2003 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$ =________ .

(2) 曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程是________ .

(3) 设 $x^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx (-\pi \le x \le \pi)$, 则 a_2 =________ .

(4) 从 $\mathbf{R}^2$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为________ .

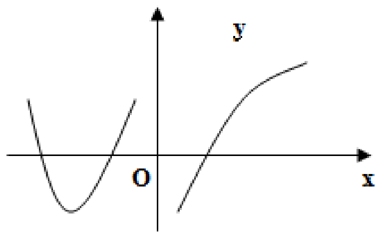
(5) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y) = \begin{cases} 6x & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$, 则 $P\{X+Y \le 1\}$ =______ .

(6) 已知一批零件的长度 X (单位:cm)服从正态分布 $N(\mu,1)$, 从中随机地抽取 16 个零件, 得到长度的平均值为 40 (cm), 则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是________ .

(注:标准正态分布函数值 $\Phi(1.96)=0.975, \Phi(1.645)=0.95$.)

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有



(A) 一个极小值点和两个极大值点
(B) 两个极小值点和一个极大值点
(C) 两个极小值点和两个极大值点
(D) 三个极小值点和一个极大值点

(2) 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$，则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立　　(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在

(3) 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2} = 1$，则

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

(D) 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

(4) 设向量组 I: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 II: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则

(A) 当 $r < s$ 时，向量组 II 必线性相关　　(B) 当 $r > s$ 时，向量组 II 必线性相关

(C) 当 $r < s$ 时，向量组 I 必线性相关　　(D) 当 $r > s$ 时，向量组 I 必线性相关

(5) 设有齐次线性方程组 $\mathbf{A}x = 0$ 和 $\mathbf{B}x = 0$，其中 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，现有 4 个命题：

① 若 $\mathbf{A}x = 0$ 的解均是 $\mathbf{B}x = 0$ 的解，则秩 $(\mathbf{A}) \geq$ 秩 $(\mathbf{B})$

② 若秩 $(\mathbf{A}) \geq$ 秩 $(\mathbf{B})$，则 $\mathbf{A}x = 0$ 的解均是 $\mathbf{B}x = 0$ 的解

③ 若 $\mathbf{A}x = 0$ 与 $\mathbf{B}x = 0$ 同解，则秩 $(\mathbf{A}) =$ 秩 $(\mathbf{B})$

④ 若秩$(\mathbf{A})=$秩$(\mathbf{B})$，则$\mathbf{A}x=0$与$\mathbf{B}x=0$同解

以上命题中正确的是

(A)①②　　(B)①③

(C)②④　　(D)③④

(6)设随机变量$X\sim t(n)(n>1),Y=\dfrac{1}{X^2}$，则

(A) $Y\sim\chi^2(n)$　　(B) $Y\sim\chi^2(n-1)$

(C) $Y\sim F(n,1)$　　(D) $Y\sim F(1,n)$

三、(本题满分 10 分)

过坐标原点作曲线$y=\ln x$的切线,该切线与曲线$y=\ln x$及x轴围成平面图形D.

(1)求D的面积A.

(2)求D绕直线$x=\mathrm{e}$旋转一周所得旋转体的体积V.

四、(本题满分 12 分)

将函数$f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$展开成$x$的幂级数,并求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$的和.

五 、(本题满分 10 分)

已知平面区域$D=\{(x,y)|0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$，$L$为$D$的正向边界. 试证:

(1) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}dy-y\mathrm{e}^{-\sin x}dx=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}dy-y\mathrm{e}^{\sin x}dx$.

(2) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}dy-y\mathrm{e}^{-\sin x}dx\ge 2\pi^2$.

六 、(本题满分 10 分)

某建筑工程打地基时,需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次击打,都将克服土层对桩的阻力而作功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为$k.k>0$). 汽锤第一次击打将桩打进地下a m. 根据设计方案,要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数$r(0<r<1)$. 问

(1)汽锤击打桩 3 次后,可将桩打进地下多深?(2)若击打次数不限,汽锤至多能将桩打进地下多深?(注:m 表示长度单位米.)

七 、(本题满分 12 分)

设函数$y=y(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有二阶导数,且$y'\ne 0,x=x(y)$是$y=y(x)$的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\frac{dx}{dy})^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程.

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

八 、(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)dv}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma},\quad G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-1}^{t} f(x^2)dx},$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le t^2\}$, $D(t)=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

(2) 证明当 $t>0$ 时, $F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

九 、(本题满分 10 分)

设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}$, $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{P}$, 求 $\mathbf{B}+2\mathbf{E}$ 的特征值与特征向量, 其中 $\mathbf{A}^*$ 为 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵, $\mathbf{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

十 、(本题满分 8 分)

已知平面上三条不同直线的方程分别为 l_1: $ax+2by+3c=0$, l_2: $bx+2cy+3a=0$, l_3: $cx+2ay+3b=0$. 试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

十一 、(本题满分 10 分)

已知甲、乙两箱中装有同种产品, 其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品, 乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后, 求:

(1) 乙箱中次品件数的数学期望.

