + \frac{h}{2} y''(x_n) + \frac{h^2}{8} y'''(x_n) + O(h^3), \\ K_3 &= y'(x_n) + \frac{3}{4} h y''(x_n) + \frac{3}{4} \frac{h^2}{2} y''(x_n) f_y(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \frac{9}{16} h^2 [f_{xx}(x_n, y(x_n)) + 2f_{xy}(x_n, y(x_n)) y'(x_n) \\ &\quad + f_{yy}(x_n, y(x_n)) (y'(x_n))^2] + O(h^3). \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{9}(2K_1 + 3K_2 + 4K_3) \\
 &= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h}{9}\left[\frac{3}{2} + 3\right]y''(x_n) \\
 &\quad + \frac{h^3}{9}\left[\frac{3}{8}(f_{xx}(x_n, y(x_n))) + 2f_{xy}(x_n, y(x_n))y'(x_n) \right. \\
 &\quad \left. + f_{yy}(x_n, y(x_n))(y'(x_n))^2\right) + \frac{3}{2}y''(x_n)f_y(x_n, y(x_n)) \\
 &\quad + \frac{9}{8}(f_{xx}(x_n, y(x_n)) + 2f_{xy}(x_n, y(x_n))y'(x_n) \\
 &\quad \left. + f_{yy}(x_n, y(x_n))(y'(x_n))^2\right) + O(h^4) \\
 &= y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + O(h^4).
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

而

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + O(h^4). \tag{5.33}$$

比较(5.32)、(5.33)两式可知,公式的局部截断误差至少是四阶的.因此该公式至少是三阶方法.

**7. 解** 依题意只需公式的局部截断误差为  $O(h^3)$ ,从而确定出待定系数  $\alpha, \beta_0, \beta_1$ .

为求得局部截断误差,假设  $y_{n-1} = y(x_{n-1}), y_n = y(x_n)$ .

将  $y_{n+1}$  在  $x_n$  处 Taylor 展开,即分别将差分格式右端的每一项在  $x_n$  处展开,

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= \alpha(y(x_n) + y(x_{n-1})) + h(\beta_0 y'(x_n) + \beta_1 y'(x_{n-1})), \\
 y(x_{n-1}) &= y(x_n) - y'(x_n)h + \frac{h^2}{2}y''(x_n) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + O(h^4), \\
 y'(x_{n-1}) &= y'(x_n) - y''(x_n)h + \frac{h^2}{2}y'''(x_n) - \frac{h^3}{3!}y^{(4)}(x_n) + O(h^4).
 \end{aligned}$$

代入后得

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= \alpha(y(x_n) + y(x_n) - y'(x_n)h + \frac{h^2}{2}y''(x_n) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) \\
 &\quad + O(h^4)) + \beta_0 hy'(x_n) + \beta_1 hy'(x_n) - \beta_1 y''(x_n)h^2 \\
 &\quad + \frac{\beta_1}{2}y'''(x_n)h^3 - \frac{\beta_1 h^4}{3!}y^{(4)}(x_n) + O(h^5) \\
 &= 2\alpha y(x_n) + (\beta_0 + \beta_1 - \alpha)y'(x_n)h \\
 &\quad + \left[\frac{\alpha}{2} - \beta_1\right]y''(x_n)h^2 + \left[\frac{\beta_1}{2} - \frac{\alpha}{6}\right]y'''(x_n)h^3 + O(h^4).
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

再将  $y(x_{n+1})$  在  $x_n$  处 Taylor 展开,

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2}h^2 + \frac{y'''(x_n)}{3!}h^3 + O(h^4). \tag{5.35}$$

将(5.34)式与(5.35)式比较知,若要

$$R(f) = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3).$$

则

$$\begin{cases} 2\alpha = 1, \\ \beta_0 + \beta_1 - \alpha = 1, \\ \frac{\alpha}{2} - \beta_1 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{解之得 } \alpha = \frac{1}{2}, \beta_1 = -\frac{1}{4}, \beta_0 = \frac{7}{4}.$$

故所求差分格式为

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}) + \frac{h}{4}(7f_n - f_{n-1}).$$

其局部截断误差首项为

$$\frac{1}{3!}y'''(x_n)h^3 - \left[\frac{\beta_1}{2} - \frac{\alpha}{6}\right]y'''(x_n)h^3 = \frac{3}{8}y'''(x_n)h^3.$$

8. 解 此题的解法同第7题,即由其局部截断误差为  $O(h^4)$  确定出待定参数  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1$  及  $b_2$ .

为求局部截断误差,假设  $y_{n-2} = y(x_{n-2})$ ,  $y_{n-1} = y(x_{n-1})$ ,  $y_n = y(x_n)$ , 则

$$y_{n+1} = a_0 y(x_n) + a_1 y(x_{n-1}) + a_2 y(x_{n-2}) + h(b_0 y'(x_n) + b_1 y'(x_{n-1}) + b_2 y'(x_{n-2})).$$

将  $y_{n+1}$  在  $x_n$  处 Taylor 展开有

$$\begin{aligned} y_{n+1} = & (a_0 + a_1 + a_2) y(x_n) + (-a_1 - 2a_2 + b_0 + b_1 \\ & + b_2) h y'(x_n) + (a_1 + 4a_2 - 2b_1 - 4b_2) \frac{h^2}{2} y''(x_n) \\ & + (-a_1 - 8a_2 + 3b_1 + 12b_2) \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) \\ & + (a_1 + 16a_2 - 4b_1 - 32b_2) \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_n) + O(h^5). \end{aligned}$$

因此,若该公式为三阶方法,则要求

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 1, \\ -a_1 - 2a_2 + b_0 + b_1 + b_2 = 1, \\ a_1 + 4a_2 - 2b_1 - 4b_2 = 1, \\ -a_1 - 8a_2 + 3b_1 + 12b_2 = 1. \end{cases}$$

6 个未知数,只有四个方程,故有两个参量可任取.因而可得一族的三阶公式.

如取  $a_1 = a_2 = 0$ , 得  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = \frac{23}{12}$ ,  $b_1 = -\frac{4}{3}$ ,  $b_2 = \frac{5}{12}$ . 故有

$$y_{n+1} = y_n + h \left[ \frac{23}{12} y'_n - \frac{4}{3} y'_{n-1} + \frac{5}{12} y'_{n-2} \right].$$

9. 证 只需证明差分格式对  $y=1, x, x^2$  准确成立, 而对  $y=x^3$  非准确成立即可.

令  $y=a$ , 差分格式的右端为

$$\frac{1}{3}(4a-a)+0=a,$$

差分格式对  $y=a$  准确成立.

令  $y=x$ , 有

$$y_{n+1} = \frac{1}{3}(4x_n - x_n + h) + \frac{2}{3}h = x_n + h = y(x_{n+1}).$$

令  $y = x^2$ , 有

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{1}{3}(4x_n^2 - (x_n - h)^2) + \frac{4}{3}h(x_n + h) \\ &= (x_n + h)^2 = y(x_{n+1}). \end{aligned}$$

再令  $y = x^3$ , 有

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{1}{3}(4x_n^3 - (x_n - h)^3) + \frac{3}{3}h(x_n + h)^2 \\ &\neq (x_n + h)^3 = y(x_{n+1}), \end{aligned}$$

差分格式对  $y = x^3$  不准确成立, 故此差分格式是二阶公式.

10. 解  $f(x, y) = ax + b$ , 改进的 Euler 格式为

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))] \\ &= y_n + \frac{h}{2}[ax_n + b + ax_{n+1} + b]. \end{aligned}$$

而  $x_n = x_0 + nh = nh$ ,  $x_{n+1} = (n+1)h$ , 故

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[anh + 2b + anh + ah] = y_n + \frac{h}{2}[2anh + ah + 2b] \\ &= y_{n-1} + \frac{h}{2}[2a(n-1)h + ah + 2b] + \frac{h}{2}[2anh + ah + 2b] \\ &= \dots = \frac{h}{2}[2ah + 4ah + \dots + 2anh + (n+1)ah + (n+1)2b] \\ &= \frac{a}{2}(n+1)^2 h^2 + b(n+1)h = \frac{a}{2}x_{n+1}^2 + bx_{n+1}. \end{aligned}$$

在  $x = x_{n+1}$  处, 其准确解为  $y(x_{n+1}) = \frac{a}{2}x_{n+1}^2 + bx_{n+1}$ . 故改进的

Euler 法对所给初值问题的求解是准确的.

11. 解  $f(x, y) = -y - 2\sin x$ . 预校格式为

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}), \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{记} \quad \Delta \bar{y}_n &= \frac{0.2}{24} (55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}), \\ \Delta y_n &= \frac{0.2}{24} (9 f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}). \end{aligned}$$

则得

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + \Delta \bar{y}_n, \\ y_{n+1} = y_n + \Delta y_n. \end{cases}$$

计算结果见表 5.6.

表 5.6

$x_n$	$\bar{y}_n$	$y_n$	$f_n = f(x_n, y_n)$	$\Delta \bar{y}_n$	$f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})$	$\Delta y_n$
0		1	-1			
0.2		0.781138	-1.178477			
0.4		0.531307	-1.310144			
0.6		0.260435	-1.389720	-0.281165	-1.413982	-0.281319
0.8	-0.020730	-0.020884	-1.413828	-0.280301	-1.381757	-0.280501
1.0	-0.301185	-0.301385	-1.381557	-0.268318	-1.294575	-0.268511
1.2	-0.569503	-0.569896	-1.294182	-0.245603	-1.155793	-0.245814
1.4	-0.815106	-0.815710	-1.155190	-0.213099	-0.970942	-0.213314
1.6	-1.028205	-1.029024	-0.970123	-0.172094	-0.747396	-0.172309
1.8	-1.200299	-1.201333	-0.746362	-0.124225	-0.494070	-0.124434
2.0	-1.324524	-1.325767				

12. 解 由

$$T_1 = y(x_{n+1}) - \bar{y}_{n+1} = \frac{3}{8} h^4 y^{(4)}(\xi_1),$$

$$T_2 = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{1}{24} h^4 y^{(4)}(\xi_2),$$

则 
$$\frac{y(x_{n+1}) - \bar{y}_{n+1}}{y(x_{n+1}) - y_{n+1}} \approx -9,$$

得事后误差估计式:

$$y(x_{n+1}) - \bar{y}_{n+1} \approx -\frac{9}{10} (\bar{y}_{n+1} - y_{n+1}),$$

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} \approx \frac{1}{10} (\bar{y}_{n+1} - y_{n+1}).$$

记  $p_n = \bar{y}_n, c_n = y_n$  得

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{预估} & p_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}), \\ \text{改进} & m_{n+1} = p_{n+1} - \frac{9}{10}(p_n - c_n), \\ \text{计算} & m'_{n+1} = f(x_{n+1}, m_{n+1}), \\ \text{校正} & c_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5m'_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}), \\ \text{改进} & y_{n+1} = c_{n+1} + \frac{1}{10}(p_{n+1} - c_{n+1}). \end{array} \right.$$

13. 证 对模型方程  $y' = \lambda y (\lambda < 0)$ , 所给方法的形式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}(\lambda y_n + 2\lambda y_{n+1}),$$

$$y_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{3}\lambda h}{1 - \frac{2}{3}\lambda h} y_n. \quad (5.34)$$

记  $\delta_n$  为  $y_n$  处的扰动, 则有

$$y_{n+1} + \delta_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{3}\lambda h}{1 - \frac{2}{3}\lambda h} (y_n + \delta_n). \quad (5.35)$$

(5.35)式减(5.34)式得

$$\delta_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{3}\lambda h}{1 - \frac{2}{3}\lambda h} \delta_n.$$

因恒有  $\left| \frac{1 + \frac{1}{3}\lambda h}{1 - \frac{2}{3}\lambda h} \right| < 1$ , 故  $|\delta_{n+1}| < |\delta_n|$  总是成立, 即此方法是无条

件稳定的.

14. 证明 只要将 3 个不同公式用于解所给初值问题, 证明它们的结果相同即可.

由于  $f(x, y) = -2(y + 2x)$ , 对改进 Euler 法

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))] \\ &= y_n + \frac{h}{2} [-2(y_n + 2x_n) - 2(y_n + h(-2y_n + 4x_n) \\ &\quad + 2x_{n+1}))] \\ &= (1 - 2h + 2h^2)y_n - 2h(1 - 2h)x_n - 2h(x_n + h) \\ &= (1 - 2h + 2h^2)y_n - 4h(1 - h)x_n - 2h^2; \end{aligned}$$

对 midpoint 公式

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right) \\ &= y_n - 2h\left[y_n + \frac{h}{2}(-2y_n - 4x_n) + 2\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\right] \\ &= (1 - 2h + 2h^2)y_n - 4h(1 - h)x_n - 2h^2; \end{aligned}$$

对 Heun 公式

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{4} \left[ f(x_n, y_n) + 3f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n)\right) \right] \\ &= y_n + \frac{h}{4} \left[ -2(y_n + 2x_n) + 3(-2)\left(y_n + \frac{2}{3}h(-2y_n - 4x_n) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(x_n + \frac{2}{3}h)\right) \right] \\ &= (1 - 2h + 2h^2)y_n - 4h(1 - h)x_n - 2h^2. \end{aligned}$$

这表明 3 个公式计算的结果相同. 由于  $f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 0$ , 故 3 个公式的局部截断误差均为

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \frac{h^3}{6} y''(x_n) f'_y + O(h^4) = \frac{h^3}{6} [-8y(x_n) - 16x_n + 8] + O(h^4) \\ &= -\frac{4}{3} h^4 [y(x_n) + 2x_n - 1] + O(h^4), \end{aligned}$$

所以这 3 个二阶公式有相同的逼近.

15. **证明** 设  $y_n = y(x_n)$ ,  $y_{n-1} = y(x_{n-1})$ , 则

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(y(x_n) + y(x_{n-1})) + \frac{h}{4}(4f_{n+1} - y'(x_n) + 3y'(x_{n-1})).$$

将右端项在  $x_n$  处 Taylor 展开,

$$y(x_{n-1}) = y(x_n) - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \cdots$$

$$y'(x_{n-1}) = y'(x_n) - hy''(x_n) + \frac{h^2}{2} y'''(x_n) - \frac{h^3}{3!} y^{(4)}(x_n) + \cdots$$

$$f_{n+1} \triangleq y'(x_{n+1}) = y'(x_n) + hy''(x_n) + \frac{h^2}{2} y'''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y^{(4)}(x_n) + \cdots$$

代入  $y_{n+1}$  中得  $y_{n+1}$  在  $x_n$  处的 Taylor 展开式为

$$y_{n+1} = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \frac{19}{24} y'''(x_n) h^3 + O(h^4).$$

$y(x_{n+1})$  在  $x_n$  处的 Taylor 展开式为

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \frac{1}{6} y'''(x_n) h^3 + O(h^4),$$

则其局部截断误差

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{5}{8} h^3 y'''(x_n) + O(h^4).$$

故方法是二阶的,  $-\frac{5}{8} h^3 y'''(x_n)$  为其局部截断误差的主项.

16. 证明 同上题, 只要证明局部截断误差  $T_{n+1} = O(h^5)$ , 则方法为四阶. 由于

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_{n+1}) + \alpha[y(x_n) - y(x_{n-1})] \\ &\quad - y(x_{n-2}) - \frac{1}{2}(3+\alpha)h[y'(x_n) - y'(x_{n-1})] \\ &= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_n) \\ &\quad + O(h^5) - \alpha[-hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_n) \\ &\quad + O(h^5)] - [y(x_n) - 2hy'(x_n) + \frac{(2h)^2}{2} y''(x_n) - \frac{(2h)^3}{3!} \\ &\quad \cdot y'''(x_n) + \frac{(2h)^4}{4!} y^{(4)}(x_n) + O(h^5)] - \frac{h}{2}(3+\alpha)[y'(x_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + y'(x_n) - h y''(x_n) + \frac{h^2}{2} y'''(x_n) - \frac{h^3}{3!} y^{(4)}(x_n) + O(h^4) ] \\
& = [1 + \alpha + 2 - (3 + \alpha)] h y'(x_n) + \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \alpha - 2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} (3 + \alpha) \right] h^2 y''(x_n) + \left[ \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \alpha + \frac{4}{3} - \frac{1}{4} (3 + \alpha) \right] \\
& \quad \cdot h^3 y'''(x_n) + \left[ \frac{1}{24} - \frac{1}{24} \alpha - \frac{2}{3} + \frac{1}{12} (3 + \alpha) \right] \\
& \quad \cdot h^4 y^{(4)}(x_n) + O(h^5) \\
& = \left[ \frac{3}{4} - \frac{1}{12} \alpha \right] h^3 y'''(x_n) + \frac{1}{24} (-9 + \alpha) h^4 y^{(4)}(x_n) + O(h^5),
\end{aligned}$$

当  $\alpha=9$  时,  $T_{n+1} = O(h^5)$ , 故方法是四阶的.

17. **证明** 此题同于习题 15、16. 即只需求出其局部截断误差. 依局部截断误差定义, 并在  $x_n$  处 Taylor 展开

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_{n+1}) + (b-1)y(x_n) - b y(x_{n-1}) \\
&\quad - \frac{h}{4} [(b+3)y'(x_{n+1}) + (3b+1)y'(x_{n-1})] \\
&= y(x_n) + h y'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + O(h^4) \\
&\quad + (b-1)y(x_n) - b[y(x_n) - h y'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) \\
&\quad - \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + O(h^4)] - \frac{h}{4} (b+3)[y'(x_n) + h y''(x_n) \\
&\quad + \frac{h^2}{2} y'''(x_n) + O(h^3)] - \frac{h}{4} (3b+1)[y'(x_n) - h y''(x_n) \\
&\quad + \frac{h^2}{2} y'''(x_n) + O(h^3)] \\
&= (1+b-1-b)y(x_n) + \left[ 1+b-\frac{1}{4}(b+3)-\frac{1}{4}(3b+1) \right] \\
&\quad \cdot h y'(x_n) + \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} b - \frac{1}{4} (b+3-3b-1) \right] h^2 y''(x_n) \\
&\quad + \left[ \frac{1}{6} + \frac{1}{6} b - \frac{1}{8} (b+3+3b+1) \right] h^3 y'''(x_n) + O(h^4)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{3}(b+1)h^3 y'''(x_n) + O(h^4).$$

则当  $b \neq -1$  时,  $T_{n+1} = O(h^3)$ , 故方法为二阶的, 当  $b = -1$  时,  $T_{n+1} = O(h^4)$ , 故方法为三阶的.

18. 解 这里  $f = -20y$ ,  $\lambda = \frac{\partial f}{\partial y} = -20$ .

由表 5.1 知四阶 R-K 法的绝对稳定区间为  $[-2.785, 0]$ . 当  $h = 0.1$  时,  $h = \lambda h = -20 \times 0.1 = -2$ , 其值在绝对稳定区间内, 计算稳定. 而当  $h = 0.2$  时,  $h = \lambda h = -20 \times 0.2 = -4$ , 其值不在绝对稳定性区间内, 故  $h = 0.2$  时计算是不稳定的.

19. 解 因  $f(x, y) = \lambda y$ , 所以中点公式为

$$y_{n+1} = y_n + h \left[ \lambda \left( y_n + \frac{h}{2} (\lambda y_n) \right) \right].$$

令  $\lambda h = h$ , 则

$$y_{n+1} = \left[ 1 + h + \frac{1}{2} h^2 \right] y_n.$$

设  $y_n$  上有小扰动  $\delta_n$ , 则

$$y_{n+1} + \delta_{n+1} = \left[ 1 + h + \frac{1}{2} h^2 \right] (y_n + \delta_n)$$

与上式相减有

$$\delta_{n+1} = \left[ 1 + h + \frac{1}{2} h^2 \right] \delta_n.$$

显然当且仅当  $|1 + h + \frac{1}{2} h^2| \leq 1$  时,  $|\delta_{n+1}| \leq |\delta_n|$ , 即所给格式是稳定的. 解

$$|1 + h + \frac{1}{2} h^2| \leq 1$$

等价于  $-1 \leq 1 + h + \frac{1}{2} h^2 \leq 1$ , 即  $-2 \leq h \left[ 1 + \frac{1}{2} h \right] \leq 0$ , 当  $1 + h + \frac{1}{2} h^2 = 1$  时, 得  $h \left[ 1 + \frac{1}{2} h \right] = 0$ , 即  $h = 0$  及  $h = -2$ . 将区间分为

$(-\infty, -2), [-2, 0], (0, +\infty)$ , 仅当  $h \in [-2, 0]$  时,  $-2 \leq h(1 + \frac{1}{2}h) \leq 0$ , 故  $-2 \leq h \leq 0$  即为绝对稳定区间. 所以当步长  $h \leq -\frac{2}{\lambda}$  时, 二阶中点公式是稳定的, 它是条件稳定的.

20. 解 (1) 显式 Euler 法是有条件稳定的, 对步长  $h$  的限制为

$$0 \leq h \leq -\frac{2}{\lambda}.$$

而  $\lambda = \frac{\partial f}{\partial y}$ . 此处  $f(x, y) = -1000(y - g(x)) + g'(x)$ , 则  $\lambda = -1000$ , 故

$$h \leq +\frac{2}{1000} = 0.002.$$

即从稳定性考虑步长  $h$  应在  $[0, 0.002]$  范围内选取.

(2) 因隐式 Euler 法是无条件稳定的, 所以对步长的选取没有限制.

(3) 因显式 Euler 格式是一阶方法, 而初值问题的解为一次式, 故显式 Euler 格式对解函数是准确成立的. 故步长无限制.

21. 解 (1) 二阶方法. (2) 要使梯形格式的迭代法收敛, 步长  $h < \frac{1}{6}$ .

(3) 因隐式 Euler 法是无条件稳定, 对步长  $h$  无限制, 故  $0 < h < +\infty$ .

(4) 显式 Euler 法的绝对稳定区间为  $[-2, 0]$ .

# 第六章 方程求根

## 一、内容提要

在工程和科学技术中,许多问题常常归结为求解方程  $f(x)=0$ ,第六章研究求解方程

$$f(x)=0 \quad (6.1)$$

的数值方法.

**定义 6.1** 1)若  $x^*$  使  $f(x^*)=0$ ,则称  $x^*$  为方程(6.1)的根,或称为函数  $f(x)$ 的零点.

2)当  $f(x)$ 为多项式时,即

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \quad (a_n\neq 0),$$

称  $f(x)=0$  为代数方程,否则称为超越方程.

3)若  $f(x)$ 可分解为

$$f(x)=(x-x^*)^mg(x),$$

其中  $0<|g(x^*)|<\infty$ ,  $m$  为正整数,则称  $x^*$  为  $f(x)$ 的  $m$ 重零点;当  $m=1$  时称  $x^*$  为  $f(x)$ 的单重零点或方程  $f(x)=0$  的单根.

### 1. 二分法

设有一个变量的函数方程

$$f(x)=0, \quad (6.2)$$

其中  $f(x)$ 为  $[a, b]$ 上连续函数,且  $f(a) \cdot f(b)<0$ ,于是由连续函数性质知,方程(6.2)在  $[a, b]$ 中至少有一个实根.为简单起见设有唯一实根  $x^*$ ,通常,可用二分法来求实根  $x^*$  的近似值.

二分法的基本思想是逐步将含根  $x^*$  的区间分半,通过判别函数值的符号,一步一步搜索有根区间,将有根区间缩小到充分小,

从而求出满足给定精度的根  $x^*$  的近似值.

二分法求根的计算步骤如下.

1) 取  $(a, b)$  的中点  $\frac{a+b}{2}$ , 计算  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ .

1° 若  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ , 则  $\frac{a+b}{2}$  就是  $f(x) = 0$  的根.

2° 若  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ , 则由  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  的符号决定新的有根区间

$(a_1, b_1)$ :

当  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$  时, 取  $a_1 = \frac{a+b}{2}, b_1 = b$ ;

当  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$  时, 取  $a_1 = a, b_1 = \frac{a+b}{2}$ .

2) 用  $(a_1, b_1)$  替代  $(a, b)$ , 继续上述过程, 当出现情况 (1°) 时就停止. 记第  $n$  个有根区间为  $(a_n, b_n)$ ,  $(a_n, b_n)$  满足

(i)  $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$ ;

(ii)  $b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \dots = \frac{b - a}{2^n} \rightarrow 0, (0 \rightarrow \infty)$ ;

(iii)  $(a_n, b_n) \subset (a_{n-1}, b_{n-1}) \subset \dots \subset (a, b)$ .

当  $n$  充分大时, 就取  $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$  为方程  $f(x) = 0$  的根  $x^*$  的近似值, 显然有

$$|x_n - x^*| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots.$$

上式即为第  $n$  次近似值的误差估计.

## 2. 迭代法

迭代法是一种逐步逼近的方法, 它是解代数方程、超越方程、方程组、微分方程等的一种基本而重要的数值方法.

给定函数方程

$$f(x) = 0. \quad (6.3)$$

为了求一元非线性方程 (6.3) 的实根, 首先将它转换成等价形式

$$x = \varphi(x). \quad (6.4)$$

然后构造迭代过程:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k=0, 1, 2, \dots. \quad (6.5)$$

对于给定的初始值  $x_0$ , 若由此生成的序列  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  有极限, 如  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ , 则显然  $x^*$  是(6.4)式的解, 从而按等价性  $x^*$  也就是方程(6.3)的解.

式(6.5)称为基本迭代法,  $\varphi(x)$  称为迭代函数. 由于收敛点  $x^*$  满足  $x^* = \varphi(x^*)$ , 故称  $x^*$  为  $\varphi(x)$  的不动点, (6.5)也称不动点迭代法.

**定理 6.1** 设函数  $\varphi(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 并且满足:

$$1) \text{ 映内性 } a \leq \varphi(x) \leq b, \forall x \in [a, b]; \quad (6.6)$$

2) 压缩性 存在常数  $0 < L < 1$  ( $L$  为压缩系数), 使得

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b]. \quad (6.7)$$

则

(i) 函数  $\varphi(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上存在唯一的不动点  $x^*$ .

(ii) 对于任何初值  $x_0 \in [a, b]$ , 由迭代法(6.5)生成的点  $x_k$  都在区间  $[a, b]$  中, 并且收敛到  $x^*$ , 即  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset [a, b], \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ .

(iii) 这时有误差估计式

$$|x_k - x^*| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|,$$

及

$$|x_k - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}|.$$

注: 定理 6.1 中的压缩性条件(6.7)不容易检验. 若函数  $\varphi(x)$  在区间  $(a, b)$  上可导, 则(6.7)式可用更强的条件

$$|\varphi'(x)| \leq L < 1, \quad \forall x \in (a, b)$$

代替.

**定义 6.2** 若存在  $x^*$  的某个邻域  $R: |x - x^*| \leq \delta$ , 使迭代过程  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  对于任意初值  $x_0 \in R$  均收敛, 则称迭代过程  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  在根  $x^*$  邻近具有局部收敛性.

**定理 6.2** 设  $x^*$  为方程  $x = \varphi(x)$  的根,  $\varphi(x)$  在  $x^*$  的邻近连续, 且

$$|\varphi'(x^*)| < 1,$$

则迭代过程  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  在  $x^*$  邻近具有局部收敛性.

**定义 6.3** 设迭代过程  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  收敛于方程  $x = \varphi(x)$  的根  $x^*$ , 若迭代误差  $e_k = x_k - x^*$  当  $k \rightarrow \infty$  时成立下列渐近关系式

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p} \rightarrow c \quad (c \neq 0 \text{ 为常数}),$$

则称该迭代过程是  $p$  阶收敛的. 特别地,  $p=1$  时称线性收敛,  $p>1$  时称超线性收敛,  $p=2$  时称平方收敛.

**推论 6.1** 若定理 6.2 中还有  $\varphi'(x^*) \neq 0$ , 即  $\varphi'(x^*)$  满足  $0 < |\varphi'(x^*)| < 1$ , 则迭代法(6.5)是线性收敛的.

**定理 6.3** 设  $x^*$  是  $x = \varphi(x)$  的根, 若有正整数  $p \geq 2$ , 使得  $\varphi^{(p)}(x)$  在  $x^*$  的邻域上连续, 并且满足

$$\begin{aligned} \varphi^{(l)}(x^*) &= 0, \quad l=1, 2, \dots, p-1, \\ \varphi^{(p)}(x^*) &\neq 0, \end{aligned}$$

则迭代法(6.5)局部收敛, 并且迭代误差  $e_k = x_k - x^*$  满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}.$$

从而方法是  $p$  阶收敛的.

### 3. 加速收敛性方法

根据推论 6.1, 若  $x^*$  是  $x = \varphi(x)$  的根,  $\varphi'(x)$  在  $x^*$  的某个邻域上连续, 且  $0 < |\varphi'(x^*)| < 1$ , 那么迭代法(6.5)局部线性收敛.  $|\varphi'(x^*)| = 1$  为临界情况, 这时或者局部线性收敛, 或者不收敛.  $|\varphi'(x^*)| > 1$  时肯定不收敛.

Aitken 加速算法或 Steffensen 迭代法是改善收敛性的方法, 它使  $\varphi'(x^*) \neq 1$  时至少具有二次局部收敛性.

依定义 6.2, 若迭代法(6.5)线性收敛, 则迭代误差  $e_k = x_k - x^*$  满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} = c \neq 0.$$

因此,当  $k$  充分大时有

$$\frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} \approx \frac{x_{k+2} - x^*}{x_{k+1} - x^*}.$$

从中解出  $x^*$  (称为外推),得到它的近似值

$$\begin{aligned} x^* &\approx \frac{x_{k+2} x_k - x_{k+1}^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k} \\ &= x_{k+2} - \frac{(x_{k+2} - x_{k+1})^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}. \end{aligned}$$

于是,设有方程  $x = \varphi(x)$ ,

$$\text{迭代: } \tilde{x}_{k+1} = \varphi(x_k), \bar{x}_{k+1} = \varphi(\tilde{x}_{k+1}),$$

$$\text{加速: } x_{k+1} = x_k - \frac{(\tilde{x}_{k+1} - \tilde{x}_k)^2}{\bar{x}_{k+1} - 2\tilde{x}_{k+1} + x_k} \quad (6.8)$$

或

$$x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} - \frac{(\bar{x}_{k+1} - \tilde{x}_{k+1})^2}{\bar{x}_{k+1} - 2\tilde{x}_{k+1} + x_k}, \quad k=0,1,2,\dots \quad (6.8)'$$

它的不动点迭代形式是

$$x_{k+1} = \psi(x_k), \quad k=0,1,2,\dots$$

其中的迭代函数

$$\psi(x) = \frac{x\varphi(\varphi(x)) - \varphi^2(x)}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x}. \quad (6.9)$$

通常称(6.8)式为 Steffensen 迭代法, (6.8)' 为 Aitken 加速算法.

**定理 6.4** 设函数  $\psi(x)$  由  $\varphi(x)$  按式(6.9)定义.

1) 若  $x^*$  是  $\varphi(x)$  的不动点,  $\varphi'(x)$  在  $x^*$  处连续, 且  $\varphi'(x^*) \neq 1$ , 则  $x^*$  也是  $\psi(x)$  的不动点; 反之, 若  $x^*$  是  $\psi(x)$  的不动点, 则  $x^*$  也是  $\varphi(x)$  的不动点.

2) 若  $x^*$  是  $\varphi(x)$  的不动点,  $\varphi'''(x)$  在  $x^*$  处连续, 且  $\varphi'(x^*) \neq 1$ , 则 Steffensen 迭代法(6.8)及 Aitken 算法(6.8)' 至少具有二次

局部收敛性.

#### 4. Newton 迭代法

设有非线性方程

$$f(x)=0. \quad (6.10)$$

Newton 迭代法实质上是一种线性化方法,其基本思想是将非线性方程(6.8)逐步归结为某种线性方程来求解.

设  $x^*$  是方程  $f(x)=0$  的实根,  $x_k$  是某个近似根,则有

$$0=f(x^*)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k).$$

当  $f'(x_k)\neq 0$  时,从中解出

$$x^*\approx x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

将右端看成新的迭代值  $x_{k+1}$ , 所得迭代过程

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0,1,2,\dots \quad (6.11)$$

称为 **Newton 迭代法**.

**定理 6.5** 设  $x^*$  满足  $f(x^*)=0$ , 若  $f'(x^*)\neq 0$ , 并且  $f''(x)$  在  $x^*$  的邻域上连续, 则 Newton 迭代法(6.11)在点  $x^*$  处局部收敛, 并有

$$\lim_{k\rightarrow\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}.$$

从而 Newton 至少具有平方阶收敛.

#### 5. Newton 迭代法的几点改进

##### (1) Newton 下山法

由 Newton 迭代法的收敛性定理 6.5 知, Newton 迭代法是局部收敛的, 对初值  $x_0$  的要求是苛刻的, 在实际应用中, 往往很难给出较好的初值  $x_0$ . Newton 下山法是在事先没有给出较好的初值情况下, 求  $f(x)=0$  根的一种修正的 Newton 法.

为了防止迭代发散, 对迭代过程再附加一项要求, 即具有单调性:

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|. \quad (6.12)$$

满足这项要求的算法称下山法。

将 Newton 法与下山法结合起来使用的方法,称为 **Newton 下山法**,即将 Newton 法的计算结果

$$\bar{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

与前一步的近似值  $x_k$  适当加权平均作为新的改进值

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \lambda \bar{x}_{k+1} + (1-\lambda)x_k \\ &= x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0,1,\dots \end{aligned} \quad (6.13)$$

其中  $\lambda(0 < \lambda \leq 1)$  称下山因子.下山因子  $\lambda$  的选取,应使单调性条件 (6.10) 成立.

## (2) 重根时的 Newton 迭代改善

定理 6.5 表明,Newton 迭代法在单根附近至少具有平方阶收敛.若  $x^*$  是  $f(x)=0$  的重根,则 Newton 迭代函数  $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  在  $x^*$  的导数

$$\varphi'(x^*) = 1 - \frac{1}{m},$$

其中  $m$  为根  $x^*$  的重数.  $m \geq 2$ , 从而  $0 < \varphi'(x^*) < 1$ .

为了改善重根时 Newton 法的收敛性,使其在重根的邻近至少具有平方阶收敛.有两种方法:

方法 1 若根的重数  $m \geq 2$  已知,则可构造迭代法

$$x_{k+1} = \psi(x_k) = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0,1,2,\dots \quad (6.14)$$

方法 2 设  $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ , 对  $u(x)$  使用 Newton 法, 则有

$$x_{k+1} = x_k - \frac{u(x)}{u'(x)} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)}, \quad (6.15)$$

$$k=0,1,2,\cdots.$$

## 6. 弦截法与抛物线法

Newton 法在求  $x_{k+1}$  时,不但要求给出函数值  $f(x_k)$ ,而且要求提供导数值  $f'(x_k)$ .当函数  $f(x)$  比较复杂时,提供它的导数值往往是有困难的;如果用不计算导数的迭代方法,又往往只有线性收敛速度.可以设想,若在迭代法中,不仅使用在  $x_k$  点上的函数值  $f(x_k)$ ,而且还使用已知的  $x_{k-1}, x_{k-2}, \cdots$  等点上的函数值来构造迭代函数,就有可能提高收敛速度.导出这类求根方法的基础是插值原理.

### (1) 弦截法

设  $x_k, x_{k-1}$  是  $f(x)=0$  的近似根,利用  $f(x_k), f(x_{k-1})$  构造一次插值多项式  $P_1(x)$ ,并用  $P_1(x)=0$  的根作为  $f(x)=0$  的新的近似根  $x_{k+1}$ ,即

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} (x_k - x_{k-1}), \quad (6.16)$$

(6.16) 式称为方程求根的弦截法.

弦截法具有超线性收敛,且收敛阶  $p=1.618$ .

### (2) 抛物线法

设  $x_k, x_{k-1}, x_{k-2}$  是  $f(x)=0$  的三个近似根,利用  $f(x_k), f(x_{k-1}), f(x_{k-2})$  构造二次插值多项式  $P_2(x)$ ,并适当选取  $P_2(x)$  的一个零点  $x_{k+1}$  作为新的近似根,这样确定的迭代过程称抛物线法,也称 Muller 法,即

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}} \quad (6.17)$$

其中  $\omega = f[x_k, x_{k-1}] + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x_k - x_{k-1})$ .

根式前的符号取与  $\omega$  相同的符号.

抛物线法也是超线性收敛的,其收敛阶  $p=1.840$ .

## 二、基本要求

1) 掌握用迭代法求方程近似根的基本思想;能正确运用所学方法求给定方程满足一定精度要求的近似根.

2) 二分法是求方程实根的一种大范围收敛的方法.若给定近似解的误差和二分区,能预估二分次数.

3) 理解不动点迭代原理,掌握迭代收敛的必要条件和充分条件.

4) 掌握迭代过程的全局、局部收敛性定理及会判断迭代过程的收敛阶.

5) 理解 Newton 迭代公式是如何推导的,理解 Newton 迭代公式在单根附近至少平方阶收敛;求方程重根时,知道如何改进 Newton 迭代公式,使其具有二阶收敛.

6) 掌握 Steffensen 加速法,理解迭代函数  $\varphi(x)$  满足  $|\varphi'(x^*)| \neq 1$  ( $x^*$  是方程的根) 时,Steffensen 加速法可将一个发散的序列或线性收敛的序列加速为平方收敛序列.

## 三、例题选讲

例 1 试用二分法求解超越方程

$$e^{-x} - \sin\left[\frac{\pi x}{2}\right] = 0$$

在  $(0, 1)$  之间的一个根,要求误差不超过  $\frac{1}{2^5}$ .

解 令  $f(x) = e^{-x} - \sin\left[\frac{\pi x}{2}\right]$ , 则有

$$f(0) = 1 > 0, f(1) = -0.6321 < 0,$$

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{\pi}{2} \cos\left[\frac{\pi x}{2}\right] < 0 \quad (x \in (0, 1)),$$

所以函数  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上确有且只有一个零点  $x^*$ . 将计算结果列入表 6.1.

表 6.1

$n$	函数值符号	有根区间
1	$f(0.5) = e^{-0.5} - \sin \frac{\pi}{4} = -0.1006$	$(0, 0.5)$
2	$f(0.25) = e^{-0.25} - \sin \frac{\pi}{8} = 0.3961$	$(0.25, 0.5)$
3	$f(0.375) = e^{-0.375} - \sin \frac{3\pi}{16} = 0.1317$	$(0.375, 0.5)$
4	$f(0.4375) = e^{-0.4375} - \sin \frac{7\pi}{32} = 0.0113$	$(0.4375, 0.5)$

取  $x_4 = \frac{0.4375 + 0.5}{2} = 0.46875$  作为  $x^*$  的近似值, 其误差限不超过  $\frac{1}{2^5}$ .

## 例 2 用二分法求方程

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

在区间  $[1, 2]$  内的根, 要求其绝对误差不超过  $10^{-2}$ .

**解** 这里  $a=1, b=2$ , 而且  $f(1) = -4 < 0, f(2) = 3 > 0, f'(x) = 3x^2 + 2x - 3 > 0 (x \in [1, 2])$ , 所以方程  $f(x) = 0$  在  $[1, 2]$  上确有且仅有一个根.

精度要求为  $\epsilon = 10^{-2}$ , 即要求  $|x_k - x^*| < \epsilon$ . 由

$$|x_k - x^*| < \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} < \frac{1}{2^k} (b - a)$$

知, 只需  $k$  满足

$$\frac{1}{2^k} (b - a) = \frac{1}{2^k} (2 - 1) < \epsilon.$$

当  $k \geq 7$  时, 上式成立.

取  $[1, 2]$  区间的中点  $x_1 = 1.5$ , 将区间二等分, 求得  $f(1.5) =$

$-1.875 < 0$ , 与  $f(1)$  同号, 得到下一个有根区间  $[1.5, 2]$ ; 再将区间  $[1.5, 2]$  二等分, 如此继续下去. 表 6.2 列出了所得的计算结果.

