

## 1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

**一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)**

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(2) 设  $z = \frac{1}{x} f(xy) + y\varphi(x+y)$ ,  $f, \varphi$  具有二阶连续导数, 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(3) 设  $L$  为椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ , 其周长记为  $a$ , 则  $\int_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(4) 设  $A$  为  $n$  阶矩阵,  $|A| \neq 0$ ,  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵,  $E$  为  $n$  阶单位矩阵. 若  $A$  有特征值  $\lambda$ ,  
则  $(A^*)^2 + E$  必有特征值  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(5) 设平面区域  $D$  由曲线  $y = \frac{1}{x}$  及直线  $y=0, x=1, x=e^2$  所围成, 二维随机变量  $(X, Y)$  在  
区域  $D$  上服从均匀分布, 则  $(X, Y)$  关于  $X$  的边缘概率密度在  $x=2$  处的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

**二、选择题(本题共5小题, 每小题3分, 共15分.)**

(1) 设  $f(x)$  连续, 则  $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\quad)$

- (A)  $xf(x^2)$       (B)  $-xf(x^2)$       (C)  $2xf(x^2)$       (D)  $-2xf(x^2)$

(2) 函数  $f(x) = (x^2 - x - 2) |x^3 - x|$  不可导点的个数是  $\underline{\hspace{2cm}} \quad (\quad)$

- (A) 3      (B) 2      (C) 1      (D) 0

(3) 已知函数  $y = y(x)$  在任意点  $x$  处的增量  $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$ , 且当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\alpha$  是  $\Delta x$  的高  
阶无穷小,  $y(0) = \pi$ , 则  $y(1)$  等于  $\underline{\hspace{2cm}} \quad (\quad)$

- (A)  $2\pi$       (B)  $\pi$       (C)  $e^{\frac{\pi}{4}}$       (D)  $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

(4) 设矩阵  $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$  是满秩的, 则直线  $\frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_1-c_2}$  与直线

$\frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3} \quad (\quad)$

- (A) 相交于一点      (B) 重合

- (C) 平行但不重合 (D) 异面
- (5) 设  $A$ 、 $B$  是两个随机事件, 且  $0 < P(A) < 1, P(B) > 0, P(B|A) = P(B|\bar{A})$ , 则必有( )
- (A)  $P(A|B) = P(\bar{A}|B)$  (B)  $P(A|B) \neq P(\bar{A}|B)$
- (C)  $P(AB) = P(A)P(B)$  (D)  $P(AB) \neq P(A)P(B)$

### 三、(本题满分5分)

求直线  $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$  在平面  $\Pi: x - y + 2z - 1 = 0$  上的投影直线  $L_0$  的方程, 并求  $L_0$  绕  $y$  轴旋转一周所成曲面的方程.

### 四、(本题满分6分)

确定常数  $\lambda$ , 使在右半平面  $x > 0$  上的向量  $A(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda i - x^2(x^4 + y^2)^\lambda j$  为某二元函数  $u(x, y)$  的梯度, 并求  $u(x, y)$ .

### 五、(本题满分6分)

从船上向海中沉放某种探测仪器, 按探测要求, 需确定仪器的下沉深度  $y$  (从海平面算起) 与下沉速度  $v$  之间的函数关系. 设仪器在重力作用下, 从海平面由静止开始铅直下沉, 在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为  $m$ , 体积为  $B$ , 海水比重为  $\rho$ , 仪器所受的阻力与下沉速度成正比, 比例系数为  $k(k > 0)$ . 试建立  $y$  与  $v$  所满足的微分方程, 并求出函数关系式  $y = y(v)$ .

### 六、(本题满分7分)

计算  $\iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (z+a)^2 dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ , 其中  $\Sigma$  为下半球面  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  的上侧,  $a$  为大于零的常数.

### 七、(本题满分6分)

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{\pi}{1}}{n+\frac{1}{n}} \right)$ .

### 八、(本题满分5分)

设正项数列  $\{a_n\}$  单调减少, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  发散, 试问级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1}\right)^n$  是否收敛? 并说明理由.

### 九、(本题满分6分)

设  $y = f(x)$  是区间  $[0,1]$  上的任一非负连续函数.

(1) 试证存在  $x_0 \in (0,1)$ , 使得在区间  $[0, x_0]$  上以  $f(x_0)$  为高的矩形面积, 等于在区间  $[x_0, 1]$

上以  $y = f(x)$  为曲边的梯形面积.

(2) 又设  $f(x)$  在区间  $(0,1)$  内可导, 且  $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$ , 证明(1)中的  $x_0$  是唯一的.

### 十、(本题满分6分)

已知二次曲面方程  $x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz = 4$ , 可以经过正交变换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

化为椭圆柱面方程  $\eta^2 + 4\zeta^2 = 4$ , 求  $a, b$  的值和正交矩阵  $P$ .

### 十一、(本题满分4分)

设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 若存在正整数  $k$ , 使线性方程组  $A^k x = 0$  有解向量  $\alpha$ , 且  $A^{k-1} \alpha \neq 0$ ,

证明: 向量组  $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$  是线性无关的.

### 十二、(本题满分5分)

已知线性方程组

$$(I) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,2n}x_{2n} = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2,2n}x_{2n} = 0, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{n,2n}x_{2n} = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系为  $(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1,2n})^T, (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2,2n})^T, \dots, (b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{n,2n})^T$ , 试写出线性方程组

$$(II) \begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \dots + b_{1,n}y_{2n} = 0, \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{2,n}y_{2n} = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \dots + b_{n,n}y_{2n} = 0 \end{cases}$$

的通解，并说明理由.

**十三、(本题满分6分)**

设两个随机变量  $X, Y$  相互独立, 且都服从均值为 0、方差为  $\frac{1}{2}$  的正态分布, 求随机变量  $|X - Y|$  的方差.

十四、(本题满分4分)

从正态总体  $N(3.4, 6^2)$  中抽取容量为  $n$  的样本, 如果要求其样本均值位于区间  $(1.4, 5.4)$  内的概率不小于 0.95, 问样本容量  $n$  至少应取多大?

附表：标准正态分布表  $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$z$	1.28	1.645	1.96	2.33
$\Phi(z)$	0.900	0.950	0.975	0.990

**十五、(本题满分4分)**

设某次考试的学生成绩服从正态分布, 从中随机地抽取36位考生的成绩, 算得平均成绩为66.5分, 标准差为15分, 问在显著性水平0.05下, 是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为70分? 并给出检验过程.

