目录

2010 年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题

一、**选择题**(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$ = ( )

(A) 1. (B) e. (C) e^{a-b}. (D) e^{b-a}.

(2) 设函数 $z=z(x,y)$,由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F_2'\neq 0$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$( )

(A) x. (B) z. (C) $-x$. (D) $-z$.

(3) 设 m,n 是正整数,则反常积分 $\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性 ( )

(A) 仅与 m 的取值有关. (B)仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m,n 取值都有关. (D) 与 m,n 取值都无关.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$ = ( )

(A) $\int_0^1 dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$. (B) $\int_0^1 dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$.

(C) $\int_0^1 dx\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$. (D) $\int_0^1 dx\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.

(5) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 $n\times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵,若 $AB=E$,则 ( )

(A) 秩 $r(A)=m$,秩 $r(B)=m$. (B) 秩 $r(A)=m$,秩 $r(B)=n$.

(C) 秩 $r(A)=n$,秩 $r(B)=m$. (D) 秩 $r(A)=n$,秩 $r(B)=n$.

(6) 设 A 为 4 阶实对称矩阵,且 $A^2+A=O$,若 A 的秩为 3,则 A 相似于（ ）

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1\end{cases}$,则 $P\{X=1\}$ =（ ）

(A) 0.　　(B) $\frac{1}{2}$.　　(C) $\frac{1}{2}-e^{-1}$.　　(D) $1-e^{-1}$.

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度,若

$f(x)=\begin{cases}af_1(x), x\le 0\\ bf_2(x), x>0\end{cases}$, $(a>0,b>0)$ 为概率密度,则 a,b 应满足（ ）

(A) $2a+3b=4$.　　(B) $3a+2b=4$.　　(C) $a+b=1$.　　(D) $a+b=2$.

二、**填空题**(9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 设 $\begin{cases}x=e^{-t},\\ y=\int_0^t \ln\left(1+u^2\right)du,\end{cases}$ 求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$ = ________.

(10) $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx=$ ________.

(11) 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|$ $\{x\in[-1,1]\}$,起点是 (-1.0),终点是 $(1,0)$,则曲线积分

$\int_L xydx+x^2dy=$ ________.

(12) 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2\le z\le 1\right\}$,则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$ ________.

(13) 设 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^T$, $\alpha_2=(1,1,0,2)^T$, $\alpha_3=(2,1,1,a)^T$,若由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的向量空间的维数是 2,则

$a=$ ______.

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{C}{k!},k=0,1,2,\cdots$,则 $E\left(X^2\right)=$ ________.

三、**解答题**(15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的通解 .

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}\left(x^2-t\right)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

(17)(本题满分 10 分)

(I)比较 $\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|dt\ (n=1,2,\cdots)$ 的大小,说明理由；

(II)记 $u_n=\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt\ (n=1,2,\cdots)$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设P为椭球面$S:x^2+y^2+z^2-yz=1$上的动点,若S在点P处的切平面与xOy面垂直,求点P的轨迹C,并计算曲面积分$I=\iint_{\Sigma}\frac{\left(x+\sqrt{3}\right)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$,其中$\Sigma$是椭球面$S$位于曲线$C$上方的部分.

(20)(本题满分 11 分)

设$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$,已知线性方程组$Ax=b$存在两个不同的解.

(Ⅰ) 求λ,a；

(Ⅱ) 求方程组$Ax=b$的通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$,且 Q 的第三列为

$(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

(Ⅰ) 求矩阵 A ;

(Ⅱ) 证明 $A+E$ 为正定矩阵,其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta\in(0,1)$ 未知,以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本(样本容量为 n)中等于 i 的个数($i=1,2,3$).试求常数 a_1,a_2,a_3 ,使 $T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量,并求 T 的方差.

2011 年全国硕士研究生统一入学考试
数学一试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是(　　)

(A) $(1,0)$ ．　(B) $(2,0)$ ．　(C) $(3,0)$ ．　(D) $(4,0)$ ．

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ 无界，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为(　　)

(A) $(-1,1]$ ．　(B) $[-1,1)$ ．　(C) $[0,2)$ ．　(D) $(0,2]$ ．

(3) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(x)>0$，$f'(0)=0$，则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是(　　)

(A) $f(0)>1$，$f''(0)>0$ ．　(B) $f(0)>1$，$f''(0)<0$ ．

(C) $f(0)<1$，$f''(0)>0$ ．　(D) $f(0)<1$，$f''(0)<0$ ．

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$，则 I,J,K 的大小关系是(　　)

(A) $I<J<K$ ．　(B) $I<K<J$ ．

(C) $J<I<K$ ．　(D) $K<J<I$ ．

(5) 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$(　　)

(A) P_1P_2 .　　(B) $P_1^{-1}P_2$.　　(C) P_2P_1 .　　(D) $P_2P_1^{-1}$.

(6) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ **是 4 阶矩阵，** A^* **为** A **的伴随矩阵，若** $(1,0,1,0)^T$ **是方程组** $Ax=0$ **的一个基础解系，则** $A^*x=0$ **的基础解系可为(　　)**

(A) α_1,α_3 .　　(B) α_1,α_2 .　　(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

(7) 设 $F_1(x)$ **，** $F_2(x)$ **为两个分布函数，其相应的概率密度** $f_1(x)$ **，** $f_2(x)$ **是连续函数，则必为概率密度的是(　　)**

(A) $f_1(x)f_2(x)$.

(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.

(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

(8) 设随机变量 X **与** Y **相互独立，且** $E(X)$ **与** $E(Y)$ **存在，记** $U=\max\{X,Y\}$ **，** $V=\min\{X,Y\}$ **则** $E(UV)=$ **(　　)**

(A) $E(U)\cdot E(V)$.

(B) $E(X)\cdot E(Y)$.

(C) $E(U)\cdot E(Y)$.

(D) $E(X)\cdot E(V)$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 曲线 $y=\int_0^x \tan t dt(0\le x\le \frac{\pi}{4})$ **的弧长** $s=$ ________ **.**

(10) 微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ **满足条件** $y(0)=0$ **的解为** $y=$ ________ **.**

(11) 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$ **，则** $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$ ________ **.**

(12) 设 L **是柱面方程** $x^2+y^2=1$ **与平面** $z=x+y$ **的交线，从** z **轴正向往** z **轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分** $\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=$ ________ **.**

(13) 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$ **，经过正交变换化为** $y_1^2+4z_1^2=4$ **，则** $a=$ ________ **.**

(14) 设二维随机变量$\left(X,Y\right)$服从正态分布$N\left(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0\right)$，则$E\left(XY^2\right)$=______．

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定的位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15) (本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$．

(16) (本题满分 9 分)

设函数$z=f(xy,yg(x))$，其中函数f具有二阶连续偏导数，函数$g(x)$可导且在$x=1$处取得极值$g(1)=1$，求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$．

(17) (本题满分 10 分)

求方程$k\arctan x-x=0$不同实根的个数，其中k为参数．

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)证明：对任意的正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ 成立．

(Ⅱ)设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛．

(19) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$，其中

$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，

计算二重积分 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy$．

(20) (本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,3,5)^T$，不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T$，

$\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示．

(I) 求 a 的值；

(II) 将 β_1,β_2,β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示．

(21) (本题满分 11 分)

A 为三阶实对称矩阵，A 的秩为 2，即 $r(A)=2$，且 $A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

(I) 求 A 的特征值与特征向量；

(II) 求矩阵 A .

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$1/3$	$2/3$

Y	-1	0	1
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$.

(I) 求二维随机变量(X,Y)的概率分布；

(II) 求$Z=XY$的概率分布；

(III) 求X与Y的相关系数ρ_{XY} .

（23）（本题满分 11 分）

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自正态总体$N(\mu_0,\sigma^2)$的简单随机样本，其中μ_0已知，$\sigma^2>0$未知．$\overline{X}$和S^2分别表示样本均值和样本方差．

(I) 求参数σ^2的最大似然估计量$\hat{\sigma^2}$ ；

(II) 计算$E(\hat{\sigma^2})$和$D(\hat{\sigma^2})$.

2012 年全国硕士研究生统一入学考试
数学一试题

一、选择题:1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$ ( )

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ (B) $(-1)^n(n-1)!$ (C) $(-1)^{n-1}n!$ (D) $(-1)^n n!$

(3) 如果函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续,那么下列命题正确的是 ( )

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在,则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在,则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

(C) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微,则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

(D) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微,则 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

(4)设 $\mathrm{I}_K=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x dx(k=1,2,3)$ ，则有 ( )

(A) $I_1<I_2<I_3$ (B) $I_3<I_2<I_1$ (C) $I_2<I_3<I_1$ (D) $I_2<I_1<I_3$

(5)设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\C_1\end{pmatrix}$,$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\C_2\end{pmatrix}$,$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\C_3\end{pmatrix}$,$\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\C_4\end{pmatrix}$,其中 C_1,C_2,C_3,C_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为( )

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ (C) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ (D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

(6) 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $p^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.若 P=（$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$），$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，

则 $Q^{-1}AQ=$（ ）

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(7)设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $P\{X<Y\}=$（ ）

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{5}$

(8)将长度为 $1m$ 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为 （ ）

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) -1

二、填空题：9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$__________

(10) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=$__________

(11) $grad(xy+\frac{z}{y})|_{(2,1,1)}=$__________

(12)设 $\Sigma=\{(x,y,z)|x+y+z=1,x\geq0,y\geq0,z\geq0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2ds=$__________

(13)设 α 为 3 维单位列向量，E 为 3 阶单位矩阵，则矩阵 $E-\alpha\alpha^T$ 的秩为_______

(14)设 A,B,C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$p(AB)=\frac{1}{2},P(C)=\frac{1}{3},p(AB|\overline{C})=$______

三、解答题：15 ~ 23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\dfrac{x^2}{2}(-1<x<1)$

(16)求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17)求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(18)已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\ y=\cos t\end{cases}$ $(0\leq t<\dfrac{\pi}{2})$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$ ， $f'(t)>0$ $(0<t<\dfrac{\pi}{2})$.若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数 $f(t)$ 的表达式，并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

(19)已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$ ，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分 $J=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$

(20)设 $A=\begin{bmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{bmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

(Ⅰ)计算行列式 $|A|$ ；

(Ⅱ)当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解.

