2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是(　　)

(A) $(1,0)$.　　(B) $(2,0)$.　　(C) $(3,0)$.　　(D) $(4,0)$.

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ 无界，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为(　　)

(A) $(-1,1]$.　　(B) $[-1,1)$.　　(C) $[0,2)$.　　(D) $(0,2]$.

(3) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(x)>0$，$f'(0)=0$，则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是(　　)

(A) $f(0)>1$，$f''(0)>0$.　　(B) $f(0)>1$，$f''(0)<0$.

(C) $f(0)<1$，$f''(0)>0$.　　(D) $f(0)<1$，$f''(0)<0$.

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x\,dx$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\,dx$，则 I,J,K 的大小关系是(　　)

(A) $I<J<K$.　　(B) $I<K<J$.

(C) $J<I<K$.　　(D) $K<J<I$.

(5) 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$(　　)

(A) P_1P_2.　　(B) $P_1^{-1}P_2$.　　(C) P_2P_1.　　(D) $P_2P_1^{-1}$.

(6) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A^*x=0$ 的基础解系可为(　　)

(A) α_1,α_3.　　(B) α_1,α_2.　　(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

(7) 设 $F_1(x)$， $F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x)$， $f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是(　　)

(A) $f_1(x)f_2(x)$.　　　　(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.　　　　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 存在，记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$ 则 $E(UV)=$(　　)

(A) $E(U)\cdot E(V)$.　　　　(B) $E(X)\cdot E(Y)$.

(C) $E(U)\cdot E(Y)$.　　　　(D) $E(X)\cdot E(V)$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $y=\int_0^x \tan t dt (0\le x\le \frac{\pi}{4})$ 的弧长 $s=$________.

(10) 微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$________.

(11) 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$，则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$________.

(12) 设 L 是柱面方程 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=$_______.

(13) 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$，经过正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，则 $a=$_______.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)$=_____.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定的位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

(16)（本题满分 9 分）

设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

(17)（本题满分 10 分）

求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数.

(18)（本题满分 10 分）

(Ⅰ)证明：对任意的正整数 n，都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$ 成立.

(Ⅱ)设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\,(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(19)（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，

计算二重积分 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy$.

(20)（本题满分 11 分）

设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,3,5)^T$，不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T$，$\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值；

(II) 将 β_1,β_2,β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

(21)（本题满分 11 分）

A 为三阶实对称矩阵，A 的秩为 2，即 $r(A)=2$，且 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

(I) 求 A 的特征值与特征向量；

(II) 求矩阵 A.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$1/3$	$2/3$

Y	-1	0	1
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$.

(I) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

(II) 求 $Z=XY$ 的概率分布；

(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

（23）（本题满分 11 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 μ_0 已知，$\sigma^2>0$ 未知．$\overline{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(I) 求参数 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$；

(II) 计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)【答案】(C).

【解析】记 $y_1 = x-1, y_1' = 1, y_1'' = 0$， $y_2 = (x-2)^2, y_2' = 2(x-2), y_2'' = 2,$

$y_3 = (x-3)^3, y_3' = 3(x-3)^2, y_3'' = 6(x-3),$

$y_4 = (x-4)^4, y_4' = 4(x-4)^3, y_4'' = 12(x-4)^2,$

$y'' = (x-3)P(x)$，其中 $P(3) \neq 0$， $y''\big|_{x=3} = 0$，在 $x=3$ 两侧，二阶导数符号变化，

故选(C).

(2)【答案】(C).

【解析】观察选项：(A)，(B)，(C)，(D)四个选项的收敛半径均为 1，幂级数收敛区间的中心在 $x=1$ 处，故(A)，(B)错误；因为 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，所以 $a_n \geq 0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，将 $x=2$ 代入幂级数得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，而已知 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 无界，故原幂级数在 $x=2$ 处发散，(D)不正确．当 $x=0$ 时，交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 满足莱布尼茨判别法收敛，故 $x=0$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛．故正确答案为(C).

(3)【答案】(A).

【解析】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = f'(x)\cdot \ln f(y)\Big|_{(0,0)} = f'(0)\ln f(0) = 0$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = f(x)\cdot\frac{f'(y)}{f(y)}\Big|_{(0,0)} = f'(0) = 0, \text{故 } f'(0) = 0,$$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)} = f''(x)\cdot \ln f(y)\Big|_{(0,0)} = f''(0)\cdot\ln f(0) > 0,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{(0,0)} = f'(x)\cdot\frac{f'(y)}{f(y)}\Big|_{(0,0)} = \frac{[f'(0)]^2}{f(0)} = 0,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(0,0)} = f(x)\cdot\frac{f''(y)f(y) - [f'(y)]^2}{f^2(y)}\Big|_{(0,0)} = f''(0) - \frac{[f'(0)]^2}{f(0)} = f''(0).$$

又 $AC - B^2 = [f''(0)]^2\cdot \ln f(0) > 0,$ 故 $f(0) > 1, f''(0) > 0$.