表 6.2

$k$	$a$	$b$	$x_k$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_k)$
1	1.00000	2.00000	1.50000	-4.00000	3.00000	-1.87500
2	1.50000	2.00000	1.75000	-1.87500	3.00000	0.17188
3	1.50000	1.75000	1.62500	-1.87500	0.17188	-0.94336
4	1.62500	1.75000	1.68750	-0.94336	0.17188	-0.40942
5	1.68750	1.75000	1.71875	-0.40942	0.17188	-0.12479
6	1.71875	1.75000	1.73438	-0.12479	0.17188	0.02203
7	1.71875	1.73400	1.72656	-0.12479	0.02203	-0.05176

其根的近似值为  $x_7 = 1.72656$ .

**例 3** 用二分法求方程  $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$  的最小正根, 精确到  $10^{-3}$ .

**解** 先确定最小正根所在区间. 因为

$$\begin{array}{cccc} x & : & 0 & 1 & 2 & 3 \\ f(x) & : & -5 & -6 & -1 & 16 \end{array}$$

故最小正根  $x^* \in [2, 3]$ . 由

$$|x_k - x^*| < \frac{1}{2^k}(b-a) < 10^{-3},$$

得  $k = 11$ .

用二分法列表计算到  $x_{11}$ , 得

$$x^* \approx x_{11} = 2.095.$$

**例 4** 用二分法确定方程

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

最小正根所在区间  $[a, b]$ , 使之满足

$$K = \frac{M_2}{2m_1} < 1,$$

其中  $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ ,  $m_1 = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$ .

**解** 令  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ , 由于

$$f(0) = 1 > 0, \quad f(1) = -1 < 0.$$

所以最小正根  $x^* \in [0, 1]$ .

又由于

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f''(x) = 6x.$$

故有

$$m_1 = \min_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)| = 0, \quad M_2 = \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| = 6.$$

显然在  $[0, 1]$  上不满足  $K = \frac{M_2}{2m_1} < 1$ .

利用二分法计算

$$x_1 = \frac{1}{2}(0+1) = 0.5,$$

$$f(0.5) = -0.375 < 0.$$

所以  $x^* \in [0, 0.5]$ . 在区间  $[0, 0.5]$  上有

$$m_1 = \min_{0 \leq x \leq 0.5} |f'(x)| = 2.25, \quad M_2 = \max_{0 \leq x \leq 0.5} |f''(x)| = 3.$$

$$K = \frac{M_2}{2m_1} = \frac{3}{4.5} = \frac{2}{3} < 1.$$

所以取最小正根所在区间为  $[0, 0.5]$  满足要求.

**例 5** 设连续函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  内只有一个根, 如果把区间逐次三等分, 能得出什么样的结论? 与区间二分法比较其优劣.

**解** 不妨设  $f(a) < 0, f(b) > 0$ . 如将区间  $[a, b]$  三等分, 则有两个分点:

$$x_1 = \frac{1}{3}(2a+b), \quad x_2 = \frac{1}{3}(a+2b).$$

则必有下列情况之一成立.

(1)  $f(x_1) = 0$  或  $f(x_2) = 0$ , 则有

$$x^* = x_1 \quad \text{或} \quad x^* = x_2.$$

(2)  $f(x_1) > 0, f(x_2) > 0$ , 则有

$$x^* \in [a, b_1] = [a, x_1].$$

(3)  $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$ , 则有

$$x^* \in [a, b_1] = [x_1, x_2].$$

(4)  $f(x_1) < 0, f(x_2) < 0$ , 则有

$$x^* \in [a, b] = [x_2, b].$$

故无论哪种情况都有

$$x^* \in [a, b], b - a = \frac{1}{3}(b - a).$$

由此看出需计算两个分点及其函数值, 相当于两步区间二分法计算量, 所以此法不如区间二分法优越.

**例 6** 用迭代法求方程

$$f(x) = x - e^{-x} = 0$$

在  $[\frac{1}{2}, \ln 2]$  中的根  $\alpha$ , 要求准确到 4 位有效数字.

**解** 将方程  $f(x) = 0$  改写为  $x = g(x) = e^{-x}$ , 因为

$$f(\frac{1}{2}) = -0.1065, \quad f(\ln 2) = 0.1931,$$

$$f'(x) = 1 + e^{-x} > 0,$$

所以方程  $f(x) = 0$  在  $[\frac{1}{2}, \ln 2]$  上必有且只有一个根  $\alpha$ . 又因为

$$|g'(x)| = |-e^{-x}| = e^{-x} \leq e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.6065 = L < 1, x \in [\frac{1}{2}, 2], \text{取 } x_0$$

$= \frac{1}{2}$ , 用迭代公式

$$x_{n+1} = e^{-x_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

计算如下:

$$x_1 = 0.606531, \quad x_2 = 0.545239, \quad x_3 = 0.579703,$$

$$x_4 = 0.560065, \quad x_5 = 0.571172, \quad x_6 = 0.564863,$$

$$x_7 = 0.568348, \quad x_8 = 0.566409, \quad x_9 = 0.567560,$$

$$x_{10} = 0.566907, \quad x_{11} = 0.567277, \quad x_{12} = 0.567067,$$

$$x_{13} = 0.567186, \quad x_{14} = 0.567119, \quad x_{15} = 0.567157.$$

因  $|x_{15} - x_{14}| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$ , 故取  $x_{15} \approx \alpha$ .

**例 7** 用迭代法求方程  $2^x - 4x = 0$  的最小正根, 要求精确到 4 位有效数字.

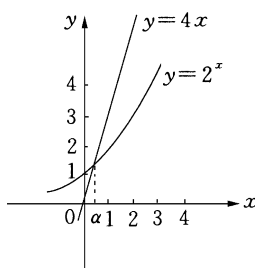


图 6.1

**解** 令  $f(x) = 2^x - 4x$ , 则  $f'(x) = 2^x \ln 2 - 4$ . 画出  $y = 2^x$  及  $y = 4x$  的图形如图 6.1, 其交点的横坐标就为所求正根. 由图可知交点的横坐标约在 0.3 附近. 又由

$$f(0) = 1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} - 2 < 0,$$

可取区间  $(0, 0.5)$  讨论, 并将  $f(x) = 0$  改写为

$$x = \frac{1}{4} 2^x = g(x).$$

则

$$g'(x) = \frac{1}{4} \ln 2 \cdot 2^x,$$

$$|g'(x)| \leq \frac{1}{4} \times \ln 2 \times \sqrt{2} \leq 0.2451 < 1, \quad x \in (0, 0.5).$$

取  $x_0 = 0$ , 由迭代公式

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} 2^{x_n} \quad (n=0, 1, \dots)$$

计算得

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.25, & x_2 &= 0.297301, & x_3 &= 0.307211, \\ x_4 &= 0.309328, & x_5 &= 0.309783, & x_6 &= 0.309880, \\ x_7 &= 0.309901. \end{aligned}$$

因  $|x_7 - x_6| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$ , 故取  $x_7 \approx \alpha$ .

**例 8** 方程  $x^3 - x^2 - 1 = 0$  在  $[1.4, 1.6]$  内有一根, 若将方程写成如下不同的等价形式:

(1)  $x = 1 + \frac{1}{x^2}$ , 对应迭代格式

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n^2}, \quad n=0, 1, \dots.$$

(2)  $x^3 = 1 + x^2$ , 对应迭代格式

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{1+x_n^2}, \quad n=0, 1, \dots.$$

(3)  $x^2 = \frac{1}{x-1}$ , 对应迭代格式

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{x_n}}, \quad n=0, 1, \dots.$$

判断是否满足迭代收敛的条件, 并选择一种最好的迭代格式; 以  $x_0 = 1.5$  为初始近似, 求出方程的根, 并要求准确到 5 位有效数字.

**解** (1) 令  $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ , 则  $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ . 由于

$$|f'(x)| = \frac{2}{x^3} \leq \frac{2}{1.4^3} \approx 0.729 < 1, \quad x \in [1.4, 1.6],$$

因而迭代收敛.

(2) 令  $f(x) = \sqrt[3]{1+x^2}$ , 则  $f'(x) = \frac{2x}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}$ . 由于

$$|f'(x)| \leq \frac{2 \times 1.6}{3 \sqrt[3]{(1+1.4^2)^2}} < 0.51741 < 1, \quad x \in [1.4, 1.6],$$

因而迭代收敛, 且可知第二种迭代比第一种迭代收敛要快.

(3) 令  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x-1}}$ , 则  $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{(x-1)^3}}$ . 由于

$$|f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{(x-1)^3}} > 1, \quad x \in [1.4, 1.6],$$

因而迭代发散.

具体计算时取第二种迭代格式,

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{1+x_n^2}, \quad n=0, 1, \dots.$$

计算结果如下:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1.5, & x_1 &= 1.481248, & x_2 &= 1.4727057, \\ x_3 &= 1.4688173, & x_4 &= 1.4670480, & x_5 &= 1.466243, \\ x_6 &= 1.4658768, & x_7 &= 1.4657102, & x_8 &= 1.4656344, \\ x_9 &= 1.4656000. \end{aligned}$$

因  $|x_9 - x_8| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$ , 故取  $x_9 \approx \alpha$ .

**例 9** 能否用简单迭代法求解下列方程.

$$(1) x = \varphi_1(x) = \frac{1}{4}(\cos x + \sin x);$$

$$(2) x = \varphi_2(x) = 4 - 2^x.$$

若不能, 试将原方程改成能用迭代法求解的形式.

**解** (1) 因  $\varphi'_1(x) = \frac{1}{4}(-\sin x + \cos x)$ ,

$$\begin{aligned} |\varphi'_1(x)| &= \frac{1}{4} |-\sin x + \cos x| \leq \frac{1}{4} (|\sin x| + |\cos x|) \\ &< \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2} < 1, \quad \forall x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

故格式  $x_{n+1} = \varphi_1(x_n)$  收敛, 可以利用此格式求根.

(2) 方程在  $(1, 2)$  之间有一根, 这是因为  $x = 4 - 2^x$  可变形为  $f(x) = x + 2^x - 4 = 0$ ,  $f(1) = 1 + 2 - 4 = -1 < 0$ ,  $f(2) = 2 + 4 - 4 = 2 > 0$ , 且  $f(x) \in C[1, 2]$ . 可是

$$|\varphi'_2(x)| = |-2^x \ln 2| > 1, \quad x \in (1, 2).$$

说明方程不能用迭代格式

$$x_{n+1} = 4 - 2^{x_n}$$

求解.

若将原方程写成  $2^x = 4 - x$ ,

$$x = \frac{1}{\ln 2} \ln(4 - x) = \varphi_3(x),$$

而 
$$\varphi'_3(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{-1}{4 - x},$$

且 
$$|\varphi'_3(x)| = \left| \frac{1}{\ln 2} \right| \left| \frac{1}{4 - x} \right| < 1, \quad x \in (1, 2).$$

故迭代格式  $x_{n+1} = \varphi_3(x_n)$  收敛.

**例 10** 已知  $x = \varphi(x)$  的  $\varphi'(x)$  满足  $|\varphi'(x) - 3| < 1$ , 试问如何利用  $\varphi(x)$  构造一个收敛的简单迭代函数  $\psi(x)$ , 使  $x_{k+1} = \psi(x_k)$ ,

$k=0, 1, \dots$  收敛?

解 由  $x = \varphi(x)$ , 可得

$$x - 3x = \varphi(x) - 3x,$$

即 
$$x = -\frac{1}{2}(\varphi(x) - 3x) = \psi(x).$$

因  $\psi'(x) = -\frac{1}{2}(\varphi'(x) - 3)$ , 故

$$|\psi'(x)| = \frac{1}{2}|\varphi'(x) - 3| < \frac{1}{2} < 1.$$

故  $x_{k+1} = \psi(x_k) = -\frac{1}{2}[\varphi(x_k) - 3x_k]$ ,  $k=0, 1, \dots$  收敛.

例 11 用迭代法的思想, 给出求  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$  的迭代格式, 并证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = 2$ .

解 记  $I_0 = \sqrt{2}$ ,  $I_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \dots$ , 则有

$$I_n = \sqrt{2 + I_{n-1}}, \quad n=1, 2, \dots.$$

因上述迭代格式之迭代函数为  $\varphi(x) = \sqrt{2+x}$ , 则

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}(2+x)^{-\frac{1}{2}}.$$

故对于任意的  $x > 0$ , 均有

$$|\varphi'(x)| = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2+x}} < 1,$$

迭代是收敛的.

不妨设  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I$ , 则有

$$I = \sqrt{2+I}, \text{ 即 } I^2 = 2+I.$$

解之得  $I=2$  及  $I=-1$ , 负根不合题意舍去, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 2,$$

即 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = 2.$$

**例 12** 为用迭代法求方程  $f(x)=0$  的根  $\alpha$ , 若将方程改写成  $x=x+Cf(x)=g(x)$ , 其中  $C$  为待定的非零常数. 设  $f'(x)$  连续且  $f'(\alpha)\neq 0$ , 试确定  $C$ , 使序列  $x_{k+1}=g(x_k)$  收敛于  $\alpha$ , 且尽可能收敛得快.

**解** 由于  $f'(x)$  连续且  $f'(\alpha)\neq 0$ , 可设在  $\alpha$  附近  $|f'(x)|\geq m>0$ . 故由迭代收敛定理, 应有

$$|g'(x)|=|1+Cf'(x)|<1.$$

解之得

$$-2<Cf'(x)<0,$$

即  $C$  与  $f'(x)$  异号, 且

$$|Cf'(x)|<2,$$

即

$$|C|<\frac{2}{|f'(x)|}\leq\frac{2}{m}.$$

满足此不等式的  $C$  定能使序列  $x_{k+1}=g(x_k)$  收敛于  $\alpha$ . 要尽可能收敛得快, 应使

$$|g'(x)|=|1+Cf'(x)|\approx 0.$$

即  $C\approx -\frac{1}{f'(x)}$ . 当初值  $x_0$  与  $\alpha$  较接近时, 可取  $C=-\frac{1}{f'(x_0)}$ , 得迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \quad k=0, 1, \dots$$

**例 13** 用迭代法  $x_{k+1}=\varphi(x_k)$  求函数  $f(x)$  的单重零点  $x^*$ , 其中

$$\varphi(x)=x-\gamma_1(x)f(x)-\gamma_2(x)f^2(x).$$

确定未知函数  $\gamma_1(x)$ 、 $\gamma_2(x)$ , 使这个迭代法至少是三阶局部收敛的.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \varphi'(x) &= 1-\gamma_1'(x)f(x)-\gamma_1(x)f'(x)-\gamma_2'(x)f^2(x) \\ &\quad -2\gamma_2(x)f(x)f'(x). \end{aligned}$$

由  $\varphi'(x^*)=0$  和  $f(x^*)=0, f'(x^*)\neq 0$ , 得

$$1-\gamma_1(x^*)f'(x^*)=0.$$

故取

$$\gamma_1(x) = \frac{1}{f'(x)}.$$

这时,

$$\varphi'(x) = -\gamma_1'(x)f(x) - \gamma_2'(x)f^2(x) - 2\gamma_2(x)f(x)f'(x),$$

$$\begin{aligned}\varphi''(x) = & -\gamma_1''(x)f(x) - \gamma_1'(x)f'(x) - \gamma_2''(x)f^2(x) \\ & - 4\gamma_2'(x)f(x)f'(x) - 2\gamma_2(x)[f'(x)]^2 \\ & - 2\gamma_2(x)f(x)f''(x).\end{aligned}$$

其中, 
$$\gamma_1'(x) = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

从而由  $\varphi''(x^*)=0$  和  $f(x^*)=0, f'(x^*)\neq 0$ , 得

$$\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} - 2\gamma_2(x^*)[f'(x^*)]^2 = 0.$$

故取

$$\gamma_2(x) = \frac{f''(x)}{2[f'(x)]^3}.$$

这样的  $\gamma_1(x), \gamma_2(x)$  保证这个迭代格式至少是三阶局部收敛的.

**例 14** 已知  $x=\varphi(x)$  在区间  $[a, b]$  内只有一个根, 且当  $a < x < b$  时,  $|\varphi'(x)| \geq k > 1$ . 试问如何将  $x=\varphi(x)$  化为收敛的迭代格式.

**解** 因为  $(\varphi^{-1}(x))' = \frac{1}{\varphi'(x)}$ , 故当  $|\varphi'(x)| \geq k > 1$  时,

$$|(\varphi^{-1}(x))'| = \left| \frac{1}{\varphi'(x)} \right| < 1.$$

将  $x=\varphi(x)$  改写为  $x=\varphi^{-1}(x)$ , 用它构造迭代格式

$$x_{k+1} = \varphi^{-1}(x_k), \quad k=0, 1, \dots.$$

则迭代法是收敛的.

注: 因此处  $|\varphi'(x^*)| \neq 1$ , 由定理 6.4 知, 此题用 Aitken 算法或 Steffensen 迭代法可改善其收敛性.

**例 15** 用简单迭代法求函数  $f(x) = x - \ln x - 2$  在区间  $(2, +\infty)$  内的零点, 并用 Aitken 法加速.

解 将  $f(x)=0$  化为等价的方程

$$x=2+\ln x,$$

由于  $\varphi(x)=2+\ln x$  的导数  $\varphi'(x)=\frac{1}{x}$  在  $[2, +\infty)$  上满足  $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2} < 1$ , 故迭代法

$$x_{k+1}=2+\ln x_k, \quad k=0, 1, \dots$$

是局部收敛的.

用 Aitken 法加速收敛的计算公式是

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1}=2+\ln(x_k), \\ \bar{x}_{k+1}=2+\ln(\tilde{x}_{k+1}), \\ x_{k+1}=\bar{x}_{k+1}-\frac{(\bar{x}_{k+1}-\tilde{x}_{k+1})^2}{\bar{x}_{k+1}-2\tilde{x}_{k+1}+x_k}. \end{cases}$$

若取  $x_0=3$ , 其计算结果如表 6.3 所示.

表 6.3

$k$	简单迭代法	带 Aitken 法加速收敛的迭代法		
	$x_k$	$x_k$	$\tilde{x}_{k+1}$	$\bar{x}_{k+1}$
0	3	3	3.098612289	3.130954363
1	3.098612289	3.146738373	3.146366479	3.146248288
2	3.130954363	3.146193227	3.146193223	3.146293221
3	3.141337866	3.146193227		
4	3.144648781			
5	3.145702209			
6	3.146037143			

比较表中的结果看出, 用 Aitken 法加速,  $x_3=3.146193227$  已是相当精确的近似解了, 而不用加速法,  $x_6=3.146037143$  只有四位有效数字.

**例 16** 求方程  $x=1.6+0.98\cos x$  的根.

解 在这里  $\varphi(x)=1.6+0.98\cos x$ ,

$$|\varphi'(x)|=|0.98\sin x|<1.$$

由方程可看出根  $x^*$  略大于  $\frac{\pi}{2}$ , 在  $x^*$  附近  $|\varphi'(x)|$  很接近 1, 所以用简单迭代公式

$$x_{k+1} = 1.6 + 0.98 \cos x_k, \quad k=0, 1, \dots$$

计算, 收敛一定很慢. 用 Aitken 公式

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = 1.6 + 0.98 \cos x_k, \\ \bar{x}_{k+1} = 1.6 + 0.98 \cos \tilde{x}_{k+1}, \\ x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} - \frac{(\bar{x}_{k+1} - \tilde{x}_{k+1})^2}{\bar{x}_{k+1} - 2\tilde{x}_{k+1} + x_k}, \end{cases} \quad k=0, 1, \dots$$

计算结果见表 6.4.

表 6.4

$k$	$x_k$	$k$	$x_k$
0	1.6	2	1.585547
1	1.585547	3	1.585547

用简单迭代公式计算时, 迭代到 388 次还得不出上述结果(继续迭代下去最末二位数字出现摆动).

**例 17** 求方程  $x = x^3 - 1$  在  $[1, 1.5]$  内的根.

**解** 取  $\varphi(x) = x^3 - 1$ .  $|\varphi'(x)| = |3x^2| > 1, x \in [1, 1.5]$ , 故知迭代

$$x_{k+1} = x_k^3 - 1 \quad (k=0, 1, \dots)$$

不收敛. 对初值  $x_0 = 1.25$ , 用 Aitken 公式

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = x_k^3 - 1, \\ \bar{x}_{k+1} = \tilde{x}_{k+1}^3 - 1, \quad k=0, 1, \dots \\ x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} - \frac{(\bar{x}_{k+1} - \tilde{x}_{k+1})^2}{\bar{x}_{k+1} - 2\tilde{x}_{k+1} + x_k}, \end{cases}$$

计算, 结果是收敛的. 计算结果如表 6.5.

表 6.5

$k$	$x_k$	$k$	$x_k$
0	1.25	3	1.324884
1	1.361508	4	1.324718
2	1.330592	5	1.324718

**例 18** 设  $x^*$  是  $\varphi$  的不动点, 若  $\varphi'(x^*) = A \neq 1$ , 且  $A \neq 0$ , 这时, 若不动点迭代法  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  收敛, 只能是一阶收敛. 试证明 Steffensen 迭代法却可以是二阶收敛的.

**证** 不失一般性, 只验证  $x^* = 0$  的情形, 并设  $\varphi$  有二阶连续导数. 由 Taylor 公式, 对充分接近  $x^*$  的  $x$  有

$$\varphi(x) = \varphi(x^*) + A(x - x^*) + \frac{\varphi''(\xi)}{2}(x - x^*)^2, \xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } x^* \text{ 之间}.$$

取  $x^* = 0$ , 即有

$$\varphi(x) = Ax + O(x^2),$$

$$\varphi(\varphi(x)) = A(Ax + O(x^2)) + O((Ax + O(x^2))^2) = A^2x + O(x^2),$$

$$[\varphi(x)]^2 = [Ax + O(x^2)]^2 = A^2x^2 + O(x^3).$$

$$\text{设 } \psi(x) = \frac{x\varphi(\varphi(x)) - \varphi^2(x)}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x} = x - \frac{[\varphi(x) - x]^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x}$$

为 Steffensen 迭代法的迭代函数, 又  $A \neq 1$ , 故有

$$\psi(x) = \frac{x[A^2x + O(x^2)] - A^2x^2 + O(x^3)}{A^2x + O(x^2) - 2Ax + O(x^2) + x} = O(x^2).$$

回到一般的  $x^*$ , 对于  $x_{n+1} = \psi(x_n)$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\psi(x_n) - x^*] / (x_n - x^*)^2 = C.$$

即 Steffensen 迭代法具有二阶收敛性.

注: 1) 从这里可以看到, Steffensen 迭代法是二阶收敛的方法, 条件只要  $\varphi'(x^*) \neq 1$ . 我们知道  $0 < |\varphi'(x^*)| < 1$  时, 不动点迭代(或简单迭代)  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  是线性收敛的, 而当  $|\varphi'(x^*)| > 1$  时是不收敛的. 在这两种情况下,  $\varphi'(x^*) \neq 1$ , 故  $x_{n+1} = \psi(x_n)$  都有二阶收敛性, 所以迭代函数由  $\varphi$  改为  $\psi$ , 不但能改进收敛速度, 有时也能把不收敛的迭代改进为收敛的二阶方法.

2) 所谓 Aitken 加速算法是对任意线性收敛序列  $\{x_n\}$  而言, 这里没有规定  $\{x_n\}$  怎样产生. 而在 Steffensen 迭代法中, 规定  $\{x_n\}$  是由不动点迭代(简单迭代)产生的. 若  $\{x_n\}$  是由不动点迭代产生的, 则 Aitken 算法与 Steffensen 算法是一致的, 则 15 题、16 题、17 题

中的 Aitken 算法均可称为 Steffensen 算法.

**例 19** 设  $f(x)=(x^3-a)^2$ .

(1) 写出解  $f(x)=0$  的 Newton 迭代格式;

(2) 证明此迭代格式是线性收敛的.

**解** 因  $f(x)=(x^3-a)^2$ , 故  $f'(x)=6x^2(x^3-a)$ . 由 Newton 迭代公式:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0, 1, \dots$$

得

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n^3 - a)^2}{6x_n^2(x_n^3 - a)} = \frac{5x_n}{6} + \frac{a}{6x_n^2}, \quad n=0, 1, \dots$$

下证此格式是线性收敛的.

因迭代函数  $\varphi(x) = \frac{5}{6}x + \frac{a}{6x^2}$ , 而  $\varphi'(x) = \frac{5}{6} - \frac{a}{3}x^{-3}$ , 又  $x^* = \sqrt[3]{a}$ , 则

$$\varphi'(\sqrt[3]{a}) = \frac{5}{6} - \frac{a}{3}(\sqrt[3]{a})^{-3} = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

故此迭代格式是线性收敛的.

**例 20** 试导出计算  $1/\sqrt{a}$  ( $a>0$ ) 的 Newton 迭代格式, 使公式中既无开方, 又无除法运算.

**解** 由于要求程序中不含开方, 又无除法运算, 故将计算  $1/\sqrt{a}$  ( $a>0$ ) 等价化为求

$$a - \frac{1}{x^2} = 0$$

的正根. 而此时有

$$f(x) = a - \frac{1}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{2}{x^3},$$

故计算  $1/\sqrt{a}$  的 Newton 迭代公式为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{a - \frac{1}{x_n^2}}{\frac{2}{x_n^3}} = \frac{3}{2}x_n - \frac{a}{2}x_n^3 = \left( \frac{3}{2} - \frac{a}{2}x_n^2 \right) x_n.$$

**例 21** 应用 Newton 法于方程  $f(x) = x^n - a = 0$  和  $f(x) = 1 - \frac{a}{x^n} = 0$ , 分别导出求  $\sqrt[n]{a}$  的迭代格式, 并分别求  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a} - x_{k+1}) / (\sqrt[n]{a} - x_k)^2$ .

**解** 当  $f(x) = x^n - a$  时, 因  $f'(x) = nx^{n-1}$ , 故 Newton 迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n - a}{nx_k^{n-1}} = \frac{n-1}{n}x_k + \frac{a}{nx_k^{n-1}}, \quad k=0, 1, \dots$$

当  $f(x) = 1 - \frac{a}{x^n}$  时, 因  $f'(x) = \frac{an}{x^{n+1}}$ , 故 Newton 迭代公式为

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{1 - \frac{a}{x_k^n}}{\frac{an}{x_k^{n+1}}} = x_k - \frac{x_k^{n+1}}{an} + \frac{x_k}{n} \\ &= \frac{1}{n} \left[ (n+1)x_k - \frac{x_k^{n+1}}{a} \right], \quad k=0, 1, \dots \end{aligned}$$

对  $f(x) = x^n - a = 0$

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a} - x_{k+1}) / (\sqrt[n]{a} - x_k)^2 \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a} - \frac{1}{n}[(n-1)x_k + ax_k^{1-n}]}{(\sqrt[n]{a} - x_k)^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n}[(n-1) + a(1-n)x_k^{-n}]}{(-1)2(\sqrt[n]{a} - x_k)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-n}{n} \cdot a(-n)x_k^{-(n+1)}}{-2} \\ &= \frac{1-n}{2} a \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^{n+1}} = \frac{1-n}{2\sqrt[n]{a}}. \end{aligned}$$

对  $f(x) = 1 - \frac{a}{x^n} = 0$ , 同样可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a} - x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a} - x_k)^2} = \frac{n+1}{2^n \sqrt[n]{a}}.$$

**例 22** 对于方程的单根  $\alpha$ , 已知 Newton 法具有下述的收敛速度:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)},$$

其中  $f'(\alpha) \neq 0$ ,  $f(\alpha) = 0$ , 且  $x_n \rightarrow \alpha$ . 证明:  $R_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{(x_{n-1} - x_{n-2})^2}$  也收敛于  $-\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$  (当  $n \rightarrow \infty$  时).

$$\begin{aligned} \text{证} \quad R_n &= \frac{(\alpha - x_{n-1}) - (\alpha - x_n)}{[(\alpha - x_{n-1}) - (\alpha - x_{n-2})]^2} \\ &= \frac{\frac{\alpha - x_{n-1}}{(\alpha - x_{n-2})^2} - \frac{\alpha - x_n}{(\alpha - x_{n-2})^2}}{\left[ \frac{\alpha - x_{n-1}}{\alpha - x_{n-2}} - 1 \right]^2}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

由于  $x_n \rightarrow \alpha$  和  $\frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} \rightarrow -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \neq +\infty$ , 故

$$\frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

则(6.18)式分子的

$$\frac{\alpha - x_{n-1}}{(\alpha - x_{n-2})^2} \rightarrow -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\frac{\alpha - x_n}{(\alpha - x_{n-2})^2} = \frac{\alpha - x_n}{\alpha - x_{n-1}} \cdot \frac{\alpha - x_{n-1}}{(\alpha - x_{n-2})^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

分母括号内

$$\frac{\alpha - x_{n-1}}{\alpha - x_{n-2}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{(x_{n-1} - x_{n-2})^2} = 0.$$

**例 23** 证明:对于  $f(x)=0$  的多重根  $x^*$ , Newton 迭代法仅为线性收敛.

**证** 设  $x^*$  为  $f(x)=0$  的  $q$  重根,  $q \geq 2$ , 此时  $f(x)$  可写为

$$f(x) = (x - x^*)^q g(x),$$

$g(x^*) \neq 0$  (若  $f(x)$  不是多项式, 可理解为解析函数, 上式仍然成立).

$$\begin{aligned} x - \frac{f(x)}{f'(x)} &= x - x^* - \frac{f(x)}{f'(x)} + x^* \\ &= x - x^* - \frac{(x - x^*)^q g(x)}{q(x - x^*)^{q-1} g(x) + (x - x^*)^q g'(x)} + x^* \\ &= x - x^* - \frac{(x - x^*) g(x)}{q g(x) + (x - x^*) g'(x)} + x^* \\ &= \frac{(q-1)(x - x^*) g(x) + (x - x^*)^2 g'(x)}{q g(x) + (x - x^*) g'(x)} + x^*. \end{aligned}$$

由 Newton 迭代公式  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ , 上式可写为

$$x_{n+1} - x^* = \frac{(q-1)(x_n - x^*) g(x_n) + (x_n - x^*)^2 g'(x_n)}{q g(x_n) + (x_n - x^*) g'(x_n)},$$

则 
$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \frac{(q-1) g(x_n) + (x_n - x^*) g'(x_n)}{q g(x_n) + (x_n - x^*) g'(x_n)},$$

故 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = 1 - \frac{1}{q} \quad (q \geq 2).$$

因  $0 < 1 - \frac{1}{q} < 1$ , 故此时 Newton 迭代法是线性收敛的.

**例 24** 设  $x^*$  是  $f(x)=0$  的  $q$  重根, 即  $f(x) = (x - x^*)^q g(x)$ ,  $g(x^*) \neq 0$  ( $q \geq 1$ ),  $g(x)$  在  $x^*$  处解析. 证明: 迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - q \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

在根  $x^*$  附近具有二阶的收敛速度.

**证** 设  $\varphi(x) = x - q \frac{f(x)}{f'(x)}$ , 则

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= x - \frac{q(x-x^*)g(x)}{(x-x^*)g'(x)+qg(x)} \\
&= x - (x-x^*) \frac{qg(x)}{(x-x^*)g'(x)+qg(x)}. \\
\varphi'(x) &= 1 - \frac{qg(x)}{(x-x^*)g'(x)+qg(x)} - (x-x^*) \\
&\quad \cdot \frac{d}{dx} \left[ \frac{qg(x)}{(x-x^*)g'(x)+qg(x)} \right].
\end{aligned}$$

由此易知

$$\begin{aligned}
\varphi'(x^*) &= 1 - \frac{qg(x^*)}{(x^*-x^*)g'(x^*)+qg(x^*)} - (x^*-x^*) \\
&\quad \cdot \frac{d}{dx} \left[ \frac{qg(x)}{(x-x^*)g'(x)+qg(x)} \right] \Big|_{x=x^*} = 0,
\end{aligned}$$

故迭代格式是收敛的. 又

$$\begin{aligned}
x^* - x_{n+1} &= \varphi(x^*) - \varphi(x_n) \\
&= \varphi(x^*) - \left[ \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)(x_n - x^*) + \frac{\varphi''(\xi)}{2}(x - x^*)^2 \right], \\
&\quad \xi \text{ 介于 } x_n \text{ 与 } x^* \text{ 之间.}
\end{aligned}$$

故 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^* - x_{n+1}}{(x^* - x_{n+1})^2} = -\frac{1}{2} \varphi''(x^*).$$

因  $\varphi''(x^*)$  是有界量, 则迭代公式在根  $x^*$  附近具有二阶收敛速度.

注: 因  $(x-x^*)g'(x)+qg(x)|_{x=x^*}=qg(x^*) \neq 0$ , 故对  $\varphi(x)$  的任何阶导数在  $x=x^*$  处, 分母都不为零.

**例 25** 从 Newton 迭代公式  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  及误差比的

近似公式  $\frac{e_{n+1}}{e_n} \approx \frac{f''(x_n)f(x_n)}{2[f'(x_n)]^2}$  导出改进的 Newton 迭代格式:

$$\bar{x}_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - \frac{1}{2}f''(x_n)f(x_n)},$$

其中  $e_n = x_n - x^*$ ,  $x^*$  是方程  $f(x)=0$  的根的准确值.

解 由  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  及  $e_{n+1} - e_n = x_{n+1} - x_n$ , 有

$$e_{n+1} - e_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

因  $e_{n+1} \approx e_n \frac{f''(x_n)f(x_n)}{2[f'(x_n)]^2}$  代入上式得

$$e_n \left[ \frac{f''(x_n)f(x_n)}{2[f'(x_n)]^2} - 1 \right] = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

所以

$$e_n = x_n - x^* = -\frac{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}{\frac{f''(x_n)f(x_n)}{2[f'(x_n)]^2} - 1} = \frac{-f(x_n)f'(x_n)}{\frac{1}{2}f''(x_n)f(x_n) - [f'(x_n)]^2},$$

则有

$$\bar{x}_{n+1} = x^* = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - \frac{1}{2}f''(x_n)f(x_n)}, \quad n=0, 1, \dots.$$

**例 26** 试给出简化 Newton 迭代格式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n=0, 1, \dots \quad (6.19)$$

收敛的一个充分条件, 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  内有单根  $x^*$ ; 并证明

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|f'(x_0)|}{m} |x_{n+1} - x_n|,$$

其中  $m = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$ .

解 令  $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$ , 由迭代法收敛定理知,  $|\varphi'(x)| \leq$

$L < 1$  (在  $x^*$  的某邻域内), 即

$$\left| 1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)} \right| \leq L$$

是 (6.19) 式收敛的一个充分条件. 解之, 得

$$0 < 1 - L \leq \frac{f'(x)}{f'(x_0)} \leq 1 + L,$$

$$\frac{1}{L+1} \leq \frac{|f'(x_0)|}{|f'(x)|} \leq \frac{1}{1-L},$$

$$\frac{|f'(x)|}{1+L} \leq |f'(x_0)| \leq \frac{|f'(x)|}{1-L}.$$

因而,只要对给定的  $x$ , 若存在  $0 < L < 1$ , 使得对任何  $x \in [a, b]$ , 都能使上式成立, 则(6.19)式便收敛.

又由  $f(x^*) = 0, f'(x^*) \neq 0$ , 有

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} = x_n - \frac{f(x_n) - f(x^*)}{f'(x_0)} \\ &= x_n - \frac{f'(\xi)(x_n - x^*)}{f'(x_0)}, \end{aligned}$$

其中  $\xi$  在  $x_n$  与  $x^*$  之间. 则

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= -\frac{f'(\xi)(x_n - x^*)}{f'(x_0)}, \\ x_n - x^* &= -\frac{f'(x_0)}{f'(\xi)}(x_{n+1} - x_n). \end{aligned}$$

两边取绝对值, 再利用  $|f'(\xi)| \geq m$ , 即可得

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|f'(x_0)|}{m} |x_{n+1} - x_n|,$$

其中  $m = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$ .

**例 27** 已给方程  $f(x) = 0$ .

(1) 导出下列的迭代求根程序

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f'(x_n)f(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f''(x_n)f(x_n)}; \quad (6.20)$$

(2) 证明: 对  $f(x)$  的单根, (6.20) 式具有三阶的收敛速度;

(3) 讨论在  $f(x)$  的重根附近 (6.20) 式的敛速.

**解** (1) 设  $x^*$  是  $f(x)$  的单根, 则  $f'(x^*) \neq 0$ . 不妨设在  $x^*$  的邻域内  $f(x)$  的各阶导数有界, 利用 Taylor 展开式, 有

$$\begin{aligned} 0 = f(x^*) &= f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x^* - x_n)^2 \\ &\quad + O(x^* - x_n)^3. \end{aligned}$$

将上式两端乘以  $f'(x_n)$  整理得

$$0 = f(x_n)f'(x_n) + [f'(x_n)]^2(x^* - x_n) + \frac{f'(x_n)f''(x_n)}{2}(x^* - x_n)^2 + O(x^* - x_n)^3. \quad (6.21)$$

而

$$\begin{aligned} \frac{f'(x_n)f''(x_n)}{2}(x^* - x_n)^2 &= f'(x_n)(x^* - x_n)\frac{f''(x_n)}{2}(x^* - x_n) \\ &= [-f(x_n) + O(x^* - x_n)^2]\frac{f''(x_n)}{2}(x^* - x_n) \\ &= -\frac{f(x_n)f''(x_n)}{2}(x^* - x_n) + O(x^* - x_n)^3. \end{aligned}$$

将上式代入(6.21)式,整理得

$$(x^* - x_n) = \frac{-f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2}} + O(x^* - x_n)^3. \quad (6.22)$$

略去高阶无穷小量,记  $x^*$  为  $x_{n+1}$ ,得

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f'(x_n)f(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}.$$

(2) 讨论收敛速度

$$\frac{x^* - x_{n+1}}{(x^* - x_n)^3} = \frac{x^* - x_n + \frac{2f'(x_n)f(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}}{(x^* - x_n)^3}.$$

由(6.22)式知

$$\frac{x^* - x_{n+1}}{(x^* - x_n)^3} = \frac{O(x^* - x_n)^3}{(x^* - x_n)^3} = O(1) = \text{常数}.$$

因此,在单根附近,(6.20)式具有三阶收敛速度.

(3) 当  $x^*$  是  $f(x)$  的重根时,(6.20)式的收敛速度是线性的,这里仅就二重根证明之,其余类似.为此,利用  $f(x^*) = f'(x^*) = 0$ ,将  $f(x_n)$ 、 $f'(x_n)$ 、 $f''(x_n)$  分别在  $x^*$  作 Taylor 展开,得

$$f(x_n) = \frac{f''(x^*)}{2}(x^* - x_n)^2 + O(x^* - x_n)^3$$

$$f'(x_n) = -f''(x^*)(x^* - x_n) + O(x^* - x_n)^2$$

$$f''(x_n) = f''(x^*) + O(x^* - x_n).$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{x^* - x_{n+1}}{x^* - x_n} &= \frac{x^* - x_n + \frac{2f'(x_n)f(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}}{x^* - x_n} \\ &= 1 + \frac{-[f''(x^*)]^2(x^* - x_n)^3}{\{2[f''(x^*)]^2(x^* - x_n)^2 - \frac{1}{2}[f''(x^*)]^2(x^* - x_n)^2\}(x^* - x_n)} \\ &= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

可知,在重根附近,(6.20)式的敛速是线性的.

#### 四、习题

1. 证明  $1 - x - \sin x = 0$  在  $[0, 1]$  内有一个根, 使用二分法求误差不大于  $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$  的根要迭代多少次?

2. 用二分法求  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  在  $[1, 2]$  内的一个实根, 且要求满足精度  $|x^* - x_k| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$ .

3. 比较以下两方法求  $e^x + 10x - 2 = 0$  的根到三位小数所需的计算量.

(1) 在区间  $[0, 1]$  内用二分法;

(2) 用迭代法  $x_{k+1} = (2 - e^{x_k})/10$ , 取初值  $x_0 = 0$ .

4. 当  $R$  取适当值时, 曲线  $y = x^2$  与  $y^2 + (x - 8)^2 = R^2$  相切, 试用迭代法求切点横坐标的近似值, 要求不少于 4 位有效数字, 也不求  $R$ .

5. 求解方程  $x = e^{-x}$  的根, 要求取  $x_0 = 0.5$ , 分别用简单迭代法、迭代法的加速方法

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \varphi(x_k), \\ x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} - \frac{L}{1-L}(\bar{x}_{k+1} - x_k), \end{cases}$$

及 Aitken 方法求解, 要求误差应满足  $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-5}$ .