(21)

已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$ ，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$ 的秩为 2

(Ⅰ)求实数 a 的值；

(Ⅱ)求正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为标准形.

（22）

设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

（Ⅰ）求$P\{X=2Y\}$；

（Ⅱ）求$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

(23)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$.设 $Z=X-Y$.

（Ⅰ）求 Z 的概率密度 $f(z,\sigma^2)$;

（Ⅱ）设 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\widehat{\sigma}^2$

（Ⅲ）证明 $\widehat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量

2013 年全国硕士研究生统一入学考试

数学一试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$ ，其中 c,k 为常数，且 $c\neq 0$ ，则（　　）

（A）$k=2,c=-\dfrac{1}{2}$

（B）$k=2,c=\dfrac{1}{2}$

（C）$k=3,c=-\dfrac{1}{3}$

（D）$k=3,c=\dfrac{1}{3}$

（2）曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为（　　）

（A）$x-y+z=-2$

（B）$x+y+z=0$

（C）$x-2y+z=-3$

（D）$x-y-z=0$

（3）设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$ ，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx(n=1,2,\ldots)$ ，令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ ，则 $S(-\dfrac{9}{4})=$（　　）

（A）$\dfrac{3}{4}$

（B）$\dfrac{1}{4}$

（C）$-\dfrac{1}{4}$

（D）$-\dfrac{3}{4}$

（4）设 $l_1:x^2+y^2=1,l_2:x^2+y^2=2,l_3:x^2+2y^2=2,l_4:2x^2+y^2=2,$ 为四条逆时针的平面曲线，记

$I_i=\oint\limits_{l_i}(y+\frac{y^3}{6})dx+(2x-\frac{x^3}{3})dy(i=1,2,3,4)$，则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}$ = (　　)

（A）I_1

（B）I_2

（C）I_3

（D）I_4

（5）设矩阵 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 AB=C,且 B 可逆，则

（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

（D）矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

（6）矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\mathrm{b}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

（A）$\mathrm{a}=0,\mathrm{b}=2$

（B）$a=0,b$为任意常数

（C）$a=2,b=0$

（D）$a=2,b$为任意常数

（7）设 X_1，X_2，X_3 是随机变量，且 $X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim N(0,2^2)$，$X_3\sim N(5,3^2)$，

$P_j=P\{-2\le X_j\le 2\}(j=1,2,3)$, 则（　　）

（A）$P_1>P_2>P_3$

（B）$P_2>P_1>P_3$

（C）$P_3>P_1>P_2$

（D）$P_1>P_3>P_2$

（8）设随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1,n)$, 给定 $a(0<a<0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X>c\}=a$,则 $P\{Y>c^2\}=$（　）

（A）α

（B）$1-\alpha$

（C）2α

（D）$1-2\alpha$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)设函数 $f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n(f(\frac{1}{n})-1)=$ ______ .

(10)已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$ ，$y_2=e^{x}-xe^{2x}$ ，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，该方程的通解为 $y=$ ______ .

(11)设 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$ （ t 为参数），则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ ______ .

(12) $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$ ______ .

（13）设 $\mathrm{A}=(\mathrm{a}_{\mathrm{ij}})$ 是三阶非零矩阵，$|\mathrm{A}|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若

$\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}+\mathrm{A}_{\mathrm{ij}}=0(\mathrm{i},\mathrm{j}=1,2,3)$, 则 $|A|=$ ____

（14）设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, a 为常数且大于零，则 $P\{Y\le a+1\,|\,Y>a\}=$ ______。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$, 其中 $f(x)=\int_1^x \dfrac{\ln(t+1)}{t}dt$

（16）（本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_0=3, a_1=1, a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geq 2)$, $S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数，

（I）　证明：$S''(x)-S(x)=0$，

（II）　求 $S(x)$ 的表达式.

（17）（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=(y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值.

（18）（本题满分 10 分）

设奇函数 $f(x)$在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1$, 证明：

（I）　存在 $\xi\in(0,1)$, 使得$f'(\xi)=1$

（II）　存在 $\eta\in\left(-1,1\right)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

（19）（本题满分 10 分）

设直线L过 $A(1,0,0),B(0,1,1)$ 两点 将L绕Z轴旋转一周得到曲面Σ,Σ与平面 $z=0,z=2$ 所围成的立体为Ω，

（I） 求曲面Σ的方程

（II） 求Ω的形心坐标.

（20）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当$a,b$为何值时，存在矩阵$C$使得 $AC-CA=B$ ，并求所有矩阵C。

（21）（本题满分 11 分）

设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)^2+\left(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3\right)^2$ ，记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$。

（I）证明二次型f对应的矩阵为$2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$；

（II）若α,β正交且均为单位向量，证明f在正交变换下的标准形为$2y_1^2+y_2^2$。

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2 & 0<x<3\\ 0 & \end{cases}$ ，令随机变量 $Y=\begin{cases}2 & x\le 1\\ x & 1<x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$，

（I）求 Y 的分布函数

（II）求概率 $P\{X\le Y\}$

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, x>0\\ 0，其他\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots X_N$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求θ的矩估计量；

（2）求θ的最大似然估计量.

2014 年全国硕士研究生统一入学考试
数学一试题

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列曲线有渐近线的是 ( )

(A) $y=x+\sin x$ (B) $y=x^2+\sin x$

(C) $y=x+\sin\frac{1}{x}$ (D) $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

(2) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$ ，则在区间 $[0,1]$ 上 ( )

(A) 当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$ (B) 当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

(C) 当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$ (D) 当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

(3) 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx=$ ( )

(A) $\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

(B) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(4) 若 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2dx=\min\limits_{a,b\in R}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx\right\}$ ，则

$a_1\cos x+b_1\sin x=$ ( )

(A) $2\sin x$ (B) $2\cos x$ (C) $2\pi\sin x$ (D) $2\pi\cos x$

(5) 行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ ( )

(A) $(ad-bc)^2$ (B) $-(ad-bc)^2$ (C) $a^2d^2-b^2c^2$ (D) $b^2c^2-a^2d^2$

(6) 设a_1,a_2,a_3均为三维向量，则对任意常数k,l,向量组a_1+ka_3,a_2+la_3线性无关是向量组

$\boldsymbol{B}=\left(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3\right)$线性无关的 ( )

(A)必要非充分条件 (B)充分非必要条件

(C)充分必要条件 (D)既非充分也非必要条件

(7) 设随机事件A与B相互独立，且$P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则$P(B-A)=$ ( )

(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4

(8) 设连续性随机变量X_1与X_2相互独立，且方差均存在，X_1与X_2的概率密度分别为$f_1(x)$与$f_2(x)$，随机变量Y_1的概率密度为$f_{Y_1}(y)=\dfrac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$，随机变量$Y_2=\dfrac{1}{2}(X_1+X_2)$，则

( )

(A) $EY_1>EY_2$，$DY_1>DY_2$ (B) $EY_1=EY_2$，$DY_1=DY_2$

(C) $EY_1=EY_2$，$DY_1<DY_2$ (D) $EY_1=EY_2$，$DY_1>DY_2$

二、填空题：9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲面$z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$在点$(1,0,1)$处的切平面方程为________.

(10) 设$f(x)$是周期为4的可导奇函数，且$f'(x)=2(x-1),\quad x\in[0,2]$，则$f(7)=$________.

(11) 微分方程$xy'+y(\ln x-\ln y)=0$满足条件$y(1)=e^3$的解为$y=$________.

(12) 设L是柱面$x^2+y^2=1$与平面$y+z=0$的交线，从z轴正向往z轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分$\oint_L zdx+ydz=$________.

(13) 设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^{\ 2}-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$的负惯性指数是1，则$a$的取值范围________.

(14) 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, \theta<x<2\theta, \\ 0, \quad 其他,\end{cases}$ 其中 θ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单样本，若 $E(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=\theta^2$，则 $c=$_______.

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$ 若

$f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

(18)(本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ $(z\le 1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy .$$

(19)(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\frac{\pi}{2}$，$0<b_n<\frac{\pi}{2}$，$\cos a_n-a_n=\cos b_n$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

(I) 证明：$\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

(II) 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$，$E$ 为三阶单位矩阵.

(I)求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

(II)求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B.

(21)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$, 在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i),(i=1,2)$.

(I) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$；

(II) 求 EY.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 其中 θ 是未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

（Ⅰ）求 $E(X)$ ，$E(X^2)$ ；

（Ⅱ）求 θ 的最大似然估计量 $\widehat{\theta}_n$ ；

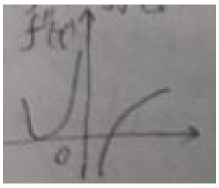
（Ⅲ）是否存在实数 a ，使得对任何 $\varepsilon>0$ ，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\widehat{\theta}_n-a\right|\ge\varepsilon\right\}=0$ ？

2015 年全国硕士研究生统一入学考试
数学一试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点的个数为 ( )

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3



(2)设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{3})e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解，则 ( )

(A) $a=-3,b=2,c=-1$

(B) $a=3,b=2,c=-1$

(C) $a=-3,b=2,c=1$

(D) $a=3,b=2,c=1$

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的 ( )

(A) 收敛点，收敛点

(B) 收敛点，发散点

(C) 发散点，收敛点

(D) 发散点，发散点

(4) 设 D 是第一象限由曲线 $2xy=1$，$4xy=1$ 与直线 $y=x$，$y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$ （ ）

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) rdr$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) rdr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$

(5) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$，若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解的充分必要条件为 （ ）

(A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$

(B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$

(C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$

(D) $a \in \Omega, d \in \Omega$

(6)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为

（ ）

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$

(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$

(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

(7) 若 A,B 为任意两个随机事件，则 ( )

(A) $P(AB)\le P(A)P(B)$ (B) $P(AB)\ge P(A)P(B)$

(C) $P(AB)\le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$ (D) $P(AB)\ge \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

(8)设随机变量 X,Y 不相关，且 $EX=2,EY=1,DX=3$ ，则 $E\left[X\left(X+Y-2\right)\right]=$ ( )

(A) -3 (B) 3 (C) -5 (D) 5

二、填空题：9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$ ________.

