1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})=$______.

(2) 曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点(1, 2, 0)处的切平面方程为______.

(3) 设 $u=e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$, 则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在点 $(2,\dfrac{1}{\pi})$ 处的值为______.

(4) 设区域 D 为 $x^2+y^2\le R^2$, 则 $\iint\limits_D(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2})dxdy=$______.

(5) 已知 $\alpha=(1,2,3),\beta=(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3})$, 设 $A=\alpha^T\beta$, 其中 α^T 是 α 的转置, 则 $A^n=$______.

二、选择题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 xdx$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx$, $P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$,

则 (　)

(A) $N<P<M$　　(B) $M<P<N$

(C) $N<M<P$　　(D) $P<M<N$

(2) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$、$f_y'(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的

(　)

(A) 充分条件但非必要条件　　(B) 必要条件而非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

(3) 设常数 $\lambda>0$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ (　)

(A) 发散　　(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛　　(D) 收敛性与 λ 有关

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$, 其中 $a^2+c^2\ne 0$, 则必有 (　)

(A) $b=4d$　　(B) $b=-4d$

(C) $a=4c$　　(D) $a=-4c$

(5) 已知向量组 α_1、α_2、α_3　α_4 线性无关, 则向量组 (　)

(A) $\alpha_1+\alpha_2$、$\alpha_2+\alpha_3$、$\alpha_3+\alpha_4$、$\alpha_4+\alpha_1$ 线性无关

(B) $\alpha_1-\alpha_2$、$\alpha_2-\alpha_3$、$\alpha_3-\alpha_4$、$\alpha_4-\alpha_1$线性无关

(C) $\alpha_1+\alpha_2$、$\alpha_2+\alpha_3$、$\alpha_3+\alpha_4$、$\alpha_4-\alpha_1$线性无关

(D) $\alpha_1+\alpha_2$、$\alpha_2+\alpha_3$、$\alpha_3-\alpha_4$、$\alpha_4-\alpha_1$线性无关

三、(本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分.)

(1) 设$\begin{cases} x=\cos(t^2), \\ y=t\cos(t^2)-\int_1^{t^2}\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cos u du, \end{cases}$ 求$\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{d^2y}{dx^2}$在$t=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$的值.

(2) 将函数$f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x$展开成$x$的幂级数.

(3) 求$\int\dfrac{dx}{\sin 2x+2\sin x}$.

四、(本题满分 6 分)

计算曲面积分$\iint\limits_S\dfrac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$，其中$S$是由曲面$x^2+y^2=R^2$及两平面$z=R$，$z=-R(R>0)$所围成立体表面的外侧.

五、(本题满分 9 分)

设$f(x)$具有二阶连续导数，$f(0)=0, f'(0)=1$，且$[xy(x+y)-f(x)y]dx+[f'(x)+x^2y]dy=0$为一全微分方程，求$f(x)$及此全微分方程的通解.

六、(本题满分 8 分)

设$f(x)$在点$x=0$的某一领域内具有二阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$绝对收敛.

七、(本题满分 6 分)

已知点A与B的直角坐标分别为(1, 0, 0)与(0, 1, 1). 线段AB绕z轴旋转一周所围成的旋转曲面为S. 求由S及两平面$z=0, z=1$所围成的立体体积.

八、(本题满分 8 分)

设四元线性齐次方程组(I)为$\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_2-x_4=0, \end{cases}$ 又已知某线性齐次方程组(II)的通解为

$k_1(0,1,10)+k_2(-1,2,2,1)$.

(1) 求线性方程组(I)的基础解系；

(2) 问线性方程组(I)和(II)是否有非零公共解？若有，则求出所有的非零公共解. 若没有，则说明理由.

九、(本题满分 6 分)

设 A 为 n 阶非零方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，A^T 是 A 的转置矩阵，当 $A^*=A^T$ 时，证明

$|A|\neq 0$.

十、填空题(本题共 2 小题，每小题 3 分，满分 6 分.)

(1) 已知 A、B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$__________.

(2) 设相互独立的两个随机变量 X、Y 具有同一分布律，且 X 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布律为_______.