6. 对  $\varphi(x) = x + x^3$ ,  $x=0$  为  $\varphi$  的一个不动点, 验证  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  迭代对  $x_0 \neq 0$  不收敛, 但改用 Steffensen 方法却是收敛的.

7. 用 Newton 法求解 Leonardo 方程

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0,$$

要求  $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$ .

8. 用 Newton 法求下列方程的根, 计算准确到 4 位有效数字.

(1)  $f(x) = x^3 - 3x - 1 = 0$  在  $x_0 = 2$  附近的根.

(2)  $f(x) = x^2 - 3x - e^x + 2 = 0$  在  $x_0 = 1$  附近的根.

9. 应用 Newton 法于方程  $x^3 - a = 0$ , 求立方根  $\sqrt[3]{a}$  的迭代公式, 并讨论其收敛性.

10. 方程  $x^3 - 2x^2 + x = 0$  有二重根  $x^* = 1$ , 取  $x_0 = 2$ , 用 Newton 法和处理重根的 Newton 法修正形式:  $x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  分别求解三步, 比较结果, 其中  $m$  为根的重数.

11. 用 (6.11), (6.14) 及 (6.15) 三种不同迭代法求方程  $f(x) = (\sin x - \frac{x}{2})^2 = 0$  的一个近似根, 准确到  $10^{-5}$ , 初始值  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ , 并比较结果优劣.

12. 试就下列函数讨论 Newton 法的收敛性和收敛速度.

$$(1) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ -\sqrt{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2}, & x \geq 0, \\ -\sqrt[3]{x^2}, & x < 0. \end{cases}$$

13. 应用 Newton 法于方程  $f(x) = 1 - \frac{a}{x} = 0$ , 导出求  $\sqrt{a}$  的迭

代公式,并用此公式求  $\sqrt{115}$  的值.

14. 证明迭代公式

$$x_{k+1} = \frac{x_k(x_k^2 + 3a)}{3x_k^2 + a}$$

是计算  $\sqrt[3]{a}$  的三阶方法;假定初值  $x_0$  充分靠近根  $x^*$ , 求

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{a} - x_{k+1}}{(\sqrt[3]{a} - x_k)^3}.$$

15. 研究求  $\sqrt[3]{a}$  的 Newton 公式

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left[ x_k + \frac{a}{x_k^2} \right], \quad x_0 > 0, k=0, 1, 2, \dots.$$

证明对一切  $k=1, 2, \dots, x_k \geq \sqrt[3]{a}$ , 且序列  $\{x_k\}$  是单调减的, 从而迭代过程收敛.

16. 考虑下述修正的 Newton 公式(Steffenson 方法)

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/D_n, \\ D_n = \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}, \quad n \geq 0.$$

假定  $f'(x^*) \neq 0$ , 证明它对单根是一个二阶方法.

17. 设在区间  $[a, b]$  上函数  $y=f(x)$  可逆, 即存在足够光滑的函数  $Q(y)$ , 使  $x=Q(y)$ . 再设  $x^* \in [a, b]$  为  $f(x)=0$  的根, 试把  $x^* = Q(0) = Q(y-y)$  用 Taylor 公式展开, 从而导出下列公式:

$$(1) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

$$(2) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)f^2(x_n)}{2[f'(x_n)]^3} \text{ (Chebyshev 公式)}.$$

18. 设有解方程  $12-3x+2\cos x=0$  的迭代法

$$x_{n+1} = 4 + \frac{2}{3} \cos x_n.$$

(1) 证明  $\forall x_0 \in \mathbf{R}$ , 均有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$  ( $x^*$  为方程的根).

(2) 取  $x_0 = 4$ , 用此迭代法求方程根的近似值, 误差不超过

$10^{-3}$ .

(3) 此迭代法的收敛阶是多少? 证明你的结论.

19. 用 Newton 下山法求方程  $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$  的根, 取  $x_0 = 0.6$ , 计算精确到  $10^{-5}$ .

20. 试确定常数  $p, q, r$ , 使迭代公式

$$x_{k+1} = px_k + q \frac{a}{x_k^2} + r \frac{a^2}{x_k^5}$$

产生的序列  $\{x_k\}$  收敛到  $\sqrt[3]{a}$ , 并使其收敛阶尽可能高.

21. 用弦截法求  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$  的根, 要求  $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$ .

22. 填空题

(1) 迭代过程  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  收敛的充分条件是  $|\varphi'(x)|$  \_\_\_\_ 1.

(2)  $\varphi(x) = x + \alpha(x^2 - 5)$ , 要使迭代法  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  局部收敛到  $x^* = \sqrt{5}$ , 则  $\alpha$  取值范围是 \_\_\_\_.

(3) 用迭代法  $x_{k+1} = x_k - \lambda(x_k) f(x_k)$  求方程  $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1 = 0$  的根, 使迭代序列  $\{x_k\}$  具有平方收敛, 则  $\lambda(x_k) =$  \_\_\_\_.

(4) 迭代法  $x_{k+1} = \frac{2}{3}x_k + \frac{1}{x_k^2}$  收敛于  $x^* = \sqrt[3]{3}$ , 此迭代序列是 \_\_\_\_ 阶收敛的.

## 五、习题解答

1. 解 设  $f(x) = 1 - x - \sin x$ . 因  $f(0) = 1 > 0$ ,  $f(1) = -\sin 1 < 0$ , 以及  $f'(x) = -1 - \cos x < 0$  ( $x \in [0, 1]$ ), 故  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上单减, 因此  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上仅有一个根.

二分法的误差限为

$$|x_k - x^*| \leq \frac{1}{2^{k+1}}(b-a) = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

依题意应有

$$\frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4},$$

$$2^k \geq 10^4,$$

解得  $k \geq 4 \ln 10 / \ln 2 = 13.2877$ . 所以需迭代 14 次即可.

2. 解  $f(1) = -5, f(2) = 14$ , 且在  $[1, 2]$  上  $f'(x) = 3x^2 + 8x > 0$ , 所以  $f(x) = 0$  在  $[1, 2]$  内有唯一实根. 用二分法计算列表如表 6.6.

表 6.6

$k$	$a_k$	$b_k$	$x_k$	$f(x_k)$
1	1.0	2.0	1.5	2.375
2	1.0	1.5	1.25	-1.79687
3	1.25	1.5	1.375	0.1621
4	1.25	1.375	1.3125	-0.84839
5	1.3125	1.375	1.34375	-0.35098
6	1.34375	1.375	1.359375	-0.09641
7	1.359375	1.375	1.3671875	0.03236
8	1.359375	1.3671875	1.36328125	-0.03215
9	1.36328125	1.3671875	1.365234375	0.000072
10	1.36328125	1.365234375	1.364257813	-0.01605
11	1.364257813	1.365234375	1.364746094	-0.00799
12	1.364746094	1.365234375	1.364990235	-0.00396

迭代 12 次, 近似根  $x_{12} = 1.364990235$  即为所求. 其误差

$$|x^* - x_{12}| \leq |b_{12} - a_{12}| = 0.000488281.$$

3. 解 (1) 在区间  $[0, 1]$  上用二分法, 误差限为

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

由 
$$\frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2} \times 10^{-3},$$

解得 
$$2^k \geq 10^3.$$

$$k > 3 \frac{\ln 10}{\ln 2} = \frac{3 \times 2.3026}{0.6931} = 9.9658.$$

故二分 10 次后, 可使得根的近似值能准确到小数点后三位数字.

(2) 由定理 6.1, 有误差公式

$$|x_k - x^*| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|.$$

由于迭代函数  $\varphi(x) = \frac{2-e^x}{10}$ , 则  $\varphi'(x) = \frac{-e^x}{10}$ ,

$$|\varphi'(x)| \leq \frac{e}{10} \approx 0.27182, \quad x \in [0, 1],$$

取  $L=0.27182$ ,  $x_0=0$ ,  $x_1=10^{-1}$ . 由

$$\frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0| < \epsilon \quad (\epsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-3}).$$

解得

$$k > \frac{\lg \epsilon - \lg \frac{|x_1 - x_0|}{1-L}}{\lg L} = \frac{\lg(\frac{1}{2} \times 10^{-3}) - \lg \frac{10^{-1}}{1-0.27182}}{\lg 0.27182} \\ = 4.31093.$$

即用迭代法  $x_{k+1} = (2 - e^{x_k})/10$ , 需迭代 5 次可使根的近似值准确到  $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$ .

4. 解 因两曲线相切, 在切点处曲线函数值相等, 导数值相等, 根据这些条件可得到切点横坐标应满足的关系式.

$$y = x^2 \implies y' = 2x.$$

$$y^2 + (x-8)^2 = R^2 \implies 2yy' + 2(x-8) = 0.$$

由两曲线相切, 可得

$$x^2 \cdot 2x + 2(x-8) = 0,$$

即

$$2x^3 + x - 8 = 0.$$

令  $f(x) = 2x^3 + x - 8$ , 则  $f(1) < 0$ ,  $f(2) > 0$ , 因此  $f(x) = 0$  在  $(1, 2)$  内有根, 又在  $(1, 2)$  内,  $f'(x) = 6x^2 + 1 > 0$ , 所以  $f(x) = 0$  仅有一根. 构造迭代格式:

$$x_{k+1} = \left[ \frac{(8-x_k)}{2} \right]^{1/3}, \quad k=0, 1, 2, \dots.$$

取  $x_0 = \frac{1}{2}(1+2) = 1.5$ , 计算结果如下:

$$x_0 = 1.5, \quad x_1 = 1.481248, \quad x_2 = 1.482671, \quad x_3 = 1.482563.$$

由于  $|x_3 - x_2| = 0.000108 < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$ ,

故取  $x^* \approx x_3 = 1.483$  即可保证有 4 位有效数字, 即两曲线切点的横坐标为 1.483.

5. 解 (1) 用简单迭代法. 此时迭代公式为

$$x_{k+1} = e^{-x_k}, \quad x_0 = 0.5, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

计算结果如表 6.7.

表 6.7

$k$	$x_k$	$k$	$x_k$
0	0.5	10	0.5669072
1	0.6065306	11	0.5672772
2	0.5452392	12	0.5670673
3	0.5797031	13	0.5674863
4	0.5600646	14	0.5671188
5	0.5711721	15	0.5671571
6	0.5648629	16	0.5671354
7	0.5684380	17	0.5671477
8	0.5664094	18	0.5671407
9	0.5675596		

此时  $|x_{18} - x_{17}| < 10^{-5}$ . 故取

$$x^* \approx x_{18} = 0.56714.$$

(2) 用加速技巧来做. 在  $x_0 = 0.5$  附近  $(e^{-x})' \approx -0.6$ , 故取  $L = -0.6$ . 此时迭代格式为

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = e^{-x_k}, \\ x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} + \frac{0.6}{1+0.6}(\bar{x}_{k+1} - x_k), \quad k=0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

计算结果如表 6.8.

表 6.8

$k$	$\bar{x}_k$	$x_k$
0		0.5
1	0.6065307	0.5665817
2	0.5674619	0.5671318
3	0.5671498	0.5671431
4	0.5671434	0.5671433

此时  $|x_4 - x_3| < 10^{-5}$ , 故

$$x^* \approx x_4 = 0.56714.$$

(3) 用 Aitken 方法来做. 此时迭代格式为

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = \varphi(x_k), \\ \bar{x}_{k+1} = \varphi(\tilde{x}_{k+1}), \\ x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} - \frac{(\bar{x}_{k+1} - x_k)^2}{\bar{x}_{k+1} - 2\tilde{x}_{k+1} + x_k}, \end{cases} \quad k=0, 1, 2, \dots$$

计算结果如表 6.9.

表 6.9

$k$	$\tilde{x}_k$	$\bar{x}_{k+1}$	$x_k$
0			0.5
1	0.6065307	0.5452392	0.5676239
2	0.5668708	0.5672979	0.5671433
3	0.5671433	0.5671433	

此时  $|x_3 - x_2| < 10^{-5}$ , 故取  $x^* \approx x_3 = 0.56714$ .

6. 解 由于  $\varphi'(x) = 1 + 3x^2$ , 当  $x \neq 0$  时,  $|\varphi'(x)| > 1$ , 且有  
 $|x_{k+1} - 0| = |\varphi(x_k) - 0| = |\varphi'(\xi)| |x_k - 0| > |x_k - 0|$ ,  
 $\xi$  介于  $x_k$  与 0 之间.

由此可见, 若  $x_0 \neq 0$ , 迭代不收敛.

若改用 Steffensen 加速迭代法(6.8), 可得

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{(x_k + x_k^3 - x_k)^2}{[x_k + x_k^3 + (x_k + x_k^3)^3] - 2(x_k + x_k^3) + x_k} \\ &= x_k - \frac{x_k}{x_k^4 + 3x_k^2 + 3} = \psi(x_k), \end{aligned}$$

而  $\psi'(0) = \frac{2}{3}$ . 根据局部收敛定理, 序列  $\{x_k\}$  收敛于 0.

7. 解 由第 6 题知,  $f(x) = 0$  在  $(1, 2)$  内有一个根, 且  $f''(x) > 0$ ,  $f(2) > 0$ , 故应取  $x_0 = 2$ . 利用 Newton 迭代公式:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

计算列表如表 6.10.

表 6.10

$k$	$x_k$	$k$	$x_k$
0	2	3	1.368869419
1	1.6	4	1.368808109
2	1.383388704	5	1.368808108

因  $|x_5 - x_4| = 0.1 \times 10^{-8} < 10^{-6}$ , 故取

$$x^* \approx x_5 = 1.368808108.$$

8. 解 (1)  $f(x) = x^3 - 3x - 1$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 3$ , 用 Newton 迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k - 1}{3(x_k^2 - 1)}, \quad k=0, 1, \dots$$

取  $x_0 = 2$ , 则  $x_1 = 1.8889$ ,  $x_2 = 1.8795$ ,  $x_3 = 1.8794$ ,  $x_4 = 1.8794$ .  
四位有效数字解为  $x^* \approx 1.879$ .

$$(2) f(x) = x^2 - 3x - e^x + 2, \quad f'(x) = 2x - 3 - e^x,$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 3x_k - e^{x_k} + 2}{2x_k - e^{x_k} - 3}, \quad k=0, 1, \dots$$

9. 解 方程  $x^3 - a = 0$  的根  $x^* = \sqrt[3]{a}$ , 用 Newton 迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - a}{3x_k^2} = \frac{2}{3}x_k + \frac{a}{3x_k^2}, \quad k=0, 1, \dots$$

此公式的迭代函数

$$\varphi(x) = \frac{2}{3}x + \frac{a}{3x^2},$$

则

$$\varphi'(x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{a}{x^3}.$$

由  $\varphi'(x^*) = 0$ ,  $\varphi''(x^*) = \frac{2}{3\sqrt[3]{a}} \neq 0$ , 故迭代法二阶收敛.

还可证明迭代法的整体收敛性.

设  $a > 0$ , 对  $\forall x_0 > 0$ ,

$$x_1 = \frac{2}{3}x_0 + \frac{a}{3x_0^2} = \frac{3x_0^3 + a}{3x_0^2} \geq \sqrt[3]{a}.$$

一般地,当  $x_k > 0$  时有

$$x_{k+1} = \frac{2}{3}x_k + \frac{a}{3x_k^2} > \sqrt[3]{a}, \quad k=0,1,\dots,$$

这是因为  $(x_k - \sqrt[3]{a})^2(2x_k + \sqrt[3]{a}) = 2x_k^3 + a - 3x_k^2\sqrt[3]{a} \geq 0$  当  $x_k > 0$  时成立,从而  $\frac{x_{k+1}}{x_k} \leq 1$ , 即  $x_{k+1} \leq x_k$ , 表明序列  $\{x_k\}$  单调递减, 故对  $\forall x_0 > 0$ , 迭代序列  $\{x_k\}$  收敛于  $\sqrt[3]{a}$ .

取  $x_0 = 1$ , 则  $x_1 = 0.26894$ ,  $x_2 = 0.25751$ ,  $x_3 = 0.25753$ ,  $x_4 = 0.25753$ , 4 位有效数字解为  $x^* \approx 0.2575$ .

10. 解 令  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ , 则  $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ . 故两种迭代公式分别为

$$\text{Newton 法} \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)};$$

$$\text{修正 Newton 法} \quad x_{k+1} = x_k - 2 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0,1,2,\dots$$

计算列表如表 6.11.

表 6.11

$k$	Newton 法 $x_k$	修正 Newton 法 $x_k$
0	2	2
1	1.6	1.2
2	1.347368421	1.015384615
3	1.193516664	1.000115465

表 6.11 说明对于重根, Newton 迭代法收敛速度缓慢.

11. 解  $f(x) = \left[ \sin x - \frac{x}{2} \right]^2$  的根  $x^*$  为 2 重根,  $f'(x) = 2 \left[ \sin x - \frac{x}{2} \right] \left[ \cos x - \frac{1}{2} \right]$ .

用(6.11)式, 即 Newton 迭代公式, 有

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\left[ \sin x_k - \frac{1}{2} x_k \right]^2}{2 \left[ \sin x_k - \frac{1}{2} x_k \right] \left[ \cos x_k - \frac{1}{2} \right]}$$

$$= x_k - \frac{\sin x_k - \frac{1}{2} x_k}{2 \cos x_k - 1}, \quad k=0, 1, \dots$$

取  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ , 则  $x_1 = 1.785398$ ,  $x_2 = 1.844562$ ,  $\dots$ ,  $x_{20} = 1.895494$ ,

此时,  $|x^* - 1.89549| < 10^{-5}$ .

用求重根的迭代公式(6.14),

$$x_{k+1} = x_k - 2 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\sin x_k - \frac{1}{2} x_k}{\cos x_k - \frac{1}{2}}, \quad k=0, 1, \dots$$

取  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ , 则  $x_1 = 2.000000$ ,  $x_2 = 1.900996$ ,  $x_3 = 1.895512$ ,  $x_4 = 1.895494$ ,  $x_5 = 1.895494$ , 这里迭代 4 次的值与上面迭代 20 次的结果相当.

若用求重根的迭代公式(6.15), 则有

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k) f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2 - f(x_k) f''(x_k)}, \\ f''(x) &= 2 \left[ \cos x - \frac{1}{2} \right]^2 + 2 \left[ \sin x - \frac{1}{2} x \right] (-\sin x) \\ &= 2 \left[ \cos x - \frac{1}{2} \right]^2 - 2 \sin x \left[ \sin x - \frac{1}{2} x \right], \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{2 \left[ \sin x_k - \frac{1}{2} x_k \right] \left[ \cos x_k - \frac{1}{2} \right]}{4 \left[ \cos x_k - \frac{1}{2} \right]^2 - 2 \left[ \cos x_k - \frac{1}{2} \right]^2 + 2 \sin x_k \left[ \sin x_k - \frac{1}{2} x_k \right]} \\ &= x_k - \frac{\left[ \sin x_k - \frac{1}{2} x_k \right] \left[ \cos x_k - \frac{1}{2} \right]}{\left[ \cos x_k - \frac{1}{2} \right]^2 + \sin x_k \left[ \sin x_k - \frac{1}{2} x_k \right]}. \end{aligned}$$

取  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ , 则  $x_1 = 1.801749$ ,  $x_2 = 1.889630$ ,  $x_3 = 1.895474$ ,  $x_4 = 1.895494$ ,  $x_5 = 1.895494$ . 结果与用迭代公式(6.14)相同, 只用 4 次

迭代即可.从迭代公式看到用(6.14)比(6.15)计算量少,但(6.14)必须知道重根重数  $m$  方能使用,而(6.15)在重数未知情况下仍然可用.

12. 解 (1) 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , 其 Newton

迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = -x;$$

当  $x < 0$  时,  $f(x) = -\sqrt{-x}$ ,  $f'(x) = 1/2 \sqrt{-x}$ , 其 Newton 迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{-\sqrt{-x}}{1/2 \sqrt{-x}} = -x;$$

则 Newton 迭代格式为

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = -x_k, \quad k=0, 1, \dots$$

故对于方程  $f(x)=0$ , 其 Newton 迭代公式发散.

(2) 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ,  $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$ , 其 Newton 迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{x}{2};$$

当  $x \leq 0$  时,  $f(x) = -\sqrt[3]{x^2}$ ,  $f'(x) = -\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$ , 其 Newton 迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{-\sqrt[3]{x^2}}{-\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{x}{2}.$$

而  $|\varphi'(x)| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} < 1$ , 但  $\varphi'(x^*) = \frac{1}{2} \neq 0$ , 故 Newton 迭代公式为

$$x_{k+1} = -\frac{x_k}{2}, \quad k=0, 1, \dots$$

是收敛的, 但只具线性收敛速度.

13. 解 因  $f(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$ , 则  $f'(x) = 2ax^{-3}$ . Newton 迭代格式为

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ &= x_k - \frac{1 - ax_k^{-2}}{2ax_k^{-3}} = \frac{1}{2} x_k \left[ 3 - \frac{x_k^2}{a} \right], \quad k=0, 1, \dots \end{aligned}$$

当  $a=115$  时, 取初值  $x_0=11$ , 利用上式得

$$x_1 = 10.71304348, \quad x_2 = 10.7237891, \quad x_3 = 10.72380529.$$

若取  $\sqrt{115} \approx x_3 = 10.72380529$  可达到 10 位有效数字.

14. 证 显然, 当  $a > 0, x_0 > 0$  时,  $x_k > 0 (k=1, 2, \dots)$ . 令迭代函数

$$\varphi(x) = \frac{x(x^2 + 3a)}{3x^2 + a},$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \varphi'(x) &= \frac{(3x^2 + 3a)(3x^2 + a) - x(x^2 + 3a) \cdot 6x}{(3x^2 + a)^2} \\ &= \frac{3(x^2 - a)^2}{(3x^2 + a)^2}. \end{aligned}$$

故对  $\forall x > 0, |\varphi'(x)| < 1$ . 即迭代收敛.

设  $\{x_k\}$  的极限为  $l$ , 则有

$$l = \frac{l(l^2 + 3a)}{3l^2 + a},$$

解得  $l=0, l=\pm\sqrt{a}$ . 由题知取  $l=\sqrt{a}$ , 即迭代序列收敛于  $\sqrt{a}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a} - x_{k+1}}{(\sqrt{a} - x_k)^3} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{a} - (x_k^3 + 3ax_k)/(3x_k^2 + a)]}{(\sqrt{a} - x_k)^3} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{a} - x_k)^3}{(\sqrt{a} - x_k)^3 (3x_k^2 + a)} \end{aligned}$$

$$=\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3x_k^2 + a} = \frac{1}{4a} \neq 0.$$

故题中迭代式是求  $\sqrt[3]{a}$  的三阶方法.

15. 解 因  $a > 0, x_0 > 0$ , 故  $x_k > 0, k=1, 2, \dots$ . 对任意  $k \geq 0$ ,

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left[ x_k + \frac{a}{x_k} \right] = \frac{1}{2} \left( \sqrt{x_k} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_k}} \right)^2 + \sqrt{a} \geq \sqrt{a},$$

因此对一切  $k \geq 1$ , 均有  $x_k \geq \sqrt{a}$ . 利用这一结果, 得

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{1}{2} \frac{x_k + a/x_k}{x_k} = \frac{1}{2} + \frac{a}{2x_k^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{a}{2a} = 1,$$

即  $x_{k+1} \leq x_k$ ,  $\{x_k\}$  单调递减. 根据单调有界原理知,  $\{x_k\}$  收敛.

16. 证 将  $D_n$  中  $f(x_n + f(x_n))$  在  $x_n$  处 Taylor 展开, 得

$$f(x_n + f(x_n)) = f(x_n) + f'(x_n)f(x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi)f^2(x_n).$$

其中  $\xi$  介于  $x_n$  与  $x_n + f(x_n)$  之间. 此时

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{[f(x_n) + f'(x_n)f(x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi)f^2(x_n) - f(x_n)]}{f(x_n)} \\ &= f'(x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi)f(x_n). \end{aligned}$$

又由于  $x^*$  是  $f(x) = 0$  的单根, 故  $f(x)$  可表示为

$$f(x) = (x - x^*)h(x), h(x^*) \neq 0.$$

所以,

$$f'(x_n) = h(x_n) + (x_n - x^*)h'(x_n).$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &= x_n - x^* - \frac{f(x_n)}{D_n} \\ &= x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*)h(x_n)}{f'(x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi)f(x_n)} \\ &= (x_n - x^*) \\ &\quad \left[ 1 - \frac{h(x_n)}{h(x_n) + (x_n - x^*)h'(x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi)f(x_n)} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{(x_n - x^*)^2 \left[ h'(x_n) + \frac{1}{2} h(x_n) f''(\xi) \right]}{h(x_n) + (x_n - x^*) \left[ h'(x_n) + \frac{1}{2} h(x_n) f''(\xi) \right]}.$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{h'(x^*) - \frac{1}{2} h(x^*) f''(x^*)}{h(x^*)},$$

即迭代格式至少是二阶收敛的.

17. 解 已知

$$\begin{aligned} x^* &= Q(0) = Q(y - y) \\ &= Q(y) - yQ'(y) + \frac{1}{2} y^2 Q''(y) + \cdots. \end{aligned}$$

由于  $x = Q(y)$  是  $y = f(x)$  的反函数, 故

$$\begin{aligned} Q'(y) &= \frac{1}{f'(x)}, \\ Q''(y) &= \frac{d}{dy} Q'(y) = \frac{d}{dy} \left[ \frac{1}{f'(x)} \right] \\ &= -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \frac{dx}{dy} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}. \end{aligned}$$

依次代入  $x^*$  的表达式中, 有

$$\begin{aligned} x^* &= Q(y) - y \cdot \frac{1}{f'(x)} + \frac{1}{2} y^2 \left[ -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} \right] + \cdots \\ &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{1}{2} f^2(x) f''(x) / [f'(x)]^3 + \cdots. \end{aligned}$$

分别取上式右端前二、三项, 并令  $x = x_n$ , 有

$$\begin{aligned} x^* &\approx x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x^* &\approx x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n) f^2(x_n)}{2[f'(x_n)]^3}. \end{aligned}$$

18. 解 (1) 因迭代函数

$$\varphi(x) = 4 + \frac{2}{3} \cos x, \quad \varphi'(x) = -\frac{2}{3} \sin x,$$

而对一切  $x$ , 均有

$$|\varphi'(x)| < 1,$$

故迭代过程收敛, 即  $\forall x_0 \in \mathbf{R}$ , 均有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ .

(2) 取  $x_0 = 4$ , 代入迭代式计算有

$$x_1 = 4 + \frac{2}{3} \cos 4 = 3.56424,$$

$$x_2 = 4 + \frac{2}{3} \cos 3.56424 = 3.391996,$$

$$x_3 = 4 + \frac{2}{3} \cos 3.391996 = 3.354125,$$

$$x_4 = 4 + \frac{2}{3} \cos 3.354125 = 3.34833,$$

$$x_5 = 4 + \frac{2}{3} \cos 3.34833 = 3.3475299.$$

取  $x^* \approx x_5 = 3.347$  即可使误差不超过  $10^{-3}$ .

(3) 因  $\varphi'(x) = -\frac{2}{3} \sin x$ ,  $|\varphi'(x^*)| = |\frac{2}{3} \sin x^*| \neq 0$ , 故由推论 6.1 知, 此迭代格式只具线性收敛性.

19. 解 用 Newton 下山法 (6.13), 即

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{x_k^3 - x_k - 1}{3x_k^2 - 1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

令  $x_0 = 0.6$ , 对  $\lambda$  分别取  $\lambda = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$  进行搜索, 计算结果如表 6.12 所示.

表 6.12

$k$	$\lambda$	$x_k$	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$-f(x_k)/f'(x_k)$
0		0.6	-1.384	0.08	17.3
1	1	17.9	5716.439		
	$\frac{1}{2}$	9.21	771.019961		
	$\frac{1}{4}$	4.925	113.533950		
	$\frac{1}{8}$	2.7625	17.319260		

$k$	$\lambda$	$x_k$	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$-f(x_k)/f'(x_k)$
	$\frac{1}{16}$	1.68125	2.070974		
	$\frac{1}{32}$	1.140625	-0.656643	2.903076	0.226189
2	1	1.366814	0.186641	4.604542	-0.040534
3	1	1.326280	0.006671	4.277056	-0.001560
4	1	1.324720	0.000009		

取  $x^* \approx 1.32472$ , 误差  $|x^* - 1.32472| < 10^{-5}$ .

20. 解 迭代函数  $\varphi(x) = px + q\frac{a}{x} + r\frac{a^2}{x^2}$ ,  $x^* = \sqrt[3]{a}$ . 根据定理 6.3, 要使迭代序列收敛的阶尽可能高, 应使  $x^* = \varphi(x^*)$ ,  $\varphi'(x^*) = 0$ ,  $\varphi''(x^*) = 0$ .

由  $x^* = \varphi(x^*)$  得

$$\sqrt[3]{a} = p\sqrt[3]{a} + q\frac{a}{\sqrt[3]{a}} + r\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}},$$

即

$$p + q + r = 1;$$

由  $\varphi'(x^*) = 0$ , 得

$$\varphi'(\sqrt[3]{a}) = p - 2q\frac{a}{(\sqrt[3]{a})^3} - 5r\frac{a^2}{(\sqrt[3]{a})^6} = 0,$$

即

$$p - 2q - 5r = 0;$$

由  $\varphi''(x^*) = 0$ , 得

$$\varphi''(\sqrt[3]{a}) = 6q\frac{a}{(\sqrt[3]{a})^4} + 30r\frac{a^2}{(\sqrt[3]{a})^7} = 0,$$

即

$$q + 5r = 0.$$

亦即  $p, q, r$  满足方程:

$$\begin{cases} p + q + r = 1, \\ p - 2q - 5r = 0, \\ q + 5r = 0. \end{cases}$$

解之得  $p=q=\frac{5}{9}$ ,  $r=-\frac{1}{9}$ . 而且  $\varphi'''(\sqrt[3]{a})\neq 0$ , 故迭代公式具有三阶收敛性.

21. 解  $f'(x)=3x^2+4x+10$ , 令  $f'(x)=0$ , 则由于  $f'(x)=0$  的判别式  $\Delta=b^2-4ac=16-4\times 3\times 10<0$ , 故  $f(x)$  没有极值点, 由于  $f(1)=-7<0$ ,  $f(2)=12>0$ , 因此  $f(x)=0$  在  $(1,2)$  内仅有一根. 弦截法公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}f(x_k), \quad k=1,2,\dots.$$

取  $x_0=1$ ,  $x_1=2$ , 则有计算表 6.13.

表 6.13

$k$	$x_k$	$k$	$x_k$
0	1	3	1.368850469
1	2	4	1.368808104
2	1.368421053	5	1.368808108

取  $x^*\approx x_5=1.368808108$ , 可有  $|x_5-x_1|<10^{-6}$ .

22. 解 (1)  $|\varphi'(x)|<1$ .

(2) 因  $\varphi'(x)=1+2\alpha x$ , 由  $|\varphi'(x^*)|=|1+2\alpha\sqrt{5}|<1$ , 即  $-2<2\sqrt{5}\alpha<0$ , 故  $\alpha$  的取值范围是  $-\frac{1}{\sqrt{5}}<\alpha<0$ .

(3) 由于 Newton 迭代具有平方收敛, 故取

$$\lambda(x_k)=\frac{1}{f'(x_k)}=\frac{1}{3x_k^2-2x_k-1}.$$

(4)  $\varphi(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{x^2}$ ,  $\varphi'(x)=\frac{2}{3}-\frac{2}{x^3}$ ,  $\varphi'(x^*)=0$ ,  $\varphi''(x)=\frac{6}{x^4}$ ,  $\varphi''(x^*)=\frac{6}{3\sqrt[3]{3}}=\frac{2}{\sqrt[3]{3}}\neq 0$ , 故  $\{x_k\}$  的收敛阶是 2.

# 第七章 解线性方程组的直接解方法

## 一、内容提要

在自然科学和工程技术中的很多问题常常归结为解一线性代数方程组,例如,电网络问题、结构设计问题、三次样条问题及最小二乘法问题等,都导致求解线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (7.1)$$

或写为矩阵形式

$$AX=b. \quad (7.2)$$

其中,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T; b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T.$$

若  $A$  非奇异,求解(7.1)通常可用 Gram 法则,但它只适合于  $n$  很小的情况,而完全不适合于高阶方程组.因此,有必要研究解方程组(7.1)的适于计算机的数值算法.

线性方程组的数值解法一般有两类:直接法与迭代法.所谓直接法即能在预定的计算步数内求得精确解(不计舍入误差)的方法,它可靠且效率高,但它只适用于中小型方程组.

## 1. Gauss 顺序消去法

Gauss 消去法是一个古老的求解线性方程组的直接方法,其主要计算过程分为消元和回代两个步骤.

### (1) 消元过程

将(7.2)记为  $A^{(1)}X=b^{(1)}$ , 其中

$$A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)}) = (a_{ij}), \quad b^{(1)} = b.$$

消元的过程是将  $A^{(1)}X=b^{(1)}$  加工成一个三角形的方程组, 即

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)}, \\ \quad a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)}, \\ \quad \quad a_{33}^{(3)} x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)} x_n = b_3^{(3)}, \\ \quad \quad \quad \cdots \cdots \cdots \\ \quad \quad \quad \quad a_{nn}^{(n)} x_n = b_n^{(n)}, \end{array} \right. \quad (7.3)$$

$$\text{其中} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik} a_{kj}^{(k)}, \quad i, j = k+1, k+2, \cdots, n, \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - l_{ik} b_k^{(k)}, \quad i = k+1, k+2, \cdots, n, \\ l_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, \quad i = k+1, k+2, \cdots, n. \end{array} \right. \quad (7.4)$$

从方程组(7.1)到方程组(7.3)的过程叫做消元过程. 方程组(7.3)的系数矩阵是上三角矩阵, 这是很容易求解的.

### (2) 回代过程

对方程组(7.3)求解, 得

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}, \\ x_k = \frac{b_k^{(k)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k)} x_j}{a_{kk}^{(k)}}, \quad k = n-1, n-2, \cdots, 2, 1. \end{array} \right. \quad (7.5)$$

这个求解过程称为回代过程.

在上述等价变换过程中, 总是假定有  $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, \cdots, a_{nn}^{(n)} \neq 0$ .

**定理 7.1** 约化的主元素  $a_{ii}^{(i)} \neq 0 (i=1, 2, \cdots, k)$  的充要条件是矩阵  $A$  的顺序主子式  $D_i \neq 0 (i=1, \cdots, k)$ , 即

$$D_1 = a_{11} \neq 0,$$

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (i=2,3,\cdots,k).$$

**推论 7.1.1** 如果  $A$  的顺序主子式  $D_k \neq 0 (k=1,2,\cdots,n-1)$ , 则

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} = D_1, \\ a_{kk}^{(k)} = \frac{D_k}{D_{k-1}} \quad (k=2,3,\cdots,n). \end{cases}$$

**定理 7.2** 如果  $n$  阶矩阵  $A$  的所有顺序主子式均不为零, 即  $D_i \neq 0 (i=1,2,\cdots,n)$ , 则可通过 Gauss 消去法(顺序消去法)将方程组(7.1)约化成三角形方程组(7.3).

## 2. Gauss 列主元消去法

在消元过程中可能出现  $a_{kk}^{(k)} = 0$  的情况, 这时消去法将无法进行. 即使主元素  $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ , 若很小时, 用其作除数, 会导致其它元素数量级的严重增长和舍入误差的扩散, 最后也使得计算解不可靠, 故也应避免采用绝对值小的主元素  $a_{kk}^{(k)}$ . 实用的 Gauss 消去法应该在消元过程的每一步, 都在可能范围内选择绝对值较大的元素作为主元, 以免舍入误差的增长, 这就是 Gauss 主元消去法.

### (1) Gauss 列主元消去法

列主元消去法的具体做法, 就是在进行第  $k$  步消元 ( $k=1,2,\cdots,n$ ) 时, 对第  $k$  列选取绝对值最大的元素  $a_{i_k,k}^{(k)}$ , 称  $a_{i_k,k}^{(k)}$  为主元, 即

$$|a_{i_k,k}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{i,k}^{(k)}|.$$

并将其所在的行与第  $k$  行对换, 再进行第  $k$  步消元, 这样保证每个行乘数的绝对值不大于 1, 即保证  $|l_{ik}| = \left| \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{i_k,k}^{(k)}} \right| \leq 1 (i=k,k+1,\cdots,n)$ . 完成了  $n-1$  步消元后, 再回代.

**定理 7.3** 如果  $A$  为  $n$  阶非奇异矩阵, 则可通过 Gauss 消去法(即交换两行的初等变换)将方程组(7.1)化为三角形方程组(7.3).

## (2) Gauss 完全主元消去法

完全主元消去法与列主元消去法的做法基本相同,只是在消元过程的第  $k$  步中( $k=1,2,\cdots,n$ ),把对第  $k$  列选主元的步骤改对剩第  $k, k+1, \cdots, n$  行和列进行. 从这  $(n-k+1)^2$  个数中选取绝对值最大的元素  $a_{i_k, j_k}^{(k)}$ , 称为主元, 即

$$|a_{i_k, j_k}^{(k)}| = \max_{k \leq i, j \leq n} |a_{i, j}^{(k)}|.$$

将  $i_k$  行与  $k$  行交换, 又将  $j_k$  列与  $k$  列交换, 同时将自变量  $x_k$  与  $x_{j_k}$  的位置交换并记录自变量排列次序, 直到消去法完成后, 再按记录恢复自变量为自然次序, 故称这种算法为完全选主元法.

## 3. 三角分解法

**定义 7.1** 若方阵  $A$  可写成  $A=LU$  的形式, 其中  $L$  是单位下三角阵,  $U$  是上三角阵, 则称此式为  $A$  的一个三角分解或 Doolittle 分解.

从矩阵分解的角度理解 Gauss 消去的过程, 实际上是对线性方程组的系数矩阵  $A$  作了一个 Doolittle 分解, 对方程组  $AX=b$  的求解等价于求解两个三角形方程组:

$$LY=b, \quad \text{求 } Y,$$

$$UX=Y, \quad \text{求 } X.$$

### (1) 不选主元的三角分解法

**定理 7.4** (矩阵的 LU 分解) 设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 如果  $A$  的顺序主子式  $D_i \neq 0$  ( $i=1, 2, \cdots, n-1$ ), 则  $A$  可分解为一个单位下三角矩阵  $L$  和一个上三角矩阵  $U$  的乘积, 且这种分解是唯一的.

设  $A$  为非奇异矩阵, 且有分解式

$$A=LU,$$

其中  $L$  为单位下三角阵,  $U$  为上三角阵, 即

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

用直接三角分解法解  $\mathbf{AX}=\mathbf{b}$  ( $\mathbf{A}$  的所有顺序主子式不为 0) 的计算公式如下:

$$\begin{aligned}
 1^\circ \quad & u_{1i} = a_{1i} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} \quad (i=2, 3, \dots, n). \\
 2^\circ \quad & u_{ri} = a_{ri} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{ki} \quad (i=r, r+1, \dots, n). \\
 3^\circ \quad & l_{ir} = \frac{a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr}}{u_{rr}} \quad (i=r+1, \dots, n, \text{ 且 } r \neq n). \\
 4^\circ \quad & y_1 = b_1, \quad y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k \quad (i=2, 3, \dots, n). \\
 5^\circ \quad & x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}, \quad x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} x_k}{u_{ii}} \quad (i=n-1, n-2, \dots, 1).
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

$$\tag{7.7}$$

## (2) 选主元的三角分解法

从直接三角分解公式可看出, 当  $u_{rr}=0$  时计算将中断, 或者当  $u_{rr}$  绝对值很小时, 按分解公式计算可能引起舍入误差的累积. 但如果  $\mathbf{A}$  非奇异, 可通过交换  $\mathbf{A}$  的行实现矩阵  $\mathbf{PA}$  的  $\mathbf{LU}$  分解.

**定理 7.5** (列主元素的三角分解定理) 如果  $\mathbf{A}$  为非奇异矩阵, 则存在排列矩阵  $\mathbf{P}$  使

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU},$$

其中  $\mathbf{L}$  为单位下三角阵,  $\mathbf{U}$  为上三角阵.