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

十二 、(本题满分 8 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)} & x>\theta\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数. 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，记 $\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

(1) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$. (2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$. (3) 如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量, 讨论它是否具有无偏性.

答案解析

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

（1） $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{e}}}$.

【分析】 1^∞ 型未定式，化为指数函数或利用公式 $\lim f(x)^{g(x)}\ (1^\infty)=e^{\lim(f(x)-1)g(x)}$ 进行计算求极限均可.

【详解 1】 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x^2)}\ln\cos x}$ ，

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=-\dfrac{1}{2}$,

故 原式$=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

【详解 2】 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$,

所以 原式$=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

【评注】 本题属常规题型

（2） 曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程是 $\underline{2x+4y-z=5}$.

【分析】 待求平面的法矢量为 $\vec{n}=\{2,4,-1\}$，因此只需确定切点坐标即可求出平面方程，而切点坐标可根据曲面 $z=x^2+y^2$ 切平面的法矢量与 $\vec{n}=\{2,4,-1\}$ 平行确定.

【详解】 令 $F(x,y,z)=z-x^2-y^2$，则

$F'_x=-2x$， $F'_y=-2y$， $F'_z=1$.

设切点坐标为 (x_0,y_0,z_0)，则切平面的法矢量为 $\{-2x_0,-2y_0,1\}$，其与已知平面 $2x+4y-z=0$ 平行，因此有

$$\frac{-2x_0}{2}=\frac{-2y_0}{4}=\frac{1}{-1},$$

可解得　$x_0=1, y_0=2$，相应地有　$z_0=x_0^2+y_0^2=5.$

故所求的切平面方程为

$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$，即　$2x+4y-z=5$.

【评注】　本题属基本题型。

（3）　设 $x^2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\le x\le\pi)$，则 a_2 =____1____ .

【分析】将 $f(x)=x^2(-\pi\le x\le\pi)$ 展开为余弦级数 $x^2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\le x\le\pi)$，其系数计算公式为 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx$.

【详解】　根据余弦级数的定义，有

$$a_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cdot\cos 2xdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2d\sin 2x$$
$$=\frac{1}{\pi}[x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin 2x\cdot 2xdx]$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xd\cos 2x=\frac{1}{\pi}[x\cos 2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos 2xdx]$$
=1.

【评注】　本题属基本题型，主要考查傅里叶级数的展开公式，本质上转化为定积分的计算.

（4） 从 R^2 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为 $\underline{\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}}$.

【分析】　n 维向量空间中，从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵 P 满足 $[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$=$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$P，因此过渡矩阵 P 为：P=$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^{-1}[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$.

【详解】根据定义，从 R^2 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为

$$P=[\alpha_1,\alpha_2]^{-1}[\beta_1,\beta_2]=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}.$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & -2\end{bmatrix}.$$

【评注】 本题属基本题型。

（5）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, 0\le x\le y\le 1,\\ 0, \quad 其他,\end{cases}$$

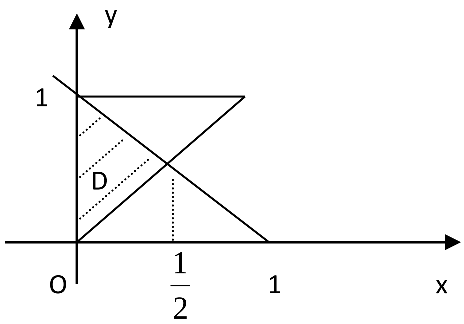
则 $P\{X+Y\le 1\}=$ $\underline{\dfrac{1}{4}}$.

【分析】 已知二维随机变量(X,Y)的概率密度 f(x,y)，求满足一定条件的概率 $P\{g(X,Y)\le z_0\}$，一般可转化为二重积分 $P\{g(X,Y)\le z_0\}=\iint\limits_{g(x,y)\le z_0} f(x,y)dxdy$ 进行计算.

【详解】 由题设，有

$$P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}6xdy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(6x-12x^2)dx=\frac{1}{4}.$$



【评注】 本题属基本题型，但在计算二重积分时，应注意找出概率密度不为零与满足不等式 $x+y\le 1$ 的公共部分 D，再在其上积分即可. 完全类似例题见《文登数学全真模拟试卷》数学一 P.14 第一大题第（5）小题.

（6）已知一批零件的长度 X (单位：cm)服从正态分布 $N(\mu,1)$，从中随机地抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40 (cm)，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是 $\underline{(39.51,40.49)}$.