十一、(本题满分 6 分)

已知随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1,3^2)$ 和

$N(0,4^2)$，X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$，

(1) 求 Z 的数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$；

(2) 求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ}；

(3) 问 X 与 Z 是否相互独立？为什么？

1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1)【答案】$\frac{1}{6}$

【解析】原式变形后为“$\frac{0}{0}$”型的极限未定式,又分子分母在点0处导数都存在,所以连续应用两次洛必达法则,有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(x-\sin x)}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.\qquad (\text{由重要极限}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1)$$

(2)【答案】$2x+y-4=0$

【解析】所求平面的法向量n为平行于所给曲面在点$(1,2,0)$处法线方向的方向向量l,取$n=l$,又平面过已知点$M(1,2,0)$.

已知平面的法向量(A,B,C)和过已知点(x_0,y_0,z_0)可唯一确定这个平面:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

因点$(1,2,0)$在曲面$F(x,y,z)=0$上. 曲面方程$F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3$.

曲面在该点的法向量

$$n=\left\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right\}\Bigg|_{(1,2,0)}=\left\{2y,2x,1-e^z\right\}\Big|_{(1,2,0)}=\left\{4,2,0\right\}=2\left\{2,1,0\right\},$$

故切平面方程为 $2(x-1)+(y-2)=0$, 即 $2x+y-4=0$.

(3)【答案】$\frac{\pi^2}{e^2}$

【解析】由于混合偏导数在连续条件下与求导次序无关,为了简化运算,所以本题可以先求$\frac{\partial u}{\partial y}$,再求$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}e^{-x}\cos\frac{x}{y},$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})}=\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\frac{1}{\pi}}\right)\right|_{x=2}=\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(-\pi^2 xe^{-x}\cos\pi x\right)\right|_{x=2}$$

$$=\left.(-\pi^2 e^{-x}(1-x)\cos\pi x)\right|_{x=2}+0=\frac{\pi^2}{e^2}.$$

（可边代值边计算，这样可以简化运算量.）

【相关知识点】多元复合函数求导法则：如果函数$u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$都在点$(x,y)$具有对$x$及对$y$的偏导数，函数$z=f(u,v)$在对应点$(u,v)$具有连续偏导数，则复合函数

$z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$在点$(x,y)$的两个偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=f_1'\frac{\partial u}{\partial y}+f_2'\frac{\partial v}{\partial y}.$$

(4)【答案】$\frac{\pi}{4}R^4(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})$

【解析】很显然，根据此题的特征用极坐标变换来计算：

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)rdr=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)d\theta\cdot\int_0^R r^3dr.$$

注意：　$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta=\pi$,

则　$\text{原式}=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\pi\cdot\frac{1}{4}R^4=\frac{\pi}{4}R^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$

(5)【答案】$3^{n-1}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$

【解析】由矩阵乘法有结合律，注意　$\beta\alpha^T=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=3$是一个数，

而　　$$A=\alpha^T\beta=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$$，(是一个三阶矩阵)

于是,

$$A^n=(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\cdots(\alpha^T\beta)=\alpha^T\left(\beta\alpha^T\right)\left(\beta\alpha^T\right)\cdots\left(\beta\alpha^T\right)\beta$$

$$=3^{n-1}\alpha^T\beta=3^{n-1}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}.$$

二、选择题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1)【答案】(D)

【解析】对于关于原点对称的区间上的积分,应该关注被积函数的奇偶性.

由对称区间上奇偶函数积分的性质,被积函数是奇函数,积分区间关于原点对称,则积分为 0,故 $M=0$,且

由定积分的性质,如果在区间 $[a,b]$ 上,被积函数 $f(x)\ge 0$,则 $\int_a^b f(x)dx\ge 0\ \ (a<b)$.

所以　　$N=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xdx>0$，$P=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xdx=-N<0$.

因而 $P<M<N$,应选(D).

(2)【答案】(D)

【解析】$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续不能保证 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$, $f_y'(x_0,y_0)$. 反之, $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在这两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$, $f_y'(x_0,y_0)$ 也不能保证 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续,因此应选(D).

二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数存在和在点 (x_0,y_0) 处连续并没有相关性.