### 附表： $t$ 分布表

$$P\{t(n) \leq t_p(n)\} = p$$

$t_p(n)$	$p$	0.95	0.975
$n$			
35		1.6896	2.0301
36		1.6883	2.0281

## 1998年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

$$(1) \text{【答案】} -\frac{1}{4}$$

【解析】方法1：用四则运算将分子化简，再用等价无穷小替换，

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)}{x^2 (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2 - 4}{x^2 (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{1-x^2} - 1)}{4x^2} \\ &\underline{\underline{\sqrt{1-x^2} - 1 \square -\frac{1}{2}x^2}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x^2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

方法2：采用洛必达法则.

$$\begin{aligned} \text{原式} &\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{4x} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{4} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \right)}{4} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

方法3：将分子按佩亚诺余项泰勒公式展开至  $x^2$  项，

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o_1(x^2), \quad \sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o_2(x^2), \\ \text{从而} \quad \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o_1(x^2) + 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o_2(x^2) - 2}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}x^2 + o_1(x^2) + o_2(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$(2) \text{【答案】 } yf''(xy) + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y)$$

**【分析】**因为  $z = \frac{1}{x} f(xy) + y\varphi(x+y)$ ,  $f, \varphi$  具有二阶连续导数, 利用混合偏导数在连续的条件下与求导次序无关, 先求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  或  $\frac{\partial z}{\partial y}$  均可, 但不同的选择可能影响计算的繁简.

**方法1:** 先求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{x} f(xy) + y\varphi(x+y) \right] = -\frac{1}{x^2} f(xy) + \frac{y}{x} f'(xy) + y\varphi'(x+y), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{1}{x^2} f(xy) + \frac{y}{x} f'(xy) + y\varphi'(x+y) \right) \\ &= -\frac{1}{x^2} f'(xy)x + \frac{1}{x} f'(xy) + \frac{y}{x} f''(xy)x + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y) \\ &= -\frac{1}{x} f'(xy) + \frac{1}{x} f'(xy) + yf''(xy) + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y) \\ &= yf''(xy) + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y).\end{aligned}$$

**方法2:** 先求  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{x} f(xy) + y\varphi(x+y) \right] = \frac{1}{x} f'(xy)x + \varphi(x+y) + y\varphi'(x+y) \\ &= f'(xy) + \varphi(x+y) + y\varphi'(x+y), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [f'(xy) + \varphi(x+y) + y\varphi'(x+y)] \\ &= yf''(xy) + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y).\end{aligned}$$

**方法3:** 对两项分别采取不同的顺序更简单些:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{x} f(xy) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (y\varphi(x+y)) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{x} f'(xy)x \right] + \frac{\partial}{\partial y} [y\varphi'(x+y)] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [f'(xy)] + \frac{\partial}{\partial y} [y\varphi'(x+y)] \\ &= yf''(xy) + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y).\end{aligned}$$

**评注:** 本题中,  $f, \varphi$  中的中间变量均为一元, 因此本题实质上是一元复合函数的求导, 只要注意到对  $x$  求导时,  $y$  视为常数; 对  $y$  求导时,  $x$  视为常数就可以了.

(3) **【答案】** 12a

【解析】 $L$  关于  $x$  轴 ( $y$  轴) 对称,  $2xy$  关于  $y$  (关于  $x$ ) 为奇函数  $\Rightarrow \int_L 2xy ds = 0$ .

又在  $L$  上,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow 3x^2 + 4y^2 = 12 \Rightarrow \int_L (3x^2 + 4y^2) ds = \int_L 12 ds = 12a.$$

因此, 原式  $= \int_L 2xy ds + \int_L (3x^2 + 4y^2) ds = 12a$ .

**【相关知识点】** 对称性: 平面第一型曲线积分  $\int_l f(x, y) ds$ , 设  $f(x, y)$  在  $l$  上连续, 如果  $l$  关于  $y$  轴对称,  $l_1$  为  $l$  上  $x \geq 0$  的部分, 则有结论:

$$\int_l f(x, y) ds = \begin{cases} 2 \int_{l_1} f(x, y) ds, & f(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数}, \\ 0, & f(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数}. \end{cases}$$

类似地, 如果  $l$  关于  $x$  轴对称,  $l_2$  为  $l$  上  $y \geq 0$  的部分, 则有结论:

$$\int_l f(x, y) ds = \begin{cases} 2 \int_{l_2} f(x, y) ds, & f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数}, \\ 0, & f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数}. \end{cases}$$

(4) 【答案】  $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2 + 1$

【解析】方法1: 设  $A$  的对应于特征值  $\lambda$  的特征向量为  $\xi$ , 由特征向量的定义有

$$A\xi = \lambda\xi, \quad (\xi \neq 0).$$

由  $|A| \neq 0$ , 知  $\lambda \neq 0$  (如果 0 是  $A$  的特征值  $\Leftrightarrow |A| = 0$ ), 将上式两端左乘  $A^*$ , 得

$$A^* A \xi = |A| \xi = A^* \lambda \xi = \lambda A^* \xi,$$

从而有  $A^* \xi = \frac{|A|}{\lambda} \xi$ , (即  $A^*$  的特征值为  $\frac{|A|}{\lambda}$ ).

将此式两端左乘  $A^*$ , 得

$$(A^*)^2 \xi = \frac{|A|}{\lambda} A^* \xi = \left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2 \xi.$$

又  $E\xi = \xi$ , 所以  $((A^*)^2 + E)\xi = \left(\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2 + 1\right)\xi$ , 故  $(A^*)^2 + E$  的特征值为  $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2 + 1$ .

方法2：由  $|A| \neq 0$ ,  $A$  的特征值  $\lambda \neq 0$  (如果0是  $A$  的特征值  $\Leftrightarrow |A|=0$ ), 则  $A^{-1}$  有特征值

$$\frac{1}{\lambda}, A^* \text{ 的特征值为 } \frac{|A|}{\lambda}; (A^*)^2 + E \text{ 的特征值为 } \left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2 + 1.$$

**【相关知识点】** 1. 矩阵特征值与特征向量的定义：设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 若存在数  $\lambda$  及非零的  $n$  维列向量  $X$  使得  $AX = \lambda X$  成立, 则称  $\lambda$  是矩阵  $A$  的特征值, 称非零向量  $X$  是矩阵  $A$  的特征向量.

由  $\lambda$  为  $A$  的特征值可知, 存在非零向量  $\alpha$  使  $A\alpha = \lambda\alpha$ , 两端左乘  $A^{-1}$ , 得  $\alpha = \lambda A^{-1}\alpha$ .

因为  $\alpha \neq 0$ , 故  $\lambda \neq 0$ , 于是有  $A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda}\alpha$ . 按特征值定义知  $\frac{1}{\lambda}$  是  $A^{-1}$  的特征值.

若  $AX = \lambda X$ , 则  $(A+kE)X = AX + kX = (\lambda+k)X$ . 即若  $\lambda$  是  $A$  的特征值, 则

$A+kE$  的特征值是  $\lambda+k$ .