(注：标准正态分布函数值 $\Phi(1.96)=0.975, \Phi(1.645)=0.95.$)

【分析】 已知方差 $\sigma^2=1$，对正态总体的数学期望 μ 进行估计，可根据

$\dfrac{\overline{X}-\mu}{1/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，由 $P\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{1/\sqrt{n}}\right| < u_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1-\alpha$ 确定临界值 $u_{\frac{\alpha}{2}}$，进而确定相应的置信区间.

【详解】 由题设，$1-\alpha = 0.95$，可见 $\alpha = 0.05$. 于是查标准正态分布表知 $u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.

本题 n=16, $\bar{x} = 40$，因此，根据 $P\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{1/\sqrt{n}}\right| < 1.96\} = 0.95$，有

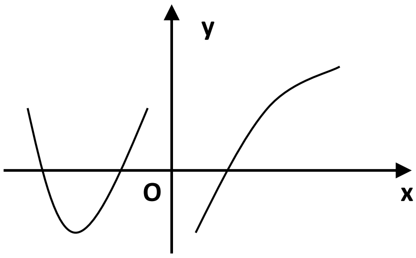
$P\{\left|\dfrac{40-\mu}{1/\sqrt{16}}\right| < 1.96\} = 0.95$，即 $P\{39.51, 40.49\} = 0.95$，故 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是 $(39.51, 40.49)$.

【评注】 本题属基本题型.

二、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

（1）设函数 f(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 f(x)有

(A) 一个极小值点和两个极大值点.
(B) 两个极小值点和一个极大值点.
(C) 两个极小值点和两个极大值点.
(D) 三个极小值点和一个极大值点. [C]



【分析】 答案与极值点个数有关，而可能的极值点应是导数为零或导数不存在的点，共 4 个，是极大值点还是极小值可进一步由取极值的第一或第二充分条件判定.

【详解】 根据导函数的图形可知，一阶导数为零的点有 3 个，而 x=0 则是导数不存在的点. 三个一阶导数为零的点左右两侧导数符号不一致，必为极值点，且两个极小值点，一个极大值点；在 x=0 左侧一阶导数为正，右侧一阶导数为负，可见 x=0 为极大值点，故 f(x)共有两个极小值点和两个极大值点，应选(C).

【评注】 本题属新题型，类似考题 2001 年数学一、二中曾出现过，当时考查的是已知 f(x)的图象去推导 $f'(x)$ 的图象，本题是其逆问题. 完全类似例题在文登学校经济类串讲班上介绍过.

（2）设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1, \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$，则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.　　　　(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在.　　　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在.　　[D]

【分析】 本题考查极限概念，极限值与数列前面有限项的大小无关，可立即排除(A),(B)； 而极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 是 $0\cdot\infty$ 型未定式，可能存在也可能不存在，举反例说明即可；极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 属 $1\cdot\infty$ 型，必为无穷大量，即不存在.

【详解】 用举反例法，取 $a_n = \dfrac{2}{n}$， $b_n = 1$， $c_n = \dfrac{1}{2}n(n=1,2,\cdots)$，则可立即排除(A),(B),(C)，因此正确选项为(D).

【评注】 对于不便直接证明的问题，经常可考虑用反例，通过排除法找到正确选项. 完全类似方法见《数学最后冲刺》P.179.

（3）已知函数 f(x,y)在点(0,0)的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0,y\to0} \dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2} = 1$，则

(A) 点(0,0)不是 f(x,y)的极值点.

(B) 点(0,0)是 f(x,y)的极大值点.

(C) 点(0,0)是 f(x,y)的极小值点.

(D) 根据所给条件无法判断点(0,0)是否为 f(x,y)的极值点.　　[A]

【分析】 由题设，容易推知 f(0,0)=0，因此点(0,0)是否为 f(x,y)的极值，关键看在点(0,0)的充分小的邻域内 f(x,y)是恒大于零、恒小于零还是变号.

【详解】 由 $\lim\limits_{x\to0,y\to0} \dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2} = 1$ 知，分子的极限必为零，从而有 f(0,0)=0, 且

$f(x,y)-xy \approx (x^2+y^2)^2$　($|x|,|y|$ 充分小时），于是

$$f(x,y)-f(0,0) \approx xy + (x^2+y^2)^2.$$

可见当 y=x 且 $|x|$ 充分小时， $f(x,y)-f(0,0) \approx x^2 + 4x^4 > 0$；而当 y= -x 且 $|x|$ 充分小时，

$f(x,y)-f(0,0) \approx -x^2 + 4x^4 < 0$. 故点(0,0)不是 f(x,y)的极值点，应选(A).

【评注】 本题综合考查了多元函数的极限、连续和多元函数的极值概念，题型比较新，有一定难度. 将极限表示式转化为极限值加无穷小量，是有关极限分析过程中常用的思想。

（4）设向量组 I： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II： $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则

(A) 当 $r < s$ 时，向量组 II 必线性相关.　(B) 当 $r > s$ 时，向量组 II 必线性相关.

