



1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题(本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 满分 15 分, 把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = 8$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设一平面经过原点及点 $(6, -3, 2)$, 且与平面 $4x - y + 2z = 8$ 垂直, 则此平面方程为
 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 微分方程 $y'' - 2y' + 2y = e^x$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在 $A(1, 0, 1)$ 点处沿 A 点指向 $B(3, -2, 2)$ 点方向的方向导数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设 A 是 4×3 矩阵, 且 A 的秩 $r(A) = 2$, 而 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $r(AB) = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题(本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 满分 15 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 已知 $\frac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分, 则 a 等于 ()

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

(2) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则 ()

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
(C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

(3) 设 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 常数 $\lambda \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n \tan \frac{\lambda}{n}) a_{2n}$ ()

- (A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 收敛性与 λ 有关

(4) 设 $f(x)$ 有连续的导数, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f(t) dt$, 且当 $x \rightarrow 0$

时, $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 k 等于 ()



(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(5) 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于 ()

(A) $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$

(B) $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$

(C) $(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$

(D) $(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$

三、(本题共 2 小题, 每小题 5 分, 满分 10 分.)

(1) 求心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 的全长, 其中 $a > 0$ 是常数.

(2) 设 $x_1 = 10$, $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求此极限.

四、(本题共 2 小题, 每小题 6 分, 满分 12 分.)

(1) 计算曲面积分 $\iint_S (2x+z)dydz + zdxdy$, 其中 S 为有向曲面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$), 其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

(2) 设变换 $\begin{cases} u = x - 2y, \\ u = x + ay \end{cases}$ 可把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 求常数 a , 其中 $z = z(x, y)$ 有二阶连续的偏导数.

五、(本题满分 7 分)

求级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)2^n}$ 的和.

六、(本题满分 7 分)

设对任意 $x > 0$, 曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于

$\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$, 求 $f(x)$ 的一般表达式.

七、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且满足条件 $|f(x)| \leq a$, $|f''(x)| \leq b$, 其中 a, b 都是非负常数, c 是 $(0, 1)$ 内任一点, 证明 $|f'(c)| \leq 2a + \frac{b}{2}$.

八、(本题满分 6 分)



设 $A = E - \xi\xi^T$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵, ξ 是 n 维非零列向量, ξ^T 是 ξ 的转置, 证明:

- (1) $A^2 = A$ 的充要条件是 $\xi^T \xi = 1$; (2) 当 $\xi^T \xi = 1$ 时, A 是不可逆矩阵.

九、(本题满分 8 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2.

- (1) 求参数 c 及此二次型对应矩阵的特征值;
(2) 指出方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示何种二次曲面.

十、填空题(本题共 2 小题, 每小题 3 分, 满分 6 分.)

- (1) 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1% 和 2%, 现从由 A 和 B 的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件, 发现是次品, 则该次品属 A 生产的概率是_____.
- (2) 设 ξ 、 η 是两个相互独立且均服从正态分布 $N(0, (\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$ 的随机变量, 则随机变量
 $|\xi - \eta|$ 的数学期望 $E(|\xi - \eta|) = \text{_____}$.

十一、(本题满分 6 分.)

设 ξ 、 η 是相互独立且服从同一分布的两个随机变量, 已知 ξ 的分布律为 $P\{\xi = i\} = \frac{1}{3}$,

$i=1, 2, 3$, 又设 $X = \max(\xi, \eta)$, $Y = \min(\xi, \eta)$.

- (1) 写出二维随机变量 (X, Y) 的分布律:

$X \backslash Y$	1	2	3
1			
2			
3			

- (2) 求随机变量 X 的数学期望 $E(X)$.



1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 满分 15 分, 把答案填在题中横线上.)

(1) 【答案】 $\ln 2$

【解析】这是 1^∞ 型未定式求极限.

方法一: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a} \cdot \frac{3ax}{x-a}}$,

令 $\frac{3a}{x-a} = t$, 则当 $x \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow 0$,

则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$,

即 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3ax}{x-a}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3a}{1}} = e^{3a}$.

由题设有 $e^{3a} = 8$, 得 $a = \frac{1}{3} \ln 8 = \ln 2$.