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+|x|)\mathrm{d}x=$ ________.

(11)若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^x+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$ ________.

(12)设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面平面所围成的空间区域，则

$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=$ ________.

(13) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}=$ ________.

(14)设二维随机变量 (x,y) 服从正态分布 $N(1,1,0,1,0)$ ，则 $P\{XY-Y<0\}=$ ________.

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$ ，$g(x)=kx^3$,若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

(16)(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0\in I$ ，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$ ，求 $f(x)$ 的表达式.

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$ ，曲线 C: $x^2+y^2+xy=3$ ，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

(18)(本题满分 10 分)

(I) 设函数$u(x), v(x)$可导，利用导数定义证明$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

(II) 设函数$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ 可导，$f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出$f(x)$的求导公式.

(19)(本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为$\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases}$起点为$A\left(0,\sqrt{2},0\right)$，终点为$B\left(0,-\sqrt{2},0\right)$，计算曲线积分

$I=\int_L (y+z)\ dx+(z^2-x^2+y)dy+x^2y^2dz$

(20) (本题满 11 分)

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为$\mathrm{R}^3$的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\left(k+1\right)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(I) 证明向量组$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$为$\mathrm{R}^3$的一个基;

(II) 当 k 为何值时，存在非 0 向量ξ 在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与基$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$下的坐标相同，并求所有的$\xi$.

(21) (本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

(I) 求 a,b 的值；

(II) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ ，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵..

(22) (本题满分 11 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, x>0,\\ 0, \qquad x\le 0.\end{cases}$

对 X 进行独立重复的观测,直到 2 个大于 3 的观测值出现的停止.记 Y 为观测次数.

(I)求 Y 的概率分布;

(II)求 EY

(23) (本题满分 11 分)设总体 X 的概率密度为：

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(I)求 θ 的矩估计量.

(II)求 θ 的最大似然估计量.

2016 年全国硕士研究生统一入学考试
数学一试题

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在**答题纸**指定位置上.

（1） 若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛，则( )

$(A)a<1$且$b>1$ $(B)\ a>1$且$b>1$ $(C)a<1$且$a+b>1$ $(D)a>1$且$a+b>1$

（2） 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1),x<1\\ \ln x,x\ge 1\end{cases}$，则 $f(x)$ 一个原函数是（　）

$(A)F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x-1),x\ge1\end{cases}$ $(B)\ F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x+1)-1,x\ge1\end{cases}$

$(C)\ F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x+1)+1,x\ge1\end{cases}$ $(D)F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x-1)+1,x\ge1\end{cases}$

（3） 若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$，$y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 两个解，则 $q(x)=$（　）

$(A)3x(1+x^2)$ $(B)-3x(1+x^2)$ $(C)\frac{x}{1+x^2}$ $(D)-\frac{x}{1+x^2}$

（4） 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x,x\le0\\ \frac{1}{n},\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}\end{cases}$，$n=1,2,\cdots$（　）

$(A)\ x=0$ 是 $f(x)$ 第一类间断点 $(B)\ x=0$ 是 $f(x)$ 第二类间断点

$(C)\ \ f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导 $(D)\ f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

（5） 设 A,B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是（　）

(A) A^T 与 B^T 相似　　　　　　(B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似

(C) $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似　　　　(D) $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

（6）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+4x_1x_2+4x_2x_3+4x_1x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标系下表示的二次曲面是（　　）

(A) 单叶双曲面　　(B) 双叶双曲面　　(C) 椭球面　　(D) 柱面

（7）设随机变量 X 为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$, 记 $p=P\{X\le\mu+\sigma^2\}$. 则（　　）

$(A)p$ 随着 μ 增加而增加　　　　$(B)p$ 随着 σ 增加而增加

$(C)p$ 随着 μ 增加而减少　　　　$(D)p$ 随着 σ 增加而减少

（8） 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1,A_2,A_3, 且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$，将试验 E 独立重复做两次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示两次试验中结果 A_2 发生的次数，则 X Y 的相关系数为(　　)

$(A)-\frac{1}{2}$　　$(B)-\frac{1}{3}$　　$(C)\frac{1}{3}$　　$(D)\frac{1}{2}$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2}=$ ________ .

（10）向量场 $A(x,y,z)=(x+y+z)\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，旋度 $rotA=$ ________

（11）设函数 $f(u,v)$ 可微， $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz|_{(0,1)}=$ ________

（12）设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 $a=$ ________

（13）行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$ ______

（14）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 的简单随机样本，样本均值 $\bar{X}=9.5$，参数 μ 置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 置信度为 0.95 的双侧置信区间为______.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta) \mid 2 \le r \le 2(1+\cos\theta), -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D x\,dx\,dy$。

（16）设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$。

（1）证明：反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 收敛

（2）若 $y(0)=1, y'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 的值

(17) 设函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1$，L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线，计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$，并求 $I(t)$ 的最小值。

(18) 设有界区域 Ω 由曲面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)dydz-2ydzdx+3zdxdy$。

(19) 已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1,0<f'(x)<\frac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$，证明

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；(2) $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在且 $0<\lim_{n\to\infty}x_n<2$。

(20) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$，当 a 为何值时，方程 $AX=B$ 无解，有唯一解，有无穷多解？在有解时，求解此方程。

(21) (本题满分 11 分)已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

(1) 求 A^{99}.

(2) 设三阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$，记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合。

(22) (本题满分 11 分)设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\{(x,y)\,|\,0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1 & X\le Y\\ 0 & X>Y\end{cases}$$

(1) 写出(X,Y)的概率密度.

(2) 问U与X是否相互独立，说明理由。

(3) 求$Z=U+X$的分布函数$F(Z)$.

(23) 设总体X的概率密度为$f\left(x;\theta\right)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3},0<x<\theta\\ 0,else\end{cases}$，其中$\theta\in\left(0,+\infty\right)$为未知参数，$X_1,X_2,X_3$为来自总体$X$的简单随机样本，$T=\max\left\{X_1,\mathrm{X}_2,X_3\right\}$。

(1) 求T的概率密度；

(2) 确定a，使得aT为θ的无偏估计.

2017 年全国硕士研究生统一入学考试

数学一试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\le 0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则（　）

（A）$ab=\frac{1}{2}$　　（B）$ab=-\frac{1}{2}$　　（C）$ab=0$　　（D）$ab=2$

（2）若函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则（　）

（A）$f(1)>f(-1)$　　（B）$f(1)<f(-1)$

（C）$|f(1)|>|f(-1)|$　　（D）$|f(1)|<|f(-1)|$

（3）函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $n=(1,2,2)$ 的方向导数为（　）

（A）12　　（B）6　　（C）4　　（D）2

（4）甲、乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10（单位：m）处，图中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$（单位：m/s），虚线表示乙的速度 $v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为 $10、20、3$，计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0（单位：s），则（　）

（A）$t_0=10$　　（B）$15<t_0<20$　　（C）$t_0=25$　　（D）$t_0>25$

（5）设 α 是 n 维单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则

（A）$E-\alpha\alpha^T$ 不可逆　　（B）$E+\alpha\alpha^T$ 不可逆

（C）$E+2\alpha\alpha^T$ 不可逆　　（D）$E-2\alpha\alpha^T$ 不可逆

（6）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则

（A）A 与 C 相似，B 与 C 相似　　（B）A 与 C 相似，B 与 C 不相似

（C）A与C不相似，B与C相似　　（D）A与C不相似，B与C不相似

（7）设A,B为随机事件，若$0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，则$P(A|B)>P(A|\bar{B})$的充要条件是

（A）$P(B|A)>P(B|\bar{A})$　　（B）$P(B|A)<P(B|\bar{A})$

（C）$P(\bar{B}|A)>P(B|\bar{A})$　　（D）$P(\bar{B}|A)<P(B|\bar{A})$

（8）设$X_1,X_2\cdots X_n(n\geq 2)$为来自总体$N(\mu,1)$的简单随机样本，记$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论中不正确的是

（A）$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$服从$\chi^2$分布　　（B）$2(X_n-X_1)^2$服从$\chi^2$分布

（C）$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$服从$\chi^2$分布　　（D）$n(\bar{X}-\mu)^2$服从$\chi^2$分布

二、填空题：9–14小题，每小题4分，共24分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）已知函数$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，则$f^{(3)}(0)=$ ______。

（10）微分方程$y''+2y'+3y=0$的通解为$y=$ ______。

（11）若曲线积分$\int_L\frac{xdx-aydy}{x^2+y^2-1}$在区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$内与路径无关，则$a=$ ______。

（12）幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间$(-1,1)$内的和函数$S(x)=$ ______。

（13）设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为线性无关的3维列向量组，则向量组$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$的秩为______。

（14）设随机变量X的分布函数为$F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则$EX=$ ______。

三、解答题：15—23小题，共94分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步

骤.

(15)(本题满分 10 分)设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数， $y=f(e^x,\cos x)$ ，求 $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0}$ ， $\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{x=0}$ 。

(16) (本题满分 10 分)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})$ 。

(17) (本题满分 10 分)已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值。

(18) (本题满分 11 分)设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)>0$ ， $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$。

证明：（ Ⅰ ）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根。

（ Ⅱ ）方程 $f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根。

(19)（本题满分 10 分）设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点的密度为 $\mu=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ，记圆锥面与柱面的交线为 C 。

（I）求 C 在 xOy 面上的投影曲线的方程；

（II）求 S 的质量 M 。

(20)（本题满分 11 分） 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$=（α_1，α_2，α_3）有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$ 。

1) 证明：$r(\boldsymbol{A})=2$

2) 若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ ，求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\beta$ 的通解。

(21)（本题满分 11 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$，在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q。

(22)（本题满分 11 分）设随机变量为 X，Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P(X=0)=P(X=2)=\frac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

1）求 $P(Y\le EY)$；

2）求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

(23)（本题满分 11 分）某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ

是已知的，设 n 次测量结果 X_1，X_2，...，X_n 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$。该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = \left|X_i - \mu\right| (i = 1, 2, \cdots, n)$，利用 Z_1，$Z_2, \dots Z_n$ 估计 σ。

1）求 Z_i 的概率密度；

2）利用一阶矩阵求 σ 的矩估计量。

3）求 σ 的最大似然估计量。

2018 年全国硕士研究生统一入学考试
数学一试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的.