(C) 当 $r < s$ 时，向量组 I 必线性相关.　(D) 当 $r > s$ 时，向量组 I 必线性相关.

[D]

【分析】本题为一般教材上均有的比较两组向量个数的定理：若向量组 I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则当 $r > s$ 时，向量组 I 必线性相关. 或其逆否命题：

若向量组 I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，且向量组 I 线性无关，则必有 $r \le s$．可见正确选项为(D)．本题也可通过举反例用排除法找到答案.

【详解】用排除法：如 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则 $\alpha_1=0\cdot\beta_1+0\cdot\beta_2$，但 β_1,β_2 线性无关，排除(A)；$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，则 α_1,α_2 可由 β_1 线性表示，但 β_1 线性无关，排除(B)；$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_1$ 可由 β_1,β_2 线性表示，但 α_1 线性无关，排除(C)．故正确选项为(D).

【评注】 本题将一已知定理改造成选择题，如果考生熟知此定理应该可直接找到答案，若记不清楚，也可通过构造适当的反例找到正确选项。

（5）设有齐次线性方程组 Ax=0 和 Bx=0, 其中 A,B 均为 $m\times n$ 矩阵，现有 4 个命题：

① 若 Ax=0 的解均是 Bx=0 的解，则秩(A)≥秩(B)；

② 若秩(A)≥秩(B)，则 Ax=0 的解均是 Bx=0 的解；

③ 若 Ax=0 与 Bx=0 同解，则秩(A)=秩(B)；

④ 若秩(A)=秩(B)，　则 Ax=0 与 Bx=0 同解.

以上命题中正确的是

(A)　①　②.　　　　　　(B)　①　③.

(C)　②　④.　　　　　　(D)　③　④.　　　　　　[　B　]

【分析】 本题也可找反例用排除法进行分析，但①　②两个命题的反例比较复杂一些，关键是抓住③　与　④，迅速排除不正确的选项.

【详解】 若 Ax=0 与 Bx=0 同解，则 n-秩(A)=n - 秩(B)，即秩(A)=秩(B)，命题③成立，可排除(A),(C)；但反过来，若秩(A)=秩(B)，　则不能推出 Ax=0 与 Bx=0 同解，如 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，则秩(A)=秩(B)=1，但 Ax=0 与 Bx=0 不同解，可见命题④不成立，排除(D),故正确选项为(B).

【例】　齐次线性方程组 Ax=0 与 Bx=0 同解的充要条件

(A)　r(A)=r(B).　　　　　　(B)　A,B 为相似矩阵.

(C)　A, B 的行向量组等价.　　　　　　(D)　A,B 的列向量组等价.　　　　[　C　]

有此例题为基础，相信考生能迅速找到答案.

（6）设随机变量 $X\sim t(n)(n>1), Y=\dfrac{1}{X^2}$，则

(A)　$Y\sim\chi^2(n)$.　　　　　　(B)　$Y\sim\chi^2(n-1)$.

(C)　$Y\sim F(n,1)$.　　　　　　(D)　$Y\sim F(1,n)$.　　　　　　[　C　]

【分析】先由 t 分布的定义知 $X=\dfrac{U}{\sqrt{V/n}}$，其中 $U\sim N(0,1),V\sim\chi^2(n)$，再将其代入 $Y=\dfrac{1}{X^2}$，然后利用 F 分布的定义即可.

【详解】由题设知，$X=\dfrac{U}{\sqrt{V/n}}$，其中 $U\sim N(0,1),V\sim\chi^2(n)$，于是

$Y=\dfrac{1}{X^2}=\dfrac{V/n}{U^2}=\dfrac{V/n}{U^2/1}$，这里 $U^2\sim\chi^2(1)$，根据 F 分布的定义知 $Y=\dfrac{1}{X^2}\sim F(n,1)$. 故应选(C).

【评注】本题综合考查了 t 分布、χ^2 分布和 F 分布的概念，要求熟练掌握此三类常用统计量分布的定义.

三 、（本题满分 10 分）

过坐标原点作曲线 y=lnx 的切线，该切线与曲线 y=lnx 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A;

(2) 求 D 绕直线 x=e 旋转一周所得旋转体的体积 V.

【分析】先求出切点坐标及切线方程，再用定积分求面积 A; 旋转体体积可用一大立体（圆锥）体积减去一小立体体积进行计算，为了帮助理解，可画一草图.