(4)【答案】(B).

【解析】因为 $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ 时，　$0 < \sin x < \cos x < 1 < \cot x$，

又因 $\ln x$ 是单调递增的函数，所以 $\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$.

故正确答案为(B).

(5)【答案】(D).

【解析】由于将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，故

$$A\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B,$$

即 $AP_1=B$， $A=BP_1^{-1}$.

由于交换 B 的第 2 行和第 3 行得单位矩阵，故

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}B=E,$$

即 $P_2B=E$, 故 $B=P_2^{-1}=P_2$. 因此， $A=P_2P_1^{-1}$，故选(D).

(6)【答案】(D).

【解析】由于 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，所以 $A(1,0,1,0)^T=0$，且 $r(A)=4-1=3$，即 $\alpha_1+\alpha_3=0$，且 $|A|=0$. 由此可得 $A^*A=|A|E=O$，即 $A^*(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=O$，这说明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 $A^*x=0$ 的解.

由于 $r(A)=3$， $\alpha_1+\alpha_3=0$，所以 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关. 又由于 $r(A)=3$，所以 $r(A^*)=1$，因此 $A^*x=0$ 的基础解系中含有 $4-1=3$ 个线性无关的解向量. 而 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，且为 $A^*x=0$ 的解，所以 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 可作为 $A^*x=0$ 的基础解系，故选(D).

(7)【答案】(D).

【解析】选项(D)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\right]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[F_2(x)dF_1(x)+F_1(x)dF_2(x)\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}d\left[F_1(x)F_2(x)\right]=F_1(x)F_2(x)\big|_{-\infty}^{+\infty}=1.$$

所以 $f_1F_2(x)+f_2F_1(x)$ 为概率密度.

(8)【答案】(B).

【解析】因为 $U=\max\{X,Y\}=\begin{cases}X, & X\ge Y,\\ Y, & X<Y,\end{cases}$ 　　$V=\min\{X,Y\}=\begin{cases}Y, & X\ge Y,\\ X, & X<Y.\end{cases}$

所以，$UV=XY$，于是 $E(UV)=E(XY)\ =E(X)E(Y)$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)【答案】$\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

【解析】选取 x 为参数，则弧微元 $ds=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=\sqrt{1+\tan^2 x}dx=\sec xdx$

所以 $s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec xdx=\ln\left|\sec x+\tan x\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(1+\sqrt{2})$.

(10)【答案】$y=e^{-x}\sin x$.

【解析】由通解公式得

$$\begin{aligned} y&=e^{-\int dx}(\int e^{-x}\cos x\cdot e^{\int dx}dx+C)\\ &=e^{-x}(\int \cos xdx+C)\\ &=e^{-x}(\sin x+C). \end{aligned}$$

由于 $y(0)=0$, 故 C=0．所以 $y=e^{-x}\sin x$.

(11)【答案】4.

【解析】$\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\sin xy}{1+(xy)^2}\cdot y$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=y\cdot\frac{y\cos xy-\sin xy\cdot 2xy^2}{[1+(xy)^2]^2},$$

故 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}|_{(0,2)}=4$.

(12)【答案】π.

【解析】取 $S:x+y-z=0,x^2+y^2\le 1$，取上侧，则由斯托克斯公式得，

$$\text{原式}=\iint_S\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xz & x & \dfrac{y^2}{2}\end{vmatrix}=\iint_S ydydz+xdzdx+dxdy.$$

因 $z=x+y,z_x^{'}=1,z_y^{'}=1$. 由转换投影法得

$$\iint_S ydydz+xdzdx+dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1}[y\cdot(-1)+x(-1)+1]dxdy.$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (-x-y+1)dxdy = \pi$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy = \pi .$$

(13)【答案】$a=1$.

【解析】由于二次型通过正交变换所得到的标准形前面的系数为二次型对应矩阵 A 的特征值，故 A 的特征值为 0，1，4．二次型所对应的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

由于 $|A|=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=0$，故 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow a=1$.

(14)【答案】$\mu\left(\mu^2+\sigma^2\right)$.