选主元(列主元)的三角分解法只需在第  $r$  步分解前引入量

$$s_i = a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr} \quad (i=r, r+1, \dots, n). \tag{7.8}$$

于是有

$$u_{rr} = s_r, \quad l_{ir} = \frac{s_i}{s_r} \quad (i=r+1, \dots, n),$$

且

$$\max_{r \leq i \leq n} |s_i| = |s_r|.$$

用  $s_r$  作为  $u_{rr}$ , 交换  $\mathbf{A}$  的  $r$  行与  $i_r$  行元素(将  $(i, j)$  位置的新元

素仍记为  $l_{ij}$  及  $a_{ij}$ ), 于是有  $|l_{ir}| \leq 1 (i=r+1, \dots, n)$ . 由此再进行第  $r$  步分解计算.

#### 4. 平方根法

**定理 7.6** (对称正定矩阵的三角分解或 Cholesky 分解) 如果  $A$  为  $n$  阶对称正定矩阵, 则存在一个实的非奇异下三角阵  $L$  使  $A=LL^T$ , 当限定  $L$  的对角元素为正时, 这种分解是唯一的.

$$\text{设 } A=LL^T = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & l_{nn} \end{bmatrix},$$

其中  $l_{ii} > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ . 解对称正定方程组  $AX=b$  的平方根法计算步骤如下.

对于  $j=1, 2, \dots, n$ ,

$$\left. \begin{aligned} 1^\circ \quad l_{jj} &= (a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2)^{1/2}, \\ 2^\circ \quad l_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}} \quad (i=j+1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

求解  $AX=b$ , 即求解两个三角形方程组:

$$LY=b, \text{ 求 } Y; \quad L^T X=Y, \text{ 求 } X.$$

$$\left. \begin{aligned} 3^\circ \quad y_i &= \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k}{l_{ii}} \quad (i=1, 2, \dots, n). \\ 4^\circ \quad x_i &= \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^n l_{ki} x_k}{l_{ii}} \quad (i=n, n-1, \dots, 1). \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

#### 5. 改进的平方根法

**定理 7.7** (对称矩阵的三角分解定理) 设  $A$  为  $n$  阶对称矩阵, 且  $A$  的所有顺序主子式不为零, 则  $A$  可唯一分解为

$$A=LDL^T.$$

其中  $L$  为单位下三角阵,  $D$  为对角阵. 设

$$A = LDL^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \cdots & \cdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & \cdots & \cdots & l_{n1} \\ & 1 & l_{32} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \ddots & \cdots \\ & & & \ddots & \cdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix},$$

对于  $i=1,2,\cdots,n$ ,

$$1^\circ \quad l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk}}{d_j} \quad (j=1,2,\cdots,i-1).$$

$$2^\circ \quad d_i = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 d_k.$$

为了避免重复计算,引进

$$t_{ij} = l_{ij} d_j,$$

则对于  $i=1,2,\cdots,n$ ,

$$\left. \begin{aligned} 1^\circ \quad t_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} t_{ik} l_{jk} \quad (j=1,2,\cdots,i-1), \\ 2^\circ \quad l_{ij} &= \frac{t_{ij}}{d_j} \quad (j=1,2,\cdots,i-1), \\ 3^\circ \quad d_i &= a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ik} l_{ik}. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

对于  $LY=b$ , 解出  $Y$ ;  $DL^T X=Y$ , 解出  $X$ .

$$\left. \begin{aligned} 4^\circ \quad y_1 &= b_1, \\ y_i &= b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k \quad (i=2,\cdots,n). \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

$$\left. \begin{aligned} 5^\circ \quad x_n &= \frac{y_n}{d_n}, \\ 6^\circ \quad x_i &= \frac{y_i}{d_i} - \sum_{k=i+1}^n l_{ki} x_k \quad (i=n-1,\cdots,2,1). \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

## 6. 追赶法

设有方程组  $AX=f$ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}. \quad (7.14)$$

若

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & \\ & l_3 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & d_1 & & \\ & u_2 & d_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & u_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix},$$

直接利用  $L$  乘  $U$  得到  $A$  的乘法规则, 求得矩阵  $L$  和  $U$  的诸元素. 计算公式如下:

$$\begin{cases} d_i = c_i, & i=1, 2, \dots, n-1, \\ u_i = b_i, \\ l_i = a_i / u_{i-1}, & i=2, 3, \dots, n, \\ u_i = b_i - l_i c_{i-1}, & i=2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (7.15)$$

计算次序是  $u_1, l_2, u_2, l_3, u_3, \dots, l_n, u_n$ .

原方程组  $AX=f$  是通过下述两个具有两条对角线元素的三角形方程组

$$LY=f, \quad UX=Y.$$

实现的. 计算公式是

$$\begin{cases} y_1 = f_1, \\ y_i = f_i - l_i y_{i-1}, i=2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (7.16)$$

$$\begin{cases} x_n = y_n / u_n, \\ x_i = (y_i - c_i x_{i+1}) / u_i, i=n-1, n-2, \dots, 1. \end{cases} \quad (7.17)$$

**定理 7.8** 设具有(7.16)形式的三对角阵  $A$  满足条件

- 1)  $|b_i| > |c_i| > 0$ ;
- 2)  $|b_n| > |a_n| > 0$ ;
- 3)  $|b_i| \geq |a_i| + |c_i|, a_i c_i \neq 0, i=2, 3, \dots, n-1$ .

则方程组  $AX=f$  的解存在唯一,且追赶法通常是数值稳定的.

## 7. 向量和矩阵的范数

为了研究线性方程组近似解的误差估计和迭代法的收敛性,有必要对向量及矩阵的“大小”引进某种度量——范数的概念.

用  $\mathbf{R}^n$  表示  $n$  维实向量空间,用  $\mathbf{C}^n$  表示  $n$  维复向量空间.

**定义 7.2** (向量的范数)若向量  $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^n$  (或  $\mathbf{C}^n$ ) 的某个实值函数  $N(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\|$ , 满足条件

- 1)  $\|\mathbf{X}\| \geq 0$ , ( $\|\mathbf{X}\| = 0$  当且仅当  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ ); (正定性)
- 2)  $\|\alpha\mathbf{X}\| = |\alpha| \|\mathbf{X}\|$ ,  $\forall \alpha \in \mathbf{R}$  (或  $\alpha \in \mathbf{C}$ ); (齐次性)
- 3)  $\|\mathbf{X} + \mathbf{Y}\| \leq \|\mathbf{X}\| + \|\mathbf{Y}\|$ . (三角不等式)

则称  $N(\mathbf{X})$  是  $\mathbf{R}^n$  (或  $\mathbf{C}^n$ ) 上的一个向量范数 (或模).

常用的几种向量范数:

设  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,

- 1) 向量的  $\infty$ -范数 (最大范数):

$$\|\mathbf{X}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

- 2) 向量的 1-范数:

$$\|\mathbf{X}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

- 3) 向量的 2-范数:

$$\|\mathbf{X}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

- 4) 向量的  $p$ -范数:

$$\|\mathbf{X}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, p \in [1, +\infty).$$

**定义 7.3** 设  $\{\mathbf{X}^{(k)}\}$  为  $\mathbf{R}^n$  中一向量序列,  $\mathbf{X}^* \in \mathbf{R}^n$ . 记  $\mathbf{X}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T$ ,  $\mathbf{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ ; 若  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 则称  $\mathbf{X}^{(k)}$  收敛于向量  $\mathbf{X}^*$ , 记为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{X}^*.$$

**定理 7.9** ( $N(\mathbf{X})$  的连续性) 设非负函数  $N(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\|$  为  $\mathbf{R}^n$  上任一向量范数, 则  $N(\mathbf{X})$  是  $\mathbf{X}$  分量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的连续函

数.

有了范数的连续性,可导出向量范数的等价性.

**定理 7.10** (向量范数的等价性) 设  $\|X\|_s, \|X\|_t$  为  $\mathbf{R}^n$  上向量的任意两种范数, 则存在常数  $c_1, c_2 > 0$ , 使得

$$c_1 \|X\|_s \leq \|X\|_t \leq c_2 \|X\|_s, \text{ 对一切 } X \in \mathbf{R}^n.$$

有了向量范数的等价性,可在任何一种范数意义下讨论向量序列的收敛性.

**定理 7.11**  $\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = X^* \iff \|X^{(k)} - X^*\| \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty).$

**定义 7.4** (矩阵的范数) 如果矩阵  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  的某个非负实值函数  $N(A)$  <sup>记</sup>  $\|A\|$  满足条件

- 1)  $\|A\| \geq 0 (\|A\| = 0 \iff A = 0);$
- 2)  $\|cA\| = |c| \|A\|, c \text{ 为实数};$
- 3)  $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|;$
- 4)  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$

则称  $N(A)$  是  $\mathbf{R}^{n \times n}$  上的一个矩阵范数(或模).

**定义 7.5** 若一种矩阵范数  $\|A\|$  和一种向量范数  $\|X\|$  对一切  $X$  和  $A$  都有

$$\|AX\| \leq \|A\| \|X\|,$$

则称这两种范数是相容的.

**定义 7.6** (矩阵的算子范数) 设  $X \in \mathbf{R}^n, A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 给出一种向量范数  $\|X\|_v$  (如  $v=1, 2$  或  $\infty$ ), 相应地定义一个矩阵的非负函数

$$\|A\|_v = \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_v}{\|X\|_v},$$

可验证  $\|A\|_v$  满足定义 7.4, 所以  $\|A\|_v$  是  $\mathbf{R}^{n \times n}$  上矩阵的一个范数, 称为  $A$  的算子范数.

**定理 7.12** 设  $\|X\|_v$  是  $\mathbf{R}^n$  上一个向量范数, 则  $\|A\|_v$  是  $\mathbf{R}^{n \times n}$  上矩阵的范数, 且满足相容条件

$$\|AX\|_v \leq \|A\|_v \|X\|_v.$$

**定理 7.13** 设  $X \in \mathbf{R}^n, A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 则

$$1) \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \text{ 称为 } A \text{ 的行范数,}$$

$$2) \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \text{ 称为 } A \text{ 的列范数,}$$

$$3) \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \text{ 称为 } A \text{ 的 2-范数,}$$

其中  $\lambda_{\max}(A^T A)$  表示  $A^T A$  的最大特征值.

**定义 7.7** 设  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  的特征值为  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 称

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

为  $A$  的谱半径.

**定理 7.14** (特征值上界) 设  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 则

$$\rho(A) \leq \|A\|_v (v=1, 2 \text{ 或 } \infty).$$

**定理 7.15** 若  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为对称矩阵, 则

$$\|A\|_2 = \rho(A).$$

**定理 7.16** 若  $\|B\|_v < 1$ , 则  $I \pm B$  为非奇异矩阵, 且

$$\|(I \pm B)^{-1}\|_v \leq \frac{1}{1 - \|B\|_v}.$$

**定义 7.8** 设有矩阵序列  $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{n \times n} (k=1, 2, \dots, n)$  及  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 如果

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij} (i, j=1, 2, \dots, n)$$

成立, 则称  $\{A_k\}$  收敛于  $A$ , 记为  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$ .

**定理 7.17**  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A \iff \|A_k - A\| \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ .

**定理 7.18** 设  $B = (b_{ij})_{n \times n}$ , 则  $B^k \rightarrow 0$  (零矩阵) ( $k \rightarrow \infty$ ) 的充要条件是  $\rho(B) < 1$ .

## 8. 方程组的性态、条件数

**定义 7.9** 如果方程组  $AX=b$  中, 矩阵  $A$  和右端项  $b$  的变化  $\|\delta A\|$  和  $\|\delta b\|$  微小, 引起解向量  $X$  的变化  $\|\delta X\|$  很大, 则称  $A$  为关于解方程组的病态矩阵, 称相应的方程组为病态方程组. 反

之,如果  $\|\delta A\|$  和  $\|\delta b\|$  微小,  $\|\delta X\|$  也微小,便称  $A$  为良态矩阵和称  $AX=b$  为良态方程组.

一种刻划矩阵和方程组“病态”程度的标准称为条件数.

**定义 7.10** 设  $A^{-1}$  存在,则称数

$$\text{cond}(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$$

为矩阵  $A$  的条件数,其中  $\|\cdot\|$  是矩阵的算子范数.

常用的条件数有:

1)  $\text{cond}_{\infty}(A) = \|A^{-1}\|_{\infty} \|A\|_{\infty}$  ——  $A$  的  $\infty$ -条件数.

2)  $\text{cond}_1(A) = \|A^{-1}\|_1 \|A\|_1$  ——  $A$  的 1-条件数.

3)  $\text{cond}_2(A) = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)}}$  ——  $A$  的 2-条件数.

件数.

条件数的性质:

1)  $\text{cond}(A) \geq 1$ ,  $\text{cond}(A) = \text{cond}(A^{-1})$ ,  $\text{cond}(\alpha A) = \text{Cond}(A)$ .

2) 若  $U$  为正交阵即  $U^T U = I$ , 则

$$\text{cond}_2(U) = 1.$$

$$\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(UA) = \text{cond}_2(AU).$$

**定理 7.19** 设  $AX=b$ ,  $A$  为非奇异阵,  $b$  为非零向量且  $A$  和  $b$  均有扰动. 若  $A$  的扰动  $\delta A$  非常小, 使  $\|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1$ , 则有事前误差估计式

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left( \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right).$$

**推论 7.19.1** 若  $\|\delta A\| = 0$ ,  $\|\delta b\| \neq 0$ , 则

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

**推论 7.19.2** 若  $\|\delta A\| \neq 0$ ,  $\|\delta b\| = 0$ , 则

$$\begin{aligned}\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} &\leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \\ &= \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} (1 + O(\|\delta A\|)).\end{aligned}$$

**定理 7.20** 设  $AX=b, b \neq 0$ , 则方程组近似解  $X$  的事后误差估计式

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|b - AX\|}{\|b\|} \leq \frac{\|X - X\|}{\|X\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|b - AX\|}{\|b\|}.$$

## 二、基本要求

1) 对每一个方法,应弄清它的基本思想,适用范围,计算公式以及对于误差的估计.

2) 掌握 Gauss 消去法及 Gauss 列主元消去法,能用这两种方法求解方程组及计算矩阵的行列式.

3) 掌握 Doolittle 分解法的唯一可分的充分条件,分解形式,计算次序和算法的稳定性.

4) 掌握对称正定矩阵的 Cholesky 分解的分解形式,计算次序,  $LL^T$  分解的唯一性条件和计算的数值稳定性.

5) 掌握三对角方程组的追赶法的分解形式,计算次序,可分唯一性和数值稳定性的充分条件.

6) 掌握向量和矩阵范数,矩阵的条件数的定义,了解它们的性质,能利用条件数判别方程组是否病态以及对方程组的直接方法的误差进行估计.

## 三、例题选讲

**例 1** 用 Gauss 消去法解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 + 30x_3 = 32. \end{cases}$$

解 实际计算时,只须对增广矩阵

$$[\mathbf{A}^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(1)}] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 30 & 32 \end{array} \right]$$

进行行初等变换.用  $E_i$  表示增广矩阵的第  $i$  行,用  $E_i + \alpha E_j \rightarrow E_i$  表示第  $j$  行乘数  $\alpha$  加至第  $i$  行.

对  $[\mathbf{A}^{(1)} \mid \mathbf{b}^{(1)}]$  执行行变换

$$E_2 - \frac{3}{2}E_1 \rightarrow E_2, E_3 - 2E_1 \rightarrow E_3.$$

得到

$$[\mathbf{A}^{(2)} \mid \mathbf{b}^{(2)}] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0.5 & -4 & -4 \\ 0 & -3 & 22 & 20 \end{array} \right]$$

再进行行变换

$$E_3 + 6 \rightarrow E_3$$

得

$$[\mathbf{A}^{(3)} \mid \mathbf{b}^{(3)}] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 6 \\ & 0.5 & -4 & -4 \\ & & -2 & -4 \end{array} \right].$$

至此已产生三角形方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ 0.5x_2 - 4x_3 = -4, \\ -2x_3 = -4, \end{cases}$$

消去过程完结.然后实现回代过程,求出方程组的解:

$$x_3 = 2,$$

$$x_2 = \frac{-4 + 4x_3}{0.5} = 8,$$

$$x_1 = \frac{6 - 3x_2 - 4x_3}{2} = -13.$$

例 2 用 Gauss 列主元素消去法解方程组

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 10 & -7 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

**解** 第一步列主元为 10.

先将第一行与第二行交换,再消去  $x_1$ ,得

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 6 \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ \frac{61}{10} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

第二步列主元为  $\frac{5}{2}$ .

将第二行与第三行交换,再消去  $x_2$ ,得

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 \\ 0 & 0 & \frac{31}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{31}{5} \end{bmatrix}.$$

回代求解得  $x_3=1, x_2=-1, x_1=0$ .

**例 3** 用列主元素法求如下矩阵  $A$  的行列式,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

**解** 由 Gauss 列主元消去法有

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

故  $\det \mathbf{A} = (-1) \times 3 \times \left[-\frac{7}{3}\right] \times (-4) = -28$ .

**例 4** 用 Gauss 消去法作出矩阵  $\mathbf{A}$  的  $\mathbf{LU}$  分解和  $\mathbf{LDU}$  分解 ( $\mathbf{L}$  为单位下三角阵,  $\mathbf{U}$  为单位上三角阵,  $\mathbf{D}$  为对角阵), 其

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**解** 用 Gauss 消去法, 因  $a_{11}^{(1)} = 2 \neq 0$ , 则存在消元阵  $\mathbf{L}_1$ , 使

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(2)}.$$

又因  $a_{22}^{(2)} = \frac{5}{2} \neq 0$ , 故存在消元阵  $\mathbf{L}_2$ , 使

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_2 \mathbf{A}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3.4 \end{bmatrix} = \mathbf{U}. \end{aligned}$$

于是有

$$\mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}.$$

所以  $\mathbf{A} = \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3.4 \end{bmatrix} = \mathbf{LU}.$

又因为

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

所以有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LDU.$$

**例 5** 证明单位下三角阵的逆、积还是单位下三角阵.

**证 设**

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & \ddots & & \\ \cdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

为单位下三角阵,则

$$|L| = 1.$$

而  $L$  的逆

$$L^{-1} = \frac{1}{|L|} L^* = L^*,$$

其中

$$L^* = \begin{bmatrix} L_{11} & \cdots & L_{n1} \\ \cdots & & \cdots \\ L_{n1} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix},$$

$L_{ij}$  为  $l_{ij}$  的代数余子式,  $L^*$  为  $L$  的伴随矩阵. 因为  $L$  为单位下三角

阵, 所以  $L_{ii}=1$ , 而当  $i>j$  时,  $L_{ij}=0$ , 于是

$$L^{-1}=L^*=\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ L_{12} & 1 & & \\ \cdots & \ddots & \ddots & \\ L_{1n} & \cdots & L_{n-1,n} & 1 \end{bmatrix}.$$

从而证得  $L^{-1}$  为单位下三角阵.

再由矩阵乘法运算, 可证单位下三角阵之积仍为下三角阵. 事实上, 设  $A=(a_{ij})$  及  $B=(b_{ij})$  为  $n$  阶单位下三角阵, 即当  $i<j$  时,  $a_{ij}=b_{ij}=0$ , 记  $AB=C=(c_{ij})$ . 由矩阵乘法, 可知  $c_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ , 下证

$$c_{ij}=0 (i<j).$$

因为, 当  $k<j$  时有  $b_{kj}=0$ ; 当  $k\geq j$  时, 因  $j>i$ , 故  $k>i$ , 也有  $a_{ik}=0$ . 故得  $c_{ij}=0$  (当  $i<j$  时), 显然  $C$  的对角线上的元  $c_{ii}=1$ , 即  $C$  为单位下三角阵. 证毕.

**例 6** 用紧凑格式分解如下矩阵为  $LU$  之积

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**解** 设

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

利用公式(7.6)求  $u_{ij}, l_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 3$ ), 为了不死记公式(7.6), 不妨列表

$$\begin{array}{ccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21} & \left[ \begin{array}{cc} u_{22} & u_{23} \end{array} \right] \\ l_{31} & \left[ \begin{array}{c} l_{32} \left[ \begin{array}{c} u_{33} \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array}$$

$$u_{11}=a_{11}=2, \quad u_{12}=a_{12}=-1, \quad u_{13}=a_{13}=-1,$$

$$\begin{aligned}
l_{21} &= a_{21}/u_{11} = -\frac{1}{2}, \quad l_{31} = a_{31}/u_{11} = 3/2, \\
u_{22} &= a_{22} - l_{21} u_{12} = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)(-1) = \frac{3}{2}, \\
l_{32} &= (a_{32} - l_{31} u_{12})/u_{22} = \left[0 - \frac{3}{2}(-1)\right]/1.5 = 1, \\
u_{33} &= a_{33} - (l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23}) \\
&= 3 - \left[\frac{3}{2}(-1) + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 5.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
L &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}. \\
U &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

**例 7** 用平方根法及改进的平方根法解方程组

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + 4.25x_2 + 2.75x_3 = -0.5, \\ x_1 + 2.75x_2 + 3.5x_3 = 1.25. \end{cases}$$

**解** 因系数矩阵是对称的且顺序主子式

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = 16 > 0, \quad \Delta_3 = 16 > 0.$$

故方程组为正定方程组. 按照算法(7.9),

$$j=1: l_{11} = (a_{11})^{1/2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$l_{21} = a_{21}/l_{11} = -1/2 = -0.5,$$

$$l_{31} = a_{31}/l_{11} = 1/2 = 0.5.$$

$$j=2: l_{22} = (a_{22} - l_{21}^2)^{1/2} = (4.25 - (-0.5)^2)^{1/2} = 2,$$

$$l_{32} = (a_{32} - l_{31} l_{21}) / l_{22} = (2.75 - 0.5 \times (-0.5)) / 2 = 1.5, \\ j=3: l_{33} = (a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2)^{1/2} = (3.5 - (0.5)^2 - (1.5)^2)^{1/2} = 1.$$

因此,系数矩阵的  $LL^T$  分解为

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ -0.5 & 2 & \\ 0.5 & 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0.5 \\ & 2 & 1.5 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

解  $LY=b$ , 得

$$y_1 = b_1 / l_{11} = 6 / 2 = 3, \\ y_2 = \frac{b_2 - l_{21} y_1}{l_{22}} = \frac{-0.5 - (-0.5) \times 3}{2} = 0.5, \\ y_3 = \frac{b_3 - l_{31} y_1 - l_{32} y_2}{l_{33}} = \frac{1.25 - 0.5 \times 3 - 1.5 \times 0.5}{1} = -1.$$

解  $L^T X=Y$  得

$$x_3 = \frac{y_3}{l_{33}} = -1 / 1 = -1, \\ x_2 = \frac{y_2 - l_{22} x_3}{l_{22}} = \frac{0.5 - 1.5 \times (-1)}{2} = 1, \\ x_1 = \frac{y_1 - l_{12} x_2 - l_{13} x_3}{l_{11}} = \frac{3 - (-0.5) \times 1 - 0.5 \times (-1)}{2} = 2.$$

得方程组解为  $X^* = (2, 1, -1)^T$ .

再用改进的平方根法解此题. 用算式(7.11),

$$i=1: d_1 = a_{11} = 4.$$

$$i=2: t_{21} = a_{21} = -1, l_{21} = t_{21} / d_1 = -1/4 = -0.25,$$

$$d_2 = a_{22} - t_{21} l_{21} = 4.25 - (-1) \times (-0.25) = 4.$$

$$i=3: t_{31} = a_{31} = 1,$$

$$t_{32} = a_{32} - t_{31} l_{21} = 2.75 - 1 \times (-0.25) = 3,$$

$$l_{31} = t_{31} / d_1 = 1/4 = 0.25,$$

$$l_{32} = t_{32} / d_2 = 3/4 = 0.75,$$

$$d_3 = a_{33} - t_{31} l_{31} - t_{32} l_{32} = 3.5 - 1 \times 0.25 - 3 \times 0.75 = 1.$$

因此 
$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -0.25 & 1 & & \\ 0.25 & 0.75 & 1 & \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A = LDL^T.$$

解  $LY=b$ , 得

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 = 6, \\ y_2 &= b_2 - l_{21} y_1 = -0.5 - (-0.25) \times 6 = 1, \\ y_3 &= 1.25 - 0.25 \times 6 - 0.75 \times 1 = -1. \end{aligned}$$

解  $DL^T X=Y$ , 得

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{y_3}{d_3} = -1/1 = -1, \\ x_2 &= \frac{y_2}{d_2} - l_{32} x_3 = \frac{1}{4} - 0.75 \times (-1) = 1, \\ x_1 &= \frac{y_1}{d_1} - l_{21} x_2 - l_{31} x_3 \\ &= \frac{6}{4} - (-0.25) \times 1 - 0.25 \times (-1) = 2. \end{aligned}$$

注:  $LDL^T$  分解法与  $LL^T$  分解法相比, 计算量相近, 不需作开方运算, 在实际计算中, 求解系数矩阵正定的线性代数方程组, 广泛使用平方根法及改进的平方根法.

**例 8** 用平方根法求解线性方程组  $AX=b$ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} n \\ n-1 \\ n-2 \\ \cdots \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

解 设  $A=LL^T$ . 用平方根法的计算公式为

$$l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}^2)^{1/2}, \quad j=1, 2, \cdots, n,$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}, \quad i=j+1, \dots, n.$$

由于  $A$  对称, 且  $a_{jj} = j, a_{ij} = j (i > j)$ ,

从而可用归纳法证明所有  $l_{ij} = 1 (i \geq j)$ .

事实上,

$$l_{11} = a_{11} = 1, l_{i1} = a_{i1} = 1, \quad i=2, \dots, n.$$

现设  $l_{jj} = 1, l_{ij} = 1 (i > j)$ , 则

$$\begin{aligned} l_{j+1, j+1} &= (a_{j+1, j+1} - \sum_{k=1}^j l_{j+1, k}^2)^{1/2} \\ &= (j+1 - \sum_{k=1}^j 1)^{1/2} = (j+1-j)^{1/2} = 1, \\ l_{i, j+1} &= \frac{a_{i, j+1} - \sum_{k=1}^j l_{ik} l_{j+1, k}}{l_{j+1, j+1}}, \quad i > j+1 \\ &= \frac{j+1-j}{1} = 1. \end{aligned}$$

从而

$$A = LL^T = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \cdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \cdots \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$LL^T X = b \Rightarrow (i) \quad LY = b, (ii) \quad L^T X = Y,$$

其中  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ .

利用算法(7.10)解(i)得

$$y_1 = n, y_2 = y_3 = \cdots = y_n = -1.$$

利用算法(7.10)再解(ii)得

$$x_n = -1, x_{n-1} = x_{n-2} = \cdots = x_2 = 0, x_1 = n+1.$$

**例 9** 用追赶法求解如下三对角方程组:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

解 设

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & \\ & l_3 & 1 & \\ & & l_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & d_1 & & \\ & u_2 & d_2 & \\ & & u_3 & d_3 \\ & & & u_4 \end{bmatrix}.$$

由分解公式(7.15)计算得

$$d_1=1, \quad d_2=1, \quad d_3=1.$$

$$u_1=2, \quad l_2=\frac{1}{2}, \quad u_2=\frac{5}{2}, \quad l_3=\frac{2}{5},$$

$$u_3=\frac{3}{5}, \quad l_4=\frac{10}{3}, \quad u_4=-\frac{7}{3}.$$

求解

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ & \frac{2}{5} & 1 & \\ & & \frac{10}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

利用计算公式(7.16)得

$$y_1=1, \quad y_2=\frac{3}{2}, \quad y_3=\frac{7}{5}, \quad y_4=-\frac{14}{3}.$$

利用计算公式(7.17)再求解

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & \frac{5}{2} & 1 & \\ & & \frac{3}{5} & 1 \\ & & & -\frac{7}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{7}{5} \\ -\frac{14}{3} \end{bmatrix},$$

得

$$x_4=2, \quad x_3=-1, \quad x_2=1, \quad x_1=0.$$

**例 10** 设  $A$  是对称正定矩阵, 又设经过 Gauss 消去法一步

后,  $A$  约化为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

其中  $A = (a_{ij})_n, A_2 = (a_{ij}^{(2)})_{n-1}$ . 证明:

(1)  $A$  的对角元素  $a_{ii} > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ .

(2)  $A_2$  是对称正定矩阵.

(3)  $a_{ii}^{(2)} \leq a_{ii} (i=2, 3, \dots, n)$ .

(4)  $A$  的绝对值最大的元素必在对角线上.

(5)  $\max_{2 \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(2)}| \leq \max_{2 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$ .

(6) 举出  $2 \times 2$  对称正定矩阵的例子, 说明不选主元的 Gauss 消去法中乘数  $l_{ij}$  可以是很大.

证 (1) 因为  $A$  对称正定, 所以

$$0 < (Ae_i, e_i) = a_{ii} (i=1, 2, \dots, n),$$

其中  $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ .

(2)  $A_2$  的对称性将在“习题”的第 2 题给出证明, 此处仅证  $A_2$  的正定性.

假设  $A$  对称正定, 且  $L$  非奇异, 则  $LAL^T$  也对称正定. 事实上, 对称性显然. 因  $\forall X \neq 0$  则  $XL \neq 0$ . 而  $A$  正定, 则有

$$X(LAL^T)X^T = (XL)A(XL)^T > 0.$$

故  $LAL^T$  正定.

$$\text{又 } A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = L_1 A, \text{ 其中 } L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{\alpha_1}{a_{11}} & 1 & & \\ \dots & 0 & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

显然  $L_1$  非奇异, 所以

$$L_1 A L_1^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

由上证知  $L_1 A L_1^T$  正定, 则  $A_2$  也正定.

(3) 因  $A$  正定, 所以  $a_{11} > 0$ ,

$$a_{ii}^{(2)} = a_{ii} - \frac{a_{i1}^2}{a_{11}} = a_{ii} - \frac{a_{i1}^2}{a_{11}} \leq a_{ii} \quad (i=2, 3, \dots, n).$$

(4) 用反证法. 假设  $|a_{i_0 j_0}| = \max_{i, j} |a_{ij}|$  ( $i \neq j$ ).

取  $X = (0, \dots, 0, -1, 0, \dots, \text{sgn}(a_{i_0 j_0}), 0, \dots, 0)^T$ , 则

$$\begin{aligned} X^T A X &= a_{i_0 i_0} - \text{sgn}(a_{i_0 j_0}) \cdot a_{i_0 j_0} - a_{i_0 j_0} \text{sgn}(a_{i_0 j_0}) + a_{j_0 j_0} \\ &= a_{i_0 i_0} - 2|a_{i_0 j_0}| + a_{j_0 j_0} \leq 0 \end{aligned}$$

与  $A$  正定矛盾.

$$\begin{aligned} (5) \text{ 因 } \max_{2 \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(2)}| &= \frac{\text{由(4)}}{\max_{2 \leq i \leq n} |a_{ii}^{(2)}|} \max_{2 \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(2)}| = \frac{\text{由(1), (2)}}{\max_{2 \leq i \leq n} a_{ii}^{(2)}} \max_{2 \leq i, j \leq n} a_{ij}^{(2)} \\ &\stackrel{\text{由(3)}}{\leq} \max_{2 \leq i \leq n} a_{ii} = \max_{2 \leq i \leq n} |a_{ii}| = \max_{2 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|. \end{aligned}$$

(6) 例如, 对于下述对称正定矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0.000064 & 0.006873 \\ 0.006873 & 1.000000 \end{bmatrix}$$

有大的乘数  $l_{21} = 107.391$ , 但约化矩阵的最大元素并不增长, 如  $a_{22}^{(2)} = 0.361902$ .

**例 11** 设  $A_n$  为对称正定阵, 又设

$$A_{n-1} = L_{n-1} D_{n-1} L_{n-1}^T,$$

其中  $A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{bmatrix}$ ,  $L_{n-1}$  为单位下三角阵,  $D_{n-1}$  为具有正对角

元的对角阵. 求证  $A_n$  下述分解存在

$$\begin{cases} A_n = L_n D_n L_n^T, \\ L_n = \begin{bmatrix} L_{n-1} & \mathbf{0} \\ C_{n-1}^T & 1 \end{bmatrix}, D_n = \begin{bmatrix} D_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & d_n \end{bmatrix}, d_n > 0. \end{cases}$$

且确定出  $C_{n-1}^T$  及  $d_n$ .

解 事实上,若

$$\begin{aligned} A_n &= \begin{bmatrix} A_{n-1} & \alpha_1 \\ \alpha_1^T & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n-1} & 0 \\ C_{n-1}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{n-1} & 0 \\ 0 & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{n-1}^T & C_{n-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{n-1} D_{n-1} L_{n-1}^T & L_{n-1} D_{n-1} C_{n-1} \\ C_{n-1}^T D_{n-1} L_{n-1}^T & C_{n-1}^T D_{n-1} C_{n-1} + d_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

于是应有

$$A_{n-1} = L_{n-1} D_{n-1} L_{n-1}^T, \quad (7.18)$$

$$\alpha_1 = L_{n-1} D_{n-1} C_{n-1}, \quad (7.19)$$

$$a_{nn} = d_n + C_{n-1}^T D_{n-1} C_{n-1}. \quad (7.20)$$

上述(7.18)式由题设是成立的.而由(7.19)式我们可解出

$$C_{n-1} = D_{n-1}^{-1} L_{n-1}^{-1} \alpha_1. \quad (7.21)$$

从而又由(7.20)可得

$$d_n = a_{nn} - C_{n-1}^T D_{n-1} C_{n-1} \quad (7.22)$$

于是由(7.21)、(7.22)式即得  $A_n$  的分解式.

**例 12** 证明:

(1) 如果  $A$  是对称正定阵,则  $A^{-1}$  也是对称正定阵.

(2) 如果  $A$  是对称正定阵,则  $A$  可唯一地写成形式  $A = L^T L$ , 其中  $L$  是具有正对角元的下三角阵.

**证** (1) 由题设有  $A^T = A, A^T = A^{-1}$ , 则

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}.$$

故  $A^{-1}$  对称, 又  $\forall X \neq 0$ , 有  $Y = A^{-1} X \neq 0$ , 且

$(A^{-1} X, X) = (Y, AY) > 0$ , (因  $A$  为对称正定) 即  $A^{-1}$  为对称正定阵.

(2) 由(1)知  $A$  对称正定, 则  $A^{-1}$  也对称正定. 由定理(7.6)

$$A^{-1} = L L^T,$$

其中  $L$  是具有正对角元的下三角阵, 所以,

$$A = (L^T)^{-1} L^{-1} = (L^{-1})^T L^{-1} = L^T L \quad (L = L^{-1}).$$

因  $L$  是具有正对角元的下三角阵, 故  $L = L^{-1}$  也是具有正对角元

的下三角阵.

**例 13** 说明解方程组的 Gauss-Jordan 方法大约需要  $\frac{n^3}{2}$  次乘除法运算.

**解** 算主行元素需  $n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$  次乘法. 第  $k$  步约化需  $(n-1)(n-k)$  次乘法 ( $k=1, \cdots, n-1$ ).  
故乘法次数:

$$(n-1) \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{2}.$$

总的乘除法次数:

$$\frac{n(n-1)(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \approx \frac{n^3}{2}.$$

所以解方程组的 Gauss-Jordan 方法约需  $\frac{n^3}{2}$  次乘除法运算.

**例 14** 设

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & & & 0 \\ & a_2 & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & & & & 1 & a_n \end{bmatrix},$$

证明  $A$  能分解成  $A = LDL^T$ , 其中

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ c_2 & 1 & & & \\ & c_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & c_n & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_n \end{bmatrix}.$$

$d_1 = a_1, c_{k+1} = 1/d_k, d_{k+1} = a_{k+1} - c_{k+1}$  (假设  $d_k \neq 0, c_1 = 0$ ).

(2) 利用(1)对矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

进行分解.

解 (1) 确定  $c_k, d_k$  使

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ c_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & c_n & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_2 & & & \\ & 1 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & c_n \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ d_1 c_2 & d_2 & & & \\ & d_2 c_3 & d_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & d_{n-1} c_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_2 & & & \\ & 1 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & c_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由此得  $d_1 = a_1, d_k c_{k+1} = 1, c_{k+1} = 1/d_k$  (当  $d_k \neq 0$ ), (7.23)

$$a_{k+1} = d_{k+1} + d_k c_{k+1} c_{k+1} = d_{k+1} + c_{k+1},$$

即  $d_{k+1} = a_{k+1} - c_{k+1}$  ( $k=1, 2, \dots, n-1$ ). (7.24)

从而当  $d_k \neq 0$  ( $k=1, 2, \dots, n-1$ ) 时, 实现了分解

$$A = LDL^T.$$

其中 
$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ c_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & c_n & 1 & \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_n & & \end{bmatrix}.$$

且  $c_i$ 、 $d_i$  由公式(7.23)、(7.24)计算.

(2) 由公式(7.23)、(7.24)直接计算得  $A=LDL^T$ , 其中

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \frac{1}{2} & 1 & \\ & & & \frac{2}{7} & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \frac{7}{2} & \\ & & & & \frac{33}{7} \end{bmatrix}.$$

**例 15** 举例说明一个非奇异矩阵不一定存在  $LU$  分解.

**解** 设  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . 显然  $A$  是非奇异矩阵, 若  $A$  存在  $LU$  分解, 则

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & ae \\ bd & be+cf \end{bmatrix}.$$

比较两边, 有  $ad=0$ , 则  $a=0$  或者  $d=0$ . 若  $a=0$ , 则  $ae=0$ , 与  $ae=1$  矛盾; 若  $d=0$ , 则  $bd=0$  与  $bd=1$  矛盾. 所以

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

不存在  $LU$  分解.

注: 此例说明并非非奇异矩阵都有  $LU$  分解. 但从下例又可看到, 非奇异矩阵只要适当经过行的对调, 可保证  $LU$  分解存在.

**例 16** 给定

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

求  $A$  的  $PLU$  分解.

**解** 因为  $A$  的一、二阶主子行列式都为 0, 取  $P_{13}$ 、 $P_{24}$ , 使

$$\mathbf{P}_{13}\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{24}\mathbf{P}_{13}\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

可知  $\mathbf{P}_{24}\mathbf{P}_{13}\mathbf{A}$  的各阶主子行列式都不为 0, 故有唯一的  $\mathbf{LU}$  分解, 其中  $\mathbf{L}$  是单位下三角矩阵, 即

$$\mathbf{P}_{24}\mathbf{P}_{13}\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

记上式右端第一个矩阵为  $\mathbf{L}$ , 第二个矩阵为  $\mathbf{U}$ , 记  $\mathbf{P}=\mathbf{P}_{24}\mathbf{P}_{13}$ , 则

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

故  $\mathbf{A}=\mathbf{PLU}$ .

还可给出  $\mathbf{A}$  的另一种  $\mathbf{PLU}$  分解: 取  $\mathbf{P}_{14}$ 、 $\mathbf{P}_{23}$ , 使

$$\mathbf{P}_{14}\mathbf{P}_{23}\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

上式右端各阶主子行列式都不为 0, 作  $\mathbf{LU}$  分解,

$$P_{14} P_{23} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$P = P_{14} P_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A = PLU.$$

注:在实际计算时,置换矩阵  $P$  不是立刻就能找到的,而是通过求若干个初等置换矩阵和求三角分解穿插进行.  $P^T = P^{-1}$ .

**例 17** 设  $m \times n$  阶矩阵  $A$  的各列线性无关,则有  $A = QR$ , 其中  $R$  为单位上三角方阵,  $Q^T Q = D$  为对角阵.

**证** 因  $A$  的各列线性无关,可知  $A^T A$  为对称正定矩阵,则必有  $LDL^T$  分解,其中  $L$  为单位下三角阵,  $D$  为主对角元均非零的对角阵,即  $A^T A = LDL^T$ . 记  $Q = A(L^T)^{-1}$ , 从而  $A = QL^T$ , 因  $(L^T)^{-1} = (L^{-1})^T$ , 故

$$\begin{aligned} Q^T Q &= (A \cdot (L^T)^{-1})^T \cdot (A(L^T)^{-1}) \\ &= L^{-1} A^T \cdot A(L^T)^{-1} = L^{-1} \cdot LDL^T (L^T)^{-1} = D. \end{aligned}$$

令  $L^T = R$ , 则  $R$  是单位上三角矩阵, 则  $A = QR$ .