1. 下列函数不可导的是：

A. $y=|x|\sin|x|$　　B. $y=|x|\sin\sqrt{|x|}$

C. $y=\cos|x|$　　D. $y=\cos\sqrt{|x|}$

2.过点（1,0,0）与（0,1,0）且与 $z=x^2+y^2$ 相切的平面方程为

A. $z=0$与$x+y-z=1$　　B. $z=0$与$2x+2y-z=2$

C. $y=x$与$x+y-z=1$　　D. $y=x$与$2c+2y-z=2$

3. $\sum\limits_{\mathrm{n}=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=$

A. $\sin1\ +\ \cos1$　　B. $2\sin1+\cos1$

C. $\sin1+\cos1$　　D. $3\sin1+2\cos1$

4. $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$， $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{e^x}dx$， $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$，则 M,N,K 的大小关系为：

A. $M>N>K$　　B. $M>K>N$

C. $K>M>N$　　D. $N>M>K$

5. 下列矩阵中，与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为______.

A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.设 A,B 为 n 阶矩阵，记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩，$(X \ \ Y)$ 表示分块矩阵，则

A. $r(A \ \ AB) = r(A)$　　B. $r(A \ \ BA) = r(A)$

C. $r(A \ \ B) = \max\{r(A), r(B)\}$　　D. $r(A \ \ B) = r(A^T \ \ B^T)$

7.设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x), \int_0^2 f(x)dx = 0.6$，则 $p\{x<0\}$ =_____。

A.0.2　　B.0.3

C.0.4　　D.0.6

8.给定总体 $X - N(\mu, \sigma^2)$，σ^2 已知，给定样本 X_1, X_2,……, X_n,对总体均值 μ 进行检验，令

H_0: $\mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$，则

A.若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时拒绝 H_0，则 $\alpha = 0.01$ 时也拒绝 H_0.

B.若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时接受 H_0，则 $\alpha = 0.01$ 时拒绝 H_0.

C.若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时拒绝 H_0，则 $\alpha = 0.01$ 时接受 H_0.

D.若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时接受 H_0，则 $\alpha = 0.01$ 时也接受 H_0.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}} = e$，则 k= _____。

10. $y = f(x)$ 的图像过（0，0），且与 $y = a^x$ 相切于（1，2）.求 $\int_0^1 x f''(x)dx$ =_____。

11. $F(x, y, z) = xy\vec{\varepsilon} - yz\vec{\eta} + xz\vec{\kappa}$，求 $\mathrm{rot}\vec{F}(1,1,0)$ =_____。

12.曲线 s 由 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与 $x + y + z = 0$ 相交而成，求 $\oint xyds$ =_____。

13.二阶矩阵 A 有两个不同的特征值，α_1, α_2 是 A 的线性无关特征向量，$A^2(\alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2)$，则

$|A|=$______。

14. A，B 独立，A，C 独立，$BC\neq\phi$，$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，$P(AC|AB\cup C)=\frac{1}{4}$，则 $P(C)=$______。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$

16. 一段绳子总长为 2，分成三段，分别围成圆形，正方形，正三角形。这三段分别为多长时，所得的面积之和最小，并求出最小值。

17. 曲面 Σ ：$x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 取正面，求 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+(y^3+z)dxdz+z^3dxdy$

18. 微分方程 $y'+y=f(x)$

（1）当 $f(x)=x$ 时，求微分方程的通解。

（2）当 $f(x)$ 为周期函数时，证明微分方程 有通解与其对应，且该通解也为周期函数。

19.数列$\{x_n\}$，$x_1>0, x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$。证$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

20.（本小题 11 分）

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+\alpha x_3)^2$，其中$\alpha$为是参数。

（1）求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解。

（2）求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形。

21.（本题满分 11 分）

已知a是常数，且矩阵$A=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}$可经初等变换化为变矩阵$B=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$。

（1）求a；

（2）求满足 AP=B 的可逆矩阵 P.

22. 已知随机变量 X ,Y 相互独立 ,且 $P(X=1)=\frac{1}{2}$, $P(X=-1)=\frac{1}{2}$,Y 服从参数为 λ 的泊松分布 ,Z=XY

（1）$Cov(X,Z)$.

（2）求 Z 的概率分布.

23. X_1，X_2,……，X_n 来自总体 X 的分布，$f(x)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$（$\sigma$未知，$-\infty<x<+\infty$）。

（1）求 σ 的极大似然估计。

（2）求 $E(\hat{\sigma})$，$D(\hat{\sigma})$

2010 年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题参考答案

一、选择题

(1)【答案】 (C).

【解析】本题属于未定式求极限,极限为1^∞型,故可以用“e的抬起法”求解．

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\lim_{x\to\infty}e^{x\cdot\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}},$$

其中又因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\cdot\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}&=\lim_{x\to\infty}x\ln\left[1+\frac{x^2-(x-a)(x+b)}{(x-a)(x+b)}\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left[x^2-(x-a)(x+b)\right]}{(x-a)(x+b)}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b)x^2+abx}{(x-a)(x+b)}\\&=a-b\end{aligned}$$

故原式极限为e^{a-b},所以应该选择(C).

(2)【答案】 (B).

【解析】 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{F_1'\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F_2'\left(-\frac{z}{x^2}\right)}{F_2'\cdot\frac{1}{x}}=\frac{F_1'\cdot\frac{y}{x}+F_2'\cdot\frac{z}{x}}{F_2'}=\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{F_1'\cdot\frac{1}{x}}{F_2'\cdot\frac{1}{x}}=-\frac{F_1'}{F_2'},$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yF_1'+zF_2'}{F_2'}-\frac{yF_1'}{F_2'}=\frac{F_2'\cdot z}{F_2'}=z\ .$$

(3) 【答案】 (D).

【解析】$x=0$ 与 $x=1$ 都是瑕点.应分成

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx,$$

用比较判别法的极限形式,对于 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$,由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}}=1$.

显然,当 $0<\frac{1}{n}-\frac{2}{m}<1$,则该反常积分收敛.

当 $\frac{1}{n}-\frac{2}{m}\le 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}$ 存在,此时 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 实际上不是反常积分,故收敛.

故不论 m,n 是什么正整数, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 总收敛.对于 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$,取 $0<\delta<1$,不论 m,n 是什么正整数,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{(1-x)^{\delta}}}=\lim_{x\to 1^-}\ln^2(1-x)^{\frac{1}{m}}(1-x)^{\delta}=0,$$

所以 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛,故选(D).

(4)【答案】 (D).

【解析】 $\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{n+i}(\sum\limits_{j=1}^n \frac{n}{n^2+j^2})=(\sum\limits_{j=1}^n \frac{n}{n^2+j^2})(\sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{n+i})$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^n \frac{n}{n^2+j^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{1}{1+(\frac{j}{n})^2}=\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{n}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+(\frac{i}{n})}=\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2+j^2})(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i})$$

$$=(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2})\ (\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i})$$

$$=(\int_0^1\frac{1}{1+x}dx)(\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy)=\int_0^1dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy\ .$$

(5)【答案】 (A).

【解析】由于 $AB=E$,故 $r(AB)=r(E)=m$.又由于 $r(AB)\le r(A),r(AB)\le r(B)$,故

$$m\le r(A),m\le r(B) \qquad ①$$

由于 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 $n\times m$ 矩阵,故

$$r(A)\le m,r(B)\le m \qquad ②$$

由①、②可得 $r(A)=m,r(B)=m$,故选 A.

(6)【答案】 (D).

【解析】设 λ 为 A 的特征值,由于 $A^2+A=O$,所以 $\lambda^2+\lambda=0$,即 $(\lambda+1)\lambda=0$,这样 A 的特征值只能为-1 或 0.

由于 A 为实对称矩阵,故 A 可相似对角化,即 $A\sim\Lambda$, $r(A)=r(\Lambda)=3$,因此, $\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$,即

$$A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}.$$

(7) 【答案】 (C).

【解析】离散型随机变量的分布函数是跳跃的阶梯形分段函数,连续型随机变量的分布函数是连续函数.观察本题中 $F(x)$ 的形式,得到随机变量 X 既不是离散型随机变量,也不是连续型随机变量,所以求随机变量在一点处的概率,只能利用分布函数的定义.根据分布函数的定义,函数在某一点的概率可以写成两个区间内概率的差,即

$P\{X=1\}=P\{X\le 1\}-P\{X<1\}=F(1)-F(1-0)=1-e^{-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-e^{-1}$,故本题选(C).

(8)【答案】 (A).

【解析】根据题意知, $f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ $(-\infty<x<+\infty)$, $f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -1\le x\le 3\\ 0, & 其它\end{cases}$

利用概率密度的性质: $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$,故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}af_1(x)dx+\int_{0}^{+\infty}bf_2(x)dx=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)dx+b\int_0^3\frac{1}{4}dx=\frac{a}{2}+\frac{3}{4}b=1$$

所以整理得到 $2a+3b=4$,故本题应选(A).

二、填空题

(9) 【答案】0.

【解析】因为 $\frac{dy}{dx}=\frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}}=-\ln(1+t^2)e^t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(-\ln(1+t^2)e^t\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\left[-\frac{2t}{1+t^2}\cdot e^t-\ln(1+t^2)e^t\right]\cdot(-e^t)$$,所以 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=0$.

(10)【答案】 -4π.

【解析】令 $\sqrt{x}=t$, $x=t^2$, $dx=2tdt$,利用分部积分法,

原式 $=\int_0^{\pi}t\cos t\cdot 2tdt=\int_0^{\pi}2t^2\cos tdt=2\int_0^{\pi}t^2d\sin t$

$=2\left[t^2\sin t\big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2t\sin tdt\right]=4\int_0^{\pi}td\cos t$

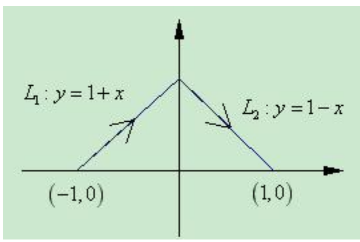
$=4\left[t\cos t\big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos tdt\right]=4\pi\cos\pi-4\sin t\big|_0^{\pi}=-4\pi$.