2. 矩阵  $A$  可逆的充要条件是  $|A| \neq 0$ , 且  $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ .

(5) 【答案】 $\frac{1}{4}$

**【解析】** 首先求  $(X, Y)$  的联合概率密度  $f(x, y)$ .

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq x \leq e^2, 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\},$$

区域  $D$  的面积为  $S_D = \int_1^{e^2} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{e^2} = 2$ .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其次求关于  $X$  的边缘概率密度.

当  $x < 1$  或  $x > e^2$  时,  $f_X(x) = 0$ ;

当  $1 \leq x \leq e^2$  时,  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2x}$ .

故  $f_X(2) = \frac{1}{4}$ .

## 二、选择题(本题共5小题, 每小题3分, 共15分.)

(1) 【答案】(A)

**【解析】** 为变限所定义的函数求导数, 作积分变量代换  $u = x^2 - t^2$ ,

$$t: 0 \rightarrow x \Rightarrow u: x^2 \rightarrow 0, du = d(x^2 - t^2) = -2tdt \Rightarrow dt = -\frac{1}{2t}du,$$

$$\begin{aligned} \int_0^x tf(x^2 - t^2)dt &\stackrel{u=x^2-t^2}{=} \int_{x^2}^0 tf(u)\left(-\frac{1}{2t}\right)dt \\ &= \int_{x^2}^0 -\frac{1}{2}f(u)du = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u)du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^x tf(x^2 - t^2)dt &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(u)du \\ &= \frac{1}{2} f(x^2) \cdot (x^2)' = \frac{1}{2} f(x^2) \cdot 2x = xf(x^2), \end{aligned}$$

选(A).

**【相关知识点】**对积分上限的函数的求导公式：若  $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x)dx$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  均一阶可导，则  $F'(t) = \beta'(t) \cdot f[\beta(t)] - \alpha'(t) \cdot f[\alpha(t)]$ .

(2) 【答案】(B)

**【解析】**当函数中出现绝对值号时，就有可能出现不可导的“尖点”，因为这时的函数是分段函数。 $f(x) = (x^2 - x - 2)|x| |x^2 - 1|$ , 当  $x \neq 0, \pm 1$  时  $f(x)$  可导，因而只需在  $x = 0, \pm 1$  处考察  $f(x)$  是否可导。在这些点我们分别考察其左、右导数。

$$\begin{aligned} \text{由 } f(x) &= \begin{cases} (x^2 - x - 2)x(1 - x^2), & x < -1, \\ (x^2 - x - 2)x(x^2 - 1), & -1 \leq x < 0, \\ (x^2 - x - 2)x(1 - x^2), & 0 \leq x < 1, \\ (x^2 - x - 2)x(x^2 - 1), & 1 \leq x, \end{cases} \\ \Rightarrow f'_-( -1) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x^2 - x - 2)x(1 - x^2) - 0}{x + 1} = 0, \\ f'_+(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x^2 - x - 2)x(x^2 - 1) - 0}{x + 1} = 0, \end{aligned}$$

即  $f(x)$  在  $x = -1$  处可导。又

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x^2 - x - 2)x(x^2 - 1) - 0}{x} = 2, \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2 - x - 2)x(1 - x^2) - 0}{x} = -2, \end{aligned}$$

所以  $f(x)$  在  $x = 0$  处不可导。

类似, 函数  $f(x)$  在  $x=1$  处亦不可导. 因此  $f(x)$  只有2个不可导点, 故应选(B).

**评注:** 本题也可利用下列结论进行判断:

设函数  $f(x) = |x-a|\varphi(x)$ , 其中  $\varphi(x)$  在  $x=a$  处连续, 则  $f(x)$  在  $x=a$  处可导的充要条件是  $\varphi(a)=0$ .

(3) 【答案】(D)

**【解析】** 由  $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$ , 有  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{1+x^2} + \frac{\alpha}{\Delta x}$ .

令  $\Delta x \rightarrow 0$ , 得  $\alpha$  是  $\Delta x$  的高阶无穷小, 则  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 0$ ,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{y}{1+x^2} + \frac{\alpha}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y}{1+x^2} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = \frac{y}{1+x^2}$$

即  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^2}$ .

分离变量, 得  $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x^2}$ ,

两边积分, 得  $\ln|y| = \arctan x + C$ , 即  $y = C_1 e^{\arctan x}$ .

代入初始条件  $y(0) = \pi$ , 得  $y(0) = C_1 e^{\arctan 0} = C_1 = \pi$ . 所以,  $y = \pi e^{\arctan x}$ .

故  $y(1) = \pi e^{\arctan x} \Big|_{x=1} = \pi e^{\arctan 1} = \pi e^{\frac{\pi}{4}}$ .

**【相关知识点】** 无穷小的比较:

设在同一个极限过程中,  $\alpha(x), \beta(x)$  为无穷小且存在极限  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l$ ,

(1) 若  $l \neq 0$ , 称  $\alpha(x), \beta(x)$  在该极限过程中为同阶无穷小;

(2) 若  $l = 1$ , 称  $\alpha(x), \beta(x)$  在该极限过程中为等价无穷小, 记为  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ;

(3) 若  $l = 0$ , 称在该极限过程中  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  的高阶无穷小, 记为  $\alpha(x) = o(\beta(x))$ .

若  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$  不存在(不为  $\infty$ ), 称  $\alpha(x), \beta(x)$  不可比较.

(4) 【答案】(A)

**【解析】** 设  $L_1 : \frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ ,  $L_2 : \frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$ , 题设矩阵

$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$  是满秩的, 则由行列式的性质, 可知

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{1行减2行, 2行减3行}} \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

故向量组  $(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$  与  $(a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3)$  线性无关, 否则由线性相关的定义知, 一定存在  $k_1, k_2$ , 使得  $k_1(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2) + k_2(a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3) = 0$ , 这样上面行列式经过初等行变换值应为零, 产生矛盾.

$(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$  与  $(a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3)$  分别为  $L_1, L_2$  的方向向量, 由方向向量线性相关, 两直线平行, 可知  $L_1, L_2$  不平行.