**例 18** 如果  $U$  是正交矩阵又是下(或上)三角矩阵, 则  $U$  必为对角矩阵, 且其对角线元素为  $\pm 1$ .

**证** 不妨设  $U$  是下三角矩阵, 且  $U$  是正交矩阵, 即  $U^T U = I$ , 由例 5 知  $U^{-1}$  也是下三角矩阵, 故  $U^T$  也是下三角矩阵, 因  $U$  和  $U^T$  均为三角矩阵. 故  $U$  必为对角阵.

记  $U = \text{diag}(u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn})$ . 则

$$U^{-1} = \text{diag}\left[\frac{1}{u_{11}}, \frac{1}{u_{22}}, \dots, \frac{1}{u_{nn}}\right],$$

又  $\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{U} = \text{diag}(u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn})$ .

故  $u_{ii} = \frac{1}{u_{ii}}, \rightarrow u_{ii} = \pm 1, \quad i=1, \dots, n$ .

即  $\boldsymbol{U}$  的对角线元素为  $\pm 1$ .

**例 19** 求上三角矩阵  $\boldsymbol{U}$ , 使得  $\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}$ , 其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}.$$

并通过此三角分解求  $\boldsymbol{A}^{-1}$ .

**解** 由计算公式(7.9)求得  $\boldsymbol{U}$  的各元素. 即

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{3} & \sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & \sqrt{5}/3 & \sqrt{5}/4 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{7}/4 \end{bmatrix}.$$

利用  $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^T$  分解, 逆矩阵

$$\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{U}^T)^{-1} \boldsymbol{U}^{-1} = (\boldsymbol{U}^{-1})^T \boldsymbol{U}^{-1}.$$

故只要求出  $\boldsymbol{U}^{-1}$  即可. 则计算得

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4/3 & -2/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 32/15 & -6/5 & 0 \\ 0 & -6/5 & 108/35 & -12/7 \\ 0 & 0 & -12/7 & 16/7 \end{bmatrix}.$$

**例 20** 设

$$A = \begin{bmatrix} \beta_1 & c_1 & & & \\ c_1 & \beta_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-2} & \beta_{n-1} & c_{n-1} \end{bmatrix},$$

其中  $c_i < 0, \beta_i > -c_i, \beta_i > -c_{n-1}, \beta_i \geq -(c_i + c_{i+1}), i=1, 2, \dots, n-1$ , 求证  $A$  为正定矩阵.

**证** 记上述矩阵  $A$  为  $A_n$ , 用数学归纳法证之. 当  $n=2$  时, 由  $|A_1| = \beta_1 > -c_1 > 0$ , 得  $|A_2| = \beta_1 \beta_2 - c_1^2 > 0$ . 设当  $n=k$  时,  $|A_k| = 0$ , 则当  $n=k+1$  时,

$$\begin{aligned} |A_{k+1}| &= \begin{vmatrix} \beta_1 & c_1 & & & \\ c_1 & \beta_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_k \\ & & & c_k & \beta_{k+1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \beta_1 & c_1 & & & \\ c_1 & \beta_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{k-1} & \beta_k - \frac{c_k^2}{\beta_{k+1}} & 0 \\ & & & c_k & \beta_{k+1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

右端的行列式是由前一行列式的第  $k+1$  行乘以  $-c_k/\beta_{k+1}$  加到第  $k$  行的结果, 从而

$$|A_{k+1}| = \beta_{k+1} \begin{vmatrix} \beta_1 & c_1 & & & \\ c_1 & \beta_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{k-1} \\ & & & c_{k+1} & \beta_k^* \end{vmatrix} = \beta_{k+1} |A_k^*|.$$

(7.25)

其中  $\beta_k^* = \beta_k - \frac{c_k^2}{\beta_{k+1}}$ ,  $|\mathbf{A}_k^*|$  即上式右端的行列式值.

$$\begin{aligned} \text{因 } \beta_k^* + c_{k-1} &= \beta_k - \frac{c_k^2}{\beta_{k+1}} + c_{k-1} \\ &\geq -c_k - c_{k-1} - \frac{c_k^2}{\beta_{k+1}} + c_{k-1} = -c_k \cdot \frac{\beta_{k+1} + c_k}{\beta_{k+1}}, \end{aligned}$$

而矩阵  $\mathbf{A}_{k+1}$  满足题设条件, 故  $\beta_{k+1} > -c_k > 0$ . 再注意到  $c_k < 0$ , 故  $\beta_k^* > -c_{k-1} > 0$ , 即  $\mathbf{A}_k^*$  也满足题设条件. 由于  $\mathbf{A}_k^*$  是  $k$  阶矩阵, 由归纳假设,  $|\mathbf{A}_k^*| > 0$ , 由 (7.25) 式, 得  $|\mathbf{A}_{k+1}| = \beta_{k+1} |\mathbf{A}_k^*| > 0$ , 说明  $\mathbf{A}$  的各阶顺序主子式皆大于零, 即  $\mathbf{A}$  正定.

**例 21** 设方程组  $\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{b}$  的系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma_1 & & & \beta \\ \beta & \alpha & \gamma_2 & 0 & * \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ \gamma_n & * & \dots & \beta_n & \alpha_n \end{bmatrix},$$

其中“\*”表示某实数, 即  $\mathbf{A}$  的  $n-1$  阶主子矩阵是三对角的. 试用追赶法给出求解上述方程组的一个方案.

**解** 设  $\mathbf{B}_{n-1}$  为  $\mathbf{A}$  的  $n-1$  阶主子矩阵, 即

$$\mathbf{B}_{n-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma_1 & & & \\ \beta & \alpha & \gamma_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-2} & \gamma_{n-1} \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

则对  $\mathbf{B}_{n-1}$  可用追赶法作三角分解, 设分解为

$$\mathbf{B}_{n-1} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}.$$

其中

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & p_n & & & \\ & & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & p_{n-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} d_1 & r_2 & & & \\ & d_2 & r_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & r_{n-2} \\ & & & & d_{n-1} \end{bmatrix}.$$

令  $u = (\gamma_n, *, \dots, \beta_n)^T$ ,  $v = (\beta_1, *, \dots, \gamma_{n-1})^T$ ,  $u, v$  都是  $n-1$  维向量, 于是

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} B_{n-1} & v \\ u^T & \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ W^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & Z \\ 0^T & d_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} PQ & PZ \\ W^T Q & W^T Z + d_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

因此, 可将计算步骤归纳如下:

1° 对  $B_{n-1}$  用追赶法求出三角分解, 即求出  $P, Q$ .

2° 解方程组  $PZ = v$ ,  $W^T Q = u^T$  (即  $u = Q^T W$ ), 此处  $P, Q^T$  都是已求出的下三角方阵.

3° 由  $W^T Z + d_n = \alpha_n$ , 求出  $d_n = \alpha_n - W^T Z$ . 以上即完成了对  $A$  的三角分解. 再令

$$S = \begin{bmatrix} P & 0 \\ W^T & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} Q & Z \\ 0^T & d_n \end{bmatrix}.$$

4° 再解  $SY = b$  和  $TX = Y$  即可求出  $X$ .

**例 22** 设  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为对称正定阵, 定义

$$\|X\|_A = (AX, X)^{1/2}.$$

试证明  $\|X\|_A$  为  $\mathbf{R}^n$  上向量的一种范数.

**证** 由  $A$  的对称正定性, 有  $A = LL^T$ ,  $L$  为非奇异下三角阵. 所以

$$\begin{aligned} \|X\|_A &= (AX, X)^{1/2} = (L \cdot L^T X, X)^{1/2} \\ &= (L^T X, L^T X)^{1/2} = \|L^T X\|_2. \end{aligned}$$

而对  $\|X\|_A = \|L^T X\|_2$ , 可证明满足范数的定义. 其证明过程见

习题 18. 故  $\|X\|_A = (AX, X)^{1/2}$  是  $\mathbf{R}^n$  上向量的一种范数.

**例 23** 求一个矩阵  $A$ , 使得对任何矩阵范数  $\|\cdot\|$ , 都有  $\rho(A) \leq \|A\|$ .

**解** 只需举出如下性质的  $A$  即可.  $A$  不是零矩阵, 但  $A$  的全部特征值都是零. 例如

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

显然  $\|A\| > 0$ . 但  $\rho(A) = 0$ .

**例 24** 已知  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ .

(1) 求  $\|A\|_p, p=1, 2, \infty$ .

(2) 求  $A$  的谱半径  $\rho(A)$ .

(3) 求三个非零向量  $X$ , 分别满足

$$\|AX\|_p = \|A\|_p \|X\|_p, p=1, 2, \infty.$$

**解** (1)  $\|A\|_1 = \max(4, 6) = 6, \|A\|_\infty = \max(3, 7) = 7,$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{bmatrix}.$$

由  $|A^T A - \lambda I| = 0$ , 得  $\lambda^2 - 30\lambda + 4 = 0$ . 解得  $\lambda = 15 \pm \sqrt{221}$ , 故

$$\|A\|_2 = \sqrt{15 + \sqrt{221}}.$$

(2) 由  $|A - \lambda I| = 0$ , 得  $\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$ , 解得  $\lambda = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{33})$ ,

故

$$\rho(A) = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{33}).$$

(3) 若满足  $\|AX\|_p = \|A\|_p \|X\|_p$  的解  $X$  存在, 则  $Y = \frac{X}{\|X\|_p}$ ,  $\|Y\|_p = 1$  也满足  $\|AY\|_p = \|A\|_p \|Y\|_p = \|A\|_p$ . 故按题目要求, 只须求出满足  $\|X\|_p = 1$  的解. 这时, 有

$$\begin{cases} \|X\|_1 = |x_1| + |x_2| = 1, \\ \|AX\|_1 = |x_1 + 2x_2| + |3x_1 + 4x_2| = \|A\|_1 = 6. \end{cases}$$

解此方程组得  $x_1 = 0, |x_2| = 1$ .

$$\begin{cases} \|X\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|) = 1, \\ \|AX\|_\infty = \max(|x_1 + 2x_2|, |3x_1 + 4x_2|) = \|A\|_\infty = 7. \end{cases}$$

解此方程组得  $x_1 = x_2 = \pm 1$ .

记  $\lambda = \rho(A^T A)$  是  $A^T A$  的最大特征值,  $X$  是相应的特征向量, 且  $\|X\|_2 = x_1^2 + x_2^2 = 1$ , 则

$$\begin{aligned} \|AX\|_2^2 &= (AX, AX) = (A^T AX, X) = (\lambda X, X) = \lambda \\ &= \rho(A^T A) = \|A\|_2^2. \end{aligned}$$

这表明  $X$  即为所求.

令  $A^T AX = \lambda X$ , 即

$$\begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (15 + \sqrt{221}) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

得 
$$\begin{cases} 14x_2 = (5 + \sqrt{221})x_1, \\ 14x_1 = (-5 + \sqrt{221})x_2, \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{14}{5 + \sqrt{221}} \triangleq b.$$

代入  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , 得

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{b^2 + 1}}, \quad x_1 = bx_2 = \pm b \sqrt{\frac{1}{b^2 + 1}},$$

其中  $b = \frac{14}{5 + \sqrt{221}}$ .

此  $X = (x_1, x_2)^T$  就是满足  $\|AX\|_2 = \|A\|_2, \|X\|_2 = 1$  的向量.

**例 25** 分别描述(画图)  $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$  中

$$S = \{X \mid \|X\|_v = 1, X \in \mathbf{R}^2\} \quad v = 1, 2, \infty.$$

**解**  $S_1 = \{X \mid \|X\|_1 = 1, X \in \mathbf{R}^2\}$  是平面一棱形, 如图 7.1 所示.

$S_2 = \{X \mid \|X\|_2 = 1, X \in \mathbf{R}^2\}$  是平面上单位圆, 如图

7.2 所示.

$S_3 = \{X \mid \|X\|_\infty = 1, X \in \mathbf{R}^2\}$  是平面上一正方形, 如图 7.3 所示.

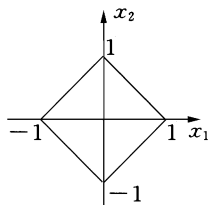


图 7.1

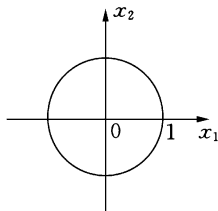


图 7.2

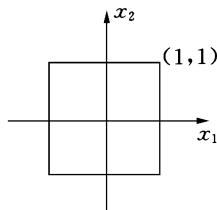


图 7.3

**例 26** 设矩阵  $A$  与矩阵  $B$  是对称的, 求证

$$\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B).$$

**证** 因  $A=A^T, B=B^T$ , 于是有

$$\|A\|_2 = \rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| = \lambda_i,$$

$$\|B\|_2 = \rho(B) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| = \lambda_i.$$

由于  $A+B=(A+B)^T$ , 所以

$$\rho(A+B) = \|A+B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2 = \rho(A) + \rho(B).$$

**例 27** 设矩阵  $A$  非奇异, 求证

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}.$$

**证** 因  $I=A^{-1}A$ , 故

$$1 = \|A^{-1}A\| \leq \|A^{-1}\| \|A\|,$$

于是有

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}.$$

**例 28** 设矩阵  $A$  可逆,  $\delta A$  为误差, 试证当  $\|A^{-1}\delta A\| < 1$  时,  $A+\delta A$  也可逆.

**证** 考虑行列式

$$\begin{aligned} |A^{-1}| |A+\delta A| &= |A^{-1}(A+\delta A)| = |A^{-1}A + A^{-1}\delta A| \\ &= |I + A^{-1}\delta A|. \end{aligned}$$

因当  $\|A^{-1}\delta A\| < 1$  时, 知  $I + A^{-1}\delta A$  可逆, 则

$$|A^{-1}| |A + \delta A| = |I + A^{-1}\delta A| \neq 0,$$

故  $|A + \delta A| \neq 0$ , 从而矩阵  $A + \delta A$  可逆.

**例 29** 设有方程组  $AX = b$ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

已知它有解  $X = \left[ \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0 \right]^T$ , 如果右端有小扰动  $\|\delta b\|_\infty = \frac{1}{2} \times 10^{-6}$ , 试估计由此引起的解的相对误差.

$$\text{解 } A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1.5 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ 从而 } \text{cond}(A)_\infty = 22.5.$$

由公式  $\frac{\|\delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \text{cond}(A)_\infty \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$ , 有

$$\frac{\|\delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq 22.5 \times \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-6}}{2/3} = 1.6875 \times 10^{-5}.$$

**例 30** 设矩阵  $C_0$  是矩阵  $A^{-1}$  的一个近似, 记  $R_0 = I - AC_0$ , 又设  $\|R_0\| < 1$ , 试证由迭代公式  $\begin{cases} C_{k+1} = C_k(I + R_k), \\ R_{k+1} = I - AC_{k+1} \end{cases}$  产生的矩阵序列  $\{C_k\}$  收敛于  $A^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \text{证 因 } R_0 &= I - AC_0 = I - AC_0(I + R_0) \\ &= I - AC_0 - AC_0 R_0 = R_0 - AC_0 R_0 \\ &= R_0(I - AC_0) = R_0^2, \\ R_2 &= R_1^2 = R_0^4. \end{aligned}$$

用归纳法可证: 若  $R_k = R_{k-1}^2$ , 则  $R_{k+1} = R_k^2$ . 故有  $R_k = R_0^{2^k}$ .

因  $\|R_0\| < 1$ , 故  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|R_0\|^{2^k} = 0$ . 则

$$\|R_k\| \leq \|R_0\|^{2^k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

即  $R_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$ .  $R_k = I - AC_k$ , 故当  $R_k \rightarrow 0$  时,  $C_k \rightarrow A^{-1}$ .

## 四、习题

1. 用 Gauss 消去法解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

2. (1) 设  $A$  是对称矩阵且  $a_{11} \neq 0$ , 经过 Gauss 消去法一步后,  $A$  约化为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{a}_1^T \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}.$$

证明  $\mathbf{A}_2$  是对称矩阵.

(2) 用 Gauss 消去法解对称方程组

$$\begin{cases} 0.6428x_1 + 0.3475x_2 - 0.8468x_3 = 0.4127, \\ 0.3475x_1 + 1.8423x_2 + 0.4759x_3 = 1.7321, \\ -0.8468x_1 + 0.4759x_2 + 1.2147x_3 = -0.86. \end{cases}$$

3. (1) 用表达式(7.4)证明

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(1)} - l_{i1} a_{1j}^{(1)} - l_{i2} a_{2j}^{(2)} - \cdots - l_{i,k-1} a_{k-1,j}^{(k-1)}, \quad i, j \geq k,$$

其中  $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$ .

(2) 使 Gauss 消去法中  $a_{rj}^{(r)} = u_{rj} \quad (j \geq r)$ , 利用(1)证明

$$\begin{aligned} u_{rj} &= a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{kj} \quad (j = r, r+1, \dots, n), \\ l_{ir} &= (a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr}) / u_{rr} \quad (i = r+1, \dots, n). \end{aligned}$$

4. 设方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 5x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 0, \\ 3x_1 - 0.1x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

(1) 试用 Gauss 全主元消去法求解.

(2) 试用 Gauss 列主元消去法求解.

5. 设  $A$  为  $n$  阶非奇异矩阵且有分解式  $A=LU$ , 其中  $L$  为单位下三角阵,  $U$  为上三角阵, 求证  $A$  的所有顺序主子式均不为零.

6. 由 Gauss 消去法证明: 当  $\Delta_i \neq 0 (i=1, 2, \dots, n-1)$  时, 则有  $A=LU$ , 其中  $L$  为单位下三角阵,  $U$  为上三角阵.

7. 设  $A$  为  $n$  阶矩阵, 若  $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| (i=1, 2, \dots, n)$ , 则称  $A$  为对角优势矩阵. 试证明: 设  $A$  是对角优势矩阵, 又设经过 Gauss 消去法一步后,  $A$  具有形式  $\begin{bmatrix} a_{11} & \alpha_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ , 则  $A_2$  是对角优势矩阵. 且由此推断: 对于对称的对角优势矩阵, 用 Gauss 消去法和部分(列)主元 Gauss 消去法可得到同样的结论.

8. 设  $L_k$  为指标是  $k$  的初等下三角矩阵, 即

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & m_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \dots & & \ddots & \\ & & m_{nk} & & & 1 \end{bmatrix}.$$

(除第  $k$  列对角元下元素外,  $L_k$  与单位阵  $I$  相同)

求证当  $i, j > k$  时,  $L_k = I_{ij} L_k I_{ij}$  也是一个指标为  $k$  的初等下三角矩阵, 其中  $I_{ij}$  为初等排列矩阵.

9. 试推导矩阵  $A$  的 Crout 分解的计算公式:  $A=LU$ , 其中  $L$  为下三角矩阵,  $U$  为单位上三角矩阵.

10. 设  $UX=b$ , 其中  $U$  为三角矩阵.

(1) 就  $U$  为上及下三角矩阵推导一般的求解公式.

(2) 计算解三角形方程组  $UX=b$  的乘除法次数.

(3) 设  $U$  为非奇异矩阵, 试推导求  $U^{-1}$  的计算公式.

11. 用平方根法(Cholesky 分解)解方程组

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

12. 用  $LDL^T$  分解法解方程组

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

13. 用追赶法解三对角方程组  $AX=b$ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

14. 求矩阵  $A$  的  $LU$  分解, 并利用分解结果计算  $A^{-1}$ .

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 8 \\ -4 & 18 & -16 \\ -6 & 2 & -20 \end{bmatrix}.$$

15. 下述矩阵能否分解为  $A=LU$ , 其中  $L$  为单位下三角矩阵,  $U$  为上三角矩阵. 若能分解, 那么分解是否唯一?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 15 \\ 6 & 15 & 46 \end{bmatrix}.$$

16. 设  $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$ , 计算  $A$  的行范数、列范数、2-范数及

$F$ -范数.

17. 求证:

$$(1) \quad \|X\|_{\infty} \leq \|X\|_1 \leq n \|X\|_{\infty},$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F.$$

18. 设  $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$  且为非奇异矩阵, 又设  $\|X\|$  为  $\mathbf{R}^n$  上一向量范数. 定义

$$\|X\|_P = \|PX\|.$$

试证明  $\|X\|_P$  是  $\mathbf{R}^n$  上向量的一种范数.

19. 设  $X \in \mathbf{R}^n, X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 求证:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \|X\|_{\infty}.$$

20. 证明: 当且仅当与  $Y$  线性相关且  $X^T Y \geq 0$  时, 才有

$$\|X+Y\|_2 = \|X\|_2 + \|Y\|_2.$$

21. 设  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 求证特征值相等

$$\lambda(A^T A) = \lambda(AA^T).$$

22. 证明: 如果  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  是按列分块的, 则

$$\|A\|_F^2 = \|\alpha_1\|_2^2 + \|\alpha_2\|_2^2 + \dots + \|\alpha_n\|_2^2.$$

23. 证明: 如果  $\|B\| < 1$ , 则  $\|I - (I - B)^{-1}\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}.$

24. 证明: 对任何矩阵算子范数有  $\|I\| = 1$  (其中  $I$  是单位矩阵),  $\|A\| \|A^{-1}\| \geq 1.$

25. (1) 如果  $A$  是对角优势矩阵, 即  $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$  ( $i=1, 2,$

$\dots, n$ ), 证明  $a_{ii} \neq 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

(2) 设  $A$  为对角优势矩阵, 使  $A = DB$ , 其中  $D = \text{diag}(a_{ii})$ , 证明  $B = I - C$ , 其中  $\|C\|_{\infty} < 1$ , 因此由定理(7.16),  $A$  是非奇异阵.

(3) 证明: 如果应用 Gauss 消去法解对角优势方程组, 则所有元素  $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ .

26. 设  $\|A\|_s, \|A\|_t$  为任意两种  $\mathbf{R}^{n \times n}$  上矩阵算子范数, 证明存在常数  $c_1, c_2 > 0$ , 使

$$c_1 \|A\|_s \leq \|A\|_t \leq c_2 \|A\|_s \quad (\text{对一切 } A \in \mathbf{R}^{n \times n}).$$

27. 设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{bmatrix}, \text{ 计算 } \mathbf{A} \text{ 的条件数 } \text{cond}(\mathbf{A}), (\nu=2, \infty).$$

28. 证明: 如果  $\mathbf{A}$  是正交阵, 则  $\text{Cond}(\mathbf{A})_2 = 1$ .

29. 设  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  且  $\|\cdot\|$  为  $\mathbf{R}^{n \times n}$  上矩阵的算子范数, 证明

$$\text{Cond}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \leq \text{Cond}(\mathbf{A}) \cdot \text{Cond}(\mathbf{B}).$$

30. 设  $\mathbf{A}$  为对称正定矩阵, 且其分解为  $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T = \mathbf{W}^T \mathbf{W}$ , 其中  $\mathbf{W} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{L}^T$ , 求证:

$$(1) \text{cond}(\mathbf{A})_2 = (\text{cond}(\mathbf{W})_2)^2.$$

$$(2) \text{cond}(\mathbf{A})_2 = \text{cond}(\mathbf{W}^T)_2 \cdot \text{cond}(\mathbf{W})_2.$$

31. 设对称正定矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

试计算  $\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = 1/\lambda$ ,  $\|\mathbf{A}\|_2 = \lambda_2$  及  $\text{cond}_2(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ , 且找出  $\mathbf{b}$  (常数) 及扰动  $\delta \mathbf{b}$ , 使

$$\frac{\|\delta \mathbf{X}\|_2}{\|\mathbf{X}\|_2} = \text{cond}_2(\mathbf{A}) \frac{\|\delta \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}.$$

32. 求下面两个方程组的解, 并利用矩阵的条件数估计  $\frac{\|\delta \mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|}$ .

$$\begin{bmatrix} 240 & -319 \\ -179 & 240 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{即} \quad \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b},$$

$$\begin{bmatrix} 240 & -319.5 \\ -179.5 & 240 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{即} \quad (\mathbf{A} + \delta \mathbf{A})(\mathbf{X} + \delta \mathbf{X}) = \mathbf{b}.$$

33. 已知 Hilbert 矩阵

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

(1) 计算  $\mathbf{H}_3$  的条件数  $\text{cond}_\infty(\mathbf{H})$ .

(2) 解方程  $\mathbf{H}_3 \mathbf{X} = \left[ \frac{11}{6}, \frac{13}{12}, \frac{47}{60} \right]^T = \mathbf{b}$  时, 若  $\mathbf{H}_3$  及  $\mathbf{b}$  有微小误差(取 3 位有效数字), 估计解  $\mathbf{X}$  的误差  $\frac{\|\delta \mathbf{X}\|_\infty}{\|\mathbf{X}\|_\infty}$ .

34. 设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.0001 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7.0003 \\ -7 \end{bmatrix},$$

已知方程组  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  的精确解为  $\mathbf{X} = (3, -1)^T$ .

(1) 计算条件数  $\text{cond}_\infty(\mathbf{A})$ .

(2) 若近似解  $\mathbf{X} = (2.97, -1.01)^T$ , 计算剩余  $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{X}$ .

(3) 利用定理 7.20 计算不等式右端, 并与不等式左端比较, 此结果说明什么?

35. 填空题

(1)  $\mathbf{X} = (2, 3, -4)^T$ , 则  $\|\mathbf{X}\|_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\|\mathbf{X}\|_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\|\mathbf{X}\|_\infty = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(2)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ , 则  $\|\mathbf{A}\|_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\rho(\mathbf{A}) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(3)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  则  $\text{cond}_2(\mathbf{A}) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(4) 设  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix}$ , 为使  $\mathbf{A}$  可分解为  $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ , 其中  $\mathbf{L}$  为

对角线元素为正的下三角形矩阵,  $a$  的取值范围\_\_\_\_\_, 取  $a=1$ , 则  $L=$ \_\_\_\_\_.

## 五、习题解答

1. 解 为消去第 2、3 两个方程中的  $x_1$ , 取  $l_{21} = \frac{3}{2}$ ,  $l_{31} = \frac{1}{2}$ .

将第 2 个方程减去  $-l_{21}$  倍的第 1 个方程, 第 3 个方程减去  $-l_{31}$  倍的第 1 个方程, 得

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 3. \end{cases}$$

为消去第 3 个方程中的  $x_2$ , 取  $l_{32} = -3$ . 将第 3 个方程减去  $-l_{32}$  倍的第 2 个方程, 得三角方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ 3x_3 = 3. \end{cases}$$

回代, 算出方程组的解

$$\begin{aligned} x_3 &= 3/3 = 1, \\ x_2 &= \left[ 0 - \frac{1}{2}x_3 \right] \bigg/ \left[ -\frac{1}{2} \right] = 1, \\ x_1 &= (4 - x_2 - x_3)/2 = 1. \end{aligned}$$

2. 解 (1) 记  $A = (a_{ij}) = (a_{ij}^{(1)})$ . 经 Gauss 消元一步后,  $A_2$  的元素为

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{1j}^{(1)}.$$

因  $A$  是对称的, 所以有  $a_{ij}^{(1)} = a_{ji}^{(1)}$ ,  $a_{i1}^{(1)} = a_{j1}^{(1)}$ , 于是有

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ji}^{(1)} - \frac{a_{j1}^{(1)}}{a_{11}} a_{1i}^{(1)} = a_{ji}^{(2)}.$$

故  $A_2$  是对称的.

(2) 用 Gauss 消去法求解所给对称方程组,得

$$X^* = (4.586035, -0.6315228, 2.735199)^T.$$

3. 解 (1) 因

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - l_{i,k-1} a_{k-1,j}^{(k-1)}, \\ a_{ij}^{(k-1)} &= a_{ij}^{(k-2)} - l_{i,k-2} a_{k-2,j}^{(k-2)}, \end{aligned}$$

而  
故

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-2)} - l_{i,k-2} a_{k-2,j}^{(k-2)} - l_{i,k-1} a_{k-1,j}^{(k-1)} = \cdots \\ &= a_{ij}^{(1)} - l_{i1} a_{1j}^{(1)} - l_{i2} a_{2j}^{(2)} - \cdots - l_{i,k-2} a_{k-2,j}^{(k-2)} - l_{i,k-1} a_{k-1,j}^{(k-1)}, \\ &\quad i, j \geq k. \end{aligned}$$

(2) 由(1)有

$$u_j = a_j^{(r)} = a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} a_{kj}^{(k)} \quad (j = r, r+1, \cdots, n).$$

又

$$0 = a_{ir}^{(r+1)} = a_{ir} - l_{i1} u_{1r} - l_{i2} u_{2r} - \cdots - l_{ir} u_{rr}.$$

由此解出

$$l_{ir} = \frac{a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr}}{u_{rr}}.$$

4. 解 (1) 选主元为 10, 将第一行与第二行交换, 第 1 列与第 3 列交换, 得

$$\begin{cases} 10x_3 + 4x_2 + 5x_1 = 0, \\ 3x_3 + 2x_2 + x_1 = 1, \\ x_3 - 0.1x_2 + 3x_1 = 2. \end{cases}$$

消去第 2、3 方程中的  $x_3$ , 得

$$\begin{cases} 10x_3 + 4x_2 + 5x_1 = 0, \\ 0.8x_2 - 0.5x_1 = 1, \\ -0.5x_2 + 2.5x_1 = 1. \end{cases}$$

第 2 次选的主元为 2.5. 将上述第 2 个方程与第 3 个方程交

换,第 2 列与第 3 列交换,得

$$\begin{cases} 10x_3 + 5x_1 + 4x_2 = 0, \\ 2.5x_1 - 0.5x_2 = 2, \\ -0.5x_1 + 0.8x_2 = 1. \end{cases}$$

消去第 3 方程中的未知数  $x_1$ , 得

$$\begin{cases} 10x_3 + 5x_1 + 4x_2 = 0, \\ 2.5x_1 - 0.5x_2 = 2, \\ 0.7x_2 = 1.4. \end{cases}$$

回代求得,  $x_2 = 2, x_1 = 1.2, x_3 = -1.4$ .

(2) 列主元为 5, 将第 1 行与第 2 行交换, 再消去  $x_1$ , 得

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 0, \\ 1.2x_2 + x_3 = 1, \\ -2.5x_2 - 5x_3 = 2. \end{cases}$$

列主元为  $-2.5$ , 将第 2 行与第 3 行交换, 再消去  $x_2$ , 得

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 0, \\ -2.5x_2 - 5x_3 = 2, \\ -1.4x_3 = 1.96. \end{cases}$$

回代求得  $x_3 = -1.4, x_2 = 2, x_1 = 1.2$ .

5. 证 设  $A, L, U$  的  $k$  阶顺序主子矩阵分别为  $A_k, L_k, U_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), 显然

$$A_k = L_k U_k.$$

由  $A = LU$  分解的定义可知,  $L, U$  的各阶顺序主子式均不为零, 即

$$\det(L_k) = 1, \quad \det(U_k) \neq 0.$$

故

$$\det(A_k) = \det(L_k) \det(U_k) \neq 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

即  $A$  的各阶顺序主子式均不为零.

6. 证 因  $\Delta_i \neq 0, (i = 1, 2, \dots, n-1)$  ( $\Delta_i$  是  $i$  阶顺序主子式), 所以  $a_{ii}^{(i)} \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n-1)$ , 则 Gauss 消去法可进行到底, 即存

在指标为  $i$  的初等下三角阵  $L_i$ , 使

$$L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_i A = U,$$

故

$$A = L_i^{-1} \cdots L_{n-2}^{-1} L_{n-1}^{-1} U = LU,$$

其中  $L = L_i^{-1} \cdots L_{n-2}^{-1} L_{n-1}^{-1}$  为下单位三角阵,  $U$  是上三角阵.

7. 证 记  $A_2 = (a_{ij}^{(2)})$ , 则有

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}.$$

又  $A$  是对角优势矩阵, 可知  $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . 故

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^{(2)}| &= \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n \left| a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \right| \leq \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{i1}}{a_{11}} \right| |a_{1j}| \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| - |a_{i1}| + \left| \frac{a_{i1}}{a_{11}} \right| \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{1j}| \\ &\leq |a_{ii}| - \left| \frac{a_{i1}}{a_{11}} \right| (|a_{11}| - \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{1j}|) \\ &= |a_{ii}| - \left| \frac{a_{i1}}{a_{11}} \right| (|a_{11}| - \sum_{j=2}^n |a_{1j}| + |a_{1i}|) \\ &\leq |a_{ii}| - \left| \frac{a_{i1}}{a_{11}} \right| |a_{1i}| \quad (|a_{11}| - \sum_{j=2}^n |a_{1j}| > 0.) \\ &\leq \left| a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i} \right| = |a_{ii}^{(2)}| \quad (i=2, \dots, n). \end{aligned}$$

即  $A_2$  也是对角优势矩阵.

若  $A$  是对角优势矩阵, 经 Gauss 消元一步后.

$$A \rightarrow A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

由上述证明及第 2 题结论知,  $A_2$  仍是对角优势矩阵, 即

$$|a_{ii}^{(2)}| > \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^{(2)}| \quad (i=2, \dots, n).$$

由对称性也有

$$|a_{jj}^{(2)}| > \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^n |a_{ji}^{(2)}| = \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}^{(2)}|, \quad (j=2, \dots, n).$$

而第二步消元前所选列主元应为  $a_{22}^{(2)}$ , 这正好与 Gauss 顺序消去法的主元相同. 以此类推第  $k$  次所选主元就是  $a_{kk}^{(k)}$ , 所以用 Gauss 顺序消去法和列主元消去法得到同样的结果.

8. 证 因

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & m_{k+1,k} & & \\ & & \dots & \ddots & \\ & & m_{nk} & & 1 \end{bmatrix} = I - l_k e_k^T.$$

其中  $I$  是单位阵,  $l_k = (0, \dots, 0, -m_{k+1,k}, \dots, -m_{nk}, \dots)^T$ ,  
 $e_k^T = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ . 故

$$\begin{aligned} L_k &= I_{ij} L_k I_{ij} = I_{ij} (I - l_k e_k^T) I_{ij} \\ &= I_{ij} I I_{ij} - (I_{ij} l_k) (e_k^T I_{ij}) = I - l'_k e_k^T \end{aligned}$$

仍是指标为  $k$  的初等下三角阵, 其中

$$l'_k = (0, \dots, 0, -m_{k+1,k}, \dots, m_{jk}, \dots, -m_{ik}, \dots, -m_{nk})^T.$$

9. 解 设  $A = LU$ , 即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \cdots \\ & & & \ddots & u_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

根据矩阵乘法, 有

$$a_{i1} = l_{i1} u_{11} = l_{i1}, \quad i=1, \dots, n,$$

$$a_{1j} = l_{11} u_{1j}, \text{ 得 } u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}, j=2, \dots, n.$$

现设  $L$  的前  $k-1$  列与  $U$  的前  $k-1$  行已算好,因

$$a_{ik} = \sum_{r=1}^k l_{ir} u_{rk} = \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk} + l_{ik} u_{kk} \quad (i=k, \dots, n, u_{kk}=1),$$

所以 
$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk} \quad (i=k, \dots, n).$$

同样

$$a_{kj} = \sum_{r=1}^k l_{kr} u_{rj} = \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} u_{rj} + l_{kk} u_{kj} \quad (j=k+1, \dots, n),$$

所以 
$$u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} u_{rj}}{l_{kk}}, \quad j=k+1, \dots, n.$$

綜上, Crout 分解公式

$$\begin{cases} l_{i1} = a_{i1}, & i=1, 2, \dots, n, \\ u_j = a_j / l_{11}, & j=2, \dots, n, \\ l_{ik} = a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk}, & i=k, \dots, n, \\ u_{kj} = (a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} u_{rj}) / l_{kk}, & j=k+1, \dots, n. \end{cases}$$

10. 解 (1) 设  $U$  为上三角阵, 则有

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

由  $u_{nn} x_n = b_n$ , 得  $x_n = b_n / u_{nn}$ .

一般地, 由  $u_{ii} x_i + u_{i, i+1} x_{i+1} + \cdots + u_{in} x_n = b_i$ , 得

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j}{u_{ii}} \quad (i=n-1, n-2, \dots, 1).$$

当  $U$  是下三角矩阵时, 有

$$\begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ u_{21} & u_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

由  $u_{11} x_1 = b_1$ , 得  $x_1 = b_1 / u_{11}$ .

一般地, 由  $u_{i1} x_1 + u_{i2} x_2 + \cdots + u_{ii} x_i = b_i, i=2, \cdots, n$ , 得

$$x_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} u_{ij} x_j) / u_{ii}, \quad i=2, \cdots, n.$$

(2) 乘法次数, 对固定的  $i$  有  $n-i$  次,  $i$  从 1 到  $n$ , 所以总乘法次数  $R$

$$R = \sum_{i=1}^n (n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}.$$

除法次数  $D, D=n$ .

$$\text{故总的乘除法次数} = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

(3) 设  $U^{-1} = V$ , 这里  $V$  也是上三角阵, 即

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \cdots \\ & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ & \ddots & \cdots \\ & & v_{nn} \end{bmatrix} = UV = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

$V$  按行计算,  $i=n-1, \cdots, 1$ ,

$$v_{ij} = -\frac{\sum_{k=i+1}^j u_{ik} v_{kj}}{u_{ii}}, \quad j=i+1, \cdots, n.$$

$$v_{ii} = \frac{1}{u_{ii}}, \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

11. 解 因系数矩阵顺序主子式

$$\Delta_1 = 3 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix} > 0.$$

且系数矩阵对称, 故为正定方程组. 按照算法(7.9)得

$$\begin{aligned}l_{11} &= \sqrt{3}, & l_{21} &= 2/\sqrt{3}, & l_{31} &= \sqrt{3}, \\l_{22} &= \sqrt{2/3}, & l_{32} &= -\sqrt{6}, & l_{33} &= \sqrt{3}.\end{aligned}$$

则有

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & & \\ 2/\sqrt{3} & \sqrt{2/3} & \\ \sqrt{3} & -\sqrt{6} & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ & \sqrt{2/3} & -\sqrt{6} \\ & & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

由

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & & \\ 2/\sqrt{3} & \sqrt{2/3} & \\ \sqrt{3} & -\sqrt{6} & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix},$$

得

$$y_1 = \frac{5}{\sqrt{3}}, y_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}, y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

再由

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ & \sqrt{2/3} & -\sqrt{6} \\ & & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

得

$$x_3 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = 1.$$

**12. 解** 此方程组的系数矩阵为对称正定矩阵, 因此可用改进的平方根法, 用算式(7.11)得到

$$d_1 = a_{11} = 3, \quad t_{21} = a_{21} = 3, \quad l_{21} = \frac{t_{21}}{d_1} = \frac{3}{3} = 1,$$

$$d_2 = a_{22} - t_{21} l_{21} = 5 - 3 = 2, \quad t_{31} = a_{31} = 5,$$

$$t_{32} = a_{32} - t_{31} l_{21} = 9 - 1 = 8, \quad l_{31} = \frac{t_{31}}{d_1} = \frac{5}{3},$$

$$l_{32} = \frac{t_{32}}{d_2} = \frac{8}{2} = 4, \quad d_3 = a_{33} - t_{31} l_{31} - t_{32} l_{32} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{则 } A=LDL^T=\begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 5/3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5/3 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

由  $LY=b$ , 即

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 5/3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 30 \end{bmatrix},$$

得  $y_1=10, \quad y_2=6, \quad y_3=4/3.$

再解  $DL^T X=Y$ , 得  $x_3=2, x_2=-1, x_1=1.$

13. 解 设

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & \\ & l_3 & 1 & \\ & & l_4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & d_1 & & \\ & u_2 & d_2 & \\ & & u_3 & d_3 \\ & & & u_4 \end{bmatrix}.$$

由分解公式(7.15)计算得

$$\begin{aligned} d_1 &= 1, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = 1, \\ u &= -2, \quad l_2 = -\frac{1}{2}, \quad u_2 = -\frac{3}{2}, \quad l_3 = -\frac{2}{3}, \\ u_3 &= -\frac{4}{3}, \quad l_4 = -\frac{3}{4}, \quad u_4 = -\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

由公式(7.16)解

$$LY=b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

得  $y_1=1, \quad y_2=\frac{3}{2}, \quad y_3=1, \quad y_4=-\frac{1}{4}.$

再由公式(7.17)解

$$UX=Y \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ & -\frac{3}{2} & 1 & \\ & & -\frac{4}{3} & 1 \\ & & & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

得  $x_4 = \frac{1}{5}, \quad x_3 = -\frac{3}{5}, \quad x_2 = -\frac{7}{5}, \quad x_1 = -\frac{6}{5}.$

14. 解 由矩阵的三角分解公式(7.6), 计算得

$$A=LU=\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 0 & 10 & -32 \\ 0 & 0 & -76 \end{bmatrix}.$$

$$L^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U^{-1}=\begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 & -0.1369 \\ & 0.1 & -0.04211 \\ & & -0.01316 \end{bmatrix}.$$

所以

$$A^{-1}=U^{-1}L^{-1}=\begin{bmatrix} -0.2155 & 0.0631 & -0.1369 \\ 0.01055 & 0.05789 & -0.04211 \\ 0.0653 & -0.01316 & -0.01316 \end{bmatrix}.$$

15. 解 设  $A$  能分解, 则有

$$A=LU=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

由分解公式(7.6)知,  $u_1=1, u_2=2, u_3=3, l_{21}=2, l_{31}=4, u_{22}=0$ , 而  $a_{32}=l_{32}u_{22}+l_{31}u_{12}=0+4 \times 2=8$  与  $a_{32}=6$  矛盾, 故  $A$  的  $LU$  分解不能进行. 但  $A$  为非奇异阵, 所以存在排列阵  $P$ , 使  $PA=LU$ . 即将  $A$  的 1 行与 2 行交换, 则可分解为  $LU$ .