(11) 【答案】0.

【解析】 $\int_L xydx+x^2dy=\int_{L_1}xydx+x^2dy+\int_{L_2}xydx+x^2dy$

$=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+x^2dx+\int_0^1x(1-x)dx+x^2(-dx)$

$=\int_{-1}^{0}(2x^2+x)dx+\int_0^1(x-2x^2)dx$



$$=\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1}$$

$$=-\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=0$$

(12) 【答案】$\frac{2}{3}$.

【解析】$$\frac{\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz}{\iiint\limits_{\Omega} dxdydz}=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 zdz}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 dz}=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\cdot\left(\frac{z^2}{2}\bigg|_{r^2}^1\right)}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(1-r^2\right)rdr}$$

$$=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\left(\frac{1}{2}-\frac{r^4}{2}\right)dr}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^6}{12}\right)\bigg|_0^1}{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\int_0^{2\pi}\frac{1}{6}d\theta}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{1}{6}\cdot 2\pi}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}.$$

(13)【答案】$a=6$.

【解析】因为由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$生成的向量空间维数为 2,所以$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$. 对$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$进行初等行变换：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&1&3\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&a-6\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以$a=6$.

(14) 【答案】2.

【解析】利用离散型随机变量概率分布的性质,知

$$1=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C}{k!}=Ce\text{ ,整理得到 }C=e^{-1}\text{ ,即}$$

$$P\{X=k\}=\frac{e^{-1}}{k!}=\frac{1^k}{k!}e^{-1}.$$

故X服从参数为1的泊松分布,则$E(X)=1,D(X)=1$,根据方差的计算公式有

$$E\left(X^2\right)=D\left(X\right)+\left[E\left(X\right)\right]^2=1+1^2=2.$$

三、解答题

(15)【解析】对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$,解得特征根 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$,所以对应齐次方程的通解为 $y_c=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

设原方程的一个特解为 $y^*=x(ax+b)e^x$,则

$$\left(y^*\right)'=\left(ax^2+2ax+bx+b\right)e^x,$$

$$\left(y^*\right)''=\left(ax^2+4ax+bx+2a+2b\right)e^x,$$

代入原方程,解得 $a=-1,b=-2$,故特解为 $y^*=x(-x-2)e^x$.

故方程的通解为 $y=y_c+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}-x(x+2)e^x$. 其中 C_1,C_2 为任意常数.

(16)【解析】因为 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$,

所以 $f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$,令 $f'(x)=0$,则 $x=0,x=\pm1$.

又 $f''(x)=2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+4x^2e^{-x^4}$,则 $f''(0)=2\int_1^0 e^{-t^2}dt<0$,所以

$$f(0)=\int_1^0(0-t)e^{-t^2}dt=-\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

是极大值.

而 $f''(\pm1)=4e^{-1}>0$,所以 $f(\pm1)=0$ 为极小值.

又因为当 $x\ge1$ 时, $f'(x)>0$; $0\le x<1$ 时, $f'(x)<0$; $-1\le x<0$ 时, $f'(x)>0$; $x<-1$ 时, $f'(x)<0$,

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

(17)【解析】 (I)当 $0<x<1$ 时 $0<\ln(1+x)<x$,故 $\left[\ln(1+t)\right]^n<t^n$,所以

$$\left|\ln t\right|\left[\ln(1+t)\right]^n<\left|\ln t\right|t^n,$$

则
$$\int_0^1\left|\ln t\right|\left[\ln(1+t)\right]^n dt<\int_0^1\left|\ln t\right|t^n dt\ \left(n=1,2,\cdots\right).$$

(II) $\int_0^1\left|\ln t\right|t^n dt=-\int_0^1\ln t\cdot t^n dt=-\frac{1}{n+1}\int_0^1\ln t d\left(t^{n+1}\right)=\frac{1}{\left(n+1\right)^2}$,故由

$$0<u_n<\int_0^1|\ln t|t^n dt=\frac{1}{(n+1)^2},$$

根据夹逼定理得 $0\le\lim\limits_{n\to\infty}u_n\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(18)【解析】

(I) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{(-1)^{(n+1)-1}}{2(n+1)-1}\cdot x^{2(n+1)}}{\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n-1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(2n-1)x^2}{2n+1}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2n-1}{2n+1}\right|\cdot x^2=x^2$,

所以,当 $x^2<1$,即 $-1<x<1$ 时,原级数绝对收敛.当 $x^2>1$ 时,原级数发散,因此幂级数的收敛半径 $R=1$.

当 $x=\pm1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$,由莱布尼兹判别法知,此级数收敛,故原级数的收敛域为 $[-1,1]$.

(II) 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n}=x\cdot\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n-1}\right)$,其中令

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n-1}\quad x\in(-1,1),$$

所以有
$$S_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}\qquad x\in(-1,1),$$

从而有
$$S_1'(x)=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}\qquad x\in(-1,1),$$

故
$$S_1(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx+S_1(0)=\arctan x\ ,x\in(-1,1).$$

$S_1(x)$ 在 $x=-1,1$ 上是连续的,所以 $S(x)$ 在收敛域 $[-1,1]$ 上是连续的.所以

$$S(x)=x\cdot\arctan x\ ,x\in[-1,1].$$

(19)【解析】（I）令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1$,故动点 $P(x,y,z)$ 的切平面的法向量为

$(2x,2y-z,2z-y)$,由切平面垂直 xOy,故所求曲线 C 的方程为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1\\2z-y=0\end{cases}$.

（II）由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1,\\2z-y=0,\end{cases}$ 消去 z,可得曲线 C 在 xOy 平面上的投影曲线所围成的 xOy 上的区域

$D:\{(x,y)\mid x^2+\frac{3}{4}y^2\le 1\}$,由$\left(x^2+y^2+z^2-yz\right)'_x=(1)'_x$,由

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}dxdy,$$

故

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{\left(x+\sqrt{3}\right)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS=\iint_D\left(x+\sqrt{3}\right)dxdy=\iint_D xdxdy+\iint_D\sqrt{3}dxdy$$

$$=\iint_D\sqrt{3}dxdy=\sqrt{3}\pi\cdot 1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi.$$

(20)【解析】因为方程组有两个不同的解,所以可以判断方程组增广矩阵的秩小于 3,进而可以通过秩的关系求解方程组中未知参数,有以下两种方法.

方法 1：(Ⅰ)已知$Ax=b$有 2 个不同的解,故$r(A)=r(\bar{A})<3$,对增广矩阵进行初等行变换,得

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda&1&1&a\\0&\lambda-1&0&1\\1&1&\lambda&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\\lambda&1&1&a\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&a-\lambda\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\0&0&1-\lambda^2&a-\lambda+1\end{array}\right)$$

当$\lambda=1$时,$\bar{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$,此时,$r(A)\ne r(\bar{A})$,故$Ax=b$无解(舍去).

当$\lambda=-1$时,$\bar{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&-2&0&1\\0&0&0&a+2\end{array}\right)$,由于$r(A)=r(\bar{A})<3$,所以$a=-2$,故$\lambda=-1$,$a=-2$.

方法 2：已知$Ax=b$有 2 个不同的解,故$r(A)=r(\bar{A})<3$,因此$|A|=0$,即

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

知$\lambda=1$或-1.

当$\lambda=1$时,$r(A)=1\ne r(\bar{A})=2$,此时,$Ax=b$无解,因此$\lambda=-1$.由$r(A)=r(\bar{A})$,得$a=-2$.

（Ⅱ）对增广矩阵做初等行变换

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&-2\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&2\\0&2&0&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

可知原方程组等价为$\begin{cases}x_1-x_3=\frac{3}{2}\\x_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$,写成向量的形式,即$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$.

因此$Ax=b$的通解为$x=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$,其中$k$为任意常数.

(21)【解析】（Ⅰ)由于二次型在正交变换$x=Qy$下的标准形为$y_1^2+y_2^2$,所以A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=0$.

由于Q的第 3 列为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$,所以$A$对应于$\lambda_3=0$的特征向量为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$,记为$\alpha_3$. 由于$A$是实对称矩阵,所以对应于不同特征值的特征向量是相互正交的,设属于$\lambda_1=\lambda_2=1$的特征向量为$\alpha=\left(x_1,x_2,x_3\right)^T$,则$\alpha^T\alpha_3=0$,即$\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3=0$. 求得该方程组的基础解系为$\alpha_1=\left(0,1,0\right)^T,\alpha_2=\left(-1,0,1\right)^T$,因此$\alpha_1,\alpha_2$为属于特征值$\lambda=1$的两个线性无关的特征向量.

由于α_1,α_2是相互正交的,所以只需单位化：

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\left(0,1,0\right)^T,\beta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1,0,1\right)^T.$$

取$Q=(\beta_1,\beta_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$,则$Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}$,且$Q^{-1}=Q^T$,

故 $A=Q\Lambda Q^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

(Ⅱ) $A+E$ 也是实对称矩阵, A 的特征值为1,1,0,所以 $A+E$ 的特征值为2,2,1,由于 $A+E$ 的特征值全大于零,故 $A+E$ 是正定矩阵.

(22)【解析】当给出二维正态随机变量的的概率密度 $f(x,y)$ 后,要求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$,可以根据条件概率公式 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 来进行计算.本题中还有待定参数, A 要根据概率密度的性质求解,具体方法如下.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2+2xy-y^2}dy=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2-x^2}dy=Ae^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2}dy$$

$$=A\sqrt{\pi}e^{-x^2},-\infty<x<+\infty.$$

根据概率密度性质有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=A\pi\text{ ,即 }A=\pi^{-1},$$

故 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2},-\infty<x<+\infty$.