又由  $\frac{x - a_3}{a_1 - a_2} = \frac{y - b_3}{b_1 - b_2} = \frac{z - c_3}{c_1 - c_2}$  得

$$\frac{x - a_3}{a_1 - a_2} - 1 = \frac{y - b_3}{b_1 - b_2} - 1 = \frac{z - c_3}{c_1 - c_2} - 1,$$

即 
$$\frac{x - a_3 - (a_1 - a_2)}{a_1 - a_2} = \frac{y - b_3 - (b_1 - b_2)}{b_1 - b_2} = \frac{z - c_3 - (c_1 - c_2)}{c_1 - c_2}.$$

同样由  $\frac{x - a_1}{a_2 - a_3} = \frac{y - b_1}{b_2 - b_3} = \frac{z - c_1}{c_2 - c_3}$ , 得

$$\frac{x - a_1}{a_2 - a_3} + 1 = \frac{y - b_1}{b_2 - b_3} + 1 = \frac{z - c_1}{c_2 - c_3} + 1,$$

即 
$$\frac{x - a_1 + (a_2 - a_3)}{a_2 - a_3} = \frac{y - b_1 + (b_2 - b_3)}{b_2 - b_3} = \frac{z - c_1 + (c_2 - c_3)}{c_2 - c_3},$$

可见  $L_1, L_2$  均过点  $(a_2 - a_1 - a_3, b_2 - b_1 - b_3, c_2 - c_1 - c_3)$ , 故两直线相交于一点, 选(A).

(5) 【答案】C

【分析】由题设条件  $P(B | A) = P(B | \bar{A})$ , 知  $A$  发生与  $A$  不发生条件下  $B$  发生的条件概率相等, 即  $A$  发生不发生不影响  $B$  的发生概率, 故  $A, B$  相互独立. 而本题选项(A)和(B)是考虑  $P(A | B)$  与  $P(\bar{A} | B)$  是否相等, 选项(C)和(D)才是事件  $A$  与  $B$  是否独立.

【解析】由条件概率公式及条件  $P(B|A) = P(B|\bar{A})$ , 知

$$\frac{P\{AB\}}{P\{A\}} = \frac{P\{\bar{A}B\}}{P\{\bar{A}\}} = \frac{P\{B\} - P\{AB\}}{1 - P\{A\}},$$

于是有  $P\{AB\}[1 - P\{A\}] = P\{A\} \cdot [P\{B\} - P\{AB\}]$ ,

可见  $P\{AB\} = P\{A\}P\{B\}$ .

应选 (C).

**【相关知识点】** 条件概率公式:  $P\{B|A\} = \frac{P\{AB\}}{P\{A\}}$ .

### 三、(本题满分5分)

【解析】方法1: 求直线  $L$  在平面  $\Pi$  上的投影  $L_0$ :

方法1: 先求  $L$  与  $\Pi$  的交点  $N_1$ . 以  $L: \begin{cases} x = 1+t, \\ y = t, \\ z = 1-t \end{cases}$  代入平面  $\Pi$  的方程, 得

$$(1+t) - t + 2(1-t) - 1 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

从而交点为  $N_1(2, 1, 0)$ ; 再过直线  $L$  上点  $M_0(1, 0, 1)$  作平面  $\Pi$  的垂线  $L'$ :  $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ ,

即  $\begin{cases} x = 1+t, \\ y = -t, \\ z = 1+2t. \end{cases}$

并求  $L'$  与平面  $\Pi$  的交点  $N_2$ :

$$(1+t) - (-t) + 2(1+2t) - 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3},$$

交点为  $N_2(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .

$N_1$  与  $N_2$  的连接线即为所求  $L_0: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ .

方法2: 求  $L$  在平面  $\Pi$  上的投影线的最简方法是过  $L$  作垂直于平面  $\Pi$  的平面  $\Pi_0$ , 所求投影

线就是平面  $\Pi$  与  $\Pi_0$  的交线. 平面  $\Pi_0$  过直线  $L$  上的点  $(1, 0, 1)$  与不共线的向量  $l = (1, 1, -1)$

(直线  $L$  的方向向量) 及  $n = (1, -1, 2)$  (平面  $\Pi$  的法向量) 平行, 于是  $\Pi_0$  的方程是

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ 即 } x-3y-2z+1=0.$$

投影线为  $L_0: \begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-3y-2z+1=0. \end{cases}$

下面求  $L_0$  绕  $y$  轴旋转一周所成的旋转曲面  $S$  的方程. 为此, 将  $L_0$  写成参数  $y$  的方程:

$$\begin{cases} x=2y, \\ z=-\frac{1}{2}(y-1). \end{cases}$$

按参数式表示的旋转面方程得  $S$  的参数方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{(2y)^2+(\frac{1}{2}(1-y))^2} \cos \theta, \\ y=y, \\ z=\sqrt{(2y)^2+(\frac{1}{2}(1-y))^2} \sin \theta. \end{cases}$$

消去  $\theta$  得  $S$  的方程为  $x^2+z^2=(2y)^2+\left[-\frac{1}{2}(y-1)\right]^2$ , 即  $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$ .

#### 四、(本题满分6分)

【解析】令  $P(x, y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda$ ,  $Q(x, y)=-x^2(x^4+y^2)^\lambda$ , 则  $A(x, y)=(P(x, y), Q(x, y))$

在单联通区域右半平面  $x>0$  上为某二元函数  $u(x, y)$  的梯度  $\Leftrightarrow Pdx+Qdy$  在  $x>0$  上  $\exists$  原

函数  $u(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}, x>0$ .

其中,  $\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x(x^4+y^2)^\lambda-\lambda x^2(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 4x^3$ ,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x(x^4+y^2)^\lambda+2\lambda xy(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 2y.$$

由  $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ , 即满足

$$-2x(x^4+y^2)^\lambda-\lambda x^2(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 4x^3=2x(x^4+y^2)^\lambda+2\lambda xy(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 2y,$$

$$\Leftrightarrow 4x(x^4+y^2)^\lambda(\lambda+1)=0 \Leftrightarrow \lambda=-1.$$

可见, 当  $\lambda = -1$  时, 所给向量场为某二元函数的梯度场.

为求  $u(x, y)$ , 采用折线法, 在  $x > 0$  半平面内任取一点, 比如点  $(1, 0)$  作为积分路径的起点, 则根据积分与路径无关, 有

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{2xydx - x^2dy}{x^4 + y^2} + C \\
 &= \int_1^x \frac{2x \cdot 0}{x^4 + 0} dx + \int_0^y \frac{-x^2}{x^4 + y^2} dy + C \text{ (折线法)} \\
 &= \int_0^y \frac{-x^2}{x^4 + y^2} dy + C \\
 &= \int_0^y \frac{-x^2}{x^4(1 + \left(\frac{y}{x^2}\right)^2)} dy + C \text{ (第一类换元法)} \\
 &= -\int_0^y \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4(1 + \left(\frac{y}{x^2}\right)^2)} d\left(\frac{y}{x^2}\right) + C = -\int_0^y \frac{1}{(1 + \left(\frac{y}{x^2}\right)^2)} d\left(\frac{y}{x^2}\right) + C \\
 &= -\arctan \frac{y}{x^2} + C \text{ (基本积分公式)}
 \end{aligned}$$

其中  $C$  为任意常数.