【详解】(1) 设切点的横坐标为 x_0，则曲线 y=lnx 在点 $(x_0,\ln x_0)$ 处的切线方程是

$$y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0).$$

由该切线过原点知 $\ln x_0-1=0$，从而 $x_0=e.$ 所以该切线的方程为

$$y=\frac{1}{e}x.$$

平面图形 D 的面积

$$A=\int_0^1(e^y-ey)dy=\frac{1}{2}e-1.$$

（2） 切线 $y=\dfrac{1}{e}x$ 与 x 轴及直线 x=e 所围成的三角形绕直线 x=e 旋转所得的圆锥体积为

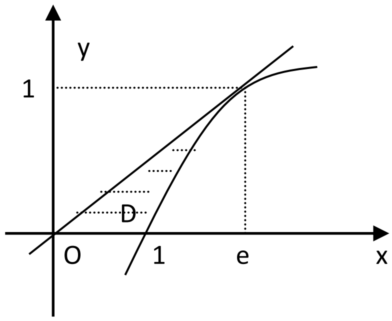
$$V_1=\frac{1}{3}\pi e^2.$$

曲线 y=lnx 与 x 轴及直线 x=e 所围成的图形绕直线 x=e 旋转所得的旋转体体积为

$$V_2=\int_0^1\pi(e-e^y)^2dy,$$

因此所求旋转体的体积为

$$V=V_1-V_2=\frac{1}{3}\pi e^2-\int_0^1\pi(e-e^y)^2dy=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3).$$



【评注】 本题不是求绕坐标轴旋转的体积，因此不能直接套用现有公式. 也可考虑用微元法分析.

四 、（本题满分 12 分）

将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

【分析】 幂级数展开有直接法与间接法，一般考查间接法展开，即通过适当的恒等变形、求导或积分等，转化为可利用已知幂级数展开的情形。本题可先求导，再利用函数 $\dfrac{1}{1-x}$ 的幂级数展开 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 即可，然后取 x 为某特殊值，得所求级数的和.

【详解】 因为 $f'(x)=-\dfrac{2}{1+4x^2}=-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n},x\in(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}).$

又 f(0)=$\dfrac{\pi}{4}$，所以

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=\frac{\pi}{4}-2\int_0^x[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nt^{2n}]dt$$

$$=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$$

因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛，函数 f(x)在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处连续，所以

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}].$$

令 $x=\dfrac{1}{2}$，得

$$f(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)4^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}]=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},$$

再由 $f(\frac{1}{2})=0$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}-f(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}.$$

五 、（本题满分 10 分）

已知平面区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$，L 为 D 的正向边界. 试证：

(1) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$;

(2) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge 2\pi^2$.

【分析】 本题边界曲线为折线段，可将曲线积分直接化为定积分证明，或曲线为封闭正向曲线，自然可想到用格林公式；(2)的证明应注意用(1)的结果.

【详解】 方法一：

(1) 左边= $\int_0^{\pi}\pi e^{\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{-\sin x}dx$

$=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$，

右边= $\int_0^{\pi}\pi e^{-\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{\sin x}dx$

$=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$，

所以 $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$.

(2) 由于 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}\ge 2$，故由（1）得

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx\ge 2\pi^2.$$

方法二：

（1） 根据格林公式，得

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy,$$

$$\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx=\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})dxdy.$$

因为 D 具有轮换对称性，所以

$$\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy=\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})dxdy,$$

故 $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$.

(2) 由(1)知

$$\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})dxdy$$

$$= \iint_D e^{\sin y}dxdy + \iint_D e^{-\sin x}dxdy$$

$$= \iint_D e^{\sin x}dxdy + \iint_D e^{-\sin x}dxdy \quad （利用轮换对称性）$$

$$= \iint_D (e^{\sin x} + e^{-\sin x})dxdy \ge \iint_D 2dxdy = 2\pi^2.$$

【评注】 本题方法一与方法二中的定积分与二重积分是很难直接计算出来的，因此期望通过计算出结果去证明恒等式与不等式是困难的. 另外，一个题由两部分构成时，求证第二部分时应首先想到利用第一部分的结果，事实上，第一部分往往是起桥梁作用的.

六 、（本题满分 10 分）

某建筑工程打地基时，需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次击打，都将克服土层对桩的阻力而作功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比（比例系数为 k,k>0）.汽锤第一次击打将桩打进地下 a m. 根据设计方案，要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 r(0<r<1). 问

(1) 汽锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下多深？

(2) 若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下多深？

（注：m 表示长度单位米.）

【分析】 本题属变力做功问题，可用定积分进行计算，而击打次数不限，相当于求数列的极限.

【详解】 (1) 设第 n 次击打后，桩被打进地下 x_n，第 n 次击打时，汽锤所作的功为 $W_n(n = 1,2,3,\cdots)$. 由题设，当桩被打进地下的深度为 x 时，土层对桩的阻力的大小为 kx，所以

$$W_1 = \int_0^{x_1} kxdx = \frac{k}{2}x_1^2 = \frac{k}{2}a^2,$$

$$W_2 = \int_{x_1}^{x_2} kxdx = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2) = \frac{k}{2}(x_2^2 - a^2).$$

由 $W_2 = rW_1$ 可得

$$x_2^2 - a^2 = ra^2$$

即　$x_2^2 = (1+r)a^2.$

$$W_3 = \int_{x_2}^{x_3} kxdx = \frac{k}{2}(x_3^2 - x_2^2) = \frac{k}{2}[x_3^2 - (1+r)a^2].$$

由 $W_3 = rW_2 = r^2W_1$ 可得

$$x_3^2 - (1+r)a^2 = r^2a^2,$$

从而　$x_3 = \sqrt{1+r+r^2}\,a,$

即汽锤击打 3 次后，可将桩打进地下$\sqrt{1+r+r^2}am$.