当 $-\infty<x<+\infty$ 时,有条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{Ae^{-2x^2+2xy-y^2}}{A\sqrt{\pi}e^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty.$$

(23)【解析】 $N_1\sim B(n,1-\theta),N_2\sim B(n,\theta-\theta^2),N_3\sim B(n,\theta^2)$

$$E(T)=E\left(\sum_{i=1}^{3}a_iN_i\right)=a_1E(N_1)+a_2E(N_2)+a_3E(N_3)$$

$$=a_1n(1-\theta)+a_2n(\theta-\theta^2)+a_3n\theta^2=na_1+n(a_2-a_1)\theta+n(a_3-a_2)\theta^2.$$

因为T是θ的无偏估计量,所以$E(T)=\theta$,即得$\begin{cases} na_1=0 \\ n(a_2-a_1)=1 \\ n(a_3-a_2)=0 \end{cases}$,整理得到$a_1=0$,$a_2=\frac{1}{n}$, $a_3=\frac{1}{n}$.所以统计量

$$T=0\times N_1+\frac{1}{n}\times N_2+\frac{1}{n}\times N_3=\frac{1}{n}\times(N_2+N_3)=\frac{1}{n}\times(n-N_1).$$

注意到$N_1\sim B(n,1-\theta)$,故

$$D(T)=D\left[\frac{1}{n}\times(n-N_1)\right]=\frac{1}{n^2}\times D(N_1)=\frac{1}{n}\theta(1-\theta).$$

2011年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题参考答案

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1)【答案】(C)．

【解析】记$y_1=x-1, y_1'=1, y_1''=0$，$y_2=(x-2)^2, y_2'=2(x-2), y_2''=2,$

$y_3=(x-3)^3, y_3'=3(x-3)^2, y_3''=6(x-3),$

$y_4=(x-4)^4, y_4'=4(x-4)^3, y_4''=12(x-4)^2,$

$y''=(x-3)P(x)$，其中$P(3)\neq 0$，$y''\big|_{x=3}=0$，在$x=3$两侧，二阶导数符号变化，

故选(C)．

(2)【答案】(C)．

【解析】观察选项：(A)，(B)，(C)，(D)四个选项的收敛半径均为1，幂级数收敛区间的中心在$x=1$处，故(A)，(B)错误；因为$\{a_n\}$单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，所以$a_n\geq 0$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数，将$x=2$代入幂级数得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，而已知$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$无界，故原幂级数在$x=2$处发散，(D)不正确．当$x=0$时，交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$满足莱布尼茨判别法收敛，故$x=0$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛．故正确答案为(C)．

(3)【答案】(A).

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,0)}=f'(x)\cdot\ln f(y)|_{(0,0)}=f'(0)\ln f(0)=0$,

$\frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,0)}=f(x)\cdot\frac{f'(y)}{f(y)}|_{(0,0)}=f'(0)=0$, 故 $f'(0)=0$,

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(0,0)}=f''(x)\cdot\ln f(y)|_{(0,0)}=f''(0)\cdot\ln f(0)>0,$$

$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(0,0)}=f'(x)\cdot\frac{f'(y)}{f(y)}|_{(0,0)}=\frac{[f'(0)]^2}{f(0)}=0,$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{(0,0)}=f(x)\cdot\frac{f''(y)f(y)-[f'(y)]^2}{f^2(y)}|_{(0,0)}=f''(0)-\frac{[f'(0)]^2}{f(0)}=f''(0).$$

又 $AC-B^2=[f''(0)]^2\cdot\ln f(0)>0$, 故 $f(0)>1, f''(0)>0$.

(4)【答案】(B).

【解析】因为 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时， $0<\sin x<\cos x<1<\cot x$ ，

又因 $\ln x$ 是单调递增的函数，所以 $\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$.

故正确答案为(B).

(5)【答案】 (D).

【解析】由于将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B ，故

$$A\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B,$$

即 $AP_1=B$ ， $A=BP_1^{-1}$.

由于交换 B 的第 2 行和第 3 行得单位矩阵，故

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}B=E,$$

即 $P_2B=E$, 故 $B=P_2^{-1}=P_2$. 因此， $A=P_2P_1^{-1}$ ，故选(D).

(6)【答案】(D)．

【解析】由于$(1,0,1,0)^T$是方程组$Ax=0$的一个基础解系，所以$A(1,0,1,0)^T=0$，且$r(A)=4-1=3$，即$\alpha_1+\alpha_3=0$，且$|A|=0$．由此可得$A^*A=|A|E=O$，即$A^*(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=O$，这说明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是$A^*x=0$的解．

由于$r(A)=3$，$\alpha_1+\alpha_3=0$，所以$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关．又由于$r(A)=3$，所以$r(A^*)=1$，因此$A^*x=0$的基础解系中含有$4-1=3$个线性无关的解向量．而$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，且为$A^*x=0$的解，所以$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$可作为$A^*x=0$的基础解系，故选(D)．

(7)【答案】(D)．

【解析】选项(D)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\right]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[F_2(x)dF_1(x)+F_1(x)dF_2(x)\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}d\left[F_1(x)F_2(x)\right]=F_1(x)F_2(x)|_{-\infty}^{+\infty}=1\ .$$

所以$f_1F_2(x)+f_2F_1(x)$为概率密度．

(8)【答案】(B)．

【解析】因为 $U=\max\{X,Y\}=\begin{cases}X, & X\ge Y,\\ Y, & X<Y,\end{cases}$ $V=\min\{X,Y\}=\begin{cases}Y, & X\ge Y,\\ X, & X<Y.\end{cases}$

所以，$UV=XY$，于是$E(UV)=E(XY)=E(X)E(Y)$．

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分，请将答案写在答题纸指定位置上．

(9)【答案】$\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$．

【解析】选取x为参数，则弧微元$ds=\sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{1+\tan^2 x}dx=\sec xdx$

所以$s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec xdx=\ln|\sec x+\tan x|\big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(1+\sqrt{2})$．

(10)【答案】$y=e^{-x}\sin x$．

【解析】由通解公式得

$$y=e^{-\int dx}(\int e^{-x}\cos x\cdot e^{\int dx}dx+C)$$

$$=e^{-x}(\int\cos xdx+C)$$

$$=e^{-x}(\sin x+C)\ .$$

由于 $y(0)=0$, 故 $C=0$. 所以 $y=e^{-x}\sin x$.

(11)【答案】4 .

【解析】$\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\sin xy}{1+(xy)^2}\cdot y$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=y\cdot\frac{y\cos xy-\sin xy\cdot 2xy^2}{[1+(xy)^2]^2}\ ,$$

故 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_{(0,2)}=4$.

(12)【答案】π .

【解析】取 $S:x+y-z=0,x^2+y^2\le 1$ ，取上侧，则由斯托克斯公式得，

$$\text{原式}=\iint_S\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xz & x & \dfrac{y^2}{2}\end{vmatrix}=\iint_S ydydz+xdzdx+dxdy\ .$$

因 $z=x+y,z_x'=1,z_y'=1$. 由转换投影法得

$$\iint_S ydydz+xdzdx+dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1}[y\cdot(-1)+x(-1)+1]dxdy\ .$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}(-x-y+1)dxdy=\pi$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy=\pi\ .$$

(13)【答案】$a=1$.

【解析】由于二次型通过正交变换所得到的标准形前面的系数为二次型对应矩阵 A 的特征值，故 A 的特征

值为0，1，4．二次型所对应的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

由于$|A|=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=0$，故$\begin{vmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=1$．

(14)【答案】$\mu\left(\mu^2+\sigma^2\right)$．

【解析】根据题意，二维随机变量(X,Y)服从$N\left(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0\right)$．因为$\rho_{xy}=0$，所以由二维正态分布的性质知随机变量$X,Y$独立，所以$X,Y^2$．从而有

$$E\left(XY^2\right)=E(X)E\left(Y^2\right)=\mu\left[D(Y)+E^2(Y)\right]=\mu\left(\mu^2+\sigma^2\right).$$

三、解答题：15～23小题，共94分．请将解答写在答题纸指定的位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)(本题满分10分)

【解析】$\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{\ln(1+x)}{x}]^{\frac{1}{e^x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to0}[\frac{\ln(1+x)}{x}-1]\cdot\frac{1}{e^x-1}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-x}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

(16)(本题满分9分)

【解析】$z=f\left[xy,yg(x)\right]$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'[xy,yg(x)]\cdot y+f_2'[xy,yg(x)]\cdot yg'(x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'[xy,yg(x)]+y[f_{11}''(xy,yg(x))x+f_{12}''(xy,yg(x))g(x)]$$

$$+g'(x)\cdot f_2'[xy,yg(x)]+yg'(x)\{f_{12}''[xy,yg(x)]\cdot x+f_{22}''[xy,yg(x)]g(x)\}.$$

因为 $g(x)$ 在 $x=1$ 可导，且为极值,所以 $g'(1)=0$ ，则

$$\frac{d^2z}{dxdy}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)\ .$$

(17)(本题满分 10 分)

【解析】显然 $x=0$ 为方程一个实根．

当 $x\neq 0$ 时，令 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\arctan x}-k,$

$$f'\left(x\right)=\frac{\arctan x-\dfrac{x}{1+x^2}}{\left(\arctan x\right)^2}\ .$$

令 $g\left(x\right)=\arctan x-\dfrac{x}{1+x^2}\qquad x\in R$ ，

$$g'\left(x\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}>0\ ,$$

即 $x\in R,\ g'\left(x\right)>0$ ．

又因为 $g\left(0\right)=0$ ，

即当 $x<0$ 时，$g\left(x\right)<0$ ；当 $x>0$ 时，$g\left(x\right)>0$ ．

当 $x<0$ 时，$f'\left(x\right)<0$ ；当 $x>0$ 时，$f'\left(x\right)>0$ ．

所以当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)$ 单调递减，当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)$ 单调递增

又由 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arctan x}-k=1-k$ ，

$\lim\limits_{x\to \infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{\arctan x}-k=+\infty$ ，