设  $B=LU$ , 则

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

由分解公式(7.6)知,  $u_1 = u_2 = u_3 = 1, l_1 = 2, l_3 = 3, u_2 = 0$ . 而由  $3 = l_{31} u_1 + l_{32} u_2$ , 得

$$3 = 3 + l_{32} u_2.$$

故  $l_{32}$  可任选, 即  $B$  的三角分解存在且不唯一.

因  $C$  的各阶顺序主子均不为 0, 故由定理 7.4 知,  $C$  的三角分解存在且唯一.

16. 解  $A$  的行范数

$$\|A\|_{\infty} = \max\{0.6+0.5, 0.1+0.3\} = 1.1.$$

$A$  的列范数

$$\|A\|_1 = \max\{0.6+0.1, 0.5+0.3\} = 0.8.$$

$$\|A\|_F = (0.36+0.25+0.01+0.09)^{1/2} = 0.8426.$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.37 & 0.33 \\ 0.33 & 0.34 \end{bmatrix}.$$

$$|\lambda I - A^T A| = \begin{vmatrix} \lambda - 0.37 & -0.33 \\ -0.33 & \lambda - 0.34 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0.71\lambda + 0.0169 = 0.$$

所以  $\lambda_{\max}(A^T A) = 0.685$ , 则

$$\|A\|_2 = \sqrt{0.685} \approx 0.83.$$

17. 证 (1) 由定义知,

$$\begin{aligned} \|X\|_{\infty} &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \\ &= \|X\|_1 \leq \sum_{i=1}^n \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = n \|X\|_{\infty}, \end{aligned}$$

从而  $\|X\|_{\infty} \leq \|X\|_1 \leq n \cdot \|X\|_{\infty}.$

(2) 由范数定义有

$$\begin{aligned} \|A\|_2^2 &= \lambda_{\max}(A^T A) \leq \lambda_1(A^T A) + \lambda_2(A^T A) + \cdots + \lambda_n(A^T A) \\ &= A^T A \text{ 的对角元之和} = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 + \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 + \cdots + \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \|A\|_F^2. \end{aligned}$$

又

$$\|A\|_2^2 = \lambda_{\max}(A^T A)$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{n} [\lambda_1 (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) + \lambda_2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) + \cdots + \lambda_n (\mathbf{A}^T \mathbf{A})] \\ &= \frac{1}{n} \|\mathbf{A}\|_F^2. \end{aligned}$$

从而 
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|\mathbf{A}\|_F \leq \|\mathbf{A}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_F.$$

注:此处用到了矩阵的特征值之和等于其对角线上元素之和的概念.从所证不等式也知道,矩阵的 2-范数可由  $F$ -范数得到控制;矩阵的 2-范数与  $F$ -范数是等价的.

18. 证 只要证明  $\|\mathbf{X}\|_p = \|\mathbf{PX}\|$  满足范数定义的(1), (2), (3).

(1) 因  $\mathbf{P}$  非奇异,故对任意  $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}, \mathbf{PX} \neq \mathbf{0}$ , 则  $\|\mathbf{X}\|_p = \|\mathbf{PX}\| > 0$ ; 当  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$  时,  $\mathbf{PX} = \mathbf{0}$ , 则  $\|\mathbf{X}\|_p = \|\mathbf{PX}\| = 0$ ; 当  $\|\mathbf{X}\|_p = \|\mathbf{PX}\| = 0$  时, 则  $\mathbf{PX} = \mathbf{0}$ , 即  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ .

(2) 对任意实数  $\alpha$ ,

$$\|\alpha \mathbf{X}\|_p = \|\mathbf{P} \alpha \mathbf{X}\| = \|\alpha \mathbf{PX}\| = |\alpha| \|\mathbf{PX}\| = |\alpha| \|\mathbf{X}\|_p.$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \|\mathbf{X} + \mathbf{Y}\|_p &= \|\mathbf{P}(\mathbf{X} + \mathbf{Y})\| = \|\mathbf{PX} + \mathbf{PY}\| \\ &\leq \|\mathbf{PX}\| + \|\mathbf{PY}\| = \|\mathbf{X}\|_p + \|\mathbf{Y}\|_p. \end{aligned}$$

综上所述,  $\|\mathbf{X}\|_p$  是  $\mathbf{R}^n$  上的一种向量范数.

19. 证 因

$$\|\mathbf{X}\|_\infty^p = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p = n \cdot \|\mathbf{X}\|_\infty^p,$$

两边开  $p$  次方有

$$\|\mathbf{X}\|_\infty \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \leq n^{1/p} \|\mathbf{X}\|_\infty.$$

而  $\lim_{p \rightarrow \infty} n^{1/p} = 1$ , 故

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = \|\mathbf{X}\|_\infty.$$

20. 证 由 Cauchy 不等式, 有

$$|(\mathbf{X}, \mathbf{Y})| \leq \|\mathbf{X}\|_2 \|\mathbf{Y}\|_2,$$

且当且仅当  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  线性相关时, 有

$$|(X, Y)| = \|X\|_2 \|Y\|_2;$$

又当且仅当  $X^T Y \geq 0$  时, 有  $|(X, Y)| = (X, Y)$ .

故  $(X, Y) = \|X\|_2 \|Y\|_2$  当且仅当  $X, Y$  线性相关, 且  $X^T Y \geq 0$  时, 所以

$$\begin{aligned}\|X+Y\|_2^2 &= (X+Y, X+Y) = (X, X) + 2(X, Y) + (Y, Y) \\ &= \|X\|_2^2 + 2\|X\|_2 \|Y\|_2 + \|Y\|_2^2 \\ &= (\|X\|_2 + \|Y\|_2)^2\end{aligned}$$

当且仅当  $X, Y$  线性相关, 且  $X, Y \geq 0$  时, 即

$$\|X+Y\|_2 = \|X\|_2 + \|Y\|_2 \iff X, Y \text{ 线性相关, 且 } X^T Y \geq 0.$$

21. 证 由于

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -A^T & \mu I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu I & A \\ A^T & \mu I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu I & A \\ O & \mu^2 I - A^T A \end{bmatrix}, \quad (7.26)$$

及 
$$\begin{bmatrix} \mu I & -A \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu I & A \\ A^T & \mu I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^2 I - AA^T & O \\ A^T & \mu I \end{bmatrix}. \quad (7.27)$$

记  $B = \begin{bmatrix} \mu I & A \\ A^T & \mu I \end{bmatrix}$ . 对 (7.26)、(7.27) 两式两边取行列式得

$$\mu^n \det(B) = \mu^n \det(\mu^2 I - A^T A),$$

$$\mu^n \det(B) = \mu^n \det(\mu^2 I - AA^T).$$

记  $\lambda = \mu^2 \neq 0$ , 故

$$\det(\lambda I - A^T A) = \det(\lambda I - AA^T).$$

22. 证 设  $A = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)$  按列分块, 即  $\alpha_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \cdots,$

$\alpha_{nj})^T (j=1, 2, \cdots, n)$ , 则  $\|\alpha_j\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}^2$ . 而

$$\begin{aligned}\|\alpha_1\|_2^2 + \|\alpha_2\|_2^2 + \cdots + \|\alpha_n\|_2^2 &= \sum_{j=1}^n \|\alpha_j\|_2^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}^2 \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}^2 = \|A\|_F^2.\end{aligned}$$

23. 证 因  $\|B\| < 1$ , 由定理 7.16 知  $I - B$  可逆且  $\|(I -$

$B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$ , 所以

$$\begin{aligned}\|I - (I - B)^{-1}\| &= \|(I - B)^{-1}(I - B - I)\| \\ &\leq \|(I - B)^{-1}\| \|B\| \\ &\leq \frac{1}{1 - \|B\|} \|B\|.\end{aligned}$$

24. 证 由矩阵算子范数定义有

$$\|I\| = \max_{X \neq 0} \frac{\|IX\|}{\|X\|} = \max_{X \neq 0} \frac{\|X\|}{\|X\|} = 1.$$

由矩阵范数的相容性有

$$\|A\| \|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|I\| = 1.$$

25. 证 (1) 用反证法. 若有某个  $i_0$  使  $a_{i_0 i_0} = 0$ , 因  $A$  是对角优势矩阵, 则

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0 j}| < |a_{i_0 i_0}| = 0.$$

这是不可能的. 得证.

(2) 因  $A = DB$ , 即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 1 & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} = DB.$$

而

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 1 & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} = I - C.$$

$$\|C\|_{\infty} = \max_i \left[ \sum_{j \neq i}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right] = \max_i \left[ \sum_{j \neq i}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right] < 1$$

(这是因为  $A$  是对角优势矩阵, 则  $\sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|$ ). 所以由定理 7.16 知,  $B = I - C$  为非奇异阵. 由 (1)  $a_{ii} \neq 0$ , 故  $D$  非奇异. 因此  $A = DB$  非奇异.

(3) 设  $A$  为对角优势阵, 由 (1) 知  $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$ . 而  $a_{i1}^{(1)} = a_{i1}$ , 所以  $a_{i1}^{(1)} \neq 0$ . 又设经 Gauss 消元一步后  $A$  具有形式:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \alpha_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

由习题 7 知,  $A_2$  也是对角优势矩阵. 又由 (1) 知  $a_{ii}^{(2)} \neq 0, i = 2, \dots, n$ , 即有  $a_{22}^{(2)} \neq 0$ . 如此类推  $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ .

$$26. \text{ 证 } \text{ 因 } \|A\|_s = \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_s}{\|X\|_s}.$$

由定理 7.10 知, 存在  $a_1, a_2 > 0, b_1, b_2 > 0$ , 对一切  $X$  都有

$$a_1 \|AX\|_s \leq \|AX\|_t \leq a_2 \|AX\|_s,$$

与

$$b_1 \|X\|_s \leq \|X\|_t \leq b_2 \|X\|_s.$$

于是

$$\frac{a_1}{b_1} \frac{\|AX\|_s}{\|X\|_s} \leq \frac{\|AX\|_t}{\|X\|_t} \leq \frac{a_2}{b_2} \frac{\|AX\|_s}{\|X\|_s}.$$

令  $\frac{a_1}{b_1} = c_1, \frac{a_2}{b_2} = c_2$ , 故有

$$c_1 \frac{\|AX\|_s}{\|X\|_s} \leq \frac{\|AX\|_t}{\|X\|_t} \leq c_2 \frac{\|AX\|_s}{\|X\|_s}.$$

$$c_1 \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_s}{\|X\|_s} \leq \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_t}{\|X\|_t} \leq c_2 \max_{X \neq 0} \frac{\|AX\|_s}{\|X\|_s}.$$

即

$$c_1 \|AX\|_s \leq \|AX\|_t \leq c_2 \|AX\|_s.$$

27. 解  $A = \begin{bmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{bmatrix}$ , 则

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -98 & 99 \\ 99 & -100 \end{bmatrix}.$$

$$\|A\|_{\infty} = 199, \|A^{-1}\|_{\infty} = 199, \text{ 所以}$$

$$\text{cond}(A)_{\infty} = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty} = 199 \times 199 = 39601.$$

因  $A$  是对称矩阵, 故

$$\text{cond}(A)_2 = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}.$$

由  $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 100 & -99 \\ -99 & \lambda - 98 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 198\lambda - 1 = 0,$

得  $\lambda_1 = 198.0050503, \quad \lambda_2 = -0.00505035.$

即

$$\text{cond}(A)_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 39206.$$

28. 证 因  $A$  是正交阵, 故  $A^T = A^{-1}$ , 则

$$\text{cond}(A)_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)}} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^{-1} A)}{\lambda_{\min}(A^{-1} A)}} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(I)}{\lambda_{\min}(I)}} = 1.$$

29. 证 由条件数的定义及矩阵范数的相容性, 有

$$\begin{aligned} \text{cond}(AB) &= \|AB\| \| (AB)^{-1} \| \\ &\leq \|A\| \|B\| \|B^{-1}\| \|A^{-1}\| \\ &= \|A\| \|A^{-1}\| \|B\| \|B^{-1}\| \\ &= \text{cond}(A) \text{cond}(B). \end{aligned}$$

30. 证 (1) 因  $A = W^T W$ , 所以

$$\begin{aligned} \text{cond}(A)_2 &= \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \|W^T W\|_2 \|(W^T W)^{-1}\|_2 \\ &= \|W\|_2^2 \|W^{-1}\|_2^2 = (\text{cond}(W)_2)^2. \end{aligned}$$

(2) 由习题 21 知,  $\lambda(WW^T) = \lambda(W^T W)$ , 则

$$\| \mathbf{W}^T \|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{W}\mathbf{W}^T)} = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{W}^T \mathbf{W})} = \| \mathbf{W} \|_2.$$

$$\text{cond}(\mathbf{W}^T)_2 = \| \mathbf{W}^T \|_2 \| \mathbf{W}^{-T} \|_2 = \| \mathbf{W} \|_2 \| \mathbf{W}^{-1} \|_2 = \text{cond}(\mathbf{W})_2.$$

故由(1)得,

$$\text{cond}(\mathbf{A})_2 = [\text{cond}(\mathbf{W})_2]^2 = \text{cond}(\mathbf{W}^T)_2 \text{cond}(\mathbf{W})_2.$$

31. 解 由

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

解得

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

所以

$$\| \mathbf{A}^{-1} \|_2 = 1, \quad \| \mathbf{A} \|_2 = 3, \quad \text{cond}(\mathbf{A})_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 3.$$

设  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $\delta \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 这时有

$$\frac{\| \delta \mathbf{X} \|_2}{\| \mathbf{X} \|_2} = \text{cond}(\mathbf{A})_2 \frac{\| \delta \mathbf{b} \|_2}{\| \mathbf{b} \|_2}.$$

事实上, 设  $\mathbf{X} + \delta \mathbf{X} = \mathbf{Y}$ , 则  $\mathbf{A}(\mathbf{X} + \delta \mathbf{X}) = \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}$ , 即

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{解得 } y_1 = \frac{4}{3}, y_2 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{又} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{3}.$$

所以

$$\delta \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\| \delta \mathbf{X} \|_2}{\| \mathbf{X} \|_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{3}\sqrt{2}} = 3.$$

$$\text{而 } \text{cond}(\mathbf{A})_2 = \frac{\| \delta \mathbf{b} \|_2}{\| \mathbf{b} \|_2} = \text{cond}(\mathbf{A})_2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \text{cond}(\mathbf{A})_2 = 3, \text{ 故}$$

$$\frac{\|\delta \mathbf{X}\|_2}{\|\mathbf{X}\|_2} = \text{cond}(\mathbf{X})_2 \frac{\|\delta \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}.$$

32. 解 记

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 240 & -319 \\ -179 & 240 \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

则  $\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{b}$  的解  $\mathbf{X}=(4,3)^T$ , 而  $(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})(\mathbf{X}+\delta\mathbf{X})=\mathbf{b}$  的解  $(\mathbf{X}+\delta\mathbf{X})=(8,6)^T$ . 故

$$\|\mathbf{X}\|_\infty=4, \quad \|\delta\mathbf{X}\|_\infty=4.$$

而

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{499} \begin{bmatrix} 240 & 319 \\ 179 & 240 \end{bmatrix},$$

$$\text{cond}_\infty(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \|\mathbf{A}\|_\infty = 626.2,$$

$$\|\delta\mathbf{A}\|_\infty = 0.5, \quad \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \|\delta\mathbf{A}\|_\infty = 0.56012.$$

由推论 7.19.2 得

$$\frac{\|\delta\mathbf{X}\|_\infty}{\|\mathbf{X}\|_\infty} \leq \frac{\text{cond}_\infty(\mathbf{A}) \frac{\|\delta\mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty}}{1 - \text{cond}_\infty(\mathbf{A}) \frac{\|\delta\mathbf{A}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty}} = \frac{0.56012}{0.43988} \leq 1.274,$$

$$\|\delta\mathbf{X}\|_\infty \leq 1.274 \|\mathbf{X}\|_\infty \leq 5.10,$$

表明估计  $\|\delta\mathbf{X}\|_\infty=4$  略大, 是符合实际的.

$$33. \text{ 解 } (1) \mathbf{H}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix};$$

$$\|\mathbf{H}_3\|_\infty = \frac{11}{6}, \quad \|\mathbf{H}_3^{-1}\|_\infty = 408,$$

所以  $\text{cond}_\infty(\mathbf{H}_3)=748$ .

(2) 方程组在  $\mathbf{H}_3$  及  $\mathbf{b}$  有微小变化时为

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.500 & 0.333 \\ 0.500 & 0.333 & 0.250 \\ 0.333 & 0.250 & 0.200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + \delta x_1 \\ x_2 + \delta x_2 \\ x_3 + \delta x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.83 \\ 1.08 \\ 0.783 \end{bmatrix}$$

简记为  $(\mathbf{H}_3 + \delta\mathbf{H}_3)(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$ , 它的精确解为

$$\mathbf{X} + \delta \mathbf{X} = (1.089512538, 0.487967062, 1.491002798)^T.$$

而  $\mathbf{H}_3 \mathbf{X} = \mathbf{b}$  的精确解  $\mathbf{X} = (1, 1, 1)^T$ , 于是

$$\delta \mathbf{X} = (0.0895, -0.5120, 0.4910)^T.$$

$$\frac{\|\delta \mathbf{H}_3\|_\infty}{\|\mathbf{H}_3\|_\infty} \approx 0.18 \times 10^{-3} < 0.02\%, \quad \frac{\|\delta \mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} \approx 0.182\%$$

$$\text{而 } \frac{\|\delta \mathbf{X}\|_\infty}{\|\mathbf{X}\|_\infty} \approx 51.2\%.$$

这表明  $\mathbf{H}_3$  及  $\mathbf{b}$  的相对误差不超过 0.3%, 而引起解的相对误差超过 50%.

由推论 7.19.2, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta \mathbf{X}\|_\infty}{\|\mathbf{X}\|_\infty} &\leq \frac{\text{cond}_\infty(\mathbf{H}_3)}{1 - \text{cond}_\infty(\mathbf{H}_3)} \frac{\|\delta \mathbf{H}_3\|_\infty}{\|\mathbf{H}_3\|_\infty} \left( \frac{\|\delta \mathbf{H}_3\|_\infty}{\|\mathbf{H}_3\|_\infty} + \frac{\|\delta \mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} \right) \\ &\leq \frac{408}{0.5455 - 408 \times 0.0002} ((0.0002) + 0.00182) \\ &\leq 0.8974 = 89.74\%. \end{aligned}$$

这个估计结果比实际误差大是合理的.

34. 解 (1) 先算出

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 10000 & 10000 \\ 20000 & 20001 \end{bmatrix},$$

于是  $\text{cond}_\infty(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty \|\mathbf{A}\|_\infty = 40001 \times 3.0001 \approx 120012$ .

$$\begin{aligned} (2) \mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{X} &= \begin{bmatrix} 7.0003 \\ -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.0001 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.97 \\ -1.01 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7.0003 \\ -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6.9503 \\ -6.95 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 \\ -0.05 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(3) 依定理 7.20, 右端为

$$\text{cond}_\infty(\mathbf{A}) \frac{\|\mathbf{r}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} = 120012 \times \frac{0.05}{7.0003} \leq 857.192,$$

$$\text{而左端为 } \frac{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}\|_\infty}{\|\mathbf{X}\|_\infty} = \frac{0.03}{3} = 0.01.$$

这表明当  $\mathbf{A}$  为病态矩阵时, 尽管剩余  $\|\mathbf{r}\|$  很小, 误差估计仍然较大, 因此, 当  $\mathbf{A}$  病态时用  $\|\mathbf{r}\|$  大小作为检验解的准确度是不可靠的.

35. 解 (1)  $\|\mathbf{X}\|_1=9, \|\mathbf{X}\|_2=\sqrt{29}, \|\mathbf{X}\|_\infty=5.$

(2)  $\|\mathbf{A}\|_1=4, \rho(\mathbf{A})=1 (|\lambda-\mathbf{A}|=(\lambda-1)^2, \lambda_{1,2}=1).$

(3) 由  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix} > 0$ , 得  $a^2 < 3$ , 故  $a$  的取值范围  $-\sqrt{3} < a <$

$\sqrt{3}$ , 取  $a=1$  时,  $L = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$

## 第八章 解线性方程组的迭代法

### 一、内容提要

解线性方程组的迭代法,即是用某种极限过程去逐步逼近线性方程组精确解的方法.迭代法是解大型稀疏矩阵方程组的重要方法.

$$\text{设} \quad \quad \quad \mathbf{AX}=\mathbf{b}, \quad (8.1)$$

其中  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{X}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{A}^{-1}$  存在.

将  $\mathbf{AX}=\mathbf{b}$  变形为等价的方程组

$$\mathbf{X}=\mathbf{BX}+\mathbf{f}, \quad (8.2)$$

由此建立迭代公式

$$\mathbf{X}^{(k+1)}=\mathbf{BX}^{(k)}+\mathbf{f}, k=0,1,2,\cdots. \quad (8.3)$$

给定初始向量  $\mathbf{X}^{(0)}$ ,按此公式计算得近似解向量序列  $\{\mathbf{X}^{(k)}\}$ ,若对任意  $\mathbf{X}^{(0)}$ ,当迭代次数无限增加时,序列  $\{\mathbf{X}^{(k)}\}$  都有相同的极限  $\mathbf{X}^*$ ,即  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{X}^*$ ,也就是说  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i^*, i=1,2,\cdots,n$ ,显然有

$$\mathbf{X}^*=\mathbf{BX}^*+\mathbf{f}, \quad (8.4)$$

则称迭代公式是收敛的,否则是发散的.称迭代格式(8.3)中的矩阵  $\mathbf{B}$  为迭代矩阵,对于不同的迭代矩阵得到不同的迭代格式.

#### 1. Jacobi 迭代

设有方程组

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

简记为

$$\mathbf{AX}=\mathbf{b}.$$

其中  $\mathbf{A}$  为非奇异阵且  $a_{ii} \neq 0 (i=1,2,\cdots,n)$ .考虑由  $\mathbf{AX}=\mathbf{b}$  的第  $i$

个方程解出  $x_i$ , 得到

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (8.5)$$

对方程组(8.5)应用迭代法, 即得解方程组  $\mathbf{AX}=\mathbf{b}$  的 Jacobi 迭代公式(分量形式):

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)}). \quad (8.6)$$

$$i=1, 2, \dots, n, k=0, 1, \dots.$$

其中  $\mathbf{X}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T$ .

公式(8.6)可写为  $\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{BX}^{(k)} + \mathbf{f}$ , 现将  $\mathbf{A}$  分裂为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ \cdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n, n-1} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \cdots \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1, n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}.$$

公式(8.6)也可写为矩阵形式,

$$\begin{cases} \mathbf{X}^{(k+1)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}, \\ \mathbf{B} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}), \mathbf{f} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}, \end{cases} \quad (8.7)$$

其中  $\mathbf{B} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$  称为 **Jacobi 迭代阵**. 记为  $\mathbf{B}_j$ .

## 2. Gauss-Seidel 迭代

Gauss-Seidel 迭代法(分量形式):

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}), \quad (8.8)$$

$$i=1, 2, \dots, n, k=0, 1, 2, \dots.$$

公式(8.8)可写为矩阵形式为

$$\begin{cases} \mathbf{X}^{(k+1)} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \mathbf{UX}^{(k)} + (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b}, \\ \mathbf{B} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U}, \\ \mathbf{f} = (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b}. \end{cases} \quad (8.9)$$

其中  $\mathbf{B} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U}$  称为 **Gauss-Seidel 迭代阵**. 记为  $\mathbf{B}_c$ .

### 3. 逐次超松弛迭代法(简称 SOR 方法)

SOR 方法是 G-S 迭代法的一种加速方法,是解大型稀疏矩阵方程组的有效方法之一.

SOR 方法的分量形式:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad (8.10)$$
$$i=1, 2, \dots, n, k=0, 1, 2, \dots,$$

其中  $\omega$  称为松弛因子.

SOR 方法的矩阵形式:

$$\begin{cases} \mathbf{X}^{(k+1)} = (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} [(1-\omega) \mathbf{D} - \omega \mathbf{U}] \mathbf{X}^{(k)} + \omega (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b}. \\ \mathbf{B} = (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} [(1-\omega) \mathbf{D} - \omega \mathbf{U}], \\ \mathbf{f} = \omega (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b}, \end{cases} \quad (8.11)$$

其中  $\mathbf{B} = (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} [(1-\omega) \mathbf{D} - \omega \mathbf{U}]$  称为 SOR 方法的迭代矩阵,记为  $\mathbf{B}_s$ .

### 4. 迭代的收敛性

**定理 8.1** (迭代法基本定理) 设有方程组

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{f},$$

对于任意初始向量  $\mathbf{X}^{(0)}$  及任意  $\mathbf{f}$ , 解此方程组的迭代法(即  $\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{f}$ ) 收敛的充要条件是

$$\rho(\mathbf{B}) < 1.$$

**定义 8.1** 称  $R(\mathbf{B}) = -\ln \rho(\mathbf{B})$  为迭代法的收敛速度.

**定理 8.2** (迭代法收敛的充分条件) 如果方程组(8.2)的迭代公式为  $\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{f}$  ( $\mathbf{X}^{(0)}$  为任意初始向量), 且迭代矩阵的某一种范数  $\|\mathbf{B}\|_v = q < 1$ . 则

1) 迭代法收敛;

$$\left. \begin{aligned} 2) \quad \|\mathbf{X}^* - \mathbf{X}^{(k)}\|_v &\leq \frac{q}{1-q} \|\mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{X}^{(k-1)}\|_v; \\ 3) \quad \|\mathbf{X}^* - \mathbf{X}^{(k)}\|_v &\leq \frac{q^k}{1-q} \|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)}\|_v. \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

由定理 8.2 知,  $\|B\| = q < 1$  愈小, 迭代收敛愈快.

**定义 8.2** (对角优势阵) 设  $A = (a_{ij})_n \in \mathbf{R}^{n \times n}$  (或  $\mathbf{C}^{n \times n}$ )

1) 如果矩阵  $A$  满足条件

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

即  $A$  的每一行对角元素的绝对值都严格大于同行其他元素绝对值之和, 则称  $A$  为严格对角优势矩阵.

2) 如果  $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 且至少有一个不等式严格成立, 称  $A$  为弱对角优势矩阵.

**定义 8.3** (可约与不可约矩阵) 设  $A = (a_{ij})_n \in \mathbf{R}^{n \times n}$  (或  $\mathbf{C}^{n \times n}$ ), 当  $n \geq 2$  时, 如果存在  $n$  阶排列矩阵  $P$  使

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

成立, 其中  $A_{11}$  为  $r$  阶子矩阵,  $A_{22}$  为  $n-r$  阶子矩阵 ( $1 \leq r \leq n$ ), 则称矩阵  $A$  是可约的. 如果不存在排列阵  $P$  使 (8.13) 成立, 则称  $A$  为不可约矩阵.

**定理 8.3** (对角占优定理) 如果  $A = (a_{ij})_n \in \mathbf{R}^{n \times n}$  (或  $\mathbf{C}^{n \times n}$ ) 为严格对角优势矩阵或不可约弱对角优势矩阵, 则  $A$  是非奇异矩阵.

**定理 8.4** 如果  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为严格对角优势矩阵或为不可约弱对角优势矩阵, 则对任意的  $X^{(0)}$ , 解方程组 (8.1) 的 Jacobi 迭代、Gauss-Seidel 迭代均收敛.

**定理 8.5** 设解 (8.1) ( $a_{ii} \neq 0, i=1, 2, \dots, n$ ) 的 SOR 方法收敛, 则

$$0 < \omega < 2.$$

**定理 8.6** 如果  $A$  为对称正定矩阵, 且  $0 < \omega < 2$ , 则解 (8.1) 的 SOR 方法收敛.

**定理 8.7** 如果  $A$  是对称正定矩阵, 且是三对角矩阵, 则  $\rho(B_G) = \rho^2(B_I)$ , 且 SOR 方法的最优松弛因子

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B_I)}}, \quad \rho(B_S) = \omega_{opt} - 1.$$

**定理 8.8** 设 Jacobi 迭代矩阵  $B_I = (b_{ij})_n$  为非负矩阵 (即  $b_{ii} = 0, b_{ij} \geq 0, 1 \leq i, j \leq n$ ), 则下列关系有一个且只有一个成立:

- 1)  $\rho(B_I) = \rho(B_G) = 0$ ;
- 2)  $0 < \rho(B_G) < \rho(B_I) < 1$ ;
- 3)  $\rho(B_I) = \rho(B_G) = 1$ ;
- 4)  $1 < \rho(B_I) < \rho(B_G)$ .

**定理 8.9** 若系数矩阵  $A$  对称正定, 则求解  $AX = b$  的 Gauss-Seidel 迭代法收敛.

## 二、基本要求

1) 掌握 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法和 SOR 方法的计算分量形式、矩阵形式和它们的迭代矩阵表示式.

2) 掌握线性代数方程组的系数矩阵为对称正定三对角矩阵时, Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法和 SOR 迭代法的重要结论.

3) 理解迭代法收敛的充要条件, 会用迭代阵的谱半径判明迭代的收敛性.

4) 能用迭代矩阵的范数判别迭代法的收敛性.

5) 会根据方程组系数矩阵的严格对角优势性, 判明 Jacobi 迭代、Gauss-Seidel 迭代对任意初始向量的收敛性.

6) 掌握线性代数方程组的系数矩阵是对称正定阵时, Gauss-Seidel 迭代法及松弛因子满足必要条件的 SOR 迭代法对任意初始迭代向量均收敛的结论.

7) 知道迭代法的渐近收敛速度的定义和计算.

### 三、例题选讲

**例 1** 证明用 Jacobi 迭代法解下列方程组必收敛, 并求解, 要求  $\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|_{\infty} \leq 10^{-5}$ .

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 0.5, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

**解** Jacobi 迭代阵:

$$B_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

因  $\|B_J\|_1 = 0.2 + \frac{2}{3} = \frac{13}{15} < 1$ , 故 Jacobi 迭代法收敛, 迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.2x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.1, \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.05, \quad k=0, 1, \dots \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{3}x_1^{(k)} + \frac{2}{3}x_2^{(k)} + \frac{1}{3}, \end{cases}$$

$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$  可任选. 计算结果如表 8.1.

**表 8.1**

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.	0.	0.
1	0.100000	0.0500000	0.3333333
2	0.176667	0.1033333	0.400000
3	0.200667	0.125333	0.461111
4	0.217289	0.136245	0.483777
5	0.224004	0.141836	0.496593
...	...	...	...
13	0.231069	0.147041	0.508362
14	0.231081	0.147050	0.508383
15	0.231087	0.147055	0.508393

由于  $\| \mathbf{X}^{(15)} - \mathbf{X}^{(14)} \|_{\infty} = 10^{-5}$ . 故所求的解为

$$x_1^* \approx 0.231087, x_2^* \approx 0.147055, x_3^* \approx 0.508393.$$

**例 2** 证明用 Gauss-Seidel 迭代法求解例 1 方程组必收敛, 并求解, 要求  $\| \mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{X}^{(k-1)} \|_{\infty} \leq 10^{-5}$ .

**解** Gauss-Seidel 迭代阵为

$$\mathbf{B}_G = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U} = -\frac{1}{300} \begin{bmatrix} 0 & -60 & -60 \\ 0 & -12 & -42 \\ 0 & -28 & -48 \end{bmatrix}.$$

因为  $\| \mathbf{G} \|_1 = \frac{150}{300} < 1$ , 所以 G-S 迭代必收敛.

迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.2x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.1, \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.05, \quad k=0,1,\dots \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{3}x_1^{(k+1)} + \frac{2}{3}x_2^{(k+1)} + \frac{1}{3}, \end{cases}$$

$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$  任选. 计算结果如表 8.2.

**表 8.2**

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.	0.	0.
1	0.100000	0.070000	0.413333
2	0.196667	0.130667	0.486000
3	0.223333	0.143267	0.503289
4	0.229311	0.146191	0.507231
5	0.230684	0.146860	0.508134
6	0.230999	0.147013	0.508341
7	0.231071	0.147048	0.508389
8	0.231087	0.147056	0.508399
9	0.231091	0.147058	0.508402

因  $\| \mathbf{X}^{(9)} - \mathbf{X}^{(8)} \|_{\infty} = 0.4 \times 10^{-5}$ , 故得方程组的解为

$$x_1^* = 0.231091, x_2^* = 0.147058, x_3^* = 0.508402.$$

**例 3** 考察 Jacobi 迭代、Gauss-Seidel 迭代求解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

的收敛性.

**解** 对于此方程组, Jacobi 迭代法的迭代矩阵为

$$\mathbf{B}_J = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix};$$

$\mathbf{B}_J$  的特征多项式为

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}_J) = \begin{vmatrix} \lambda & -0.5 & 0.5 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -0.5 & -0.5 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 + 1.25);$$

其特征值为  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{1.25}i, \lambda_3 = -\sqrt{1.25}i$ . 故有  $\rho(\mathbf{B}_J) = \sqrt{1.25} > 1$ . 因而 Jacobi 迭代法不收敛.

对于此方程组, G-S 迭代法的迭代矩阵为

$$\mathbf{B}_G = - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix},$$

可见,  $\mathbf{B}_G$  的特征值为  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0.5$ . 故有  $\rho(\mathbf{B}_G) = 0.5 < 1$ , 所以 G-S 迭代法必收敛.

**例 4** 对下列方程组使用 Jacobi 迭代法求解, 试判断是否收敛?

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 8. \end{cases}$$

**解** 由于此方程组的系数矩阵是严格对角优势矩阵, 所以,

Jacobi 迭代法收敛.

**例 5** 试用  $\omega=1.25$  的 SOR 法求解下列方程组, 要求  $\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|_{\infty} < 0.00005$ .

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 16, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 20, \\ -x_2 + 4x_3 = -12. \end{cases}$$

**解** 方程组的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

是正定矩阵, 由定理 8.6 知, 用  $\omega=1.25$  的 SOR 法求解必收敛. 迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.25x_1^{(k)} + 1.25(-0.75x_2^{(k)} + 4), \\ x_2^{(k+1)} = -0.25x_2^{(k)} + 1.25(-0.75x_1^{(k+1)} + 0.25x_3^{(k)} + 5), \\ x_3^{(k+1)} = -0.25x_3^{(k)} + 1.25(0.25x_2^{(k+1)} - 3), \end{cases} \quad k=0, 1, \dots.$$

计算结果如表 8.3.

**表 8.3**

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.	0.	0.
1	5.00000	1.56250	-3.26172
2	2.28516	2.69775	-2.09152
3	1.89957	2.77963	-2.35849
4	1.91920	3.01881	-2.21700
5	1.69007	3.21804	-2.19011
6	1.56057	3.29805	-2.17183
7	1.51794	3.32372	-2.16838

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
8	1.50453	3.33095	-2.16698
9	1.50110	3.33280	-2.16676
10	1.50023	3.33322	-2.16668
11	1.50005	3.33331	-2.16667
12	1.50001	3.33333	-2.16667

由于  $\| \mathbf{X}^{(12)} - \mathbf{X}^{(11)} \|_{\infty} = 0.00004 < 0.00005$ , 故得方程组的解为  
 $x_1^* \approx 1.50001, x_2^* \approx 3.33333, x_3^* \approx -2.16667$ .

**例 6** 讨论用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法解方程组  $\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{b}$  的收敛性, 如果收敛, 比较哪种方法收敛较快, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**解** 对 Jacobi 迭代法, 迭代矩阵

$$\mathbf{B}_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

因  $\rho(\mathbf{B}_J) = \sqrt{\frac{11}{12}} < 1$ , 方法收敛.

对 G-S 迭代, 迭代矩阵

$$\mathbf{B}_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{11}{12} \end{bmatrix}.$$

因  $\rho(\mathbf{B}_G) = \frac{11}{12} < 1$ , 故方法也收敛.

由于  $\rho(\mathbf{B}_G) < \rho(\mathbf{B}_J)$ , 故 G-S 方法较 Jacobi 方法收敛得快.

**例 7** 设  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{2 \times 2}$  是二阶矩阵, 且  $a_{11} a_{22} \neq 0$ . 试证求解方程组  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  的 Jacobi 方法与 Gauss-Seidel 方法同时收敛或发散.

**证** Jacobi 迭代矩阵为

$$\mathbf{B}_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 \end{bmatrix},$$

其谱半径  $\rho(\mathbf{B}_J) = \sqrt{\left| \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11} a_{22}} \right|}$ ; 而 Gauss-Seidel 迭代阵为

$$\mathbf{B}_G = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11} a_{22}} \end{bmatrix}.$$

其谱半径为  $\rho(\mathbf{B}_G) = \left| \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11} a_{22}} \right|$ . 显然  $\rho(\mathbf{B}_J)$  与  $\rho(\mathbf{B}_G)$  同时小于 1、等于或大于 1, 因而 Jacobi 法和 Gauss-Seidel 法具有相同的敛散性.

**例 8** 设线性方程组  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  的系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ -3 & 2 & a \end{bmatrix},$$

试求能使 Jacobi 方法收敛的  $a$  的取值范围.

**解** 当  $a \neq 0$  时, Jacobi 迭代矩阵

$$\mathbf{B}_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{3}{a} \\ -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{2}{a} \\ \frac{3}{a} & -\frac{2}{a} & 0 \end{bmatrix}.$$

由  $|\lambda I - B| = 0$ , 得  $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm \frac{2}{|a|}$ , 故  $\rho(B) = \frac{2}{|a|}$ . 由  $\rho(B) < 1$ , 得  $|a| > 2$ , 即  $|a| > 2$  时,  $\rho(B) < 1$ , Jacobi 迭代法收敛.

**例 9** 设矩阵  $A$  非奇异, 试证用 Gauss-Seidel 迭代法求解  $A^T A X = b$  时是收敛的.

**证** 设  $X \neq O$ , 则因  $A$  非奇异, 故  $A X \neq O$ , 从而

$$(A X, A X) = (A X)^T (A X) = X^T (A^T A) X > 0,$$

即  $A^T A$  正定. 所以由定理 8.9 知 Gauss-Seidel 迭代法求解方程组  $A^T A X = b$  收敛.

**例 10** 设  $A$  为正交矩阵,  $B = 2I - A$ . 求证线性方程组  $B^T B X = b$  用 Gauss-Seidel 方法求解必收敛.

**解** 因  $A$  正交, 则  $A^T A = I$ . 设  $\lambda$  是  $A$  的特征值, 则有  $X \neq 0$ , 使  $A X = \lambda X$ .

两边与  $A X$  作内积, 有

$$(A X, A X) = \lambda (A X, X),$$

$$(X, A^T A X) = \lambda^2 (X, X).$$

从而有  $(X, X) = \lambda^2 (X, X)$ ,

$$(\lambda^2 - 1)(X, X) = 0.$$

故  $|\lambda| = 1$ .

