



1991年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题(本题满分15分,每小题3分.)

(1) 设 $\begin{cases} x=1+t^2, \\ y=\cos t, \end{cases}$ 则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$ _____.

(2) 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $dz=$ _____.

(3) 已知两条直线的方程是 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$; $L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$, 则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是_____.

(4) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小, 则常数 $a=$ _____.

(5) 设4阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 的逆阵 $A^{-1}=$ _____.

二、选择题(本题满分15分,每小题3分.)

(1) 曲线 $y=\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ ()

- (A) 没有渐近线 (B) 仅有水平渐近线
(C) 仅有铅直渐近线 (D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

(2) 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)dt + \ln 2$, 则 $f(x)$ 等于 ()

- (A) $e^x \ln 2$ (B) $e^{2x} \ln 2$
(C) $e^x + \ln 2$ (D) $e^{2x} + \ln 2$

(3) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 等于 ()

- (A) 3 (B) 7 (C) 8 (D) 9

(4) 设 D 是 xOy 平面上以 $(1, 1)$ 、 $(-1, 1)$ 和 $(-1, -1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一象限的部分, 则

$$\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy \text{ 等于 } ()$$

- (A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$ (B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy$



(C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$ (D) 0

- (5) 设 n 阶方阵 A 、 B 、 C 满足关系式 $ABC = E$, 其中 E 是 n 阶单位阵, 则必有 ()
- (A) $ACB = E$ (B) $CBA = E$
(C) $BAC = E$ (D) $BCA = E$

三、(本题满分 15 分, 每小题 5 分.)

(1) 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

(2) 设 n 是曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量, 求函数

$u = \frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 n 的方向导数.

- (3) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z) dV$, 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z = 4$ 所围成的立体.

四、(本题满分 6 分)

在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y = a \sin x (a > 0)$ 中, 求一条曲线 L , 使沿该曲线从 O 到 A 的积分

$\int_L (1 + y^3) dx + (2x + y) dy$ 的值最小.

五、(本题满分 8 分.)

将函数 $f(x) = 2 + |x| (-1 \leq x \leq 1)$ 展开成以 2 为周期的傅立叶级数, 并由此求级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

六、(本题满分 7 分.)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 内可导, 且 $3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = f(0)$, 证明在 $(0, 1)$ 内存在一点 c , 使

$f'(c) = 0$.

七、(本题满分 8 分.)

已知 $\alpha_1 = (1, 0, 2, 3)$, $\alpha_2 = (1, 1, 3, 5)$, $\alpha_3 = (1, -1, a+2, 1)$, $\alpha_4 = (1, 2, 4, a+8)$, 及
 $\beta = (1, 1, b+3, 5)$.



- (1) a 、 b 为何值时, β 不能表示成 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 的线性组合?
- (2) a 、 b 为何值时, β 有 α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 的唯一的线性表示式? 并写出该表示式.

八、(本题满分 6 分)

设 A 为 n 阶正定阵, E 是 n 阶单位阵, 证明 $A+E$ 的行列式大于 1.

九、(本题满分 8 分)

在上半平面求一条向上凹的曲线, 其上任一点 $P(x, y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数 (Q 是法线与 x 轴的交点), 且曲线在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴平行.

十、填空题(本题满分 6 分, 每小题 3 分.)

- (1) 若随机变量 X 服从均值为 2, 方差为 σ^2 的正态分布, 且 $P\{2 < X < 4\} = 0.3$, 则

$$P\{X < 0\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- (2) 随机地向半圆 $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$ (a 为正常数) 内掷一点, 点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比, 则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

十一、(本题满分 6 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求随机变量 $Z = X + 2Y$ 的分布函数.



1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题满分 15 分, 每小题 3 分.)

(1) 【答案】 $\frac{\sin t - t \cos t}{4t^3}$

【解析】这是个函数的参数方程, 满足参数方程所确定函数的微分法, 即

如果 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{\phi'(t)}$.