所以当 $1-k<0$ 时，由零点定理可知 $f\left(x\right)$ 在 $(-\infty,0)$ ，$(0,+\infty)$ 内各有一个零点；

当 $1-k\geq 0$ 时，则 $f\left(x\right)$ 在 $(-\infty,0)$ ，$(0,+\infty)$ 内均无零点．

综上所述，当 $k>1$ 时，原方程有三个根．当 $k\leq 1$ 时，原方程有一个根．

(18)(本题满分 10 分)

【解析】(Ⅰ)设 $f(x)=\ln(1+x), x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]$

显然 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{n}\right]$ 上满足拉格朗日的条件，

$$f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 1=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n}, \xi\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$$

所以 $\xi\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$ 时，

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{1+0}\cdot\frac{1}{n}\text{，即：}\frac{1}{n+1}<\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{n}\text{，}$$

$$\text{亦即：}\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}\text{．}$$

结论得证．

(Ⅱ)设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$ ．

先证数列 $\{a_n\}$ 单调递减．

$$a_{n+1}-a_n=\left[\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right]-\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right]=\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\text{，}$$

利用(Ⅰ)的结论可以得到 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})$ ，所以 $\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$ 得到 $a_{n+1}<a_n$ ，即数列 $\{a_n\}$ 单调递减．

再证数列 $\{a_n\}$ 有下界．

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln n\text{，}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)\text{，}$$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln n>\ln(n+1)-\ln n>0\text{．}$$

得到数列$\{a_n\}$有下界．利用单调递减数列且有下界得到$\{a_n\}$收敛．

(19)(本题满分 11 分)

【解析】$I=\int_0^1 xdx\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy=\int_0^1 xdx\int_0^1 ydf'_x(x,y)$

$$=\int_0^1 xdx\left[yf'_x(x,y)|_0^1-\int_0^1 f'_x(x,y)dy\right]$$

$$=\int_0^1 xdx\left(f'_x(x,1)-\int_0^1 f'_x(x,y)dy\right).$$

因为$f(x,1)=0$，所以$f'_x(x,1)=0$．

$$I=-\int_0^1 xdx\int_0^1 f'_x(x,y)dy=-\int_0^1 dy\int_0^1 xf'_x(x,y)dx$$

$$=-\int_0^1 dy\left[xf(x,y)|_0^1-\int_0^1 f(x,y)dx\right]=-\int_0^1 dy\left[f(1,y)-\int_0^1 f(x,y)dx\right]$$

$$=\iint_D fdxdy=a.$$

(20)(本题满分 11 分)

【解析】(I)由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示，对$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$进行初等行变换：

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&3&1&0&1\\1&2&4&0&1&3\\1&3&a&1&1&5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&2&a-3&0&1&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&0&a-5&2&-1&0\end{array}\right).$$

当$a=5$时，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2\neq r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1)=3$，此时，$\alpha_1$不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示．

(II)对$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$进行初等行变换：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right),$$

故 $\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$ ，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$ ，$\beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3$.

(21)(本题满分 11 分)

【解析】(I)由于 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，设 $\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$ ，则

$A(\alpha_1,\alpha_2)=(-\alpha_1,\alpha_2)$ ，即 $A\alpha_1=-\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2$ ，而 $\alpha_1\neq0,\alpha_2\neq0$ ，知 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$ ，对应的特征向量分别为 $k_1\alpha_1(k_1\neq0)$ ，$k_2\alpha_2(k_2\neq0)$.

由于 $r(A)=2$ ，故 $|A|=0$ ，所以 $\lambda_3=0$.

由于 A 是三阶实对称矩阵，故不同特征值对应的特征向量相互正交，设 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$ ，则

$$\begin{cases}\alpha_1^T\alpha_3=0,\\\alpha_2^T\alpha_3=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x_1-x_3=0,\\x_1+x_3=0.\end{cases}$$

解此方程组，得 $\alpha_3=(0,1,0)^T$ ，故 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3(k_3\neq0)$.

(II) 由于不同特征值对应的特征向量已经正交，只需单位化：

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt2}(1,0,-1)^T,\beta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{1}{\sqrt2}(1,0,1)^T,\beta_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=(0,1,0)^T .$$

令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$，

$$A=Q\Lambda Q^T$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

（22）（本题满分 11 分）

【解析】(I)因为 $P\left\{X^2=Y^2\right\}=1$，所以 $P\left\{X^2\neq Y^2\right\}=1-P\left\{X^2=Y^2\right\}=0$.

即 $P\{X=0,Y=-1\}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=1,Y=0\}=0$.

利用边缘概率和联合概率的关系得到

$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}-P\{X=0,Y=-1\}-P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{3}$；

$P\{X=1,Y=-1\}=P\{Y=-1\}-P\{X=0,Y=-1\}=\frac{1}{3}$；

$P\{X=1,Y=1\}=P\{Y=1\}-P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{3}$.

即 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	1/	0
1	1/	0	1/

(II) Z 的所有可能取值为 $-1,0,1$.

$P\{Z=-1\}=P\{X=1,Y=-1\}=\frac{1}{3}$.

$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{3}$.

$P\{Z=0\}=1-P\{Z=1\}-P\{Z=-1\}=\frac{1}{3}$.

$Z=XY$ 的概率分布为

Z	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

(III)因为 $\rho_{XY}=\frac{Cov(XY)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ ，

其中

$E(XY)=E(Z)=-1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=0$ ，$E(Y)=-1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=0$.

所以 $E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0$ ，即 X ，Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0$.

（23）（本题满分 11 分）

【解析】因为总体 X 服从正态分布，故设 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}$ ，$-\infty<x<+\infty$.

(I) 似然函数

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}]=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\bullet e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}$$ ；

取对数：$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}$ ；

求导：$\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d(\sigma^2)}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2(\sigma^2)^2}=\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\mu_0)^2-\sigma^2]$.

令 $\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d(\sigma^2)}=0$ ，解得 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$.

σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$.

(II) 方法 1：

$X_i \sim N(\mu_0,\sigma^2)$，令 $Y_i=X_i-\mu_0\sim N(0,\sigma^2)$，则 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2$.

$$E(\hat{\sigma}^2)=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2)=E(Y_i^2)=D(Y_i)+[E(Y_i)]^2=\sigma^2 .$$

$$D(\hat{\sigma}^2)=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2)=\frac{1}{n^2}D(Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_n^2)=\frac{1}{n}D(Y_i^2)$$

$$=\frac{1}{n}\{E(Y_i^4)-[E(Y_i^2)]^2\}=\frac{1}{n}(3\sigma^4-\sigma^4)=\frac{2\sigma^4}{n} .$$

方法 2：

$X_i\sim N(\mu_0,\sigma^2)$，则 $\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\sim N(0,1)$，得到 $Y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$，即 $\sigma^2Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$.

$$E\left(\hat{\sigma}^2\right)=\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\right]=\frac{1}{n}E\left(\sigma^2Y\right)=\frac{1}{n}\sigma^2E\left(Y\right)=\frac{1}{n}\sigma^2\cdot n=\sigma^2 .$$

$$D\left(\hat{\sigma}^2\right)=\frac{1}{n^2}D\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\right]=\frac{1}{n^2}D\left(\sigma^2Y\right)=\frac{1}{n^2}\sigma^4D\left(Y\right)=\frac{1}{n^2}\sigma^4\cdot 2n=\frac{2}{n}\sigma^4 .$$

2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题参考答案

一、选择题:1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【答案】C

【考点】函数图形的渐近线

【难易度】★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

（i）当曲线上一点 M 沿曲线无限远离原点时，如果 M 到一条直线的距离无限趋近于零，那么这条直线称为这条曲线的渐近线。

（ii）渐近线分为水平渐近线（$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$，$b$ 为常数）、垂直渐近线（$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$）和斜渐近线（$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$，$a,b$ 为常数）。

（iii）注意：如果

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 不存在；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$，但 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$ 不存在，可断定 $f(x)$ 不存在斜渐近线。

在本题中，函数 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的间断点只有 $x=\pm 1$.

由于 $\lim\limits_{x\to 1} y=\infty$，故 $x=1$ 是垂直渐近线.

（而 $\lim\limits_{x\to -1} y=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{2}$，故 $x=-1$ 不是渐近线）.

又 $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=1$，故 $y=1$ 是水平渐近线.（无斜渐近线）

综上可知，渐近线的条数是 2.故选 C.

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$ （ ）

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ (B) $(-1)^n(n-1)!$ (C) $(-1)^{n-1}n!$ (D) $(-1)^n n!$

【答案】A

【考点】导数的概念

【难易度】★★

【详解一】本题涉及到的主要知识点：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

在本题中，按定义

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$$

$=(-1)\times(-2)\times\cdots\times[-(n-1)]=(-1)^{n-1}(n-1)!$.故选 A.

【详解二】本题涉及到的主要知识点：

$f'(x)=[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

在本题中，用乘积求导公式.含因子 e^x-1 项在 $x=0$ 为 0，故只留下一项.于是

$$f'(0)=[e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)]\Big|_{x=0}=(-1)\times(-2)\times\cdots\times[-(n-1)]=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

故选（A）.

(3) 如果函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续,那么下列命题正确的是 （ ）

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在,则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在,则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

(C) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微,则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

(D) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微,则 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

【答案】B

【考点】全微分存在的必要条件和充分条件

【难易度】★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

全微分存在的充分条件　如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续，则函数在该点可微分.

在本题中，若 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}\overset{记}{=\!=}A(\exists)$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$

又 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续 $\Rightarrow f(0,0)=0$.于是

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+y^2}=A$$

由极限与无穷小的关系 $\Rightarrow \dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+y^2}=A+o(1)\begin{pmatrix}x\to 0\\ y\to 0\end{pmatrix}$，

其中 $o(1)$ 为无穷小. $\Rightarrow f(x,y)-f(0,0)=A(x^2+y^2)+(x^2+y^2)o(1)$

$$=0\cdot x+0\cdot y+o(\rho)(\rho\to 0)\ ,$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$.因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微.故选（B）.

（A）不正确，如 $f(x,y)=|x|+|y|$ 满足条件，但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不存在偏导数，故不可微.（C）不正确，如 $f(x,y)=x$ 在 $(0,0)$ 可微，但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x}{|x|+|y|}$ 不存在.（D）也不正确，如 $f(x,y)=x$ 在 $(0,0)$ 可微，但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 不存在.