方法二: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{2a}{x}}{1 - \frac{a}{x}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{2a}{x}\right)^x}{\left(1 - \frac{a}{x}\right)^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2a}{x}\right)^{\frac{x}{2a} \cdot 2a}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}(-a)}} = \frac{e^{2a}}{e^{-a}} = e^{3a}$,

由题设有 $e^{3a} = 8$, 得 $a = \frac{1}{3} \ln 8 = \ln 2$.

(2) 【答案】 $2x + 2y - 3z = 0$

【解析】方法一: 所求平面过原点 O 与 $M_0(6, -3, 2)$, 其法向量 $\vec{n} \perp \overrightarrow{OM_0} = \{6, -3, 2\}$; 平面垂直于已知平面 $4x - y + 2z = 8$, 它们的法向量也互相垂直: $\vec{n} \perp \vec{n}_0 = \{4, -1, 2\}$;

由此, $\vec{n} // \overrightarrow{OM_0} \times \vec{n}_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$.

取 $\vec{n} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, 则所求的平面方程为 $2x + 2y - 3z = 0$.

方法二: 所求平面即为过原点, 与两个不共线的向量(一个是从原点到点 $M_0(6, -3, 2)$ 的向量

$\overrightarrow{OM_0} = \{6, -3, 2\}$, 另一是平面 $4x - y + 2z = 8$ 的法向量 $\vec{n}_0 = \{4, -1, 2\}$)平行的平面,



即 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, 即 $2x + 2y - 3z = 0$.

(3) 【答案】 $e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1)$

【解析】微分方程 $y'' - 2y' + 2y = e^x$ 所对应的齐次微分方程的特征方程为

$$r^2 - 2r + 2 = 0, \text{ 解之得 } r_{1,2} = 1 \pm i. \text{ 故对应齐次微分方程的解为 } y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

由于非齐次项 $e^{\alpha x}, \alpha = 1$ 不是特征根, 设所给非齐次方程的特解为 $y^*(x) = ae^x$, 代入

$y'' - 2y' + 2y = e^x$ 得 $a = 1$ (也不难直接看出 $y^*(x) = e^x$), 故所求通解为

$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^x = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1).$$

【相关知识点】① 二阶线性非齐次方程解的结构: 设 $y^*(x)$ 是二阶线性非齐次方程

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的一个特解. $Y(x)$ 是与之对应的齐次方程

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的通解, 则 $y = Y(x) + y^*(x)$ 是非齐次方程的通解.

② 二阶常系数线性齐次方程通解的求解方法: 对于求解二阶常系数线性齐次方程的通解 $Y(x)$, 可用特征方

程法求解: 即 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 中的 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 均是常数, 方程变为 $y'' + py' + qy = 0$. 其特征方

程写为 $r^2 + pr + q = 0$, 在复数域内解出两个特征根 r_1, r_2 :

分三种情况:

(1) 两个不相等的实数根 r_1, r_2 , 则通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$;

(2) 两个相等的实数根 $r_1 = r_2$, 则通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$;

(3) 一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, 则通解为 $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$. 其中 C_1, C_2 为常数.

③ 对于求解二阶线性非齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的一个特解 $y^*(x)$, 可用待定系数法, 有结论如下:

如果 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$, 则二阶常系数线性非齐次方程具有形如 $y^*(x) = x^k Q_m(x)e^{\lambda x}$

的特解, 其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 相同次数的多项式, 而 k 按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取 0、1 或 2.

如果 $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos \omega x + P_n(x)\sin \omega x]$, 则二阶常系数非齐次线性微分方程



$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的特解可设为

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$ 与 $R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式, $m = \max\{l, n\}$, 而 k 按 $\lambda + i\omega$ (或 $\lambda - i\omega$) 不是特征方程的根、或是特征方程的单根依次取为 0 或 1.

(4) 【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】先求方向 \vec{l} 的方向余弦和 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, 然后按方向导数的计算公式

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \text{ 求出方向导数.}$$

【解析】因为 \vec{l} 与 \overrightarrow{AB} 同向, 为求 \vec{l} 的方向余弦, 将 $\overrightarrow{AB} = \{3-1, -2-0, 2-1\} = \{2, -2, 1\}$ 单位化, 即得

$$\vec{l} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{3} \{2, -2, 1\} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}.$$

将函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 分别对 x, y, z 求偏导数得

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_A &= \left. \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \right|_{(1,0,1)} = \frac{1}{2}, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_A &= \left. \frac{y}{(x + \sqrt{y^2 + z^2})\sqrt{y^2 + z^2}} \right|_{(1,0,1)} = 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_A &= \left. \frac{z}{(x + \sqrt{y^2 + z^2})\sqrt{y^2 + z^2}} \right|_{(1,0,1)} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_A &= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_A \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_A \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_A \cos \gamma \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 0 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(5) 【答案】2

【解析】因为 $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$, 所以矩阵 B 可逆, 故 $r(AB) = r(A) = 2$.