(3)【答案】(C)

【解析】考查取绝对值后的级数.因

$$\left|\frac{(-1)^n|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\right| \le \frac{1}{2}a_n{}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2+\lambda} < \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{2n^2},$$

（第一个不等式是由 $a \ge 0, b \ge 0, ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ 得到的.）

又 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛，（此为 p 级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛；当 $p \le 1$ 时发散.）

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}a_n{}^2 + \frac{1}{2n^2}$ 收敛，由比较判别法，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\right|$ 收敛.

故原级数绝对收敛，因此选（C）.

（4）【答案】（D）

【解析】因为　$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 = o(x), 1-e^{-x^2} \sim x^2 = o(x)$,

故　$a\tan x + b(1-\cos x) \sim ax \quad (a \ne 0)$,

$c\ln(1-2x) + d(1-e^{-x^2}) \sim -2cx \quad (c \ne 0)$,

因此，原式左边 $= \lim_{x\to 0}\frac{ax}{-2cx} = \frac{a}{-2c} = 2 =$ 原式右边，$\Rightarrow a = -4c$.

当 $a=0, c\ne 0$ 时，极限为 0；

当 $a \ne 0, c = 0$ 时，极限为 ∞，均与题设矛盾，应选（D）.

【相关知识点】1. 无穷小的比较：

设在同一个极限过程中，$\alpha(x), \beta(x)$ 为无穷小且存在极限　$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l.$

（1）　若 $l \ne 0$，称 $\alpha(x), \beta(x)$ 在该极限过程中为同阶无穷小；

（2）　若 $l = 1$，称 $\alpha(x), \beta(x)$ 在该极限过程中为等价无穷小，记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$；

（3）　若 $l = 0$，称在该极限过程中 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小，记为

$\alpha(x) = o\left(\beta(x)\right)$.

若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在（不为 ∞），称 $\alpha(x), \beta(x)$ 不可比较.

2.　无穷小量的性质：当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x), \beta(x)$ 为无穷小，则

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \Leftrightarrow \alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x)).$$

(5)【答案】(C)

【解析】这一类题目应当用观察法. 若不易用观察法时可转为计算行列式.

(A)：由于$\left(\alpha_1+\alpha_2\right)-\left(\alpha_2+\alpha_3\right)+\left(\alpha_3+\alpha_4\right)-\left(\alpha_4+\alpha_1\right)=0$, 所以(A)线性相关.

(B)：由于$\left(\alpha_1-\alpha_2\right)+\left(\alpha_2-\alpha_3\right)+\left(\alpha_3-\alpha_4\right)+\left(\alpha_4-\alpha_1\right)=0$, 所以(B)线性相关.

对于(C), 实验几组数据不能得到 0 时, 应立即计算由α的系数构成的行列式, 即

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0,$$

由行列式不为 0, 知道(C)线性无关. 故应选(C).

当然, 在处理(C)有困难时, 也可来看(D), 由

$$(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_4)+(\alpha_4-\alpha_1)=0,$$

知(D)线性相关, 于是用排除法可确定选(C).

【相关知识点】$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关的充分必要条件是存在某$\alpha_i(i=1,2,\cdots,s)$可以由

$\alpha_1,\cdots\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$线性表出.

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关的充分必要条件是任意一个$\alpha_i(i=1,2,\cdots,s)$均不能由

$\alpha_1,\cdots\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$线性表出.

三、(本题共 3 小题，每小题 5 分, 满分 15 分.)

(1)【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{\cos t^2-2t^2\sin t^2-\dfrac{1}{2t}\cos t^2\cdot 2t}{-2t\sin t^2}=t(t>0),$

同理　　$y_{xx}''=\dfrac{(y_x')_t'}{x_t'}=\dfrac{1}{-2t\sin t^2},$

代入参数值　$t=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},$

则　　$y_x'\big|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\quad y_{xx}''\big|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}.$

【相关知识点】1. 复合函数求导法则: 如果$u=g(x)$在点x可导, 而$y=f(x)$在点$u=g(x)$可导, 则复合函数$y=f\left[g(x)\right]$在点x可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x) \quad 或 \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

2. 对积分上限的函数的求导公式：若 $F(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}f(x)dx$，$\alpha(t)$，$\beta(t)$ 均一阶可导，则

$$F'(t)=\beta'(t)\cdot f\left[\beta(t)\right]-\alpha'(t)\cdot f\left[\alpha(t)\right].$$

(2)【解析】$f(x)=\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\arctan x-x$.