又  $B$  的特征值为  $2 - \lambda$ , 故  $B$  的特征值不为零, 从而  $B$  非奇异, 即  $B^T B$  正定. 所以 Gauss-Seidel 迭代法收敛.

**例 11** 设求解方程组  $A X = b$  的迭代法

$$X^{(k+1)} = B X^{(k)} + g \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

收敛. 求证: 对  $0 < \omega < 1$ , 迭代法

$$X^{(k+1)} = [(1-\omega)I + \omega B] X^{(k)} + \omega g \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

收敛.

**证** 设  $C = (1-\omega)I + \omega B$ ,  $\lambda(C)$ ,  $\lambda(B)$  分别为  $C$  和  $B$  的特征值, 则显然

$$\lambda(C) = (1-\omega) + \omega \lambda(B).$$

因为  $0 < \omega < 1$ ,  $\lambda(C)$  是 1 和  $\lambda(B)$  的加权平均, 故

$$|\lambda(B)| < |\lambda(C)| < 1.$$

即迭代法  $X^{(k+1)} = CX^{(k)} + \omega g$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) 收敛.

**例 12** 设求解方程组  $AX=b$  的 Jacobi 迭代格式为

$$X^{(k+1)} = BX^{(k)} + g \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

求证: 若  $\|B\|_{\infty} < 1$ , 则相应的 Gauss-Seidel 迭代收敛.

**证** 由于  $B$  是 Jacobi 迭代矩阵, 故

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

又  $\|B\|_{\infty} < 1$ , 故

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

即  $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 亦即系数矩阵  $A$  是严格优势矩阵. 由定理 8.4 知, Gauss-Seidel 迭代法收敛.

**例 13** 设矩阵  $A$  对称正定,  $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ . 试证: 若  $2D - A$  正定, 则 Jacobi 迭代法求解方程组  $AX=b$  必收敛.

**证** 设 Jacobi 迭代矩阵  $B = I - D^{-1}A$  的特征值为  $\lambda$ , 相应的特征向量为  $X \neq 0$ , 则

$$(I - D^{-1}A)X = \lambda X,$$

$$(D - A)X = \lambda DX,$$

$$(2D - A)X = (\lambda + 1)DX.$$

于是

$$((2D - A)X, X) = (\lambda + 1)(DX, X),$$

$$\lambda + 1 = \frac{((2D - A)X, X)}{(DX, X)} = \frac{2(DX, X) - (AX, X)}{(DX, X)}. \quad (8.14)$$

因为  $\mathbf{A}$  正定, 故  $a_{ii} > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ , 从而  $\mathbf{D}$  也正定; 又  $2\mathbf{D} - \mathbf{A}$  正定, 故 (8.14) 式右端为正, 即  $\lambda > -1$ . 再由 (8.14) 式, 因  $\mathbf{A}$  正定而有  $(\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{X}) > 0$ , 故

$$\lambda + 1 < \frac{2(\mathbf{D}\mathbf{X}, \mathbf{X})}{(\mathbf{D}\mathbf{X}, \mathbf{X})} = 2, \text{ 从而 } \lambda < 1.$$

所以  $|\lambda| < 1, \rho(\mathbf{B}) < 1$ , Jacobi 迭代收敛.

**例 14** 给定方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b} \quad (8.15)$$

设  $\mathbf{D}$  是非奇异对角矩阵, 则对  $\mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$ , 使用 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代的敛散性与方程组 (8.15) 相同.

证  $\mathbf{B}_J = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$ ,

$$\mathbf{D}\mathbf{A} = \mathbf{D}(\mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}) = \mathbf{D}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{L} + \mathbf{D}\mathbf{U},$$

$$\mathbf{B}_J = -(\mathbf{D}\mathbf{D})^{-1}(\mathbf{D}\mathbf{L} + \mathbf{D}\mathbf{U})$$

$$= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D})(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = \mathbf{B}_J.$$

故有  $\rho(\mathbf{B}_J) = \rho(\mathbf{B}_J)$ .

即方程组  $\mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  与  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  的 Jacobi 迭代具有相同的敛散性.

又  $\mathbf{B}_G = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$ ,

$$\mathbf{B}_G = -(\mathbf{D}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{L})^{-1}(\mathbf{D}\mathbf{U})$$

$$= -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}(\mathbf{D})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{U} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{B}_G.$$

故有  $\rho(\mathbf{B}_G) = \rho(\mathbf{B}_G)$ .

即用 Gauss-Seidel 迭代法解方程组  $\mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  与  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$  有相同的敛散性.

**例 15** 用迭代法解方程组  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$ , 记  $\mathbf{X}^*$  为准确解,  $\mathbf{X}^{(k)}$  为第  $k$  次近似解,  $\epsilon^{(k)} = \mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{X}^*$ , 称  $\epsilon^{(k)}$  为第  $k$  次残向量. 设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^T.$$

试分别求 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代的残向量  $\epsilon^{(k)}$ .

**解** Jacobi 迭代:

$$X^{(k+1)} = B_1 X^{(k)} + D^{-1} b,$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad D = I.$$

$$\epsilon^{(k+1)} = X^{(k+1)} - X^*, \text{ 显然此处 } X^* = (1, 1)^T.$$

$$\epsilon^{(k+1)} = (B_1 X^{(k)} + D^{-1} b) - (B_1 X^* + D^{-1} b)$$

$$= B_1 (X^{(k)} - X^*) = B_1 \epsilon^{(k)}$$

$$= B_1^2 \epsilon^{(k-1)} = \dots = B_1^{k+1} \epsilon^{(0)}.$$

即 
$$\epsilon^{(k)} = B_1^k \epsilon^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^k \epsilon^{(0)} = 2^{-k} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \epsilon^{(0)}.$$

显然 
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

故 
$$\epsilon^{(k)} = \begin{cases} 2^{-k} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \epsilon^{(0)}, & \text{当 } k \text{ 为偶数,} \\ 2^{-k} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \epsilon^{(0)}, & \text{当 } k \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代:

$$X^{(k+1)} = B_G X^{(k)} + g,$$

$$B_G = -(D+L)^{-1} U, \quad g = -(D+L)^{-1} b.$$

此处 
$$B_G = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

由

$$\epsilon^{(k+1)} = X^{(k+1)} - X^* = (B_G X^{(k)} + g) - (B_G X^* + g)$$

$$= B_G (X^{(k)} - X^*) = B_G \epsilon^{(k)} = \dots = B_G^{k+1} \epsilon^{(0)}.$$

则有

$$\begin{aligned}\epsilon^{(k)} &= B_G^k \epsilon^{(0)} = - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^k \epsilon^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(0)} \\ \epsilon_2^{(0)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2^{-2k} \epsilon_2^{(0)} \\ 2^{-2k} \epsilon_2^{(0)} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

**例 16** 设  $A$  为  $n$  阶非奇异矩阵, 求证  $AX=b$  的解总能通过 Gauss-Seidel 方法得到.

**证** 因为  $A$  非奇异, 则  $AX=b$  与  $A^T AX=A^T b$  一定是同解方程组. 由例 9 知  $A^T A$  正定, 故用 Gauss-Seidel 方法求解对称正定方程组  $A^T AX=A^T b$  一定收敛, 那 Gauss-Seidel 方法一定能得到  $AX=b$  的解.

**例 17** 设  $B$  为  $n$  阶实对称矩阵,  $A$  为  $n$  阶对称正定矩阵, 考虑迭代格式

$$X^{(k+1)} = BX^{(k)} + d.$$

如果  $A-BAB$  正定, 求证此格式从任意初始点  $X^{(0)}$  出发都收敛.

**证** 设  $\lambda$  为  $B$  的任一特征值,  $u \neq 0$  为相应的特征向量, 则  $BU = \lambda u$ , 从而

$$\begin{aligned}u^T (A-BAB)u &= u^T Au - u^T BABu = u^T Au - (Bu)^T A(Bu) \\ &= u^T Au - (\lambda u)^T A(\lambda u) = (1-\lambda^2)(u^T Au).\end{aligned}$$

因为  $A-BAB$  和  $A$  正定, 故

$$\begin{aligned}u^T (A-BAB)u^T &= (1-\lambda^2)u^T Au > 0, \\ 1-\lambda^2 &> 0,\end{aligned}$$

即  $|\lambda| < 1, \quad \rho(B) < 1.$

因此此格式对任意初始点  $X^{(0)}$  都收敛.

**例 18** 设求解方程组  $AX=b$  的 Jacobi 方法的迭代矩阵为  $B = L+U$  ( $L, U$  分别为下、上三角矩阵). 求证当  $\|L\| + \|U\| < 1$  时相应的 Gauss-Seidel 方法收敛.

**证明** Gauss-Seidel 迭代公式可表示为

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{L}\mathbf{X}^{(k+1)} + \mathbf{U}\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{g} \quad (k=0,1,2,\cdots). \quad (8.16)$$

方程组  $\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{b}$  的解  $\mathbf{X}^*$  自然满足

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{L}\mathbf{X}^* + \mathbf{U}\mathbf{X}^* + \mathbf{g}. \quad (8.17)$$

(8.16)式与(8.17)式相减,得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^*\| &= \|\mathbf{L}(\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^*) + \mathbf{U}(\mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{X}^*)\| \\ &\leq \|\mathbf{L}\| \|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^*\| + \|\mathbf{U}\| \|\mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{X}^*\|, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^*\| &\leq \frac{\|\mathbf{U}\|}{1 - \|\mathbf{L}\|} \|\mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{X}^*\| \\ &\leq \dots \leq \left[ \frac{\|\mathbf{U}\|}{1 - \|\mathbf{L}\|} \right]^{k+1} \|\mathbf{X}^{(0)} - \mathbf{X}^*\| \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

因  $\|\mathbf{L}\| + \|\mathbf{U}\| < 1$ , 故

$$\|\mathbf{U}\| < 1 - \|\mathbf{L}\|, 0 < \frac{\|\mathbf{U}\|}{1 - \|\mathbf{L}\|} < 1,$$

从而

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^*\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{\|\mathbf{U}\|}{1 - \|\mathbf{L}\|} \right]^{k+1} \|\mathbf{X}^{(0)} - \mathbf{X}^*\| = 0,$$

即  $\mathbf{X}^{(k+1)}$  收敛到解  $\mathbf{X}^*$ , Gauss-Seidel 迭代法收敛.

**例 19** 设  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶对称正定矩阵, 求证当参数  $\alpha$  满足  $0 < \alpha <$

$\frac{2}{\|\mathbf{A}\|}$  时, 如下迭代格式

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = (\mathbf{I} - \alpha\mathbf{A})\mathbf{X}^{(k)} + \alpha\mathbf{b} \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

收敛.

**证** 设  $\lambda$  为  $\mathbf{A}$  的特征值, 则迭代矩阵  $\mathbf{I} - \alpha\mathbf{A}$  的特征值为  $\mu = 1 - \alpha\lambda$ . 由  $|\mu| < 1$ , 即  $|1 - \alpha\lambda| < 1$  解得

$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda}$  (因  $\mathbf{A}$  正定, 故特征值  $\lambda > 0$ ). 设  $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$  是  $\mathbf{A}$  的与  $\lambda$  对

应的特征向量, 则

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X},$$

$$|\lambda| \|\mathbf{X}\| = \|\lambda\mathbf{X}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{X}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{X}\|,$$

从而

$$|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|$$

所以当  $0 < \alpha < \frac{2}{\|\mathbf{A}\|}$  时, 更有  $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda}$ , 从而  $|1 - \alpha\lambda| < 1$ . 即  $|\mu| < 1$ ,  $\rho(\mathbf{I} - \alpha\mathbf{A}) < 1$ , 于是迭代格式收敛.

## 四、习题

### 1. 设方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20, \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 3. \end{cases}$$

(1) 考察用 Jacobi 迭代法、G-S 迭代法解此方程组的收敛性.

(2) 用 Jacobi 迭代法及 G-S 迭代法解此方程组, 要求当  $\|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}\|_{\infty} < 10^{-4}$  时迭代终止.

### 2. 设方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

试用 G-S 迭代法解此方程组, 当  $\|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}\|_{\infty} < 10^{-4}$  时迭代终止.

### 3. 设方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (a_{11}, a_{22} \neq 0)$$

的迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)}) \quad (k=0, 1, \dots, n). \end{cases}$$

求证:由上述迭代公式产生的向量序列  $\{X^{(k)}\}$  收敛的充要条件是

$$r = \left| \frac{a_{22} a_{21}}{a_{11} a_{22}} \right| < 1.$$

4. 设有方程组

$$(1) \begin{cases} x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 = 1, \\ 0.4x_1 + x_2 + 0.8x_3 = 2, \\ 0.4x_1 + 0.8x_2 + x_3 = 3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

试考察解此方程的 Jacobi 迭代法及 G-S 迭代法的收敛性.

5. 设  $X = BX + f$ , 其中

$$B = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

证明虽然  $\|B\| > 1$ , 但迭代法  $X^{(k+1)} = BX^{(k)} + f$  仍是收敛的.

6. 设  $AX = b$ , 其中  $A$  对称正定, 问解此方程组的 Jacobi 迭代是否一定收敛? 试考察第 4 题(1)方程组.

7. 设有方程组

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{2}, \\ x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + x_3 = \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + x_4 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(1) 求解此方程组的 Jacobi 迭代法矩阵  $B$  的谱半径.

(2) 求解此方程组的 G-S 迭代法的迭代矩阵  $B_G$  的谱半径.

(3) 考察解此方程组的 Jacobi 迭代法及 G-S 迭代法的收敛性.

8. 设有  $AX = b$  ( $a_{ii} \neq 0, i=1, 2, \dots, n$ ).

(1) 证明解此方程组的 Jacobi 迭代法收敛的充要条件是

$$\begin{bmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\lambda \end{bmatrix} = 0$$

的根模  $|\lambda| < 1$ .

(2) 证明解此方程组的 G-S 迭代法收敛的充要条件是

$$\begin{bmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & \cdots & a_{nn}\lambda \end{bmatrix} = 0$$

的根模  $|\lambda| < 1$ .

9. 设  $A = \begin{bmatrix} 10 & a & 0 \\ b & 10 & b \\ 0 & a & 5 \end{bmatrix}$ ,  $\det A \neq 0$ , 用  $a, b$  表示解方程组  $AX$

$= f$  的 Jacobi 迭代法及 G-S 迭代法收敛的充分必要条件.

10. (1) 设  $X_0$  是  $BX=0$  的非零解, 其中  $\det(B)=0$ ,  $|(X_0)_j| = \max_{1 \leq j \leq n} |(x_j)_0|$ ,  $((X_0)_j$  为  $X_0$  的第  $j$  个分量), 求证

$$|b_{ii}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |b_{ik}| \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

(2) 用(1)的结果证明

$$|\lambda| \leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|, \lambda \geq \min_i (|a_{ii}| - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{ik}|).$$

其中  $\lambda$  为  $A=(a_{ij})_n$  的任一特征值.

(3) 如果  $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{ik}| < 1$  ( $i=1, 2, \cdots, n$ ), 求证对于对角元素为 1

的矩阵  $A$  的 Jacobi 迭代法收敛.

11. 用 SOR 方法解方程组 (分别取松弛因子  $\omega=1.03, \omega=1, \omega=1.1$ )

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ -x_1 - 4x_2 - x_3 = 4, \\ -x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

精确解  $\mathbf{X}^* = \left[ \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \right]^T$ , 要求当  $\|\mathbf{X}^* - \mathbf{X}^{(k)}\|_\infty < 5 \times 10^{-6}$  时

迭代终止, 并且对每一个  $\omega$  值确定迭代次数.

12. 用 SOR 方法解方程组 (取  $\omega=0.9$ )

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20, \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3. \end{cases}$$

要求当  $\|\mathbf{X}^{(k+1)} - \mathbf{X}^{(k)}\|_\infty < 10^{-4}$  时迭代终止.

13. 设有方程组

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 24, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30, \\ -x_2 + 4x_3 = -24. \end{cases}$$

若用 Jacobi 迭代法, G-S 迭代法及  $\omega=1.25$  的 SOR 法求解, 试求它们的渐近收敛速度; 若要使误差  $\|\epsilon^{(k)}\| \leq m \|\epsilon^{(0)}\|$ , 其中  $m=10^{-7}$ , 问这 3 种迭代法各应做多少次迭代?

14. 设有方程组  $\mathbf{AX}=\mathbf{b}$ , 其中  $\mathbf{A}$  为对称正定阵, 且有迭代公式

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \omega(\mathbf{b} - \mathbf{AX}^{(k)}), \quad k=0, 1, 2, \dots$$

讨论使迭代序列收敛的  $\omega$  的取值范围.

15. 用 G-S 方法解  $\mathbf{AX}=\mathbf{b}$ , 用  $x_i^{(k+1)}$  记  $\mathbf{X}^{(k+1)}$  的第  $i$  个分量且

$$r_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}.$$

(1) 证明  $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} r_i^{(k+1)}$ .

(2) 如果  $\epsilon^{(k)} = \mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{X}^*$ , 其中  $\mathbf{X}^*$  是方程组的精确解. 求证:

$$\epsilon_i^{(k+1)} = \epsilon_i^{(k)} - \frac{1}{a_{ii}} r_i^{(k+1)},$$

$$r_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \epsilon_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \epsilon_j^{(k)}.$$

16. 设  $A$  与  $B$  为  $n$  阶矩阵, 且  $A$  为非奇异阵, 考虑解方程组

$$\begin{cases} AZ_1 + BZ_2 = b_1, \\ BZ_1 + AZ_2 = b_2. \end{cases}$$

$Z_1, Z_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$ .

(1) 找出下述迭代方法收敛的充要条件,

$$\begin{cases} AZ_1^{(m+1)} = b_1 - BZ_2^{(m)}, \\ AZ_2^{(m+1)} = b_2 - BZ_1^{(m)} \end{cases} \quad (m \geq 0).$$

(2) 找出下述迭代方法收敛的充要条件,

$$\begin{cases} AZ_1^{(m+1)} = b_1 - BZ_2^{(m)}, \\ AZ_2^{(m+1)} = b_2 - BZ_1^{(m+1)}. \end{cases}$$

并比较两个方法的收敛速度.

17. 证明矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

对于  $-\frac{1}{2} < a < 1$  是正定的, 而 Jacobi 迭代只对  $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$  是收敛的.

18. 设

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

试证明  $A$  为可约矩阵.

19. 设  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为不可约弱对角占优阵, 且  $0 < \omega \leq 1$ , 证明解  $AX = b$  的 SOR 方法收敛.

20. 给定迭代过程  $X^{(k+1)} = CX^{(k)} + g$ , 其中  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ), 试证明: 如果  $C$  的特征值  $\lambda_i(C) = 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 则此迭代过程最多迭代  $n$  次收敛于方程组的解.

21. 设  $X^{(k+1)} = BX^{(k)} + f$  ( $k=0, 1, \dots$ ), 其中

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

求  $\rho(B)$  并计算  $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, X^{(4)}$ .

22. 求证  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$  的充要条件是对任何的向量  $X$  都有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k X = AX.$$

23. 设  $A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 16 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ , 证明  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_1^k = 0$ , 但  $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  时,

$\lim_{k \rightarrow \infty} A_2^k$  不收敛.

24. 设  $B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $S^{(k)} = I + B + \dots + B^k$ . 试证若  $\rho(B) < 1$ , 则  $I - B$  非奇异, 且  $\{S^{(k)}\}$  收敛,  $\lim_{k \rightarrow \infty} S^{(k)} = (I - B)^{-1}$ ; 反之, 若  $\{S^{(k)}\}$  收敛, 则  $\rho(B) < 1$ .

25. 设  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ , 证明即使  $\|A\|_1 > 1$ ,  $\|A\|_\infty > 1$ , 级数

$I + A + A^2 + \dots + A^k + \dots$  也收敛.

26. 证明对于任意选择的  $A$ , 序列

$$I, A, \frac{1}{2}A^2, \frac{1}{3}A^3, \frac{1}{4}A^4, \dots$$

收敛于零.

27. 填空题

(1) 已知方程组  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.32 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ , 则解此方程组的 Jacobi 迭代法 \_\_\_\_\_ 收敛 (填“是”或“不”), 它的渐近收敛速度  $R(B)$  = \_\_\_\_\_.

(2) 用 G-S 迭代法解方程组  $\begin{cases} x_1 + ax_2 = 4, \\ 2ax_1 + x_2 = -3, \end{cases}$  其中  $a$  为实数,

方法收敛的充要条件是  $a$  满足\_\_\_\_\_.

(3) 给定方程组  $\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}$ ,  $a$  为实数, 当  $a$  满足\_\_\_\_\_, 且  $0 < \omega < 2$  时, SOR 迭代法收敛.

## 五、习题解答

1. 解 (1) 因此方程组的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

是对角优势矩阵, 故由定理 8.4 知, 其 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代均收敛.

(2) 此方程组的 Jacobi 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{2}{5} x_2^{(k)} - \frac{1}{5} x_3^{(k)} - \frac{12}{5}, \\ x_2^{(k+1)} = +\frac{1}{4} x_1^{(k)} - \frac{1}{2} x_3^{(k)} + 5, \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{5} x_1^{(k)} - \frac{3}{10} x_2^{(k)} + \frac{3}{10}. \end{cases}$$

取初值  $\mathbf{X}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$  进行迭代计算, 得近似解为

$$\mathbf{X}^{(18)} = (-3.9999964, 2.9999739, 1.9999999)^T.$$

$$\|\mathbf{X}^{(18)} - \mathbf{X}^{(17)}\|_{\infty} \approx 0.414468 \times 10^{-4}.$$

此方程组的 G-S 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{2}{5} x_2^{(k)} - \frac{1}{5} x_3^{(k)} - \frac{12}{5}, \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4} x_1^{(k+1)} - \frac{1}{2} x_3^{(k)} + 5, \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{5} x_1^{(k+1)} - \frac{3}{10} x_2^{(k+1)} + \frac{3}{10}. \end{cases}$$

取初值  $\mathbf{X}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ , 迭代 8 次达到精度要求, 近似解为

$$\mathbf{X}^{(8)} = (-4.000036, 2.999985, 2.000003)^T.$$

$$\|\mathbf{X}^{(8)} - \mathbf{X}^{(7)}\|_{\infty} \approx 0.9155273 \times 10^{-4}.$$

2. 解 用 G-S 迭代法解此方程组, 迭代 11 次达到精度要求, 近似解为  $\mathbf{X}^{(11)}$ , 其分量为

$$x_1 = 0.9999619, \quad x_4 = 0.9999771,$$

$$x_2 = 0.9999673, \quad x_5 = 0.9999802,$$

$$x_3 = 0.9999862, \quad x_6 = 0.9999914.$$

$$\|\mathbf{X}^{(10)} - \mathbf{X}^{(11)}\|_{\infty} \approx 0.67234 \times 10^{-4}.$$

3. 证 将所给迭代格式用矩阵形式表出, 得

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}.$$

其中  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

记  $\mathbf{B}_1 = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$ , 则  $\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 \end{bmatrix},$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}_1| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11} a_{22}} = 0.$$

得  $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{\left| \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11} a_{22}} \right|},$

即  $\rho(\mathbf{B}_1) = \sqrt{\left| \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11} a_{22}} \right|}$ . 迭代收敛的充要条件为

$$\rho(\mathbf{B}_1) < 1, \text{ 即 } \left| \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11} a_{22}} \right| < 1.$$

4. 解 (1)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 1 & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U},$$

则 Jacobi 迭代矩阵

$$\mathbf{B}_J = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = -\begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}_J| = \begin{vmatrix} \lambda & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & \lambda & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 0.8)(\lambda^2 + 0.8\lambda - 0.32) = 0.$$

得  $\lambda_1 = 0.8, \lambda_{2,3} = -0.4 \pm \sqrt{0.48},$

则  $\rho(\mathbf{B}_J) \approx 1.09 > 1.$

所以解此方程组 Jacobi 迭代法不收敛.

Gauss-Seidel 迭代矩阵

$$\mathbf{B}_G = -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.4 & 1 & 0 \\ -0.08 & -0.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & -0.16 & 0.64 \\ 0 & -0.032 & -0.672 \end{bmatrix},$$

因  $\|\mathbf{B}_G\|_{\infty} = 0.8 < 1$ , 故由定理 8.2 知解此方程组的 G-S 迭代法收敛.

$$(2) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=L+D+U.$$

则 Jacobi 迭代阵

$$B_J = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$|\lambda I - B_J| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda - 2\lambda + 4 - 4 + 4\lambda = \lambda^3 = 0.$$

所以  $\rho(B_J) = 0$ . 即解此方程组的 Jacobi 迭代收敛.

G-S 迭代阵

$$\begin{aligned} B_G &= -(L+D)^{-1}U = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$|\lambda I - B_G| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)^2 = 0.$$

有  $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = 2$ .

所以  $\rho(B_G) = 2$ . 即解此方程组的 G-S 迭代法不收敛.

5. 解  $\|B\|_1 = 1.2, \|B\|_\infty = 1.1, \|B\|_2 = 1.021$ . 故迭代矩阵  $B$  的这些范数都大于 1. 虽不满足迭代法收敛充分条件, 但

$$\det(\lambda I - B) = \begin{vmatrix} \lambda - 0.9 & 0 \\ -0.3 & \lambda - 0.8 \end{vmatrix} = (\lambda - 0.9)(\lambda - 0.8),$$

$\lambda_1 = 0.9, \lambda_2 = 0.8$ , 故  $\rho(B) = 0.9 < 1$ , 所以迭代法收敛.

6. 解 对于方程组  $AX = b$ , 其中  $A$  为对称正定, 解此方程组的 Jacobi 迭代不一定收敛.

如, 习题 4(1), 方程的系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 1 & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

是对称正定矩阵,但解此方程组的 Jacobi 迭代发散.

### 7. 解 方程组的系数矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.25 & -0.25 \\ 0 & 1 & -0.25 & -0.25 \\ -0.25 & -0.25 & 1 & 0 \\ -0.25 & -0.25 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.25 & -0.25 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}. \end{aligned}$$

#### (1) 解此方程组的 Jacobi 迭代阵

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & -0.25 \\ -0.25 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.25 & -0.25 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \\ |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}_1| &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -0.25 & -0.25 \\ 0 & \lambda & -0.25 & -0.25 \\ -0.25 & -0.25 & \lambda & 0 \\ -0.25 & -0.25 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^4 - 0.25\lambda^2 = 0, \end{aligned}$$

得  $\lambda_{1,2} = 0$ ,  $\lambda_3 = 0.5$ ,  $\lambda_4 = -0.5$ .

则  $\rho(\mathbf{B}_1) = 0.5$ .

(2) 解此方程组的 G-S 迭代矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_G &= - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.125 & -0.125 \\ 0 & 0 & -0.125 & -0.125 \end{bmatrix} \\ |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}_G| &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -0.25 & -0.25 \\ 0 & \lambda & -0.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & \lambda - 0.125 & -0.125 \\ 0 & 0 & -0.125 & \lambda - 0.125 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda - 0.125 & -0.125 \\ -0.125 & \lambda - 0.125 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 (\lambda - 0.25) \lambda = 0. \end{aligned}$$

得

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0.25.$$

则

$$\rho(\mathbf{B}_G) = 0.5 < 1.$$

(3) 由(1)、(2)计算可知,  $\rho(\mathbf{B}_I) < 1, \rho(\mathbf{B}_G) < 1$ . 故解此方程组的 Jacobi 迭代和 G-S 迭代都收敛.

8. 解 (1) 由于 Jacobi 迭代法的迭代矩阵

$$\mathbf{B}_I = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}),$$

于是

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}_I) = \det(\mathbf{D}^{-1}) \det(\lambda \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}).$$

而由题设知  $\det(\mathbf{D}^{-1}) \neq 0$ , 故 Jacobi 迭代收敛的充要条件:  $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}_I) = 0$  的根模  $|\lambda| < 1$ , 等价于  $\det(\lambda \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}) = 0$  的根模  $|\lambda| < 1$ .

(2) Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵

$$\mathbf{B}_s = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U},$$

于是  $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}_s) = \det(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \det[(\mathbf{D} + \mathbf{L})\lambda + \mathbf{U}]$ .

由题设知  $\det(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \neq 0$ , 故 Gauss-Seidel 迭代收敛的充要条件:  $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}_s) = 0$  的根模  $|\lambda| < 1$  等价于  $\det[(\mathbf{D} + \mathbf{L})\lambda + \mathbf{U}] = 0$  的根模  $|\lambda| < 1$ .

9. 解 Jacobi 迭代的迭代矩阵为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{10} & 0 \\ -\frac{b}{10} & 0 & -\frac{b}{10} \\ 0 & -\frac{a}{5} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{a}{10} & 0 \\ \frac{b}{10} & \lambda & \frac{b}{10} \\ 0 & \frac{a}{5} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \left[ \lambda^2 - \frac{3ab}{100} \right] = 0.$$

因  $\rho(\mathbf{B}) = \frac{\sqrt{3|ab|}}{10} < 1$ , 故 Jacobi 迭代收敛的充要条件是  $|ab| <$

$$\frac{100}{3}.$$

G-S 迭代法迭代矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ b & 10 & 0 \\ 0 & a & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{b}{100} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{ab}{500} & -\frac{a}{50} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{10} & 0 \\ b & \frac{ab}{100} & -\frac{b}{10} \\ 0 & -\frac{a^2 b}{500} & \frac{ab}{50} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{G}) = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{a}{10} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{ab}{100} & \frac{b}{10} \\ 0 & \frac{a^2 b}{500} & \lambda - \frac{ab}{50} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \left[ \lambda - \frac{ab}{100} \right] \left[ \lambda - \frac{ab}{50} \right] - \frac{a^2 b^2}{5000} \lambda = \lambda \left[ \lambda^2 - \frac{3ab}{100} \lambda \right] = 0.$$

由  $\rho(\mathbf{G}) = \frac{|3ab|}{100} < 1$ , 得 G-S 迭代法收敛的充要条件是  $|ab| < \frac{100}{3}$ .

10. 证 (1) 设

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

考虑第  $i$  个方程有  $\sum_{k=1}^n b_{ik} (\mathbf{X}_0)_k = 0$ , 则

$$b_{ii} = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n b_{ik} \frac{(\mathbf{X}_0)_k}{(\mathbf{X}_0)_i}.$$

于是

$$|b_{ii}| = \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n b_{ik} \frac{(\mathbf{X}_0)_k}{(\mathbf{X}_0)_i} \right| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |b_{ik}| \left| \frac{(\mathbf{X}_0)_k}{(\mathbf{X}_0)_i} \right| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |b_{ik}|.$$

(2) 设  $\lambda$  是  $\mathbf{A}$  的任一特征值, 则

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0,$$

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{X} = 0 \text{ 有非零解 } \mathbf{X}_0.$$

又设  $|(\mathbf{X}_0)_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |(\mathbf{X}_0)_j|$ , 由(1)

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{ik}|, \quad (8.18)$$

所以  $|\lambda| - |a_{ii}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{ik}|$ , 于是

$$|\lambda| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|.$$

由(8.18)式  $|a_{ii}| - |\lambda| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{ik}|$ , 所以

$$|\lambda| \geq |a_{ii}| - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{ik}| \geq \min_i \left[ |a_{ii}| - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{ik}| \right].$$

(3) Jacobi 迭代的迭代矩阵  $\mathbf{B}_1 = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$ , 由题设  $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ , 所以

$$\mathbf{B}_1 = -(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

由(2)得  $|\lambda(\mathbf{B}_1)| \leq \max_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{ik}| < 1$ . 所以  $\rho(\mathbf{B}_1) < 1$ , 则方程组的

Jacobi 迭代收敛.

11. 解 将所给方程组变形为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2, \\ x_2 = 1 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3, \\ x_3 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x_2. \end{cases}$$

其 SOR 迭代法为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega(1-x_2^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} + \omega\left[1 - \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{4}x_3^{(k)}\right], \\ x_3^{(k+1)} = (1-\omega)x_3^{(k)} + \omega\left[-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x_2^{(k+1)}\right], \\ k=0, 1, \cdots. \end{cases}$$

取  $\omega=1.03$ , 初值  $\mathbf{X}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ , 迭代 5 次达到精度要求,

$$\mathbf{X}^{(5)} = (0.5000043, 0.1000001, -0.4999999)^T.$$

取  $\omega=1$ , 初值  $\mathbf{X}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ , 迭代 6 次达到精度要求,

$$\mathbf{X}^{(6)} = (0.5000038, 0.1000002, -0.4999995)^T.$$

取  $\omega=1.1$ , 初值  $\mathbf{X}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ , 迭代 6 次达到精度要求,

$$\mathbf{X}^{(6)} = (0.5000035, 0.0999989, -0.5000003)^T.$$

12. 解 解此方程组的 SOR 方法为

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega \left[ -\frac{12}{5} - \frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} \right], \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} + \omega \left[ 5 + \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} \right], \\ x_3^{(k+1)} = (1-\omega)x_3^{(k)} + \omega \left[ \frac{3}{10} - \frac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{3}{10}x_2^{(k+1)} \right], \end{array} \right. \\ k=0,1,\dots.$$

当  $\omega=0.9$  时,迭代格式为

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = 0.1x_1^{(k)} + 0.9 \left[ -\frac{12}{5} - \frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} \right], \\ x_2^{(k+1)} = 0.1x_2^{(k)} + 0.9 \left[ 5 + \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} \right], \\ x_3^{(k+1)} = 0.1x_3^{(k)} + 0.9 \left[ \frac{3}{10} - \frac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{3}{10}x_2^{(k+1)} \right], \end{array} \right. \\ k=0,1,\dots.$$

取初值  $\mathbf{X}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ , 代入进行计算得

$$\mathbf{X}^{(8)} = (-4.000027, 0.2999987, 0.2000003)^T.$$

13. 解 由于 Jacobi 迭代的迭代矩阵  $\mathbf{B}$  的谱半径  $\rho(\mathbf{B}) = \sqrt{0.625} \approx 0.79057$ , 故收敛速度  $R(\mathbf{B})$  为

$$R(\mathbf{B}) = -\ln \rho(\mathbf{B}) = 0.23500181.$$

G-S 迭代法的谱半径  $\rho(\mathbf{B}_G) = \rho^2(\mathbf{B}) = 0.625$ , 渐近收敛速度

$$R(\mathbf{B}_G) = -\ln \rho(\mathbf{B}_G) = 0.47000363.$$

$\omega=1.25$  时 SOR 法的迭代矩阵为  $\mathbf{B}_s$

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{15}{16} & 1 & 0 \\ & -\frac{5}{16} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{15}{16} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{16} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{15}{16} & 1 & 0 \\ -\frac{75}{256} & \frac{5}{16} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{15}{16} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{16} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{15}{16} & 0 \\ \frac{15}{64} & \frac{161}{256} & \frac{5}{16} \\ \frac{75}{1024} & \frac{805}{4096} & -\frac{39}{256} \end{bmatrix} \cdot \\
\det(\mathbf{M} - \mathbf{B}_s) &= \begin{vmatrix} \lambda + \frac{1}{4} & \frac{15}{16} & 0 \\ -\frac{15}{64} & \lambda - \frac{161}{256} & -\frac{5}{16} \\ \frac{-75}{1024} & \frac{-805}{4096} & \lambda + \frac{39}{256} \end{vmatrix} \\
&= \left[ \lambda + \frac{1}{4} \right] \left[ \lambda - \frac{161}{256} \right] \left[ \lambda + \frac{39}{256} \right] + \frac{15}{16} \times \frac{5}{16} \times \frac{75}{1024} \\
&\quad + \frac{15}{64} \times \frac{15}{16} \left[ \lambda + \frac{39}{256} \right] - \frac{5}{16} \times \frac{805}{4096} \left[ \lambda + \frac{1}{4} \right] \\
&= \lambda^3 - \frac{58}{256} \lambda^2 - \frac{29}{512} \lambda + \frac{25}{4096} = 0.
\end{aligned}$$

用 Newton 法可求得解  $\lambda_1 = 0.3403003$ ,  $\lambda_2 = 0.0886294$ ,  $\lambda_3 = -0.2023671$ , 于是有  $\rho(\mathbf{B}_s) = 0.3403003$ , 渐近收敛速度

$$R(\mathbf{B}_s) = -\ln \rho(\mathbf{B}_s) = 1.0779268.$$

为使  $\|\epsilon^{(k)}\| \leq m \|\epsilon^{(0)}\|$ , 其中  $m = 10^{-7}$ , 迭代次数  $k$  分别为:

Jacobi 迭代法的  $k \approx \frac{-\ln m}{R(\mathbf{B}_j)} = 68.587$ , 取  $k \approx 69$ .

G-S 迭代法的  $k \approx \frac{-\ln m}{R(\mathbf{B}_G)} = 34.294$ , 取  $k \approx 34$ .

$\omega=1.25$  的 SOR 迭代法  $k \approx \frac{-\ln m}{R(B_s)} \approx 14.95287$ , 取  $k \approx 15$ .

14. 解 因为

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \omega(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{X}^{(k)}), \quad (8.19)$$

$$\text{即 } \mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \omega\mathbf{b} - \omega\mathbf{A}\mathbf{X}^{(k)} = (\mathbf{I} - \omega\mathbf{A})\mathbf{X}^{(k)} + \omega\mathbf{b},$$

若要(8.18)式收敛,则只要

$$\rho(\mathbf{I} - \omega\mathbf{A}) < 1.$$

设  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda$ , 因  $\mathbf{A}$  对称正定, 故  $\lambda > 0$ . 矩阵  $\mathbf{I} - \omega\mathbf{A}$  的特征值为  $1 - \omega\lambda$ , 而  $|1 - \omega\lambda| < 1$  的充要条件是

$$0 < \omega < \frac{2}{\lambda}.$$

设  $\rho(\mathbf{A}) = \lambda_i$ , 则当  $0 < \omega < \frac{2}{\rho(\mathbf{A})}$  时,  $\rho(\mathbf{I} - \omega\mathbf{A}) < 1$ ,

当然,  $0 < \omega < \frac{2}{\|\mathbf{A}\|}$  时, 也有

$$\rho(\mathbf{I} - \omega\mathbf{A}) < 1.$$

此时迭代序列(8.18)式收敛.

15. 证 (1) G-S 迭代写成分量形式有

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= [b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}] / a_{ii} \\ &= x_i^{(k)} + [b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)}] / a_{ii} \\ &= x_i + \frac{r_i^{(k+1)}}{a_{ii}}, \end{aligned}$$

$$r_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)}.$$

(2) 因

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} [b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)}].$$

两边同减  $x_i^*$ , 注意到  $b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^*$ , 得

$$\epsilon_i^{(k+1)} = \epsilon_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} [b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)} - b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^*]$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon_i^{(k)} - \frac{1}{a_{ii}} \left[ \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^* + \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^* \right] \\
&= \epsilon_i^{(k)} - \frac{1}{a_{ii}} \left[ \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \epsilon_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n a_{ij} \epsilon_j^{(k)} \right] = \epsilon_i^{(k)} - \frac{r_i^{(k+1)}}{a_{ii}}.
\end{aligned}$$

16. 解 (1) 此迭代法写成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1^{m+1} \\ \mathbf{Z}_2^{m+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1^m \\ \mathbf{Z}_2^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}.$$

迭代矩阵

$$\begin{aligned}
&- \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \\
&= - \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} \mathbf{C}_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{C}_1| &= \begin{vmatrix} \lambda \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} & \lambda \mathbf{I} \end{vmatrix} = |\lambda^2 \mathbf{I} - (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^2| \\
&\stackrel{\text{记}}{=} |\mu \mathbf{I} - (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^2|, \text{ 其中 } \mu = \lambda^2.
\end{aligned}$$

所以此迭代法收敛的充要条件为

$$\rho(\mathbf{C}_1) = (\rho(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^2)^{1/2} = \rho(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}) < 1.$$

(2) 此迭代法写成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1^{m+1} \\ \mathbf{Z}_2^{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1^m \\ \mathbf{Z}_2^m \end{bmatrix}.$$

所以迭代矩阵

$$\begin{aligned}
&- \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \\
&= - \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & -(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} \mathbf{C}_2.
\end{aligned}$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{C}_2| = \begin{vmatrix} \lambda \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^2 \end{vmatrix} = \lambda^n |\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^2|.$$

所以此迭代法收敛的充要条件为

$$\rho(\mathbf{C}_2) = \rho((\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^2) < 1.$$

17. 解  $A$  是对称的, 若  $A$  正定, 则其各阶顺序主子式应大于 0, 即

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 > 0 \Rightarrow -1 < a < 1.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = (1-a)(1+a-2a^2) > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < a < 1.$$

所以当  $-\frac{1}{2} < a < 1$  时, 矩阵  $A$  是正定的.