【解析】根据题意，二维随机变量 (X,Y) 服从 $N\left(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0\right)$．因为 $\rho_{xy}=0$，所以由二维正态分布的性质知随机变量 X,Y 独立，所以 X,Y^2．从而有

$$E\left(XY^2\right)=E(X)E\left(Y^2\right)=\mu\left[D(Y)+E^2(Y)\right]=\mu\left(\mu^2+\sigma^2\right).$$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定的位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)(本题满分 10 分)

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\ln(1+x)}{x}]^{\frac{1}{e^x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\ln(1+x)}{x}-1]\cdot\frac{1}{e^x-1}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-x}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

(16)(本题满分 9 分)

【解析】$z=f\left[xy,yg(x)\right]$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\left[xy,yg(x)\right]\cdot y+f_2'\left[xy,yg(x)\right]\cdot yg'(x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1'[xy, yg(x)] + y\left[f_{11}''(xy, yg(x))x + f_{12}''(xy, yg(x))g(x) \right]$$

$$+g'(x) \cdot f_2'[xy, yg(x)] + yg'(x)\left\{ f_{12}''[xy, yg(x)] \cdot x + f_{22}''[xy, yg(x)]g(x) \right\}.$$

因为 $g(x)$ 在 $x=1$ 可导，且为极值,所以 $g'(1)=0$，则

$$\frac{d^2 z}{dxdy}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = f_1'(1,1) + f_{11}''(1,1) + f_{12}''(1,1).$$

(17)（本题满分 10 分）

【解析】显然 $x=0$ 为方程一个实根.

当 $x \neq 0$ 时，令 $f(x) = \dfrac{x}{\arctan x} - k,$

$$f'(x) = \frac{\arctan x - \dfrac{x}{1+x^2}}{(\arctan x)^2}.$$

令 $g(x) = \arctan x - \dfrac{x}{1+x^2}$　　$x \in R$，

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0,$$

即 $x \in R,\ g'(x) > 0$.

又因为 $g(0)=0$，

即当 $x<0$ 时，$g(x)<0$；　当 $x>0$ 时，$g(x)>0$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$.

所以当 $x<0$ 时，$f(x)$ 单调递减，当 $x>0$ 时，$f(x)$ 单调递增

又由 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arctan x} - k = 1-k$，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\arctan x} - k = +\infty,$$

所以当 $1-k<0$ 时，由零点定理可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 内各有一个零点；

当 $1-k \ge 0$ 时，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 内均无零点.

综上所述，当 $k>1$ 时，原方程有三个根．当 $k \le 1$ 时，原方程有一个根.

(18)(本题满分 10 分)

【解析】(Ⅰ)设 $f(x)=\ln(1+x), x\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$

显然 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$ 上满足拉格朗日的条件，

$$f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 1=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n},\xi\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$$

所以 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$ 时，

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{1+0}\cdot\frac{1}{n}，即：\frac{1}{n+1}<\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{n},$$

$$亦即：\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

结论得证.

(II)设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$.

先证数列 $\{a_n\}$ 单调递减.

$$a_{n+1}-a_n=\left[\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right]-\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right]=\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

利用(I)的结论可以得到 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})$，所以 $\dfrac{1}{n+1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<0$ 得到 $a_{n+1}<a_n$，即数列 $\{a_n\}$ 单调递减.

再证数列 $\{a_n\}$ 有下界.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1),$$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln n>\ln(n+1)-\ln n>0.$$

得到数列$\{a_n\}$有下界．利用单调递减数列且有下界得到$\{a_n\}$收敛．

(19)(本题满分 11 分)

【解析】$I=\int_0^1 xdx\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy=\int_0^1 xdx\int_0^1 ydf'_x(x,y)$

$$=\int_0^1 xdx\left[yf'_x(x,y)|_0^1-\int_0^1 f'_x(x,y)dy\right]$$

$$=\int_0^1 xdx\left(f'_x(x,1)-\int_0^1 f'_x(x,y)dy\right).$$

因为 $f(x,1)=0$，所以 $f'_x(x,1)=0$.

$$I=-\int_0^1 xdx\int_0^1 f'_x(x,y)dy=-\int_0^1 dy\int_0^1 xf'_x(x,y)dx$$

$$=-\int_0^1 dy\left[xf(x,y)|_0^1-\int_0^1 f(x,y)dx\right]=-\int_0^1 dy\left[f(1,y)-\int_0^1 f(x,y)dx\right]$$

$$=\iint_D fdxdy=a.$$

(20)(本题满分 11 分)

【解析】(I)由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示，对$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$进行初等行变换：

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\1&2&4&0&1&3\\1&3&a&1&1&5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&2&a-3&0&1&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&0&a-5&2&-1&0\end{array}\right).$$

当$a=5$时，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2\neq r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1)=3$，此时，$\alpha_1$不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示，

故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示．

(II)对$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$进行初等行变换：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right),$$

故 $\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3$.