**【相关知识点】** 1. 二元可微函数  $u(x, y)$  的梯度公式:  $\mathbf{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j}$ .

2. 定理: 设  $D$  为平面上的单连通区域, 函数  $P(x, y)$  与  $Q(x, y)$  在  $D$  内连续且有连续的一阶偏导数, 则下列六个命题等价:

$$(1) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}, (x, y) \in D;$$

$$(2) \quad \oint_L Pdx + Qdy = 0, L \text{ 为 } D \text{ 内任意一条逐项光滑的封闭曲线};$$

$$(3) \quad \int_{LAB} Pdx + Qdy \text{ 仅与点 } A, B \text{ 有关, 与连接 } A, B \text{ 什么样的分段光滑曲线无关};$$

$$(4) \quad \text{存在二元单值可微函数 } u(x, y), \text{ 使}$$

$$du = Pdx + Qdy$$

(即  $Pdx + Qdy$  为某二元单值可微函数  $u(x, y)$  的全微分;

$$(5) \quad \text{微分方程 } Pdx + Qdy = 0 \text{ 为全微分方程};$$

$$(6) \quad \text{向量场 } P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} \text{ 为某二元函数 } u(x, y) \text{ 的梯度 } \mathbf{grad}u = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}.$$

换言之，其中任一组条件成立时，其它五组条件皆成立。当条件成立时，可用试图法或折线法求函数  $u(x, y)$ 。

### 五、(本题满分6分)

【解析】先建立坐标系，取沉放点为原点  $O$ ，铅直向下作为  $Oy$  轴正向，探测器在下沉过程中受重力、浮力和阻力的作用，其中重力大小： $mg$ ，浮力的大小： $F_{\text{浮}} = -\rho B$ ；阻力： $-kv$ ，则由牛顿第二定律得

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - B\rho g - kv, \quad y|_{t=0} = 0, \quad v|_{t=0} = 0. \quad (*)$$

由  $\frac{dy}{dt} = v, \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy} = v \sqrt{\frac{dy}{dv}}$ ，代入(\*)得  $y$  与  $v$  之间的微分方程

$$mv \left( \frac{dy}{dv} \right)^{-1} = mg - B\rho - kv, \quad v|_{y=0} = 0.$$

分离变量得  $dy = \frac{mv}{mg - B\rho - kv} dv$ ，

两边积分得  $\int dy = \int \frac{mv}{mg - B\rho - kv} dv$ ，

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{mv + \frac{Bm\rho}{k} - \frac{m^2 g}{k} - \frac{Bm\rho}{k} + \frac{m^2 g}{k}}{mg - B\rho - kv} dv \\ &= \int \frac{-\frac{m}{k}(mg - B\rho - kv) - \frac{Bm\rho}{k} + \frac{m^2 g}{k}}{mg - B\rho - kv} dv \\ &= \int \left( -\frac{m}{k} + \frac{\frac{m^2 g - Bm\rho}{k}}{mg - B\rho - kv} \right) dv \\ &= \int -\frac{m}{k} dv + \int \frac{m(mg - B\rho)}{k(mg - B\rho - kv)} dv \\ &= -\frac{m}{k} v + \int \frac{m(mg - B\rho) \cdot (-\frac{1}{k})}{k(mg - B\rho - kv)} d(mg - B\rho - kv) \quad (\text{第一类换元法}) \\ &= -\frac{m}{k} v - \frac{m(mg - B\rho)}{k^2} \ln(mg - B\rho - kv) + C. \end{aligned}$$

再根据初始条件  $v|_{y=0}=0$ , 即

$$-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2} \ln(mg-B\rho) + C = 0 \Rightarrow C = \frac{m(mg-B\rho)}{k^2} \ln(mg-B\rho).$$

故所求  $y$  与  $v$  函数关系为

$$y = -\frac{m}{k}v - \frac{m(mg-B\rho)}{k^2} \ln\left(\frac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}\right).$$

## 六、(本题满分7分)

**【解析】方法1：**本题属于求第二类曲面积分，且不属于封闭区面，则考虑添加一平面使被积区域封闭后用高斯公式进行计算，但由于被积函数分母中包含  $(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ ，因此不能立

即加、减辅助面  $\Sigma_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2 \\ z = 0 \end{cases}$ ，宜先将曲面方程代入被积表达式先化简：

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (z+a)^2 dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} axdydz + (z+a)^2 dx dy.$$

添加辅助面  $\Sigma_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2 \\ z = 0 \end{cases}$ ，其侧向下（由于  $\Sigma$  为下半球面  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  的上

侧，而高斯公式要求是整个边界区面的外侧，这里我们取辅助面的下侧，和  $\Sigma$  的上侧组成整个边界区面的内侧，前面取负号即可），由高斯公式，有

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \iint_{\Sigma+\Sigma_1} axdydz + (z+a)^2 dx dy - \frac{1}{a} \iint_{\Sigma_1} axdydz + (z+a)^2 dx dy \\ &= \frac{1}{a} \left( - \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial(ax)}{\partial x} + \frac{\partial((z+a)^2)}{\partial z} \right) dV - \left( - \iint_D a^2 dx dy \right) \right). \end{aligned}$$

第一个积分前面加负号是由于我们取边界区面的内侧，第二个积分前面加负号是由于  $\Sigma_1$  的方向向下；另外由曲面片  $\Sigma_1$  在  $yoz$  平面投影面积为零，则  $\iint_{\Sigma_1} axdydz = 0$ ，而  $\Sigma_1$  上  $z=0$ ，

则  $(z+a)^2 = a^2$ .

$$I = \frac{1}{a} \left( - \iiint_{\Omega} (a + 2(z+a)) dV + \iint_D a^2 dx dy \right),$$

其中  $\Omega$  为  $\Sigma$  与  $\Sigma_1$  所围成的有界闭区域， $D$  为  $\Sigma_1$  在  $xoy$  面上的投影  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$ .

从而，

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{a} \left( -3a \iiint_{\Omega} dv - 2 \iiint_{\Omega} z dv + a^2 \iint_D dxdy \right) \\
 &= \frac{1}{a} \left( -3a \cdot \frac{2}{3} \pi a^3 - 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 z dz + a^2 \cdot \pi a^2 \right).
 \end{aligned}$$

第一个积分用球体体积公式；第二个用柱面坐标求三重积分；第三个用圆的面积公式.