所以 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{2t}$,

再对 x 求导, 由复合函数求导法则得

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{-\sin t}{2t} \right) \cdot \frac{1}{2t} \\ &= \frac{-2t \cos t + 2 \sin t}{4t^2} \cdot \frac{1}{2t} = \frac{\sin t - t \cos t}{4t^3}. \end{aligned}$$

(2) 【答案】 $dx - \sqrt{2}dy$

【解析】这是求隐函数在某点的全微分, 这里点 $(1, 0, -1)$ 的含义是 $z = z(1, 0) = -1$.

将方程两边求全微分, 由一阶全微分形式不变性得

$$d(xyz) + \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0,$$

再由全微分四则运算法则得

$$(xy)dz + (ydx + xdy)z = -\frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

令 $x = 1, y = 0, z = -1$, 得 $dy = \frac{dx - dz}{\sqrt{2}}$, 即 $dz = dx - \sqrt{2}dy$.

(3) 【答案】 $x - 3y + z + 2 = 0$

【解析】所求平面 Π 过直线 L_1 , 因而过 L_1 上的点 $(1, 2, 3)$;

因为 Π 过 L_1 平行于 L_2 , 于是 Π 平行于 L_1 和 L_2 的方向向量, 即 Π 平行于向量 $\vec{l}_1 = (1, 0, -1)$ 和向量

$\vec{l}_2 = (2, 1, 1)$, 且两向量不共线, 于是平面 Π 的方程



$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

即 $x-3y+z+2=0$.

(4) 【答案】 $-\frac{3}{2}$

【解析】因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \square x, (1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \square \frac{1}{n}x$,

当 $x \rightarrow 0$ 时 $ax^2 \rightarrow 0$, 所以有

$$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1 \square \frac{1}{3}ax^2, \cos x - 1 = -\frac{1}{2}\sin^2 x \square -\frac{1}{2}x^2,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{2}{3}a$.

因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 所以 $-\frac{2}{3}a = 1$, 故 $a = -\frac{3}{2}$.

(5) 【答案】 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

【解析】为求矩阵的逆可有多种办法, 可用伴随, 可用初等行变换, 也可用分块求逆. 根据本题的特点, 若知道分块求逆法, 则可以简单解答.

注意: $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

对于 2 阶矩阵的伴随矩阵有规律: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则求 A 的伴随矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

如果 $|A| \neq 0$, 这样



$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{|ad-bc|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

再利用分块矩阵求逆的法则： $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ ，易见

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

二、选择题(本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】(D)

【解析】由于函数的定义域为 $x \neq 0$ ，所以函数的间断点为 $x = 0$ ，

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 1}{e^{x^2} - 1} = \infty, \text{ 所以 } x = 0 \text{ 为铅直渐近线,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2} + 1}{e^{x^2} - 1} = 1, \text{ 所以 } y = 1 \text{ 为水平渐近线.}$$

所以选(D).

【相关知识点】铅直渐近线：如函数 $y = f(x)$ 在其间断点 $x = x_0$ 处有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ，则 $x = x_0$ 是函数的一条铅直渐近线；

水平渐近线：当 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ (a 为常数)，则 $y = a$ 为函数的水平渐近线.

(2) 【答案】(B)

【解析】令 $u = \frac{t}{2}$ ，则 $t = 2u, dt = 2du$ ，所以

$$f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + \ln 2 = \int_0^x 2f(u) du + \ln 2,$$

两边对 x 求导，得 $f'(x) = 2f(x)$ ，这是一个变量可分离的微分方程，即 $\frac{d[f(x)]}{f(x)} = 2dx$. 解之得 $f(x) = Ce^{2x}$

，其中 C 是常数.

又因为 $f(0) = \int_0^0 2f(u) du + \ln 2 = \ln 2$ ，代入 $f(x) = Ce^{2x}$ ，得 $f(0) = Ce^0 = \ln 2$ ，得

$C = \ln 2$ ，即 $f(x) = e^{2x} \cdot \ln 2$.