先求 $f'(x)$ 的展开式. 将 $f(x)$ 微分后，可得简单的展开式，再积分即得原函数的幂级数展开. 所以由

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\ (-1<x<1)$$

该级数在端点 $x=\pm1$ 处的收敛性，视 α 而定. 特别地，当 $\alpha=-1$ 时，有

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,\qquad (-1<x<1)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,\qquad (-1<x<1)$$

得 $$f'(x)=\frac{1}{4}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{4}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{1}{2}\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}-1$$

$$=\frac{1}{1-x^4}-1=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}-1=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}(|x|<1),$$

积分，由牛顿-莱布尼茨公式得

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{4n}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\quad(|x|<1).$$

(3)【解析】**方法 1**：利用三角函数的二倍角公式 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$，并利用换元积分，结合拆项法求积分，得

$$\int\frac{dx}{\sin2x+2\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin x(\cos x+1)}$$

$$=\int\frac{\sin xdx}{2\sin^2x(\cos x+1)}\overset{\cos x=u}{=\!=\!=}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1-u)(1+u)^2}du$$

$(\because\quad \sin^2x=1-\cos^2x)$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{(1+u)+(1-u)}{(1-u)(1+u)^2}du=-\frac{1}{8}\int(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}+\frac{2}{(1+u)^2})du$$

$$=\frac{1}{8}\left[\ln|1-u|-\ln|1+u|+\frac{2}{(1+u)}\right]+C$$

$$=\frac{1}{8}\left[\ln(1-\cos x)-\ln(1+\cos x)+\frac{2}{1+\cos x}\right]+C,$$

其中 C 为任意常数.

方法 2：换元 $\cos x = u$ 后，有

$$原式=\int\frac{dx}{2\sin x(\cos x+1)}=\int\frac{\sin xdx}{2\sin^2 x(\cos x+1)}=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{(1-u)(1+u)^2}.$$

用待定系数法将被积函数分解：

$$\frac{1}{(1-u)(1+u)^2}=\frac{A}{1-u}+\frac{B}{1+u}+\frac{D}{(1+u)^2}$$

$$=\frac{(A-B)u^2+(2A-D)u+(A+B+D)}{(1-u)(1+u)^2},$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A-B=0\\2A-D=0\\A+B+D=1\end{cases}\Rightarrow A=B=\frac{1}{4},D=\frac{1}{2}.$$

于是，原式$=-\frac{1}{8}\int(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}+\frac{2}{(1+u)^2})du=\frac{1}{8}\left[\ln|1-u|-\ln|1+u|+\frac{2}{1+u}\right]+C$

$$=\frac{1}{8}\left[\ln(1-\cos x)-\ln(1+\cos x)+\frac{2}{1+\cos x}\right]+C.$$

四、(本题满分 6 分)

【解析】求第二类曲面积分的基本方法:套公式将第二类曲面积分化为第一类曲面积分,再化为二重积分,或用高斯公式转化为求相应的三重积分或简单的曲面积分.

这里曲面块的个数不多,积分项也不多,某些积分取零值,如若 Σ 垂直 yOz 平面,则 $\iint\limits_{\Sigma}Pdydz=0$. 化为二重积分时要选择投影平面,注意利用对称性与奇偶性.

先把积分化简后利用高斯公式也很方便的.

方法 1：注意 $\iint\limits_{S}\frac{z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=0$, (因为 S 关于 xy 平面对称, 被积函数关于 z 轴对称)

所以 $I=\iint\limits_{S}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}$.

S 由上下底圆及圆柱面组成. 分别记为 S_1,S_2,S_3.　S_1,S_2 与平面 yOz 垂直 $\Rightarrow$

$$\iint\limits_{S_1}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{S_2}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=0.$$

在 S_3 上将 $x^2+y^2=R^2$ 代入被积表达式 $\Rightarrow I=\iint\limits_{S_3}\frac{xdydz}{R^2+z^2}$.