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{a} \left( -2\pi a^4 - 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r \left( \frac{1}{2} z^2 \Big|_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 \right) dr + \pi a^4 \right) \\
 &= \frac{1}{a} \left( -\pi a^4 - 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r \left( -\frac{1}{2} (a^2 - r^2) \right) dr \right) \\
 &= \frac{1}{a} \left( -\pi a^4 + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (a^2 r - r^3) dr \right) \\
 &= \frac{1}{a} \left( -\pi a^4 + 2\pi \cdot \left( \frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^a \right) = \frac{1}{a} \left( -\pi a^4 + 2\pi \cdot \left( \frac{a^2 a^2}{2} - \frac{a^4}{4} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{a} \left( -\pi a^4 + 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} \right) = -\frac{\pi}{2} a^3
 \end{aligned}$$

方法2：逐项计算：

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (z+a)^2 dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} axdydz + (z+a)^2 dx dy \\
 &= \iint_{\Sigma} x dy dz + \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} (z+a)^2 dx dy = I_1 + I_2.
 \end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \iint_{\Sigma} x dy dz = - \iint_{Dyz} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dy dz + \iint_{Dyz} -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dy dz \\
 &= -2 \iint_{Dyz} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dy dz,
 \end{aligned}$$

第一个负号是由于在  $x$  轴的正半空间区域  $\Sigma$  的上侧方向与  $x$  轴反向；第二个负号是由于被积函数在  $x$  取负数.

$D_{yz}$  为  $\Sigma$  在  $yoz$  平面上的投影域  $D_{yz} = \{(y, z) | y^2 + z^2 \leq a^2, z \leq 0\}$ ，用极坐标，得

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -2 \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr \\
 &= -2\pi \cdot -\frac{1}{2} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} d(a^2 - r^2) \\
 &= \pi \frac{2}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{2}{3} \pi (0 - a^3) = -\frac{2}{3} \pi a^3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} (z+a)^2 dxdy = \frac{1}{a} \iint_{D_{xy}} \left( a - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right)^2 dxdy \\
 &= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - r^2} - r^2) r dr \\
 &= \frac{2\pi}{a} \int_0^a (2a^2 r - 2ar\sqrt{a^2 - r^2} - r^3) dr \\
 &= \frac{2\pi}{a} \left[ \int_0^a 2a^2 r dr - 2a \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} dr - \int_0^a r^3 dr \right] \\
 &= \frac{2\pi}{a} \left[ a^2 r^2 \Big|_0^a - 2a \cdot \left( \frac{1}{3} a^3 \right) - \left( \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^a \right] \\
 &= \frac{2\pi}{a} \left( a^4 - \frac{2}{3} a^4 - \frac{a^4}{4} \right) = \frac{\pi}{6} a^3,
 \end{aligned}$$

其中  $D_{yz}$  为  $\Sigma$  在  $yoz$  平面上的投影域  $D_{yz} = \{(y, z) | y^2 + z^2 \leq a^2\}$ . 故  $I = I_1 + I_2 = -\frac{\pi}{2} a^3$ .

**【相关知识点】** 高斯公式：设空间闭区域  $\Omega$  是由分片光滑的闭曲面  $\Sigma$  所围成，函数

$P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$  在  $\Omega$  上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy,$$

或  $\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS,$

这里  $\Sigma$  是  $\Omega$  的整个边界曲面的外侧， $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$  是  $\Sigma$  在点  $(x, y, z)$  处的法向量的方向余弦. 上述两个公式叫做高斯公式.

### 七、(本题满分6分)

**【分析】** 这是  $n$  项和式的极限，和式极限通常的方法就两种：一、把和式放缩，利用夹逼准则求极限；二、把和式转换成定积分的定义形式，利用定积分求极限. 这道题，把两种方法结合到一起来求极限.

当各项分母均相同是  $n$  时， $n$  项和式

$$x_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n}$$

是函数  $\sin \pi x$  在  $[0, 1]$  区间上的一个积分和. 于是可由定积分  $\int_0^1 \sin \pi x dx$  求得极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

$$\text{【解析】} \text{ 由于 } \frac{\sin \frac{i\pi}{n+1}}{n+1} \leq \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n} \leq \frac{\sin \frac{i\pi}{n-i}}{n}, i=1, 2, \dots, n,$$

于是,  $\sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n+1} \leq \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n}.$

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi},$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi}$$

根据夹逼定理知,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}} = \frac{2}{\pi}.$

**【相关知识点】**夹逼准则: 若存在  $N$ , 当  $n > N$  时,  $y_n \leq x_n \leq z_n$ , 且有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a$ ,

则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ .

## 八、(本题满分5分)

**【解析】方法1:** 因正项数列  $\{a_n\}$  单调减少有下界0, 知极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在, 记为  $a$ , 则  $a_n \geq a$  且  $a \geq 0$ .

又  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  发散, 根据莱布尼茨判别法知, 必有  $a > 0$  (否则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  收敛).

又正项级数  $\{a_n\}$  单调减少, 有  $\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n \leq \left(\frac{1}{a+1}\right)^n$ , 而  $0 < \frac{1}{a+1} < 1$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+1}\right)^n$

收敛. 根据正项级数的比较判别法, 知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$  也收敛.

**方法2:** 同方法1, 可证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$ . 令  $b_n = \left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n+1} = \frac{1}{a+1} < 1,$$

根据根值判别法, 知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$  也收敛.

**【相关知识点】** 1. 交错级数的莱布尼茨判别法:

设交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  满足：

$$(1) u_n \geq u_{n+1}, n = 1, 2, \dots; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

则  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  收敛，且其和满足  $0 < \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n < u_1$ ，余项  $|r_n| < u_{n+1}$ .

反之，若交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  发散，只是满足条件(1)，则可以反证说明此级数一定不满足

条件(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ，所以有  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n > 0$ . (否则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  收敛)

2. 正项级数的比较判别法：

设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都是正项级数，且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = A$ ，则

(1) 当  $0 < A < +\infty$  时， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  同时收敛或同时发散；

(2) 当  $A = 0$  时，若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛，则  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛；若  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散，则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散；

(3) 当  $A = +\infty$  时，若  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛，则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛；若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散，则  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散.

3. 根值判别法：

设  $u_n > 0$ ，则当  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$  时，

$\begin{cases} < 1 \text{ 时,} \\ > 1 \text{ 时,} \\ = 1 \text{ 时,} \end{cases}$	$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ ， 此判别法无效.
--	---

### 九、(本题满分6分)

【解析】(1) 要证  $\exists x_0 \in (0, 1)$ ，使  $x_0 f(x_0) = \int_{x_0}^1 f(x) dx$ ；令  $\varphi(x) = xf(x) - \int_x^1 f(t) dt$ ，要证

$\exists x_0 \in (0, 1)$ ，使  $\varphi(x_0) = 0$ . 可以对  $\varphi(x)$  的原函数  $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$  使用罗尔定理：

$$\Phi(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}\Phi(1) &= \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx - \int_0^1 \left(\int_x^1 f(t) dt\right) dx \\ &\stackrel{\text{分部}}{=} \int_0^1 xf(x) dx - \left[ x \int_x^1 f(t) dt \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 xf(x) dx \right] = 0,\end{aligned}$$

又由  $f(x)$  在  $[0,1]$  连续  $\Rightarrow \varphi(x)$  在  $[0,1]$  连续,  $\Phi(x)$  在  $[0,1]$  连续, 在  $(0,1)$  可导. 根据罗尔定理,  $\exists x_0 \in (0,1)$ , 使  $\Phi'(x_0) = \varphi(x_0) = 0$ .