(21)（本题满分 11 分）

【解析】(I) 由于 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，设 $\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$，则

$A(\alpha_1,\alpha_2)=(-\alpha_1,\alpha_2)$，即 $A\alpha_1=-\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2$，而 $\alpha_1\neq0,\alpha_2\neq0$，知 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，对应的特征向量分别为 $k_1\alpha_1(k_1\neq0)$，$k_2\alpha_2(k_2\neq0)$.

由于 $r(A)=2$，故 $|A|=0$，所以 $\lambda_3=0$.

由于 A 是三阶实对称矩阵，故不同特征值对应的特征向量相互正交，设 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，则

$$\begin{cases}\alpha_1^T\alpha_3=0,\\\alpha_2^T\alpha_3=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x_1-x_3=0,\\x_1+x_3=0.\end{cases}$$

解此方程组，得 $\alpha_3=(0,1,0)^T$，故 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3(k_3\neq0)$.

(II) 由于不同特征值对应的特征向量已经正交，只需单位化：

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt2}(1,0,-1)^T,\beta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{1}{\sqrt2}(1,0,1)^T,\beta_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=(0,1,0)^T.$$

令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$,

$$A=Q\Lambda Q^T$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\\0&0&1\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&0&-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&0&\frac{\sqrt2}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

（22）（本题满分 11 分）

【解析】(I) 因为 $P\{X^2=Y^2\}=1$，所以 $P\{X^2\neq Y^2\}=1-P\{X^2=Y^2\}=0$.

即 $P\{X=0,Y=-1\}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=1,Y=0\}=0$.

利用边缘概率和联合概率的关系得到

$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}-P\{X=0,Y=-1\}-P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{3}$;

$P\{X=1,Y=-1\}=P\{Y=-1\}-P\{X=0,Y=-1\}=\frac{1}{3}$;

$P\{X=1,Y=1\}=P\{Y=1\}-P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{3}$.

即 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0	1/3	0
1	1/3	0	1/3

(II) Z 的所有可能取值为 $-1,0,1$.

$P\{Z=-1\}=P\{X=1,Y=-1\}=\frac{1}{3}$.

$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{3}$.

$P\{Z=0\}=1-P\{Z=1\}-P\{Z=-1\}=\frac{1}{3}$.

$Z=XY$ 的概率分布为

Z	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

(III) 因为 $\rho_{XY}=\frac{Cov(XY)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$,

其中

$E(XY)=E(Z)=-1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=0$，$E(Y)=-1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=0$.

所以$E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0$，即X，Y的相关系数$\rho_{XY}=0$.

（23）（本题满分 11 分）

【解析】因为总体X服从正态分布，故设X的概率密度为$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$.

（I）似然函数

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}]=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2};$$

取对数：$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}$；

求导：$\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d(\sigma^2)}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2(\sigma^2)^2}=\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\mu_0)^2-\sigma^2]$.

令$\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d(\sigma^2)}=0$，解得$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$.

σ^2的最大似然估计量为$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$.

（II）方法 1：

$X_i\sim N(\mu_0,\sigma^2)$，令$Y_i=X_i-\mu_0\sim N(0,\sigma^2)$，则$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2$.

$$E(\hat{\sigma}^2)=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2)=E(Y_i^2)=D(Y_i)+[E(Y_i)]^2=\sigma^2.$$

$$D(\hat{\sigma}^2)=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2)=\frac{1}{n^2}D(Y_1^2+Y_2{}^2+\cdots+Y_n{}^2)=\frac{1}{n}D(Y_i^2)$$

$$=\frac{1}{n}\{E(Y_i^4)-[E(Y_i^2)]^2\}=\frac{1}{n}(3\sigma^4-\sigma^4)=\frac{2\sigma^4}{n}.$$

方法 2：

$X_i\sim N(\mu_0,\sigma^2)$，则$\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\sim N(0,1)$，得到$Y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$，即$\sigma^2Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$.

$$E\left(\hat{\sigma}^2\right)=\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\right]=\frac{1}{n}E\left(\sigma^2Y\right)=\frac{1}{n}\sigma^2E\left(Y\right)=\frac{1}{n}\sigma^2\cdot n=\sigma^2 .$$

$$D\left(\hat{\sigma}^2\right)=\frac{1}{n^2}D\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\right]=\frac{1}{n^2}D\left(\sigma^2Y\right)=\frac{1}{n^2}\sigma^4D\left(Y\right)=\frac{1}{n^2}\sigma^4\cdot 2n=\frac{2}{n}\sigma^4 .$$