【相关知识点】 $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$. 若 A 可逆, 则



$$r(AB) \leq r(B) = r(EB) = r[A^{-1}(AB)] \leq r(AB).$$

从而 $r(AB) = r(B)$, 即可逆矩阵与矩阵相乘不改变矩阵的秩.

二、选择题(本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 满分 15 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 【答案】(D)

【解析】由于存在函数 $u(x, y)$, 使得 $du = \frac{(x+ay)dx}{(x+y)^2} + \frac{ydy}{(x+y)^2}$,

由可微与可偏导的关系, 知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x+ay}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{(x+y)^2},$$

分别对 y, x 求偏导数, 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{a(x+y)^2 - (x+ay) \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{(a-2)x - ay}{(x+y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{-2y}{(x+y)^3}.$$

由于 $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ 与 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 连续, 所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, 即

$$\frac{(a-2)x - ay}{(x+y)^3} = \frac{-2y}{(x+y)^3} \Rightarrow a = 2,$$

故应选(D).

(2) 【答案】(B)

【解析】因为 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1 > 0$, 所以由函数极限的局部保号性可知, 在 $x = 0$

的空心领域内有 $\frac{f''(x)}{|x|} > 0$, 即 $f''(x) > 0$, 所以 $f'(x)$ 为单调递增.

又由 $f'(0) = 0$, $f'(x)$ 在 $x = 0$ 由负变正, 由极值的第一充分条件, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 即 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值. 应选(B).

【相关知识点】极限的局部保号性: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. 若 $A > 0$ (或 $A < 0$) $\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当



$0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

(3) 【答案】(A)

【解析】若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 也收敛, 且当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \tan \frac{\lambda}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tan \frac{\lambda}{n}}{\frac{n}{\lambda}} \cdot \lambda = \lambda.$$

用比较判别法的极限形式, 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \tan \frac{\lambda}{n} a_{2n}}{a_{2n}} = \lambda > 0.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛, 所以 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \tan \frac{\lambda}{n} a_{2n}$ 也收敛, 所以原级数绝对收敛, 应选(A).

【相关知识点】正项级数比较判别法的极限形式:

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = A$, 则

(1) 当 $0 < A < +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散;

(2) 当 $A = 0$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(3) 当 $A = +\infty$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

(4) 【答案】(C)

【解析】用洛必达法则.

由题可知 $F(x) = x^2 \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t^2 f(t) dt$,

对该积分上限函数求导数, 得

$$F'(x) = 2x \int_0^x f(t) dt + x^2 f(x) - x^2 f(x) = 2x \int_0^x f(t) dt,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \int_0^x f(t) dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x f(t) dt}{x^{k-1}}$

洛必达 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}.$



因为 $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，且 $f'(0) \neq 0$ ，所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}$ 为常数，即 $k=3$ 时有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}} = f'(0) \neq 0,$$

故应选(C).

【相关知识点】 设在同一个极限过程中， $\alpha(x), \beta(x)$ 为无穷小且存在极限 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l$ ，

(1) 若 $l \neq 0$ ，称 $\alpha(x), \beta(x)$ 在该极限过程中为同阶无穷小；

(2) 若 $l=1$ ，称 $\alpha(x), \beta(x)$ 在该极限过程中为等价无穷小，记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ；

(3) 若 $l=0$ ，称在该极限过程中 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小，记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不存在(不为 ∞)，称 $\alpha(x), \beta(x)$ 不可比较.

(5) 【答案】(D)

【解析】 可直接展开计算，

$$\begin{aligned} D &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= a_1 a_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1 b_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} = (a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4), \end{aligned}$$

所以选(D).

三、(本题共 2 小题, 每小题 5 分, 满分 10 分.)