S_3 在 yz 平面上投影区域为 $D_{yz}:-R\le y\le R,-R\le z\le R$, 在 S_3 上, $x=\pm\sqrt{R^2-y^2}$, S_3 关于 yz 平面对称, 被积函数对 x 为奇函数, 可以推出

$$I=2\iint\limits_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}dydz=2\times2\times2\int_0^R\sqrt{R^2-y^2}dy\int_0^R\frac{dz}{R^2+z^2}$$

$$=8\cdot\frac{\pi}{4}R^2\cdot\frac{1}{R}\arctan\frac{z}{R}\bigg|_0^R=\frac{1}{2}\pi^2R.$$

方法 2： S 是封闭曲面, 它围成的区域记为 Ω, 记 $I=\iint\limits_{S}\frac{xdydz}{R^2+z^2}$.

再用高斯公式得 $I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{R^2+z^2}\right)dV=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{R^2+z^2}dV=\int_{-R}^{R}dz\iint\limits_{D(z)}\frac{dxdy}{R^2+z^2}$

$$=2\pi R^2\int_0^R\frac{1}{R^2+z^2}dz=\frac{1}{2}\pi^2R \qquad \text{（先一后二的求三重积分方法）}$$

其中 $D(z)$ 是圆域：$x^2+y^2\le R^2$.

【相关知识点】高斯公式：设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, 函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy,$$

或
$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint\limits_{\Sigma}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)dS,$$

这里 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧, $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦. 上述两个公式叫做高斯公式.

五、（本题满分 9 分）

【解析】由全微分方程的条件, 有

$$\frac{\partial}{\partial y}[xy(x+y)-f(x)y]=\frac{\partial}{\partial x}[f'(x)+x^2y],$$

即　$x^2+2xy-f(x)=f''(x)+2xy$, 亦即 $f''(x)+f(x)=x^2$.

因而是初值问题 $\begin{cases} y''+y=x^2, \\ y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=1, \end{cases}$ 的解，此方程为常系数二阶线性非齐次方程，对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$ 的根为 $r_{1,2}=\pm i$，原方程右端 $x^2=e^{0x}\cdot x^2$ 中的 $\lambda=0$，不同于两个特征根，所以方程有特解形如 $Y=Ax^2+Bx+C$.

代入方程可求得 $A=1, B=0, C=2$，则特解为 x^2-2.

由题给 $f(0)=0, f'(0)=1$，解得 $f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$.

$f(x)$ 的解析式代入原方程，则有

$$[xy^2+2y-(2\cos x+\sin x)y]dx+[x^2y+2x-2\sin x+\cos x]dy=0.$$

先用凑微分法求左端微分式的原函数：

$$(\frac{1}{2}y^2dx^2+\frac{1}{2}x^2dy^2)+2(ydx+xdy)-yd(2\sin x-\cos x)-(2\sin x-\cos x)dy=0,$$

$$d(\frac{1}{2}x^2y^2+2xy+y(\cos x-2\sin x))=0.$$

其通解为 $\frac{1}{2}x^2y^2+2xy+y(\cos x-2\sin x)=C$ 其中 C 为任意常数.

【相关知识点】1. 二阶线性非齐次方程解的结构：设 $y^*(x)$ 是二阶线性非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解. $Y(x)$ 是与之对应的齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的通解，则 $y=Y(x)+y^*(x)$ 是非齐次方程的通解.

2. 二阶常系数线性齐次方程通解的求解方法：对于求解二阶常系数线性齐次方程的通解 $Y(x)$，可用特征方程法求解：即 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 中的 $P(x)$、$Q(x)$ 均是常数，方程变为 $y''+py'+qy=0$. 其特征方程写为 $r^2+pr+q=0$，在复数域内解出两个特征根 r_1,r_2；

分三种情况：

(1) 两个不相等的实数根 r_1,r_2，则通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$；

(2) 两个相等的实数根 $r_1=r_2$，则通解为 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{r_1x}$；

(3) 一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$，则通解为 $y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$. 其中 C_1,C_2 为常数.