（2） 由归纳法，设$x_n=\sqrt{1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}}a$，则

$$W_{n+1}=\int_{x_n}^{x_{n+1}}kxdx=\frac{k}{2}(x_{n+1}^2-x_n^2)$$
$$=\frac{k}{2}[x_{n+1}^2-(1+r+\cdots+r^{n-1})a^2].$$

由于$W_{n+1}=rW_n=r^2W_{n-1}=\cdots=r^nW_1$，故得

$$x_{n+1}^2-(1+r+\cdots+r^{n-1})a^2=r^na^2,$$

从而 $$x_{n+1}=\sqrt{1+r+\cdots+r^n}a=\sqrt{\frac{1-r^{n+1}}{1-r}}a.$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{1-r}}a,$$

即若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下$\sqrt{\frac{1}{1-r}}a$ m.

【评注】 本题巧妙地将变力作功与数列极限两个知识点综合起来了，有一定难度。但用定积分求变力做功并不是什么新问题，何况本题的变力十分简单。

七 、（本题满分 12 分）

设函数 y=y(x)在$(-\infty,+\infty)$内具有二阶导数，且$y'\neq 0, x=x(y)$是 y=y(x)的反函数.

(1) 试将 x=x(y)所满足的微分方程$\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\frac{dx}{dy})^3=0$变换为 y=y(x)满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件$y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$的解.

【分析】 将$\frac{dx}{dy}$转化为$\frac{dy}{dx}$比较简单，$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{y'}$，关键是应注意：

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}(\frac{dx}{dy})=\frac{d}{dx}(\frac{1}{y'})\cdot\frac{dx}{dy}$$
$$=\frac{-y''}{y'^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

然后再代入原方程化简即可.

【详解】 (1) 由反函数的求导公式知 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$，于是有

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{-y''}{y'^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

代入原微分方程得

$$y''-y=\sin x. \qquad (\ *\ )$$

(2) 方程(*)所对应的齐次方程 $y''-y=0$ 的通解为

$$Y=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

设方程(*)的特解为

$$y^*=A\cos x+B\sin x,$$

代入方程(*)，求得 $A=0,B=-\frac{1}{2}$，故 $y^*=-\frac{1}{2}\sin x$，从而 $y''-y=\sin x$ 的通解是

$$y=Y+y^*=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

由 $y(0)=0,y'(0)=\frac{3}{2}$，得 $C_1=1,C_2=-1$. 故所求初值问题的解为

$$y=e^x-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

【评注】 本题的核心是第一步方程变换。

八 、（本题满分 12 分）

设函数 f(x)连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)}f(x^2+y^2+z^2)dv}{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma},\quad G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-1}^{t}f(x^2)dx},$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le t^2\}$.

(1) 讨论 F(t)在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

(2) 证明当 t>0 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

【分析】 (1) 先分别在球面坐标下计算分子的三重积分和在极坐标下计算分母的重积分，再根据导函数 $F'(t)$ 的符号确定单调性；(2) 将待证的不等式作适当的恒等变形后，构造辅助函数，再用单调性进行证明即可.

【详解】 (1) 因为

$$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi dr}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(r^2)rdr}=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2dr}{\int_0^t f(r^2)rdr},$$

$$F'(t)=2\frac{tf(t^2)\int_0^t f(r^2)r(t-r)dr}{[\int_0^t f(r^2)rdr]^2},$$

所以在$(0,+\infty)$上$F'(t)>0$，故 F(t) 在$(0,+\infty)$内单调增加.

（2） 因

$$G(t)=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)rdr}{\int_0^t f(r^2)dr},$$

要证明 t>0 时$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$，只需证明 t>0 时，$F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)>0$，即

$$\int_0^t f(r^2)r^2dr\int_0^t f(r^2)dr-[\int_0^t f(r^2)rdr]^2>0.$$

令 $g(t)=\int_0^t f(r^2)r^2dr\int_0^t f(r^2)dr-[\int_0^t f(r^2)rdr]^2$，

则 $g'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2dr>0$，故 g(t)在$(0,+\infty)$内单调增加.

因为 g(t)在 t=0 处连续，所以当 t>0 时，有 g(t)>g(0).