(1) 【解析】由极坐标系下的弧微分公式得

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta = a \cdot \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta \\ &= a \cdot \sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta = 2a \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta. \end{aligned}$$

由于 $r = r(\theta) = a(1 + \cos \theta)$ 以 2π 为周期，因而 θ 的范围是 $\theta \in [0, 2\pi]$.

又由于 $r(\theta) = r(-\theta)$ ，心形线关于极轴对称。由对称性，

$$s = 2 \int_0^\pi ds = 4a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a \left[\sin \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi = 8a.$$



(2) 【解析】用单调有界准则.

由题设显然有 $x_n > 0$, 数列 $\{x_n\}$ 有下界.

证明 x_n 单调减: 用归纳法. $x_2 = \sqrt{6+x_1} = \sqrt{6+10} = 4 < x_1$; 设 $x_n < x_{n-1}$, 则

$$x_{n+1} = \sqrt{6+x_n} < \sqrt{6+x_{n-1}} = x_n.$$

由此, x_n 单调减. 由单调有界准则, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, (a \geq 0)$, 在恒等式 $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ 两边取极限, 即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{6+x_n} \Rightarrow a = \sqrt{6+a},$$

解之得 $a = 3$ ($a = -2$ 舍去).

【相关知识点】 1. 单调有界准则: 单调有界数列必有极限.

2. 收敛数列的保号性推论: 如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \geq 0$ (或 $x_n \leq 0$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 那么 $a \geq 0$ (或 $a \leq 0$).

四、(本题共 2 小题, 每小题 6 分, 满分 12 分.)

(1) 【分析一】见下图所示, S 在 xOy 平面与 yOz 平面上的投影均易求出, 分别为

$$D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 1;$$

$$D_{yz} : -1 \leq y \leq 1, y^2 \leq z \leq 1, \text{ 或 } 0 \leq z \leq 1, -\sqrt{z} \leq y \leq \sqrt{z}.$$

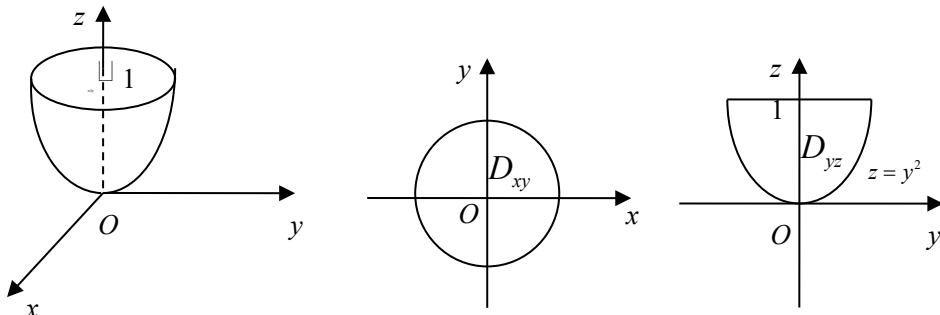


图 1

求 $\iint_S z dxdy$, 自然投影到 xOy 平面上. 求 $\iint_S (2x+z) dydz$ 时, 若投影到 xOy 平面上, 被积函数较简单且可利用对称性.

【分析二】 令 $P(x, y, z) = 2x + z, Q(x, y, z) = 0, R(x, y, z) = z$, 则 $I = \iint_S P dydz + R dxdy$.

这里, $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2 + 1 = 3$, 若用高斯公式求曲面积分 I , 则较简单. 因 S 不是封闭曲面, 故要添加辅助



曲面.

【解析】方法一：均投影到平面 xOy 上，则

$$I = \iint_S (2x + z) dy dz + z dx dy = \iint_{D_{xy}} [(2x + z)(-\frac{\partial z}{\partial x}) + (x^2 + y^2)] dx dy,$$

其中 $z = x^2 + y^2$, $D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 1$.

把 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ 代入，得

$$I = \iint_{D_{xy}} -4x^2 dx dy - \iint_{D_{xy}} 2x(x^2 + y^2) dx dy + \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy,$$

由对称性得

$$\iint_{D_{xy}} 2x(x^2 + y^2) dx dy = 0, \quad \iint_{D_{xy}} 4x^2 dx dy = 2 \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy,$$

所以 $I = - \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy.$

利用极坐标变换有

$$I = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = -2\pi \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 = -\frac{\pi}{2}.$$

方法二：分别投影到 yOz 平面与 xOy 平面.