3. 对于求解二阶线性非齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的一个特解 $y^*(x)$，可用待定系数法，有结论如下：

如果 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$, 则二阶常系数线性非齐次方程具有形如 $y^*(x)=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$ 的特解, 其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 相同次数的多项式, 而 k 按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取 0、1 或 2.

如果 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$, 则二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解可设为

$$y^*=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$ 与 $R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式, $m=\max\{l,n\}$, 而 k 按 $\lambda+i\omega$（或 $\lambda-i\omega$）不是特征方程的根、或是特征方程的单根依次取为 0 或 1.

六、（本题满分 8 分）

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 表明 $x\to0$ 时 $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小, 若能进一步确定 $f(x)$ 是 x 的 p 阶或高于 p 阶的无穷小, $p>1$, 从而 $\left|f(\dfrac{1}{n})\right|$ 也是 $\dfrac{1}{n}$ 的 p 阶或高于 p 阶的无穷小, 这就证明了级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$ 绝对收敛.

方法一： 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 及 $f(x)$ 的连续性得知 $f(0)=0,f'(0)=0$, 再由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一领域内具有二阶连续导数以及洛必达法则, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$ 为 "$\dfrac{0}{0}$" 型的极限未定式, 又分子分母在点 0 处导数都存在, 连续运用两次洛必达法则, 有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\left|\frac{f(x)}{x^2}\right|=\frac{1}{2}|f''(0)|.$$

由函数极限与数列极限的关系 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left|f(\frac{1}{n})\right|}{\frac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{2}|f''(0)|.$

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f(\dfrac{1}{n})\right|$ 收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$ 绝对收敛.

方法二： 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 得知 $f(0)=0,f'(0)=0$, 可用泰勒公式来实现估计. $f(x)$ 在点 $x=0$ 有泰勒公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\theta x)x^2=\frac{1}{2}f''(\theta x)x^2(0<\theta<1,x\in[-\delta,\delta])$$

因 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一领域内具有二阶连续导数,

$\Rightarrow \exists\delta>0, f''(x)$ 在 $x\in[-\delta,\delta]$ 有界, 即 $\exists M>0$, 有 $|f''(x)|\le M, x\in[-\delta,\delta]$

$\Rightarrow \left|f(x)\right| = \frac{1}{2}\left|f''(\theta x)\right|x^2 \le \frac{1}{2}Mx^2, x\in[-\delta,\delta]$.

对此 $\delta>0$, $\exists N, n>N$ 时, $0<\frac{1}{n}<\delta \Rightarrow \left|f(\frac{1}{n})\right| \le \frac{1}{2}M\frac{1}{n^2}$.

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f(\frac{1}{n})\right|$ 收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

【相关知识点】正项级数的比较判别法:

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=A$, 则

(1) 当 $0<A<+\infty$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同时收敛或同时发散;

(2) 当 $A=0$ 时, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛; 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散;

(3) 当 $A=+\infty$ 时, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛; 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

七、(本题满分 6 分)

【解析】**方法 1:** 用定积分.

设高度为 z 处的截面 D_z 的面积为 $S(z)$, 则所求体积 $V=\int_0^1 S(z)dz$.

A,B 所在的直线的方向向量为 $(0-1,1-0,1-0)=(-1,1,1)$, 且过 A 点,

所以 A,B 所在的直线方程为 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ 或 $\begin{cases}x=1-z\\ y=z\end{cases}$.

截面 D_z 是个圆形, 其半径的平方 $R^2=x^2+y^2=(1-z)^2+z^2$, 则面积

$$S(z)=\pi R^2=\pi[(1-z)^2+z^2],$$

由此 $V=\int_0^1\pi[(1-z)^2+z^2]dz=\pi\int_0^1\left(1-2z+2z^2\right)dz=\pi\left(z-z^2+\frac{2}{3}z^3\right)\Big|_0^1=\frac{2\pi}{3}$.

方法 2: 用三重积分.

$$V=\iiint_{\Omega}dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dz\int_0^{\sqrt{(1-z)^2+z^2}} rdr=\frac{2\pi}{3},$$

或者
$$V=\iiint_{\Omega}dV=\int_0^1 dz\iint_{D_z}d\sigma=\int_0^1 \pi[(1-z)^2+z^2]dz$$

$$=\pi\int_0^1\left(1-2z+2z^2\right)dz$$

$$=\pi\left(z-z^2+\frac{2}{3}z^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{2\pi}{3}.$$

八、（本题满分 8 分）

【解析】(1) 由已知, (I) 的系数矩阵, $A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}$.