又 g(0)=0，故当 t>0 时，g(t)>0，

因此，当 t>0 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t).$

【评注】 本题将定积分、二重积分和三重积分等多个知识点结合起来了，但难点是证明（2）中的不等式，事实上，这里也可用柯西积分不等式证明：

$$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx,$$

在上式中取 f(x)为$\sqrt{f(r^2)}r$，g(x)为$\sqrt{f(r^2)}$即可.

九 、（本题满分 10 分）

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=P^{-1}A^*P$，求 B+2E 的特征值与特征向量，其中$A^*$为 A 的伴随矩阵，E 为 3 阶单位矩阵.

【分析】 可先求出A^*, P^{-1}，进而确定$B=P^{-1}A^*P$及 B+2E，再按通常方法确定其特

征值和特征向量；或先求出 A 的特征值与特征向量，再相应地确定 A*的特征值与特征向量，最终根据 B+2E 与 A*+2E 相似求出其特征值与特征向量.

【详解】 方法一：

经计算可得

$$A^* = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = P^{-1}A^*P = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

从而

$$B + 2E = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -4 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$|\lambda E - (B + 2E)| = \begin{vmatrix} \lambda - 9 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda - 7 & 4 \\ 2 & 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 9)^2(\lambda - 3),$$

故 B+2E 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 3.$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ 时，解 $(9E - A)x = 0$，得线性无关的特征向量为

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

所以属于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ 的所有特征向量为

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 = k_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$ 其中 k_1, k_2 是不全为零的任意常数.

当 $\lambda_3 = 3$时，解 $(3E - A)x = 0$，得线性无关的特征向量为

$$\eta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

所以属于特征值$\lambda_3=3$的所有特征向量为$k_3\eta_3=k_3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，其中$k_3\neq 0$为任意常数.

方法二：设 A 的特征值为λ，对应特征向量为η，即 $A\eta=\lambda\eta$. 由于$|A|=7\neq 0$，所以$\lambda\neq 0$.

又因 $A^*A=|A|E$，故有 $A^*\eta=\dfrac{|A|}{\lambda}\eta.$

于是有 $$B(P^{-1}\eta)=P^{-1}A^*P(P^{-1}\eta)=\frac{|A|}{\lambda}(P^{-1}\eta),$$

$$(B+2E)P^{-1}\eta=(\frac{|A|}{\lambda}+2)P^{-1}\eta.$$

因此，$\dfrac{|A|}{\lambda}+2$ 为 B+2E 的特征值，对应的特征向量为$P^{-1}\eta$.

由于 $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-3 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-7),$$

故 A 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=7.$

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，对应的线性无关特征向量可取为$\eta_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$， $\eta_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$.

当$\lambda_3=7$时，对应的一个特征向量为$\eta_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

由 $P^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，得$P^{-1}\eta_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$， $P^{-1}\eta_2=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$， $P^{-1}\eta_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$.

因此，B+2E 的三个特征值分别为 9，9，3.

对应于特征值 9 的全部特征向量为

$$k_1P^{-1}\eta_1+k_2P^{-1}\eta_2=k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}，$$其中k_1,k_2是不全为零的任意常数；

对应于特征值 3 的全部特征向量为

$$k_3P^{-1}\eta_3=k_3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$，其中k_3是不为零的任意常数.

【评注】 设$B=P^{-1}AP$，若λ是 A 的特征值，对应特征向量为η，则 B 与 A 有相同的特征值，但对应特征向量不同，B 对应特征值λ的特征向量为$P^{-1}\eta$.

本题计算量大，但方法思路都是常规和熟悉的，主要是考查考生的计算能力。不过利用相似矩阵有相同的特征值以及 A 与 A*的特征值之间的关系讨论，可适当降低计算量.

十 、（本题满分 8 分）

已知平面上三条不同直线的方程分别为

l_1：　$ax+2by+3c=0$，

l_2：　$bx+2cy+3a=0$，

l_3：　$cx+2ay+3b=0$.

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为$a+b+c=0$.

【分析】 三条直线相交于一点，相当于对应线性方程组有唯一解，进而转化为系数矩阵与增广矩阵的秩均为 2.

【详解】 方法一：必要性

设三条直线l_1,l_2,l_3交于一点，则线性方程组

$$\begin{cases}ax+2by=-3c,\\bx+2cy=-3a,\\cx+2ay=-3b,\end{cases}\qquad(*)$$

有唯一解，故系数矩阵$A=\begin{bmatrix}a&2b\\b&2c\\c&2a\end{bmatrix}$与增广矩阵$\bar{A}=\begin{bmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{bmatrix}$的秩均为 2，于是$|\bar{A}|=0.$

由于 $$|\bar{A}|=\begin{vmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{vmatrix}=6(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc]$$

$$=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],$$

但根据题设 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq0$，故

$$a+b+c=0.$$

充分性：由 $a+b+c=0$，则从必要性的证明可知，$|\overline{A}|=0$，故秩$(\overline{A})<3$.