投影到 yOz 平面时 S 要分为前半部分 $S_1 : x = \sqrt{z - y^2}$ 与后半部分 $S_2 : x = -\sqrt{z - y^2}$

(见图 1)，则

$$I = \iint_{S_1} (2x + z) dy dz + \iint_{S_2} (2x + z) dy dz + \iint_S z dx dy.$$

由题设，对 S_1 法向量与 x 轴成钝角，而对 S_2 法向量与 x 轴成锐角. 将 I 化成二重积分得

$$\begin{aligned} I &= - \iint_{D_{yz}} (2\sqrt{z - y^2} + z) dy dz + \iint_{D_{yz}} (-2\sqrt{z - y^2} + z) dy dz + \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= -4 \iint_{D_{yz}} \sqrt{z - y^2} dy dz + \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \iint_{D_{yz}} \sqrt{z-y^2} dy dz &= \int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^1 \sqrt{z-y^2} dz = \int_{-1}^1 \frac{2}{3} (z-y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{z=y^2}^{z=1} dy \\ &= \frac{4}{3} \int_0^1 (1-y^2)^{\frac{3}{2}} dy \xrightarrow{y=\sin t} \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

或 $\iint_{D_{yz}} \sqrt{z-y^2} dy dz = \int_0^1 dz \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \sqrt{z-y^2} dy = \int_0^1 \frac{1}{2} \pi (\sqrt{z})^2 dz = \frac{\pi}{4}.$

(这里 $\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \sqrt{z-y^2} dy$ 是半径为 \sqrt{z} 的圆面积的一半.)

$$\iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\pi}{2} \text{ (同方法一).}$$

因此, $I = -4 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$

方法三: 添加辅助面 $S_1 : z = 1(x^2 + y^2 \leq 1)$, 法方向朝下, 则

$$\iint_{S_1} (2x+z) dy dz + z dx dy = \iint_{S_1} dx dy = - \iint_D 1 dx dy = -\pi,$$

其中 D 是 S_1 在平面 xy 的投影区域: $x^2 + y^2 \leq 1$.

S 与 S_1 即 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 1$ 围成区域 Ω , S 与 S_1 的法向量指向 Ω 内部, 所以在 Ω 上满足高斯公式的条件, 所以

$$\begin{aligned} \iint_{S \cup S_1} (2x+z) dy dz + z dx dy &= -3 \iiint_{\Omega} dV \\ &= -3 \int_0^1 dz \iint_{D(z)} dx dy = -3 \int_0^1 \pi z dz = -\frac{3\pi}{2}, \end{aligned}$$

其中, $D(z)$ 是圆域: $x^2 + y^2 \leq z$, 面积为 πz .

因此, $I = -\frac{3}{2}\pi - \iint_{S_1} (2x+z) dy dz + z dx dy = -\frac{3}{2}\pi - (-\pi) = -\frac{\pi}{2}.$

(2) 【解析】由多元复合函数求导法则, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -2 \frac{\partial z}{\partial u} + a \frac{\partial z}{\partial v},$$



所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= -2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a-2) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) + a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= -2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + a \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4a \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

代入 $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 并整理得

$$6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (10+5a) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + (6+a-a^2) \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$$

于是, 令 $6+a-a^2=0$ 得 $a=3$ 或 $a=-2$.

$a=-2$ 时, $10+5a=0$, 故舍去, $a=3$ 时, $10+5a \neq 0$, 因此仅当 $a=3$ 时化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}=0$.

【相关知识点】多元复合函数求导法则: 若 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 在点 (x,y) 处偏导数存在, 函数

$z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数, 则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在点 (x,y) 处的偏导数存在, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

五、(本题满分 7 分)

【解析】先将级数分解,



$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2} \cdot n} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n}. \end{aligned}$$

令 $A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2} \cdot n}, \quad A_2 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n},$

则 $A = A_1 - A_2.$

由熟知 $\ln(1+x)$ 幂级数展开式, 即 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n (-1 < x \leq 1)$, 得

$$A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2} \cdot n} = -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{4} \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \ln 2,$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} = -\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \ln 2 - \frac{5}{8}, \end{aligned}$$

因此, $A = A_1 - A_2 = \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln 2.$

六、(本题满分 7 分)