(2) 由  $\varphi'(x) = xf'(x) + f(x) + f(x) = xf'(x) + 2f(x) > 0$ , 知  $\varphi(x)$  在  $(0,1)$  内单调增, 故(1)中的  $x_0$  是唯一的.

**评注:** 若直接对  $\varphi(x)$  使用零点定理, 会遇到麻烦:

$$\varphi(0) = -\int_0^1 f(t) dt \leq 0, \varphi(1) = f(1) \geq 0.$$

当  $f(x) \equiv 0$  时, 对任何的  $x_0 \in (0,1)$  结论都成立;

当  $f(x) \neq 0$  时,  $\varphi(0) < 0$ , 但  $\varphi(1) \geq 0$ , 若  $\varphi(1) = 0$ , 则难以说明在  $(0,1)$  内存在  $x_0$ . 当直接对  $\varphi(x)$  用零点定理遇到麻烦时, 不妨对  $\varphi(x)$  的原函数使用罗尔定理.

**【相关知识点】** 1. 罗尔定理: 如果函数  $f(x)$  满足

- (1) 在闭区间  $[a,b]$  上连续;
- (2) 在开区间  $(a,b)$  内可导;
- (3) 在区间端点处的函数值相等, 即  $f(a) = f(b)$ ,

那么在  $(a,b)$  内至少有一点  $\xi$  ( $a < \xi < b$ ), 使得  $f'(\xi) = 0$ .

## 十、(本题满分6分)

**【解析】** 经正交变换化二次型为标准形, 二次型矩阵与标准形矩阵既合同又相似. 由题设知,

二次曲面方程左端二次型对应矩阵为  $A = \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 则存在正交矩阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \underset{\cong}{\equiv} B,$$

即  $A$  与  $B$  相似.

由相似矩阵有相同的特征值, 知矩阵  $A$  有特征值 0, 1, 4. 从而,

$$\begin{cases} 1+a+1=0+1+4, \\ |A|=-(b-1)^2=|B|=0. \end{cases} \Rightarrow a=3, b=1.$$

从而,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

当  $\lambda_1 = 0$  时,

$$(0E - A) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1行} \times (-1) \text{ 分别加到2,3行}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是得方程组  $(0E - A)x = 0$  的同解方程组为  $\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_2 = 0. \end{cases}$

$r(0E - A) = 2$ , 可知基础解系的个数为  $n - r(0E - A) = 3 - 2 = 1$ , 故有 1 个自由未知量,

选  $x_1$  为自由未知量, 取  $x_1 = 1$ , 解得基础解系为  $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$ .

当  $\lambda_2 = 1$  时,

$$\begin{aligned} (E - A) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{3} \times (-1) \text{ 加到2行}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{1行} \times (-1) \text{ 加到2行}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{2,3行互换}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

于是得方程组  $(E - A)x = 0$  的同解方程组为  $\begin{cases} -x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$

$r(E - A) = 2$ , 可知基础解系的个数为  $n - r(E - A) = 3 - 2 = 1$ , 故有 1 个自由未知量,

选  $x_1$  为自由未知量, 取  $x_1 = 1$ , 解得基础解系为  $\alpha_2 = (1, -1, 1)^T$ .

当  $\lambda_3 = 4$  时,

$$(4E - A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1,2行互换}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{1行的3, } (-1) \text{ 倍分别加到2, 3行}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{2行加到3行}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

于是得方程组  $(4E - A)x = 0$  的同解方程组为  $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

$r(4E - A) = 2$ , 可知基础解系的个数为  $n - r(4E - A) = 3 - 2 = 1$ , 故有1个自由未知量,

选  $x_2$  为自由未知量, 取  $x_2 = 2$ , 解得基础解系为  $\alpha_3 = (1, 2, 1)^T$ .

由实对称矩阵不同特征值对应的特征向量相互正交, 可知  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  相互正交.

将  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  单位化, 得

$$\eta_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,$$

$$\eta_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T,$$

$$\eta_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T.$$

$$\text{因此所求正交矩阵为 } P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

**评注:** 利用相似的必要条件求参数时,  $\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$  是比较好用的一个关系式. 亦可用

$|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$  比较  $\lambda$  同次方的系数来求参数.

**【相关知识点】** 1. 特征值的性质:  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

2. 相似矩阵的性质: 若矩阵  $A$  与  $B$  相似, 则  $|A| = |B|$ .

## 十一、(本题满分4分)

【解析】用线性无关的定义证明.

设有常数  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ , 使得

$$\lambda_0\alpha + \lambda_1A\alpha + \dots + \lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha = 0. \quad (*)$$

两边左乘  $A^{k-1}$ , 则有

$$A^{k-1}(\lambda_0\alpha + \lambda_1A\alpha + \dots + \lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha) = 0,$$

$$\text{即 } \lambda_0A^{k-1}\alpha + \lambda_1A^k\alpha + \dots + \lambda_{k-1}A^{2(k-1)}\alpha = 0.$$

上式中因  $A^k\alpha = 0$ , 可知  $A^{k+1}\alpha = \dots = A^{2(k-1)}\alpha = 0$ , 代入上式可得  $\lambda_0A^{k-1}\alpha = 0$ .

由题设  $A^{k-1}\alpha \neq 0$ , 所以  $\lambda_0 = 0$ .

将  $\lambda_0 = 0$  代入 (\*), 有  $\lambda_1A\alpha + \dots + \lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha = 0$ .

$$\text{两边左乘 } A^{k-2}, \text{ 则有 } A^{k-2}(\lambda_1A\alpha + \dots + \lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha) = 0,$$

$$\text{即 } \lambda_1A^{k-1}\alpha + \dots + \lambda_{k-1}A^{2k-3}\alpha = 0.$$

同样, 由  $A^k\alpha = 0$ ,  $A^{k+1}\alpha = \dots = A^{2(k-1)}\alpha = 0$ , 可得  $\lambda_1A^{k-1}\alpha = 0$ .

由题设  $A^{k-1}\alpha \neq 0$ , 所以  $\lambda_1 = 0$ .

类似地可证明  $\lambda_2 = \dots = \lambda_{k-1} = 0$ , 因此向量组  $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$  是线性无关的.