(3) 【答案】(C)

【解析】因为

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + \cdots \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + \cdots\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \text{ (收敛级数的结合律与线性性质),}$$

$$\text{所以 } \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 5 - 2 = 3.$$

$$\text{而 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) + \cdots$$

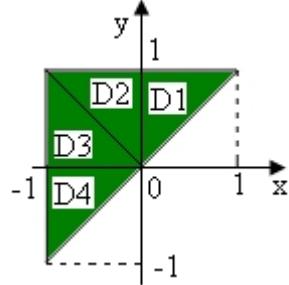
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 5 + 3 = 8,$$

故应选(C).

(4) 【答案】(A)

【解析】如图, 将区域 D 分为 D_1, D_2, D_3, D_4 四个子区域.显然, D_1, D_2 关于 y 轴对称, D_3, D_4 关于 x 轴对称.

$$\text{令 } \begin{cases} I_1 = \iint_D xy dxdy \\ I_2 = \iint_D \cos x \sin y dxdy, \end{cases}$$

由于 xy 对 x 及对 y 都是奇函数, 所以

$$\iint_{D_1+D_2} xy dxdy = 0, \quad \iint_{D_3+D_4} xy dxdy = 0.$$

而 $\cos x \sin y$ 对 x 是偶函数, 对 y 是奇函数, 故有

$$\iint_{D_3+D_4} \cos x \sin y dxdy = 0, \quad \iint_{D_1+D_2} \cos x \sin y dxdy = 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dxdy,$$

$$\text{所以 } \iint_D (xy + \cos x \sin y) dxdy = I_1 + I_2 = 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dxdy,$$

故选(A).

(5) 【答案】(D)

【解析】矩阵的乘法公式没有交换律, 只有一些特殊情况可以交换.

由于 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 且 $ABC = E$, 对等式两边取行列式, 据行列式乘法公式



$|A||B||C|=1$, 得到 $|A| \neq 0$ 、 $|B| \neq 0$ 、 $|C| \neq 0$, 知 A 、 B 、 C 均可逆, 那么, 对于 $ABC = E$, 先左乘 A^{-1}

再右乘 A 有 $ABC = E \rightarrow BC = A^{-1} \rightarrow BCA = E$, 故应选(D).

其实, 对于 $ABC = E$ 先右乘 C^{-1} 再左乘 C , 有 $ABC = E \rightarrow AB = C^{-1} \rightarrow CAB = E$.

三、(本题满分 15 分, 每小题 5 分.)

(1) 【解析】这是 1^∞ 型未定式求极限.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + (\cos \sqrt{x} - 1))^{\frac{1}{\cos \sqrt{x}-1} \cdot \frac{\pi(\cos \sqrt{x}-1)}{x}}$$

令 $\cos \sqrt{x} - 1 = t$, 则 $x \rightarrow 0^+$ 时 $t \rightarrow 0^-$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + (\cos \sqrt{x} - 1))^{\frac{1}{\cos \sqrt{x}-1}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + (\cos \sqrt{x} - 1))^{\frac{1}{\cos \sqrt{x}-1} \cdot \frac{\pi(\cos \sqrt{x}-1)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\pi(\cos \sqrt{x}-1)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi(\cos \sqrt{x}-1)}{x}}.$

因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \square x$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi(\cos \sqrt{x} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2\pi \sin^2 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2\pi \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2}{x} = -\frac{\pi}{2},$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi(\cos \sqrt{x}-1)}{x}} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$

(2) 【解析】先求方向 \vec{n} 的方向余弦, 再求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, 最后按方向导数的计算公式

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$
 求出方向导数.

曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的法向量为

$$\pm \{4x, 6y, 2z\}|_P = \{4x, 6y, 2z\}|_{(1,1,1)} = \pm 2\{2, 3, 1\},$$

在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧, 取正号, 并单位化得

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1}} \{2, 3, 1\} = \frac{1}{\sqrt{14}} \{2, 3, 1\} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}.$$



$$\text{又 } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_P = \frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}} \Big|_P = \frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}} \Big|_{(1,1,1)} = \frac{6}{\sqrt{14}} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_P = \frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}} \Big|_P = \frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}} \Big|_{(1,1,1)} = \frac{8}{\sqrt{14}}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_P = -\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2} \Big|_P = -\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2} \Big|_{(1,1,1)} = -\sqrt{14} \end{array} \right.$$

所以方向导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \\ &= \frac{6}{\sqrt{14}} \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{8}{\sqrt{14}} \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} - \sqrt{14} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{11}{7}. \end{aligned}$$

(3) 【解析】由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而围成的旋转面方程是 $x^2 + y^2 = 2z$.

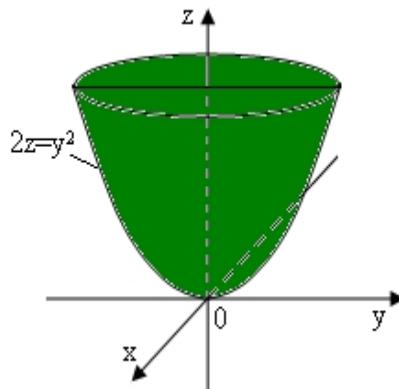
于是, Ω 是由旋转抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 与平面 $z = 4$ 所围成. 曲面与平面的交线是

$$x^2 + y^2 = 8, z = 4.$$

选用柱坐标变换, 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$, 于是

$$\Omega: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 4, 0 \leq r \leq \sqrt{2z},$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } I &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z) dV \\ &= \int_0^4 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} (r^2 + z) r dr \\ &= 2\pi \int_0^4 \left[\left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2 z}{2} \right) \right]_{r=0}^{r=\sqrt{2z}} dz \\ &= 4\pi \int_0^4 z^2 dz = \frac{256}{3}\pi. \end{aligned}$$



四、(本题满分 6 分)

【解析】曲线 $y = a \sin x$, ($x \in [0, \pi]$), 则 $dy = a \cos x dx$, 所以



$$\begin{aligned}
I &= \int_L (1+y^3)dx + (2x+y)dy \\
&= \int_0^\pi [1+(a \sin x)^3 + (2x+a \sin x) \cdot a \cos x] dx \\
&= \int_0^\pi \left(1 + a^3 \sin^3 x + 2ax \cos x + \frac{a^2}{2} \sin 2x \right) dx \\
&= \pi + a^3 \int_0^\pi \sin^3 x dx + 2a \int_0^\pi x \cos x dx + \frac{a^2}{2} \int_0^\pi \sin 2x dx \\
&= \pi + a^3 \int_0^\pi (\cos^2 x - 1) d \cos x + 2a \int_0^\pi x d \sin x + \frac{a^2}{4} \int_0^\pi \sin 2x d 2x \\
&= \pi + a^3 \left[\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x \right]_0^\pi + 2a \left[x \sin x + \cos x \right]_0^\pi + \frac{a^2}{4} \left[-\cos 2x \right]_0^\pi \\
&= \pi + \frac{4}{3}a^3 - 4a.
\end{aligned}$$

对关于 a 的函数 $I = \pi + \frac{4}{3}a^3 - 4a$ 两边对 a 求导数, 其中 $a > 0$, 并令 $I' = 0$, 得

$$I' = 4a^2 - 4 = 0.$$

所以 $a = 1$, 且 $\begin{cases} I' < 0, 0 < a < 1 \\ I' > 0, 1 < a < +\infty \end{cases}$.