【解析】曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线方程为

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x).$$

令 $X = 0$ 得 y 轴上的截距 $Y = f(x) - f'(x)x$. 由题意,

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = f(x) - f'(x)x.$$

为消去积分, 两边乘以 x , 得 $\int_0^x f(t)dt = xf(x) - f'(x)x^2, \quad (*)$

将恒等式两边对 x 求导, 得

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 2xf'(x) - x^2 f''(x),$$

即 $xf''(x) + f'(x) = 0.$

在(*)式中令 $x = 0$ 得 $0 = 0$ 自然成立. 故不必再加附加条件. 就是说 $f(x)$ 是微分方程

$xy'' + y' = 0$ 的通解. 下面求解微分方程 $xy'' + y' = 0$.



方法一： $xy'' + y' = 0 \Rightarrow (xy')' = 0 \Rightarrow xy' = C_1$,

因为 $x > 0$, 所以 $y' = \frac{C_1}{x}$,

两边积分得 $y = f(x) = C_1 \ln x + C_2$.

方法二：令 $y' = P(x)$, 则 $y'' = P'$, 解 $xP' + P = 0$ 得 $y' = P = \frac{C_1}{x}$.

再积分得 $y = f(x) = C_1 \ln x + C_2$.

七、(本题满分 8 分)

【解析】由于问题涉及到 f, f' 与 f'' 的关系, 自然应当利用泰勒公式, 而且应在点 c 展开:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2, \xi \text{ 在 } c \text{ 与 } x \text{ 之间.}$$

分别取 $x = 0, 1$ 得

$$f(0) = f(c) + f'(c)(0 - c) + \frac{f''(\xi_0)}{2!}(0 - c)^2, \xi_0 \text{ 在 } c \text{ 与 } 0 \text{ 之间,}$$

$$f(1) = f(c) + f'(c)(1 - c) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(1 - c)^2, \xi_1 \text{ 在 } c \text{ 与 } 1 \text{ 之间,}$$

两式相减得 $f(1) - f(0) = f'(c) + \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)(1 - c)^2 - f''(\xi_0)c^2]$,

于是 $f'(c) = f(1) - f(0) - \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)(1 - c)^2 - f''(\xi_0)c^2]$.

由此 $|f'(c)| \leq |f(1)| + |f(0)| + \frac{1}{2!}|f''(\xi_1)|(1 - c)^2 + \frac{1}{2!}|f''(\xi_0)|c^2$
 $\leq 2a + \frac{1}{2}b[(1 - c)^2 + c^2] < 2a + \frac{b}{2}$.

八、(本题满分 6 分)

【解析】(1) 因为 $A = E - \xi\xi^T$, $\xi^T \xi$ 为数, $\xi\xi^T$ 为 n 阶矩阵, 所以

$$A^2 = (E - \xi\xi^T)(E - \xi\xi^T) = E - 2\xi\xi^T + \xi(\xi^T \xi)\xi^T = E - (2 - \xi^T \xi)\xi\xi^T,$$

因此, $A^2 = A \Leftrightarrow E - (2 - \xi^T \xi)\xi\xi^T = E - \xi\xi^T \Leftrightarrow (\xi^T \xi - 1)\xi\xi^T = 0$

因为 ξ 是非零列向量, 所以 $\xi\xi^T \neq 0$, 故 $A^2 = A \Leftrightarrow \xi\xi^T - 1 = 0$, 即 $\xi\xi^T = 1$.

(2) 反证法. 当 $\xi\xi^T = 1$ 时, 由(1)知 $A^2 = A$, 若 A 可逆, 则 $A = A^{-1}A^2 = A^{-1}A = E$.

与已知 $A = E - \xi\xi^T \neq E$ 矛盾, 故 A 是不可逆矩阵.



九、(本题满分 8 分)

【解析】(1) 此二次型对应的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix}.$$

因为二次型秩 $r(f) = r(A) = 2$, 由

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -3 \\ 3 & -6 & c \end{pmatrix}$$

可得 $c = 3$. 再由 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda - 5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

求得二次型矩阵的特征值为 0, 4, 9.

(2) 因为二次型经正交变换可化为 $4y_2^2 + 9y_3^2$, 故

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1, \text{ 即 } 4y_2^2 + 9y_3^2 = 1.$$

表示椭圆柱面.