$AX=b$  的 Jacobi 迭代阵

$$B_1 = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - B_1) &= \begin{vmatrix} \lambda & a & a \\ a & \lambda & a \\ a & a & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & a & a \\ a & \lambda & a \\ 0 & a-\lambda & \lambda-a \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & a \\ a-\lambda & \lambda-a \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & a \\ a-\lambda & \lambda-a \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-a)(\lambda^2 + \lambda a - 2a^2) = (\lambda-a)^2(\lambda+2a). \end{aligned}$$

得  $B_1$  的特征值  $\lambda_{1,2} = a, \lambda_3 = -2a$ .

所以  $\rho(B_1) = |2a|$ . 由  $\rho(B_1) = |2a| < 1$ , 得  $|a| < \frac{1}{2}$ .

即当  $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$  时, Jacobi 迭代收敛.

18. 解 因存在排列阵

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

使

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

故  $A$  为可约阵.

19. 解  $A$  为不可约弱对角优势矩阵, 则  $a_{ii} \neq 0 (i=1, 2, \dots, n)$ , 且  $A$  非奇异, 而 SOR 法的迭代矩阵

$$B_s = (D + \omega L)^{-1} [(1 - \omega)D - \omega U],$$

其中  $A = D + L + U$ ,  $D, L, U$  分别为  $A$  的对角严格下三角与严格上三角矩阵. 只要证  $0 < \omega \leq 1$  时  $\rho(B_s) < 1$ . 用反证法, 设  $B_s$  有一个特征值  $\lambda$ , 满足  $|\lambda| \geq 1$ , 则有

$$\det(\lambda I - B_s) = 0.$$

由此推出  $\det\{(D + \omega L)^{-1}[(D + \omega L) - \frac{1}{\lambda}(1 - \omega)D - \omega U]\} = 0$ , 即

$$\det(D + \omega L)^{-1} \cdot \det\left[\left[1 - \frac{1}{\lambda}(1 - \omega)\right]D + \omega L + \frac{\omega}{\lambda}U\right] = 0.$$

因  $A$  为不可约弱对角优势矩阵, 故在  $0 < \omega \leq 1$  成立时  $\det(D + \omega L)^{-1} \neq 0$ ; 又  $A = D + L + U$  与  $A = \left[1 - \frac{1}{\lambda}(1 - \omega)\right]D + \omega L + \frac{\omega}{\lambda}U$  在  $0 < \omega \leq 1$  时的非零元素与零元素完全一致, 所以  $A$  也是不可约的, 而且  $A$  的对角元满足

$$\begin{aligned} \left|1 - \frac{1}{\lambda}(1 - \omega)\right| |a_{ii}| &\geq \left[1 - \frac{1}{|\lambda|}(1 - \omega)\right] |a_{ii}| \geq \omega |a_{ii}| \\ &\geq \omega \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \geq \omega \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \frac{\omega}{\lambda} \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

它表明当  $A$  为弱对角优势时  $A$  在  $0 < \omega \leq 1$  时也弱对角优势, 故  $\det A \neq 0$ . 这与  $\det(\lambda I - B_s) = 0$  是矛盾的, 故  $|\lambda| < 1$ , 即  $\rho(B_s) < 1$ , 于是 SOR 法收敛.

20. 证 由代数理论可知, 迭代阵  $C$  一定相似于它的 Jordan 标准形  $J$ , 即有可逆阵  $P$ , 使

$$C = P^{-1} J P.$$

由于  $C$  的特征值全为 0, 故  $J$  一定有如下形式:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

方程组  $X = CX + g$  等价于  $(I - C)X = g$ , 由于  $\lambda(C) = 0$ , 故  $\lambda(I - C) = 1 - \lambda(C) = 1 \neq 0$ . 从而  $I - C$  非奇异, 即  $(I - C)X = g$  有唯一解  $X^*$ , 于是

$$X^* = CX^* + g.$$

与所述迭代格式相减有

$$X^{(k+1)} - X^* = C(X^{(k)} - X^*).$$

于是  $X^{(n)} - X^* = C^n(X^{(0)} - X^*)$ .

注意到  $J$  的形式, 则  $J^n = 0$ , 于是

$$C^n = P^{-1} J^n P = 0,$$

即  $X^{(n)} - X^* = 0 \Rightarrow X^{(n)} = X^*$ . 它表明当迭代矩阵的谱半径为 0 时, 迭代  $n$  步, 则得  $X^{(n)} = X^*$  为精确解.

注: 迭代法  $X^{(k+1)} = CX^{(k)} + g$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) 收敛的快慢与  $\rho(B)$  的大小有关,  $\rho(B)$  越小, 收敛越快,  $\rho(B)=0$  时已达最小, 故收敛应最快. 本题说明  $\rho(B)=0$  时仅经过有限步 ( $n$  步) 就一定得到精确解.

$$21. \text{ 解 } \text{ 由于 } \det(\lambda I - B) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 = 0,$$

故  $\rho(B)=0$ . 若取  $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ , 则由迭代格式求得

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (1, 3, 5)^T, x^{(2)} = (5, -3, -3)^T, x^{(3)} = (1, 1, 1)^T, \\ x^{(4)} &= (1, 1, 1)^T, x^* = (1, 1, 1)^T = x^{(3)}, \end{aligned}$$

验证了上一解的结论是正确的.

22. 证 充分性: 因对任意的  $X \in \mathbf{R}^n$ , 有  $A_k X \rightarrow AX$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

若取  $X_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)^T, i=1, \dots, n$ .

$$A_k X_i = (a_{1i}^{(k)}, a_{2i}^{(k)}, \dots, a_{ni}^{(k)})^T \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A X_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})^T.$$

即  
即

$$a_{ji}^{(k)} \rightarrow a_{ji}, j=1, 2, \dots, n, i=1, 2, \dots, n.$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A.$$

必要性: 因  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$ , 由定理 7.17 知,

$$\|A_k - A\| \rightarrow 0 \quad (\text{当 } k \rightarrow \infty).$$

所以  $\forall X$ , 有

$$\|A_k X - A X\| \leq \|A_k - A\| \|X\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k X = A X.$$

$$23. \text{ 解 } \det(\lambda I - A_1) = \det \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ -16 & \lambda - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \left[ \lambda - \frac{1}{2} \right]^2 = 0,$$

$$\rho(A_1) = \frac{1}{2} < 1,$$

由定理 7.18 知  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_1^k = 0$ . 而

$$\det(\lambda I - A_2) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \lambda - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = (\lambda - 1) \left[ \lambda - \frac{1}{2} \right] = 0,$$

$$\rho(A_2) = 1,$$

所以  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_2^k$  不收敛.

24. 证明 由  $(I - B)(I + B + \dots + B^k) = I - B^{k+1}$ , 若  $\rho(B) < 1$ , 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} B^{k+1} = 0$ , 于是有

$$\|S^{(k)} - (I - B)^{-1}\| \leq \|(I - B)^{-1}\| \|B^{k+1}\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S^{(k)} = (I - B)^{-1}.$$

反之, 由  $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = \lim_{k \rightarrow \infty} (S^{(k)} - S^{(k-1)}) = 0$ , 则得

$$\rho(B) < 1.$$

25. 解 因  $\|A\|_1 = \|A\|_\infty = 2 > 1$ , 但  $\rho(A) = 0 < 1$ , 故  $I + A + \dots + A^k + \dots = \frac{1}{I - A}$  收敛.

26. 解 由于  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$  而  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k = 0$ , 故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} A^k = 0.$$

27. 解 (1) 因  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.32 & 1 \end{bmatrix}$  的 Jacobi 迭代矩阵  $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0.32 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\rho(B) = 0.8$ , 故 Jacobi 迭代是收敛的, 且  $R(B) = -\ln \rho(B) = -\ln 0.8 = 0.223$ .

(2)  $a$  满足  $|a| < \sqrt{\frac{1}{2}}$ , 因此时  $\rho(G) < 1$ .

(3)  $a$  满足  $|a| < 1$ , 因此时  $A$  对称正定.

# 模拟试卷

## (一)

1. 填空(共 20 分,每空 2 分)

(1) 若  $f(x) = x^7 + x^3 + 1$ , 则  $f[2^0, 2^1, \dots, 2^7] = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  
 $f[2^0, 2^1, \dots, 2^8] = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(2) 设  $A = (a_{ij})$  是  $n$  阶方阵, 则  $\|A\|_\infty = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\|A\|_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(3) 如果  $A$  是正交阵, 则  $\text{cond}_2(A) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(4) 形如  $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$  的插值型求积公式, 其代数精度至少可达  $\underline{\hspace{2cm}}$  阶; 至多只能达  $\underline{\hspace{2cm}}$  阶.

(5)  $A = \begin{bmatrix} a+1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ , 当  $a$  满足条件  $\underline{\hspace{2cm}}$  时,  $A$  可作  $LU$  分解, 当  $a$  满足条件  $\underline{\hspace{2cm}}$  时, 必有分解式  $A = L \cdot L^T$ , 其中  $L$  是对角线元素为正的下三角阵.

(6) 在用逐次超松弛迭代法(SOR)解线性方程组  $AX=b$  时, 若松弛因子  $\omega$  满足条件  $\underline{\hspace{2cm}}$  时, 则迭代一定发散.

2. (14 分) 已知函数  $f(x)$  的数据表如下.

$x_i$	1	2	3
$f_i$	2	4	12
$f'_i$		3	

试构造一个不超过三次的插值多项式  $H_3(x)$ , 使之满足  $H_3(x_i) = f(x_i) (i=0, 1, 2)$ ,  $H'_3(x_1) = f'(x_1)$ , 并写出余项  $R(x) = f(x) -$

$H_3(x)$ 的表达式.

3. (14 分)用简单迭代法求方程  $x^2 + 10x - 18 = 0$  在  $(1, 2)$  内的根,取初始值  $x_0 = 1.5$ ,要求

- (1) 任意构造迭代格式,并验证所得格式是收敛的;
- (2) 用 Aitken 迭代过程加速一次,以求得更精确的近似值;
- (3) 计算过程和结果均保留 4 位有效数字.

4. (15 分)利用正交多项式构造两点 Gauss 型求积公式

$$\int_{-1}^1 (1+x^2) f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

并问

- (1) 所得求积公式的代数精度是多少?
- (2) 用所得求积公式计算

$$\int_{-1}^1 (1+x^2)(3x^2+2x-1) dx$$

时,截断误差是多少?

5. (14 分)设微分方程初值问题为

$$\begin{cases} y' = Ay, & (\operatorname{Re} A < 0). \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- (1) 构造求解此问题的梯形格式;
- (2) 给出该梯形格式的绝对稳定性区域.

6. (15 分)给定方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (1) 确定  $a$  的取值范围,使方程组对应的 Jacobi 迭代收敛;
- (2) 当  $a=2$  时,用三角分解法(不选主元)求方程组的解  $\mathbf{X}^*$ .

7. (8 分)用插值法求矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

的特征多项式  $\varphi(\lambda)$ .

## (二)

1. 填空(共 20 分,每空 2 分)

(1) 设  $f(x)$  充分光滑,若  $2n+1$  次多项式  $H_{2n+1}(x)$  满足  $H_{2n+1}(x_i) = f(x_i)$ ,  $H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i)$  ( $i=0,1,2,\dots,n$ ), 则称  $H_{2n+1}(x)$  是  $f(x)$  的 \_\_\_\_\_ 多项式, 且余项  $R(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) =$  \_\_\_\_\_.

(2) Simpson 数值求积公式具有 \_\_\_\_\_ 次代数精度, 用来计算  $\int_0^1 [x^4 + (\ln 2)x^3 + 2x + 0.45]dx$  所产生的误差值为 \_\_\_\_\_.

(3) 如果向量  $X \in \mathbf{R}^n$  的某个实值函数  $N(x) = \|x\|$ , 满足条件 \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ 及 \_\_\_\_\_, 则称  $N(x)$  是  $\mathbf{R}^n$  上的一个向量范数.

(4) 矩阵范数  $\|A\|_v$  ( $v=1,2,\infty$ ) 与谱半径  $\rho(A)$  有一个不等式关系, 表现为 \_\_\_\_\_.

(5) 迭代过程  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  ( $n=0,1,\dots$ ) 收敛的一个充分条件是迭代函数  $\varphi(x)$  满足 \_\_\_\_\_.

(6) 用 4 阶 Runge-Kutta 方法求解初值问题 
$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y|_{x=0} = y_0. \end{cases}$$

$0 < x < 1$  时, 取  $h=0.1$  得  $y(1)$  的近似值为 0.42671, 而取  $h=0.05$  得  $y(1)$  的近似值为 0.43382. 若不考虑舍入误差, 则  $y(1)$  的更好的近似值是 \_\_\_\_\_.

2. (12 分) 设  $x_0, x_1, \dots, x_n$  是  $x$  轴上不同的  $n+1$  个点, 考虑下述的插值问题: 求  $c_0, c_1, \dots, c_n$  使得

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j e^{jx}$$

能满足  $P_n(x_i) = y_i, i=0,1,2,\dots,n$ .

其中  $y_i$  是已给的数据. 证明这—问题是唯一可解的.

3. (12 分) 考虑  $\int_a^b f(x)dx$  的数值积分公式  $\sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$ .

(1) 陈述具有  $m$  次代数精度的定义;

(2) 证明:代数精度  $m < 2(n+1)$ .

4. (14 分) 设  $x^*$  是  $f(x)=0$  的三重根,  $f(x)$  在  $x^*$  的某邻域内有三阶连续导.

(1) 试证明对  $f(x)=0$  产生的 Newton 迭代法在  $x^*$  附近是线性收敛的;

(2) 试将 Newton 公式变形, 使之在  $x^*$  附近具有二阶收敛性并加以证明.

5. (14 分) 对于初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad x > x_0,$$

(1) 写出解此问题的一种显式单步的线性格式与一种具有同阶的隐式单步的线性格式;

(2) 写出这两种格式构成的预报—改进—校正—改进系统.

6. (14 分) 用 Jacobi、Gauss-Seidel 迭代法求解下列方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

问是否收敛? 为什么? 若将原方程组变为

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 3. \end{cases}$$

再用上述两种迭代法求解是否收敛? 为什么?

7. (14 分) 设  $R = I - CA$ , 如果  $\|R\| < 1$ , 证明:

(1)  $A$ 、 $C$  都是非奇异的矩阵;

$$(2) \frac{\|R\|}{\|A\| \cdot \|C\|} \leq \frac{\|A^{-1} - C\|}{\|C\|} \leq \frac{\|R\|}{1 - \|R\|}.$$

### (三)

1. 填空(共 20 分, 每空 2 分)

(1) 解线性代数方程组的迭代方法收敛的充要条件是迭代阵的谱半径\_\_\_\_\_.

(2) 勒让德(Legendre)多项式是区间\_\_\_\_\_上,带权\_\_\_\_\_的正交多项式.

(3) 设  $A = \begin{bmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{bmatrix}$ , 则  $\text{cond}(A)_\infty = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\text{cond}(A)_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(4) 设  $l_i(x) (i=0, 1, \dots, n)$  是  $n$  次 Lagrange 基函数, 则  $\sum_{i=0}^n l_i(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ ;  $l_i(x_j) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(5) 方程求根的 Newton 迭代法在单根附近具有\_\_\_\_\_收敛性, 在重根附近具有\_\_\_\_\_收敛性.

(6) 改进的 Euler 法的整体截断误差为\_\_\_\_\_.

2. (12 分) 已知实验数据

$x$	0	1	2	3	5
$y$	1.1	1.9	3.1	3.9	4.9

试用最小二乘法求经验直线  $y = a_0 + a_1 x$ .

3. (14 分) 已知  $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$  是 Gauss 型求积公式,  $l_k(x)$  是  $x_k$  处对应的 Lagrange 基函数, 试证明:

(1)  $\int_{-1}^1 l_k^2(x) dx = \int_{-1}^1 l_k(x) dx, k=0, 1, \dots, n;$

(2)  $\sum_{k=0}^n A_k x_k^{2n+1} = 0;$

(3) 求积公式是稳定的.

4. (14 分) 设  $a > 1$

$$I = \frac{a}{a + \frac{a}{a + \frac{a}{a + \dots}}}$$

(1) 构造计算  $I$  的迭代公式;

(2) 讨论迭代过程的收敛性;

(3) 求  $I$  的精确值.

5. (14 分)已知:

$$\begin{cases} y' = 2x, & 0 \leq x \leq 100, \\ y(0) = 0, y_1 = y(0.1) = 0.01, h = 0.1. \end{cases}$$

试求出 Adams 公式  $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3y'_n - y'_{n-1})$  的局部截断误差的首项,并用此公式计算  $y_{100}$ .

6. (14 分)用平方根法解方程组

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + 4.25x_2 + 2.75x_3 = -0.5, \\ x_1 + 2.75x_2 + 3.5 = 1.25. \end{cases}$$

7. (12 分)设矩阵  $C_0$  是矩阵  $A^{-1}$  的一个近似,记  $R_0 = I - AC_0$ .又设  $\|R_0\| < 1$ ,试证由迭代公式

$$\begin{cases} C_{k+1} = C_k(I + R_k), \\ R_{k+1} = I - AC_{k+1} \end{cases}$$

产生的矩阵序列  $\{C_k\}$  收敛于  $A^{-1}$ .

## (一)解 答

1. (1) 1; (2)  $\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ ;  $\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ . (3) 1. (4)  $n; 2n +$

1. (5)  $a \neq -1$ . (6)  $|\omega - 1| \geq 1$ .

2. 构造重节点的差商表.

差商表

$x_i$	$y_i$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
1	2			
2	4	2		
2	4	3	1	
3	12	8	5	2

则  $H_3(x) = 2 + 2(x-1) + (x-1)(x-2) + 2(x-1)(x-2)^2$   
 $= 2x^3 - 9x^2 + 15x - 6.$

其余项

$$R(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x-1)(x-2)^2(x-3),$$

$$1 < \xi < 3.$$

3. (1) 取迭代公式为

$$x_{n+1} = \frac{18 - x_n^2}{10}, \quad n=0, 1, \dots.$$

由于  $|\varphi'(x)| = \left| \left[ \frac{18 - x^2}{10} \right]' \right| = \frac{2|x|}{10}$ , 当  $x \in (1, 2)$  时,

$$|\varphi'(x)| < \frac{2}{5} < 1.$$

故所构造的迭代公式收敛.

(2) 取  $x_0 = 1.5$ ,

$$\tilde{x}_1 = \varphi(x_0) = 1.5750,$$

$$\bar{x}_1 = \varphi(\tilde{x}_1) = 1.5519.$$

$$\text{则 } x_1 = x_2 = \frac{(\bar{x}_1 - \tilde{x}_1)^2}{\bar{x}_1 - 2\tilde{x}_1 + x_0}$$

$$= 1.5519 - \frac{(1.5519 - 1.5750)^2}{1.5519 - 2 \times 1.5750 + 1.5000} \approx 1.557.$$

4. (1) 设  $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)$  是  $[-1, 1]$  上带权  $(1 + x^2)$  的正交多项式, 则有

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 (1 + x^2) \omega(x) dx = 0, \\ \int_{-1}^1 (1 + x^2) \omega(x) x dx = 0. \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 16 + 40x_0x_1 = 0, \\ x_0 + x_1 = 0. \end{cases}$$

$$\text{解之得 } x_0 = -\sqrt{\frac{2}{5}}, \quad x_1 = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

因所求公式对  $f(x) = 1, x$  均准确成立, 故有

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 (1+x^2) dx = \frac{8}{3} = A_0 + A_1, \\ \int_{-1}^1 (1+x^2) x dx = 0 = A_0 \left[ -\sqrt{\frac{2}{5}} \right] + A_1 \left[ \sqrt{\frac{2}{5}} \right]. \end{cases}$$

解之得

$$A_0 = A_1 = \frac{4}{3}.$$

故

$$\int_{-1}^1 (1+x^2) f(x) dx \approx \frac{4}{3} \left[ f \left[ -\sqrt{\frac{2}{5}} \right] + f \left[ \sqrt{\frac{2}{5}} \right] \right].$$

(2) 此公式的代数精度为 3.

(3) 因此时  $f(x)$  是一个三次多项式, 故其截断误差为 0.

5. (1) 求解  $\begin{cases} y' = Ay, & (\operatorname{Re} A < 0), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$  的梯形格式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{hA}{2} (y_n + y_{n+1}), n=0, 1, \dots.$$

(2) 设  $y_0$  有扰动  $\delta_0$  时变为  $y_0^* = y_0 + \delta_0$ , 由此引起  $y_{n+1}$  有大小为  $\delta_{n+1}$  的扰动值, 即按上述梯形格式计算得  $y_{n+1}^* = y_{n+1} + \delta_{n+1}$ , 则

$$\delta_{n+1} = \delta_n + \frac{hA}{2} (\delta_n + \delta_{n+1}).$$

故

$$\delta_{n+1} = \frac{1 + \frac{hA}{2}}{1 - \frac{hA}{2}} \delta_n = \dots = \left[ \frac{1 + \frac{hA}{2}}{1 - \frac{hA}{2}} \right]^{n+1} \delta_0.$$

由此可知, 梯形格式的绝对稳定区域为

$$\left| \frac{1 + \frac{hA}{2}}{1 - \frac{hA}{2}} \right| < 1.$$

它等价于  $\operatorname{Re}(hA) < 0$ . 所以, 梯形格式的绝对稳定区域是  $hA$  复平面的整个左半平面. 若  $A$  是实数, 则梯形格式的绝对稳定区间是  $(-\infty, 0)$ .

6. (1) 将所给方程组

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 = 1, \\ ax_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

改写成

$$\begin{cases} x_1 = -ax_2 + 1, \\ x_2 = -\frac{a}{2}x_1, \\ x_3 = -x_1 + 1. \end{cases}$$

得 Jacobi 迭代阵

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ -\frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}_1| = \begin{vmatrix} \lambda & a & 0 \\ \frac{a}{2} & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \left( \lambda^2 - \frac{a^2}{2} \right).$$

解之得  $\lambda = 0, \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \pm \frac{|a|}{\sqrt{2}}.$

其谱半径  $\rho(\mathbf{B}_1) = \max |\lambda| = \frac{|a|}{\sqrt{2}}$ . 由  $\rho(\mathbf{B}_1) < 1$ , 即  $\frac{|a|}{\sqrt{2}} < 1$ , 得

$$|a| < \sqrt{2}, \text{ 即 } a \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

(2) 当  $a=2$  时, 所给方程组的系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{设 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{bmatrix}.$$

由算式

$$\begin{cases} u_{1j} = a_{1j} \quad (j=1,2,3), \quad l_{i1} = a_{i1}/u_{11} \quad (i=2,3), \\ u_{kj} = a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj} \quad (k=2,3; j=2,3), \\ l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk})/u_{kk} \quad (k=2,3; i=3). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{得} \quad u_{11} &= 1, & u_{12} &= 2, & u_{13} &= 0, & l_{21} &= 2, & l_{31} &= 1, \\ u_{22} &= -2, & u_{23} &= 0, & l_{32} &= 1, & l_{33} &= 1, & u_{33} &= 1. \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

即原方程变形为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

解

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{得} \quad y_1 = 1, \quad y_2 = -2, \quad y_3 = 2.$$

再解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{得} \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2.$$

故  $\mathbf{X}^* = (-1, 1, 2)^T$  即为所求.

7. 由高等代数知  $\varphi(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|$  为小于等于 3 次的多项式. 由于  $n$  次多项式与其  $n$  次插值多项式相等, 故任选  $\lambda$  的四个值  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  作为节点, 计算出它们相应的函数值  $\varphi(\lambda_i) (i=0, 1, 2, 3)$ . 按此数据作插值多项式, 便是所求特征多项式  $\varphi(\lambda)$ . 具体做法如下:

因为

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

令  $\lambda=1$ , 代入  $\varphi(\lambda)$  中, 计算出  $\varphi(1)=-1$ , 同理计算出  $\varphi(2)=0$ ,  $\varphi(3)=1$ ,  $\varphi(4)=-4$ . 列差分表:

差分表

$i$	$\lambda_i$	$\varphi_i$	$\Delta \varphi_i$	$\Delta^2 \varphi_i$	$\Delta^3 \varphi_i$
0	1	-1			
1	2	0	1		
2	3	1	1	0	
3	4	-4	-5	-6	-6

此时  $n=3$ , 利用 Newton 插值公式及差分与差商的关系. 得

$$\begin{aligned} f_3(\lambda) &= -1 + \frac{1}{1}(\lambda-1) + 0 + \frac{-6}{3!1^3}(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4. \end{aligned}$$

故

$$\varphi(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4.$$

## (二) 解 答

1. (1) 插值;  $R(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} (x-x_0)^2 (x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2$ . (2) 3;  $-\frac{1}{120}$ . (3) 正定性、齐次性、三角不等式. (4)  $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$ . (5)  $|\varphi'(x)| < 1$ . (6) 0.43382.

2. 令  $u = e^x$ , 由于  $x_i (i=0, 1, \dots, n)$  各不相同, 则  $u_i = u(x_i)$  也

各不相同,则

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i e^{ix}.$$

化为

$$P_n(u) = \sum_{i=0}^n c_i u^i,$$

满足

$$P_n(u_i) = y_i, \quad i=0, 1, \dots, n.$$

由于变换  $u=e^x$  是单值可逆的,故问题

$$\begin{cases} P_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i e^{ix}, \\ P_n(x_i) = y_i, i=0, 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (*)$$

与问题

$$\begin{cases} P_n(u) = \sum_{i=0}^n c_i u^i, \\ P_n(u_i) = y_i, i=0, 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

等价,而后者为求插值多项式,这是唯一、可解的.故问题(\*)也是唯一、可解的.

3. (1) 若某个求积公式对于次数 $\leq m$ 的多项式都能准确成立,但对  $m+1$  次多项式就不一定准确成立,则称该求积公式具有  $m$  次代数精度.

(2) 设  $\omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ , 则  $\omega(x)$  是  $n+1$  次的多项式,  $\omega^2(x)$  是  $2(n+1)$  次的. 对  $\omega^2(x)$  构造求积公式

$$\int_a^b \omega^2(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i \omega^2(x_i).$$

而

$$\text{左边: } \int_a^b \omega^2(x) dx > 0,$$

$$\text{右边: } \sum_{i=0}^n A_i \omega^2(x_i) = 0.$$

$$\text{左边} \neq \text{右边},$$

故其代数精度  $m$  一定小于  $2(n+1)$ .

4. (1) Newton 迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0,1,2,\dots$$

由条件知  $f(x^*) = f'(x^*) = f''(x^*) = 0$ , 而  $f'''(x^*) \neq 0$ . 又由 Taylor 公式得

$$f(x) = \frac{f^{(3)}(\xi_1)}{3!}(x-x^*)^3,$$

$$f'(x^*) = \frac{f'''(\xi_2)}{2!}(x-x^*)^2, \quad f''(x^*) = f^{(3)}(\xi_3)(x-x^*),$$

其中  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  介于  $x$  与  $x^*$  之间. 由 Newton 法的迭代函数

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\text{可得 } \varphi(x^*) = \lim_{x \rightarrow x^*} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x^*} \left[ x - \frac{(x-x^*)f^{(3)}(\xi_1)}{3f^{(3)}(\xi_2)} \right] = x^*.$$

$$\begin{aligned} \varphi'(x^*) &= \lim_{x \rightarrow x^*} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{2f^{(3)}(\xi_1)f^{(3)}(\xi_3)}{3[f^{(3)}(\xi_2)]^2} = \frac{2}{3} < 1. \end{aligned}$$

由于  $0 < \varphi'(x^*) < 1$ , 所以, 只要  $x_0$  充分接近  $x^*$ , 由 Newton 法产生的序列  $\{x_k\}$  收敛于  $x^*$ , 但是只有线性的敛速.

(2) 将 Newton 法变形为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{3f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0,1,2,\dots \quad (*)$$

则此时迭代函数为  $\psi(x) = x - \frac{3f(x)}{f'(x)},$

$$\psi'(x) = -2 + \frac{3f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = -2 + 2 \frac{f^{(3)}(\xi_1)f^{(3)}(\xi_2)}{[f^{(3)}(\xi_2)]^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \psi'(x) = \psi'(x^*) = -2 + 2 = 0.$$

故由  $(*)$  产生的  $\{x_k\}$  收敛于  $x^*$ , 且有二阶收敛性.

5. (1) 显式 Euler 格式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n=0,1,\dots$$

和后退 Euler 格式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad n=0, 1, \dots$$

具有同样收敛阶且分别为线性显式和线性隐式格式. 它们的局部

截断误差分别为  $\frac{h^2}{2} y''(\xi)$  与  $-\frac{h^2}{2} y''(\eta)$ , 即

$$y(x_{n+1}) - \bar{y}_{n+1} = \frac{h^2}{2} y''(\xi) \approx \frac{h^2}{2} y''(x_n),$$

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{h^2}{2} y''(\eta) \approx -\frac{h^2}{2} y''(x_n).$$

两式相比, 得

$$\frac{y(x_{n+1}) - \bar{y}_{n+1}}{y(x_{n+1}) - y_{n+1}} \approx -1.$$

由此可导出下列事后误差估计

$$\begin{cases} y(x_{n+1}) - \bar{y}_{n+1} \approx -\frac{1}{2}(\bar{y}_{n+1} - y_{n+1}), \\ y(x_{n+1}) - y_{n+1} \approx \frac{1}{2}(\bar{y}_{n+1} - y_{n+1}). \end{cases}$$

(2) 设以  $p_n$  和  $c_n$  分别表示第  $n$  步预测值和校正值. 有

预报:  $p_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ ,

改进:  $m_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2}(p_n - c_n)$ ,

计算:  $m'_{n+1} = f(x_{n+1}, m_{n+1})$ ,

校正:  $c_{n+1} = y_n + hm_{n+1}$ ,

改进:  $y_{n+1} = c_{n+1} + \frac{1}{2}(p_{n+1} - c_{n+1})$ .

6. 对方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

其 Jacobi 迭代法的迭代阵是:

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

由  $|\lambda I - B_1| = \lambda^2 - 3$ , 知  $\rho(B_1) = \sqrt{3} > 1$ .

故 Jacobi 迭代过程发散.

Gauss-Seidel 迭代法的迭代阵是:

$$B_G = (D - L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

由  $|\lambda I - B_G| = \lambda(\lambda - 3)$ , 知  $\rho(B_G) = 3 > 1$ .

故 Gauss-Seidel 迭代过程发散.

若将方程组变为:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 3. \end{cases}$$

因其系数矩阵是强对角占优的, 故再用上述两种迭代均收敛.

7. (1) 因  $\|R\| < 1$ , 所以  $I - R$  非奇异, 因  $I - R = CA$ , 所以  $C, A$  必都非奇异.

(2)  $R = I - CA = (A^{-1} - C)A$ , 故

$$\|R\| \leq \|A^{-1} - C\| \|A\|,$$

则有

$$\frac{\|R\|}{\|A\| \|C\|} \leq \frac{\|A^{-1} - C\|}{\|C\|}. \quad (* *)$$

因  $CA = I - R$ , 所以  $C = (I - R)A^{-1}$ , 即

$$A^{-1} = (I - R)^{-1}C.$$

又  $RA^{-1} = A^{-1} - C$ , 故

$$\|A^{-1} - C\| \leq \|R\| \|A^{-1}\| \leq \|R\| \|(I - R)^{-1}\| \|C\|.$$

由

$$\|A^{-1} - C\| \leq \|R\| \|C\| \frac{1}{1 - \|R\|}$$

移项得

$$\frac{\|A^{-1} - C\|}{\|C\|} \leq \frac{\|R\|}{1 - \|R\|}. \quad (* * *)$$

结合 (\* \*)、(\* \* \*) 两式, 得

$$\frac{\|R\|}{\|A\|\|C\|} \leq \frac{\|A^{-1}-C\|}{\|C\|} \leq \frac{\|R\|}{1-\|R\|}.$$

注:此题的证明用到了结论:假设  $\|B\| < 1$  则  $I-B$  非奇异,

$$\text{且有 } \frac{1}{1+\|B\|} \leq \|(I-B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}.$$

### (三)解 答

1. (1) 小于 1. (2)  $[-1, 1]$ ; 1. (3) 396001; 39206. (4) 1;

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i=j, \\ 0, i \neq j. \end{cases} \quad (5) \text{ 二阶; 一阶. } (6) O(h^2).$$

2. 将计算的数据列表如下:

	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$
$\Sigma:$	11	14.9	39	44.3

由此得正规方程

$$\begin{cases} 5a_0 + 11a_1 = 14.9, \\ 11a_0 + 39a_1 = 44.3. \end{cases}$$

解之得

$$a_0 = \frac{14.9 \times 39 - 11 \times 44.3}{5 \times 39 - 11^2} = 1.2676,$$

$$a_1 = \frac{5 \times 44.3 - 14.9 \times 11}{74} = 0.7784.$$

故

$$y = 0.7784x + 1.2676.$$

3. (1)  $l_k(x)$  与  $\tilde{l}_k(x)$  分别为  $n$  次和  $2n$  次多项式,  $n+1$  个节点的 Gauss 型求积公式对它们均精确成立, 则有

$$\text{左边} = \int_{-1}^1 \tilde{l}_k(x) dx = \sum_{j=0}^n A_j \tilde{l}_k(x_j) = A_k,$$

$$\text{右边} = \int_{-1}^1 l_k(x) dx = \sum_{j=0}^n A_j l_k(x_j) = A_k.$$

故左边 = 右边, 即(1)式得证.

(2) 对  $f(x) = x^{2n+1}$  利用  $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ , 有

$$0 = \int_{-1}^1 x^{2n+1} dx = \sum_{k=0}^n A_k x_k^{2n+1}.$$

即(2)式得证.

(3) 公式显然对  $f(x) = 1$  准确成立. 即有

$$\sum_{k=0}^n A_k = \int_{-1}^1 dx = 2.$$

$A_k (k=0, 1, \dots, n)$  是非负的.

记  $x_k$  处  $f(x_k)$  的误差为  $\tilde{f}(x_k)$ ,  $\epsilon_k = |f(x_k) - \tilde{f}(x_k)|$ ,  $\epsilon =$

$$\max_{0 \leq k \leq n} \epsilon_k.$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) - \sum_{k=0}^n A_k \tilde{f}(x_k) \right| &\leq \sum_{k=0}^n |A_k| |f(x_k) - \tilde{f}(x_k)| \\ &= \sum_{k=0}^n A_k \epsilon_k \leq \epsilon \sum_{k=0}^n A_k = 2\epsilon. \end{aligned}$$

上式表明此公式是稳定的.

4. (1) 计算  $I$  的迭代公式为

$$I_{k+1} = \frac{a}{a + I_k}, \quad k=0, 1, 2, \dots.$$

(2) 上述迭代公式的迭代函数为

$$\varphi(x) = \frac{a}{a+x}, \quad x > 0.$$

因

$$\varphi'(x) = -\frac{a}{(a+x)^2}.$$

故由  $a > 1$  知,  $|\varphi'(x)| = \frac{a}{(a+x)^2} < \frac{1}{a} < 1, \forall x > 0$ .

即该迭代对于  $\forall x_0 > 0$  均收敛.

(3) 令  $\lim_{k \rightarrow \infty} I_k = I$ , 则有

$$I = \frac{a}{a+I}, \quad \text{即} \quad I^2 + aI - a = 0.$$

解之得

$$I = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a}}{2}.$$

舍去  $\frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2}$ , 取  $I = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2}$ .

5. 设  $y_n = y(x_n)$ ,  $y_{n-1} = y(x_{n-1})$ ,

$$y_{n+1} = y(x_n) + \frac{h}{2} (3y'(x_n) - y'(x_{n-1}) + y''(x_n)h - \frac{y'''(x_n)}{2}h^2 + O(h^3))$$

$(h^3))$

$$= y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2}h^2 - \frac{y'''(x_n)}{4}h^3 + O(h^4),$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2}h^2 + \frac{y'''(x_n)}{6}h^3 + O(h^4),$$

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \left[ \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right] h^3 y'''(x_n) + O(h^4)$$

$$= \frac{5}{12} h^3 y'''(x_n) + O(h^4) = O(h^3).$$

此公式其首项为  $\frac{5}{12} h^3 y'''(x_n)$ . 而  $y' = 2x$ , 则  $y'' = 2$ ,  $y''' = 0$ . 故用该公式解此初值问题是精确的.

又  $y = x^2$ , 故  $y_{100} = y(10) = 10^2 = 100$ ,

$$\text{或因 } y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2} (3y'_{n+1} - y'_{n-1}) = y_{n-1} + 2x_{n-1}h + h^2$$

$$= y_{n-1} + \frac{h}{2} [3(2x_n) - 2x_{n-1}] = 3h(x_n + 2h).$$

由  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 0.01 = y(0.1)$ , 根据公式可算出  $y_2$ ,

$$y_2 = 0.01 + 2(0.1)^2 + (0.1)^2 = 0.04.$$

即

$$y_2 = x_2^2.$$

用归纳法: 设  $y_{n-1} = x_{n-1}^2$ , 则

$$y_n = y_{n-1} + 2x_{n-1}h + h^2 = (x_n - h)^2 + 2(x_n - h)h + h^2$$

$$= x_n^2 - 2x_nh + h^2 + 2x_nh - 2h^2 + h^2 = x_n^2.$$

故  $y_{100} = (10)^2 = 100$ .

6. 因该方程组的系数矩阵正定对称, 由平方根法计算公式有

$$j=1: l_{11} = (a_{11})^{1/2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$l_{21} = a_{21} / l_{11} = -0.5,$$

$$l_{31} = a_{31} / l_{11} = 0.5.$$

$$j=2: l_{22} = (a_{22} - l_{21}^2)^{1/2} = 2,$$

$$l_{32} = (a_{32} - l_{31} l_{21}) / l_{22} = 1.5.$$

$$j=3: l_{33} = (a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2)^{1/2} = 1.$$

解  $LY = b$ ,

$$y_1 = b_1 / l_{11} = 6/2 = 3,$$

$$y_2 = (b_2 - l_{21} y_1) / l_{22} = (-0.5 - (-0.5) \times 3) / 2 = 0.5,$$

$$y_3 = (b_3 - l_{31} y_1 - l_{32} y_2) / l_{33} = (1.25 - 0.5 \times 3 - 1.5 \times 0.5) / 1 = -1.$$

解  $L^T X = Y$ ,

$$x_3 = y_3 / l_{33} = -1/1 = -1,$$

$$x_2 = (y_2 - l_{32} x_3) / l_{22} = (0.5 - 1.5 \times (-1)) / 2 = 1,$$

$$x_1 = (3 - (-0.5) \times 1 - 0.5 \times (-1)) / 2 = 2.$$

方程组的解为  $X = (2, 1, -1)^T$ .

$$\begin{aligned} 7. \text{ 因 } R_1 &= I - AC_1 = I - AC_0(I + R_0) \\ &= I - AC_0 - AC_0 R_0 \\ &= R_0 - AC_0 R_0 = R_0(I - AC_0) = R_0^2, \\ R_2 &= R_1^2 = R_0^4. \end{aligned}$$

用归纳法可证. 若  $R_k = R_{k-1}$ , 则

$$R_{k+1} = R_k^2.$$

故有  $R_k = R_0^{2^k}$ .

$$\|R_k\| \leq \|R_0\|^{2^k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty), \text{ 因 } \|R_0\| < 1.$$

即  $R_k \rightarrow 0$ . 而  $R_k = I - AC_k$ , 所以当  $R_k \rightarrow 0$  时,  $C_k \rightarrow A^{-1}$ . 得证.

## 参 考 书 目

- 1 李庆扬,王能超,易大义.数值分析(第三版).武汉:华中理工大学出版社,1986.
- 2 施妙根,顾丽珍.科学和工程计算基础.北京:清华大学出版社,1999.
- 3 封建湖,车刚明.计算方法典型题分析解集.西安:西北工业大学出版社,1998.