故 $a = 1$ 为函数 $I = \pi + \frac{4}{3}a^3 - 4a, (a > 0)$ 的极小值点, 也是最小值点. 故所求的曲线为

$$y = \sin x, \quad (x \in [0, \pi]).$$

五、(本题满分 8 分.)

【解析】按傅式级数公式, 先求 $f(x)$ 的傅式系数 a_n 与 b_n . 因 $f(x)$ 为偶函数, 所以

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \\
a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \\
&= 2 \int_0^1 (2+x) \cos n\pi x dx = 4 \int_0^1 \cos n\pi x dx + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 x d \sin n\pi x \\
&= -\frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x dx = \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \\
a_0 &= 2 \int_0^1 (2+x) dx = 5.
\end{aligned}$$

因为 $f(x) = 2 + |x|$ 在区间 $(-1 \leq x \leq 1)$ 上满足狄利克雷收敛定理的条件, 所以



$$\begin{aligned}f(x) &= 2 + |x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right) \\&= \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \\&= \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x \quad (-1 \leq x \leq 1).\end{aligned}$$

令 $x=0$, 有 $f(0)=2+0=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos 0$, 所以, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

所以, $\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

六、(本题满分 7 分.)

【解析】由定积分中值定理可知, 对于 $\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx$, 在区间 $(\frac{2}{3}, 1)$ 上存在一点 ξ 使得

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = f(\xi) \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} f(\xi),$$

即 $3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = f(\xi) = f(0)$.

由罗尔定理可知, 在区间 $(0, 1)$ 内存在一点 $c (0 < c < \xi < 1)$, 使得 $f'(c) = 0$.

七、(本题满分 8 分)

【解析】设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \beta$, 按分量写出, 则有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3\alpha_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 + 4x_4 = b+3 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + (a+8)x_4 = 5 \end{cases}.$$

对方程组的增广矩阵作初等行变换:

第一行分别乘以有 (-2) 、 (-3) 加到第三行和第四行上, 再第二行乘以 (-1) 、 (-2) 加到第三行和第四行上, 有



$$\begin{aligned}\bar{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & \vdots & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 & \vdots & b+1 \\ 0 & 2 & -2 & a+5 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & \vdots & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & \vdots & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以, 当 $a = -1, b \neq 0$ 时, $r(A) + 1 = r(\bar{A})$, 方程组无解. 即是不存在 x_1, x_2, x_3, x_4 使得

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \beta$ 成立, β 不能表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合;

当 $a \neq -1$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 4$. 方程组有唯一解 $\left(-\frac{2b}{a+1}, \frac{a+b+1}{a+1}, \frac{b}{a+1}, 0\right)^T$,

故 β 有唯一表达式, 且 $\beta = -\frac{2b}{a+1}\alpha_1 + \frac{a+b+1}{a+1}\alpha_2 + \frac{b}{a+1}\alpha_3 + 0 \cdot \alpha_4$.

【相关知识点】 非齐次线性方程组有解的判定定理:

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵 $\bar{A} = (A:b)$

的秩, 即是 $r(A) = r(\bar{A})$ (或者说, b 可由 A 的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线表出, 亦等同于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, b$ 是等价向量组).

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 线性方程组 $Ax = b$, 则

$$(1) \text{ 有唯一解} \Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) = n.$$

$$(2) \text{ 有无穷多解} \Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n.$$

$$(3) \text{ 无解} \Leftrightarrow r(A) + 1 = r(\bar{A}).$$

$\Leftrightarrow b$ 不能由 A 的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线表出.

八、(本题满分 6 分)

【解析】方法 1: 因为 A 为 n 阶正定阵, 故存在正交矩阵 Q , 使

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{pmatrix},$$



其中 $\lambda_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, λ_i 是 A 的特征值.

因此 $Q^T(A+E)Q = Q^TAQ + Q^TQ = \Lambda + E$

两端取行列式得 $|A+E| = |Q^T||A+E||Q| = |Q^T(A+E)Q| = |\Lambda + E| = \prod(\lambda_i + 1)$,

从而 $|A+E| > 1$.