【相关知识点】主轴定理: 对于任一个 n 元二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T Ax,$$

存在正交变换 $x = Qy$ (Q 为 n 阶正交矩阵), 使得

$$x^T Ax = y^T (Q^T A Q)y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是实对称矩阵 A 的 n 个特征值, Q 的 n 个列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 A 对应于特征值

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的标准正交特征向量.

十、填空题(本题共 2 小题, 每小题 3 分, 满分 6 分.)

(1) 【答案】 $\frac{3}{7}$

【解析】设事件 C = “抽取的产品是次品”, 事件 D = “抽取的产品是工厂 A 生产的”, 则事件 \bar{D} 表示“抽取的产品是工厂 B 生产的”, 依题意有

$$P(D) = 0.60, P(\bar{D}) = 0.40, P(C | D) = 0.01, P(C | \bar{D}) = 0.02.$$



应用贝叶斯公式可以求得条件概率 $P(D|C)$:

$$P(D|C) = \frac{P(D)P(C|D)}{P(D)P(C|D) + P(\bar{D})P(C|\bar{D})} = \frac{0.6 \times 0.01}{0.6 \times 0.01 + 0.4 \times 0.02} = \frac{3}{7}.$$

【相关知识点】 贝叶斯公式：设试验 E 的样本空间为 S . A 为 E 的事件, B_1, B_2, \dots, B_n 为 S 的一个划分, 且

$P(A) > 0, P(B_i) > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 则

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)}, i=1, 2, \dots, n. \quad (*)$$

(*) 式称为贝叶斯公式.

(2) 【答案】 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

【解析】 由于 ξ 与 η 相互独立且均服从正态分布 $N(0, (\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$, 因此它们的线性函数 $U = \xi - \eta$ 服从正

态分布, 且

$$EU = E(\xi - \eta) = E\xi - E\eta = 0,$$

$$DU = D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

所以有 $U \sim N(0, 1)$.

代入正态分布的概率密度公式, 有

$$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

应用随机变量函数的期望公式有

$$E(|\xi - \eta|) = E(|U|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |u| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2 \int_0^{+\infty} u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

由凑微分法, 有

$$E(|\xi - \eta|) = -2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} d(-\frac{u^2}{2}) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \Big|_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

【相关知识点】 对于随机变量 X 与 Y 均服从正态分布, 则 X 与 Y 的线性组合亦服从正态分布.

若 X 与 Y 相互独立, 由数学期望和方差的性质, 有

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c,$$



$$D(aX + bY + c) = a^2 D(X) + b^2 D(Y),$$

其中 a, b, c 为常数.

十一、(本题满分 6 分.)

【解析】 易见 (X, Y) 的可能取值为 $(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$. 依题意

$$\{X < Y\} = \emptyset, \text{ 故 } P\{X < Y\} = 0, \text{ 即}$$

$$P\{X = 1, Y = 2\} = P\{X = 1, Y = 3\} = P\{X = 2, Y = 3\} = 0,$$

$$P\{X = 1, Y = 1\} = P\{\max(\xi, \eta) = 1, \min(\xi, \eta) = 1\}$$

$$= P\{\xi = 1, \eta = 1\} = P\{\xi = 1\} P\{\eta = 1\} = \frac{1}{9}.$$

类似地可以计算出所有 p_{ij} 的值列于下表中, 得到随机变量 (X, Y) 的联合分布律:

		1	2	3
		1	2	3
1	1	$\frac{1}{9}$	0	0
	2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
3		$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

(2) 将表中各行元素相加求出 X 的边缘分布

$$X \square \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{3}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix},$$

由离散型随机变量数学期望计算公式可得

$$EX = \frac{1}{9} \cdot 1 + \frac{3}{9} \cdot 2 + \frac{5}{9} \cdot 3 = \frac{22}{9}.$$

【相关知识点】 1. 离散型随机变量的边缘分布计算公式:

二维离散型随机变量 (X, Y) 关于 X 与 Y 的边缘概率分布或边缘分布律分别定义为:

$$p_{i \cdot} = P\{X = x_i\} = \sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_j p_{ij}, i = 1, 2, \dots$$



$$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} = \sum_i P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_i p_{ij}, j = 1, 2, \dots$$

它们分别为联合分布律表格中第 i 行与第 j 列诸元素之和.

2. 离散型随机变量数学期望计算公式: $E(X) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot P\{X = x_k\}.$