由于

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2(ac-b^2) = -2[a(a+b)+b^2]$$

$$=-2[(a+\frac{1}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2]\neq 0,$$

故秩(A)=2．于是，

秩(A)=秩$(\overline{A})$=2.

因此方程组(*)有唯一解，即三直线 l_1,l_2,l_3 交于一点.

方法二：必要性

设三直线交于一点 (x_0,y_0)，则 $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 为 Ax=0 的非零解，其中

$$A=\begin{bmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{bmatrix}.$$

于是 $|A|=0$.

而 $$|A|=\begin{vmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{vmatrix} = -6(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc]$$

$$=-3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],$$

但根据题设 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$，故

$$a+b+c=0.$$

充分性：考虑线性方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a, \\ cx+2ay=-3b, \end{cases} \qquad (*)$$

将方程组(*)的三个方程相加，并由 a+b+c=0 可知，方程组(*)等价于方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a. \end{cases} \qquad (**)$$

因为 $\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2(ac-b^2) = -2[a(a+b)+b^2]$

$$=-[a^2+b^2+(a+b)^2]\neq 0,$$

故方程组(* *)有唯一解，所以方程组(*)有唯一解，即三直线l_1,l_2,l_3交于一点.

【评注】本题将三条直线的位置关系转化为方程组的解的判定，而解的判定问题又可转化为矩阵的秩计算，进而转化为行列式的计算，综合考查了多个知识点.

十一 、（本题满分 10 分）

已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求：

(1) 乙箱中次品件数的数学期望；

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

【分析】 乙箱中可能的次品件数为 0，1，2，3，分别求出其概率，再按定义求数学期望即可；而求从乙箱中任取一件产品是次品的概率，涉及到两次试验，是典型的用全概率公式的情形，第一次试验的各种可能结果（取到的次品数）就是要找的完备事件组.

【详解】 (1) X 的可能取值为 0，1，2，3，X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{C_3^kC_3^{3-k}}{C_6^3},\quad k=0,1,2,3.$$

即

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

因此

$$EX=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}=\frac{3}{2}.$$

(2) 设 A 表示事件“从乙箱中任取一件产品是次品”，由于$\{X=0\}$，$\{X=1\}$，$\{X=2\}$，$\{X=3\}$构成完备事件组，因此根据全概率公式，有

$$P(A)=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}P\{A|X=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}\cdot\frac{k}{6}=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{3}kP\{X=k\}$$

$$=\frac{1}{6}EX=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{4}.$$

【评注】本题对数学期望的计算也可用分解法：

设

$$X_i=\begin{cases}0, & \text{从甲箱中取出的第}i\text{件产品是合格品,}\\ 1, & \text{从甲箱中取出的第}i\text{件产品是次品,}\end{cases}$$

则X_i的概率分布为

X_i	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$i=1,2,3.$

因为 $X=X_1+X_2+X_3$，所以

$$EX=EX_1+EX_2+EX_3=\frac{3}{2}.$$

十二 、（本题满分 8 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, x>\theta,\\ 0, \quad x\le\theta,\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数．从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，记 $\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n).$

(1) 求总体 X 的分布函数 F(x);

(2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$；

(3) 如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量，讨论它是否具有无偏性.

【分析】 求分布函数 F(x)是基本题型；求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$，可作为多维相互独立且同分布的随机变量函数求分布函数，直接用定义即可；是否具有无偏性，只需检验 $E\hat{\theta}=\theta$ 是否成立.

【详解】 (1)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}1-e^{-2(x-\theta)}, x>\theta,\\ 0, \quad x\le\theta.\end{cases}$$

(2) $F_{\hat{\theta}}(x)=P\{\hat{\theta}\le x\}=P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le x\}$

$=1-P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)>x\}$

$=1-P\{X_1>x,X_2>x,\cdots,X_n>x\}$

$=1-[1-F(x)]^n$

$$=\begin{cases}1-e^{-2n(x-\theta)}, x>\theta,\\ 0, \quad x\le\theta.\end{cases}$$

(3) $\hat{\theta}$ 概率密度为

$$f_{\hat{\theta}}(x)=\frac{dF_{\hat{\theta}}(x)}{dx}=\begin{cases}2ne^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\le\theta.\end{cases}$$

因为 $E\hat{\theta}=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\hat{\theta}}(x)dx=\int_{\theta}^{+\infty}2nxe^{-2n(x-\theta)}dx$

$$=\theta+\frac{1}{2n}\ne\theta,$$

所以 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量不具有无偏性.

【评注】本题表面上是一数理统计问题，实际上考查了求分布函数、随机变量的函数求分布和概率密度以及数学期望的计算等多个知识点. 将数理统计的概念与随机变量求分布与数字特征结合起来是一种典型的命题形式.