方法 2: 设 A 的 n 个特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. 由于 A 为 n 阶正定阵, 故特征值全大于 0.

由 λ 为 A 的特征值可知, 存在非零向量 α 使 $A\alpha = \lambda\alpha$, 两端同时加上 α , 得 $(A+E)\alpha = (\lambda+1)\alpha$. 按特征值定义知 $\lambda+1$ 是 $A+E$ 的特征值. 因为 $A+E$ 的特征值是

$\lambda_1+1, \lambda_2+1, \dots, \lambda_n+1$. 它们全大于 1, 根据 $|A| = \prod \lambda_i$, 知 $|A+E| = \prod(\lambda_i+1) > 1$.

【相关知识点】阵特征值与特征向量的定义: 设 A 是 n 阶矩阵, 若存在数 λ 及非零的 n 维列向量 X 使得 $AX = \lambda X$ 成立, 则称 λ 是矩阵 A 的特征值, 称非零向量 X 是矩阵 A 的特征向量.

九、(本题满分 8 分)

【解析】 曲线 $y = y(x)$ 在点 $P(x, y)$ 处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) \quad (\text{当 } y' \neq 0 \text{ 时}),$$

它与 x 轴的交点是 $Q(x + yy', 0)$, 从而

$$|PQ| = \sqrt{(yy')^2 + y^2} = y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

当 $y' = 0$ 时, 有 $Q(x, 0)$, $|PQ| = y$, 上式仍然成立.

因此, 根据题意得微分方程

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}},$$

即 $yy'' = 1+y'^2$. 这是可降阶的高阶微分方程, 且当 $x=1$ 时, $y=1, y'=0$.

令 $y' = P(y)$, 则 $y'' = P \frac{dP}{dy}$, 二阶方程降为一阶方程 $yP \frac{dP}{dy} = 1+P^2$, 即 $\frac{PdP}{1+P^2} = \frac{dy}{y}$.

即 $y = C\sqrt{1+P^2}$, C 为常数.

因为当 $x=1$ 时, $y=1, P=y'=0$, 所以 $C=1$, 即 $y = \sqrt{1+P^2} = \sqrt{1+y'^2}$,



所以 $y' = \pm\sqrt{y^2 - 1}$. 分离变量得 $\frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \pm dx$.

令 $y = \sec t$, 并积分, 则上式左端变为

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} &= \int \frac{\sec t \tan t dt}{\tan t} = \ln |\sec t + \tan t| + C \\ &= \ln \left| \sec t + \sqrt{\sec^2 t - 1} \right| + C = \ln \left| y + \sqrt{y^2 - 1} \right| + C.\end{aligned}$$

因曲线在上半平面, 所以 $y + \sqrt{y^2 - 1} > 0$, 即 $\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = C \pm x$.

故 $y + \sqrt{y^2 - 1} = Ce^{\pm x}$.

当 $x = 1$ 时, $y = 1$,

当 x 前取+时, $C = e^{-1}$, $y + \sqrt{y^2 - 1} = e^{x-1}$,

$$y - \sqrt{y^2 - 1} = \frac{y - \sqrt{y^2 - 1}}{(y + \sqrt{y^2 - 1})(y - \sqrt{y^2 - 1})} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{1}{e^{x-1}} = e^{1-x};$$

当 x 前取-时, $C = e$, $y + \sqrt{y^2 - 1} = e^{-x+1}$,

$$y - \sqrt{y^2 - 1} = \frac{y - \sqrt{y^2 - 1}}{(y + \sqrt{y^2 - 1})(y - \sqrt{y^2 - 1})} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{1}{e^{1-x}} = e^{x-1};$$

所以 $y = \frac{1}{2}(e^{(x-1)} + e^{-(x-1)})$.

十、填空题(本题满分 6 分, 每小题 3 分.)