由于 $n-r(A)=2$, 所以解空间的维数是 2.

取 x_3,x_4 为自由变量, 分别令 $(x_3,x_4)=(1,0),(0,1)$, 求出 $Ax=0$ 的解.

故 (I) 的基础解系可取为 $(0,0,1,0),(-1,1,0,1)$.

(2) 方程组 (I) 和 (II) 有非零公共解.

将 (II) 的通解 $x_1=-k_2,x_2=k_1+2k_2,x_3=k_1+2k_2,x_4=k_2$ 代入方程组 (I), 则有

$$\begin{cases}-k_2+k_1+2k_2=0\\k_1+2k_2-k_2=0\end{cases}\Rightarrow k_1=-k_2.$$

那么当 $k_1=-k_2\neq 0$ 时, 向量 $k_1(0,1,1,0)+k_2(-1,2,2,1)=k_1(1,-1,-1,-1)$ 是 (I) 与 (II) 的非零公共解.

九、（本题满分 6 分）

【解析】**证法一**：由于 $A^*=A^T$, 根据 A^* 的定义有

$A_{ij}=a_{ij}(\forall i,j=1,2,\cdots,n)$, 其中 A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式.

由于 $A\neq 0$, 不妨设 $a_{ij}\neq 0$, 那么

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2\geq a_{ij}^2>0,$$

故 $|A|\neq 0$.

证法二：(反证法) 若 $|A|=0$, 则 $AA^*=AA^T=|A|E=0$.

设 A 的行向量为 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\alpha_i\alpha_i^T=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$.

于是 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$.

进而有 $A=0$，这与 A 是非零矩阵相矛盾. 故 $|A|\neq 0$.

十、填空题(本题共 2 小题，每小题 3 分，满分 6 分.)

(1)【解析】利用随机事件的概率运算性质进行化简. 由概率的基本公式(广义加法公式)，有

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB).$$

因题目已知 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，故有

$$P(A)+P(B)=1,\ P(B)=1-P(A)=1-p.$$

(2)【解析】由于 X、Y 相互独立且同分布，只能取 0、1 两个数值，易见随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 只取 0 与 1 两个可能的值，且

$$P\{Z=0\}=P\{\max\{X,Y\}=0\}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=\frac{3}{4}.$$

所以随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布律为：

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

十一、(本题满分 6 分)

【解析】此题的第一小问是求数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$，是个常规问题；(2)求相关系数 ρ_{XZ}，关键是计算 X 与 Z 的协方差；(3)考查相关系数为零与相互独立是否等价.

(1) 由 $X\sim N(1,3^2)$，$Y\sim N(0,4^2)$，知

$$E(X)=1,D(X)=9,E(Y)=0,D(Y)=16.$$

由数学期望和方差的性质：

$$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c,$$

$$D(aX+bY+c)=a^2D(X)+b^2D(Y)+2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y),$$

其中 a,b,c 为常数.

得

$$EZ=\frac{1}{3}EX+\frac{1}{2}EY=\frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned}DZ&=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+\frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,Y)\\&=\frac{1}{9}\times 9+\frac{1}{4}\times 16+\frac{1}{3}\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}\\&=5+\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})\times 3\times 4=3.\end{aligned}$$

(2) 因为 $\mathrm{Cov}(X,Z)=\mathrm{Cov}(X,\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y)$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,X)+\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)\\&=\frac{1}{3}\cdot 3^2+\frac{1}{2}(-6)=0\end{aligned}$$

所以

$$\rho_{XZ}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}=0.$$

(3) 由于 (X,Y) 服从二维正态分布, 则其线性组合构成的随机变量也服从二维正态分布, 而 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$, $X=X+0Y$, 故 X 和 Z 都是其线性组合, 则 (X,Z) 服从二维正态分布, 根据

$\rho_{XZ}=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}=0$, 所以 X 与 Z 是相互独立的.