**【相关知识点】** 向量组线性相关和线性无关的定义: 存在一组不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_m$  使

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$ , 则称  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关; 否则, 称  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关.

## 十二、(本题满分5分)

【解析】(II) 的通解为

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_n\xi_n,$$

其中,  $\xi_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1,2n})^T$ ,  $\xi_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2,2n})^T$ ,  $\dots$ ,  $\xi_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{n,2n})^T$ ,

$k_1, k_2, \dots, k_n$  为任意常数.

理由: 可记方程组 (I)  $A_{n \times 2n}X = 0$ , (II)  $B_{n \times 2n}Y = 0$ , (I), (II) 的系数矩阵分别记为  $A, B$ , 由

于  $B$  的每一行都是  $A_{n \times 2n}X = 0$  的解, 故  $AB^T = 0$ .  $B^T$  的列是 (I) 的基础解系, 故由基础解系

的定义知,  $B^T$  的列向量是线性无关的, 因此  $r(B) = n$ . 故基础解系所含向量的个数

$n = 2n - r(A)$ , 得  $r(A) = 2n - n = n$ . 因此,  $A$  的行向量线性无关.

对  $AB^T = 0$  两边取转置, 有  $(AB^T)^T = BA^T = 0$ , 则有  $A^T$  的列向量, 即  $A$  的行向量是  $BY = 0$  的线性无关的解.

又  $r(B) = n$ , 故  $BY = 0$  基础解系所含向量的个数应为  $2n - r(B) = 2n - n = n$ , 恰好等于  $A$  的行向量个数. 故  $A$  的行向量组是  $BY = 0$  的基础解系, 其通解为

$$k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \cdots + k_n \xi_n,$$

其中,  $\xi_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1,2n})^T$ ,  $\xi_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2,2n})^T, \dots, \xi_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{n,2n})^T$ ,

$k_1, k_2, \dots, k_n$  为任意常数.

### 十三、(本题满分6分)

【分析】把  $X - Y$  看成一个随机变量, 根据独立正态随机变量的线性组合必然为正态分布的性质, 可以知道  $X - Y \sim N(0,1)$ , 这样可以简化整题的计算.

【解析】令  $Z = X - Y$ , 由于  $X, Y$  相互独立, 且都服从正态分布, 因此  $Z$  也服从正态分布, 且

$$E(Z) = E(X) - E(Y) = 0, D(Z) = D(X) + D(Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

于是,  $Z = X - Y \sim N(0,1)$ .

$$\begin{aligned} D|X - Y| &= D(|Z|) = E(|Z|^2) - (E|Z|)^2 \\ &= D(Z) + (E(Z))^2 - (E|Z|)^2 = 1 - (E|Z|)^2. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} E|Z| &= \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} d\left(\frac{z^2}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[ -e^{-\frac{z^2}{2}} \right]_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \end{aligned}$$

故  $D|X - Y| = 1 - \frac{2}{\pi}$ .

【相关知识点】1. 对于随机变量  $X$  与  $Y$  均服从正态分布, 则  $X$  与  $Y$  的线性组合亦服从正态分布.

若  $X$  与  $Y$  相互独立, 由数学期望和方差的性质, 有

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c,$$

$$D(aX + bY + c) = a^2 D(X) + b^2 D(Y),$$

其中  $a, b, c$  为常数.

2. 方差的定义:  $DX = EX^2 - (EX)^2$ .

3. 随机变量函数期望的定义: 若  $Y = g(X)$ , 则  $EY = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ .

#### 十四、(本题满分4分)

**【解析】**由题知:  $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(3.4, 6^2)$ ,  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 各样本相互独立, 根据独立

正态随机变量的性质,  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ . 其中  $\mu = E\bar{X}_n = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)$ ,

$$\sigma^2 = D\bar{X}_n = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right).$$

根据期望和方差的性质,

$$\begin{aligned}\mu &= E\bar{X}_n = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = \frac{3.4n}{n} = 3.4, \\ \sigma^2 &= D\bar{X}_n = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{6^2 n}{n^2} = \frac{6^2}{n}.\end{aligned}$$

所以,  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N(3.4, \frac{6^2}{n})$ . 把  $\bar{X}_n$  标准化,  $U = \frac{\bar{X}_n - 3.4}{6/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ .

从而,

$$\begin{aligned}P\{1.4 < \bar{X} < 5.4\} &= P\{1.4 - 3.4 < \bar{X} - 3.4 < 5.4 - 3.4\} \\ &= P\{-2 < \bar{X} - 3.4 < 2\} = P\{|\bar{X} - 3.4| < 2\} \\ &= P\left\{\frac{|\bar{X} - 3.4|}{6} \sqrt{n} < \frac{2\sqrt{n}}{6}\right\} = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - 1 \geq 0.95,\end{aligned}$$

故  $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \geq 0.975$ , 查表得到  $\frac{\sqrt{n}}{3} \geq 1.96$ , 即  $n \geq (1.96 \times 3)^2 \approx 34.57$ , 所以  $n$  至少应取 35.

**【相关知识点】**1. 对于随机变量  $X$  与  $Y$  均服从正态分布, 则  $X$  与  $Y$  的线性组合亦服从正态分布.

若  $X$  与  $Y$  相互独立, 由数学期望和方差的性质, 有

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c,$$

$$D(aX + bY + c) = a^2 D(X) + b^2 D(Y),$$

其中  $a, b, c$  为常数.

2. 若  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $\frac{Z - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

### 十五、(本题满分4分)

【解析】设该次考试的考生成绩为  $X$ , 则  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 设  $\bar{X}$  为从总体  $X$  抽取的样本容量为  $n$  的样本均值,  $S$  为样本标准差, 则在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下建立检验假设:

$$H_0: \mu = \mu_0 = 70, H_1: \mu \neq 70,$$

由于  $\sigma^2$  未知, 故用  $t$  检验.

选取检验统计量,

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} = \frac{\bar{X} - 70}{S} \sqrt{36}$$

在  $\mu = \mu_0 = 70$  时,  $X \sim N(70, \sigma^2)$ ,  $T \sim t(35)$ .

选择拒绝域为  $R = \{|T| \geq \lambda\}$ , 其中  $\lambda$  满足:

$$P\{|T| \geq \lambda\} = 0.05, \text{ 即 } P\{|T| \leq \lambda\} = 0.975, \lambda = t_{0.975}(35) = 2.0301.$$

由  $n = 36, \bar{x} = 66.5, \mu_0 = 70, s = 15$ , 可算得统计量  $T$  的值:

$$|t| = \frac{|66.5 - 70|}{15} \sqrt{36} = 1.4 < 2.0301.$$

所以接受假设  $H_0: \mu = 70$ , 即在显著性水平 0.05 下, 可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.