(1) 【解析】一般说来, 若计算正态分布随机变量在某一范围内取值的概率, 应该已知分布的两个参数 μ 和

σ^2 , 否则应先根据题设条件求出 μ , σ^2 , 再计算有关事件的概率, 本题可从

$\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.8$, 通过查 $\Phi(x)$ 表求出 σ , 但是注意到所求概率 $P(x < 0)$ 即是 $\Phi\left(\frac{-2}{\sigma}\right)$ 与 $\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)$ 之间的关系, 可

以直接由 $\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)$ 的值计算出 $\Phi\left(\frac{-2}{\sigma}\right)$.

因为 $X \sim N(2, \sigma^2)$, 所以可标准化得 $\frac{X-2}{\sigma} \sim N(0, 1)$,

由标准正态分布函数概率的计算公式, 有

$$P(2 < x < 4) = \Phi\left(\frac{4-2}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{2-2}{\sigma}\right),$$



$$\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = P(2 < x < 4) + \Phi(0) = 0.8.$$

由正态分布函数的对称性可得到 $P(x < 0) = \Phi\left(-\frac{0-2}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.2.$

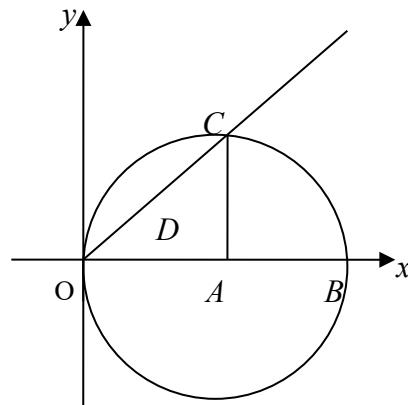
(2) 【解析】设事件 A = “掷的点和原点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ ” ,

这是一个几何型概率的计算问题. 由几何概率公式

$$P(A) = \frac{S_D}{S_{\text{半圆}}}, \text{ 而 } S_{\text{半圆}} = \frac{1}{2}\pi a^2,$$

$$S_D = S_{\triangle OAC} + S_{\text{圆}} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}\pi a^2,$$

$$\text{故 } P(A) = \frac{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}\pi a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}.$$



十一、(本题满分 6 分)

【解析】二维连续型随机变量的概率等于对应区域的二重积分, 所以有

$$F(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X + 2Y \leq z\} = \iint_{x+2y \leq z} f(x, y) dx dy.$$

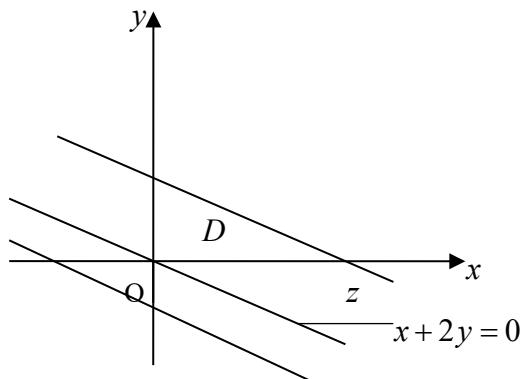
当 $z \leq 0$ 时, $F(z) = 0$.

因为 $x + 2y = z$ 在直线 $x + 2y = 0$ 的下方

与 $x > 0, y > 0$ (即第一象限) 没有公共区域,

所以 $F(z) = 0$.

当 $z > 0$ 时, $x + 2y = z$ 在直线 $x + 2y = 0$



的上方与第一象限相交成一个三角形区域 D , 此即为积分区间.

$$F(z) = \int_0^z dx \int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)} dy = \int_0^z (e^{-x} - e^{-z}) dx = 1 - e^{-z} - ze^{-z}.$$

$$\text{所以 } Z = X + 2Y \text{ 的分布函数 } F(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1 - e^{-z} - ze^{-z}, & z \geq 0. \end{cases}$$