(4)设 $\mathrm{I}_K=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x dx(k=1,2,3)$，则有（　）

(A) $I_1<I_2<I_3$　(B) $I_3<I_2<I_1$　(C) $I_2<I_3<I_1$　(D) $I_2<I_1<I_3$

【答案】D

【考点】定积分的基本性质

【难易度】★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

设 $a<c<b$，则 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

在本题中，

$I_1=\int_0^{\pi}e^{x^2}\sin xdx$ ，$I_2=\int_0^{2\pi}e^{x^2}\sin xdx$ ，$I_3=\int_0^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx$

$I_2-I_1=\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin xdx<0\Rightarrow I_2<I_1$ ，

$I_3-I_2=\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx>0\Rightarrow I_3>I_2$ ，

$I_3-I_1=\int_{\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx=\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin xdx+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx$

$=\int_{2\pi}^{3\pi}e^{(t-\pi)^2}\sin(t-\pi)dt+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx=\int_{2\pi}^{3\pi}[e^{x^2}-e^{(x-\pi)^2}]\sin xdx>0\Rightarrow I_3>I_1$

因此 $I_2<I_1<I_3$.故选 D.

(5)设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\C_1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\C_2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\C_3\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\C_4\end{pmatrix}$,其中 C_1,C_2,C_3,C_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为( )

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　(C) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

【答案】C

【考点】向量组的线性相关与线性无关

【难易度】★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

n 个 n 维向量相关 $\Leftrightarrow|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=0$

在本题中，显然

$$|\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=0\ ,$$

所以 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 必线性相关.故选 C.

(6) 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $p^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.若 P=（ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ），$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$ ，

则 $Q^{-1}AQ=$ （ ）

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

【答案】B

【考点】矩阵的初等变换；初等矩阵

【难易度】★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

在本题中，由于 P 经列变换为 Q ，有

$$Q=P\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=PE_{12}(1) ,$$

那么 $Q^{-1}AQ=[PE_{12}(1)]^{-1}A[PE_{12}(1)]=E_{12}^{-1}(1)(P^{-1}AP)E_{12}(1)$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$$

故选 B.

(7)设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $P\{X<Y\}=($ $)$

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{5}$

【答案】A

【考点】常见随机变量的分布

【难易度】★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

若随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$

则称 X 服从参数为 λ $(\lambda>0)$ 的指数分布.

在本题中，依题设知 X ，Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

又 X 与 Y 相互独立，从而 X 与 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-(x+4y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

于是 $P\{X<Y\}=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{x<y}4e^{-(x+4y)}dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}4e^{-(x+4y)}dy=\dfrac{1}{5}$

故选 A.

(8)将长度为 $1m$ 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为 ( )

(A) 1 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $-\dfrac{1}{2}$ (D) -1

【答案】D

【考点】相关系数的性质

【难易度】★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

若 $X=aY+b$ ，则当 $a>0$ 时，$\rho_{XY}=1$ ；当 $a<0$ 时，$\rho_{XY}=-1$.

在本题中，设其中一段木棒长度为 X ，另一段木棒长度为 Y ，显然 $X+Y=1$ ，即 $X=1-Y$ ，Y 与 X 之间有明显的线性关系，从而 $\rho_{XY}=-1$.故选 D.

二、填空题：9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$ ，则 $f(x)=$__________

【答案】e^x

【考点】二阶常系数齐次线性微分方程

【难易度】★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的特征方程 $r^2+pr+q=0$ 有两个不同的实根，微分方程的通解形式为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$.

在本题中，因 $f(x)$ 满足

$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ ①

$f''(x)+f(x)=2e^x$ ②

由①、②，得 $f'(x)-3f(x)=-2e^x$，

两边乘以 e^{-3x} 得 $[e^{-3x}f(x)]'=-2e^{-2x}$

积分得 $e^{-3x}f(x)=e^{-2x}+C$，即 $f(x)=e^x+Ce^{3x}$

代入②式得 $e^x+9Ce^{3x}+e^x+Ce^{3x}=2e^x \Rightarrow C=0$，于是 $f(x)=e^x$

代入①式自然成立.因此求得 $f(x)=e^x$.

(10) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=$ ________

【答案】$\frac{\pi}{2}$

【考点】定积分的换元积分法

【难易度】★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

第一类换元法 $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\int_a^b f(x)dx$

在本题中，$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \underline{\underline{t=x-1}} \int_{-1}^1 (t+1)\sqrt{1-t^2}\,dt$

$=\int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt+\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$，

其中$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt$是半单位圆的面积.

(11) $grad(xy+\frac{z}{y})|_{(2,1,1)}=$________

【答案】$\{1,1,1\}$

【考点】梯度

【难易度】★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

$$gradf(x,y,z)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$$

在本题中，记$u=xy+\frac{z}{y}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\text{ ，}\frac{\partial u}{\partial y}=x-\frac{z}{y^2}\text{ ，}\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow gradu|_{(2,1,1)}=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})|_{(2,1,1)}=(1,1,1)$$

因此$grad(xy+\frac{z}{y})|_{(2,1,1)}=(1,1,1)$

(12)设$\Sigma=\{(x,y,z)|x+y+z=1,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\}$，则$\iint\limits_{\Sigma}y^2ds=$________

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{12}$

【考点】曲面积分的计算

【难易度】★★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

曲面积分公式：$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)ds=\iint\limits_{D_{xy}}f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$

在本题中，投影到xy平面上.Σ在xy平面上的投影区域为

$$D_{xy}=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1-x\}$$

由Σ的方程$z=1-x-y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-1$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-1$

现将曲面积分化为二重积分，然后求出积分值.

$$\iint_{\Sigma} y^2 ds=\iint_{D_{xy}} y^2\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=\sqrt{3}\iint_{D_{xy}} y^2dxdy=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} y^2dy$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^1(1-x)^3dx=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{4}[-(1-x)^4]\Big|_0^1=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

(13)设α为 3 维单位列向量，E 为 3 阶单位矩阵，则矩阵$E-\alpha\alpha^T$的秩为______

【答案】2

【考点】矩阵的特征值的性质；实对称矩阵的相似对角矩阵

【难易度】★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

(ⅰ)若$r(A)=1$，则$|\lambda E-A|=\lambda^n-\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\lambda^{n-1}$；

(ⅱ)实对称矩阵必可对角化.

在本题中，设$\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$，则有$\alpha^T\alpha=a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$，又

$$A=\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}(a_1,a_2,a_3)=\begin{bmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3\\a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2\end{bmatrix},$$

易见秩$r(A)=1$.那么$|\lambda E-A|=\lambda^3-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\lambda^2=\lambda^3-\lambda^2$，

所以矩阵A的特征值为 1，0，0，从而$E-A$的特征值为 0，1，1.

又因$E-A$为对称矩阵，从而$E-A\sim\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$，故$r(E-\alpha\alpha^T)=2$.

(14)设A,B,C是随机事件，A 与 C 互不相容，$p(AB)=\frac{1}{2},P(C)=\frac{1}{3},p(AB\overline{C})=$______

【答案】$\frac{3}{4}$

【考点】条件概率

【难易度】★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

条件概率公式 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}(P(A)>0)$

在本题中，由于 A 与 C 互不相容，所以 $AC=\varnothing$ ， $ABC=\varnothing$ ，从而 $P(ABC)=0$.于是

$$P(AB|\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{P(AB)}{1-P(C)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$

【考点】函数单调性的判别

【难易度】★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

函数单调性的判定法　设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导.

①如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$ ，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

②如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$ ，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

证明：令 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$ ，

则转化为证明 $f(x)\geq 0$ （ $x\in(-1,1)$ ）

因 $f(x)=f(-x)$ ，即 $f(x)$ 为偶函数，故只需考察 $x\geq 0$ 的情形.

用单调性方法.

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)-\sin x-x=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\sin x-x,$$

$f''(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}-\cos x-1$ ，

$f'''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{2}{(1+x)^3}+\sin x>0(x\in(0,1])$ ，

其中 $\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1+x)^2}>0$ ，$2[\frac{1}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1+x)^3}]>0$ ，$\sin x>0(x\in(0,1))$

因 $x\in(0,1)$ 时 $f^{(3)}(x)>0$ ，又 $f''(x)$ 在 $[0,1)$ 连续 $\Rightarrow f''(x)$ 在 $[0,1)\nearrow$ ，$f''(x)>f''(0)=2>0$（ $x\in(0,1]$ ），

同理 $f'(x)$ 在 $[0,1)\nearrow$ ，$f'(x)>f'(0)=0(x\in(0,1])\Rightarrow f(x)$ 在 $[0,1)\nearrow$ ，

$f(x)>f(0)=0(x\in(0,1])$.又因 $f(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow f(x)>0(x\in(-1,1),x\neq 0)$ ，$f(0)=0$.即原不等式成立.

(16)求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

【考点】多元函数的极值

【难易度】★★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

二元函数取得极值的充分条件：设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域有连续的二阶偏导数，又 $f_x'(x_0,y_0)=0$ ，$f_y'(x_0,y_0)=0$ ，令 $f''_{xx}(x_0,y_0)=A$ ，$f''_{xy}(x_0,y_0)=B$ ，$f''_{yy}(x_0,y_0)=C$ ，则

（1）当 $AC-B^2>0$ 时，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取极值，且当 $A>0$ 时取极小值，$A<0$ 时取极大值；

（2）当 $AC-B^2<0$ 时，(x_0,y_0) 不是 $f(x,y)$ 的极值点；

（3）当 $AC-B^2=0$ 时，仅此不足以判断 (x_0,y_0) 是否是 $f(x,y)$ 的极值点，还需另作讨论.

在本题中，先求函数的驻点.

$$\begin{cases}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(-x)=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1-x^2)=0\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(-y)=0\end{cases}$$

解得驻点为 $(-1,0)$ ，$(1,0)$

又

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=A=-2xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1-x^2)(-x)\\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=B=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1-x^2)(-y)\\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=C=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(y^2-1)\end{cases}$$

根据判断极值的第二充分条件，

代入（1，0），得 $A=-2e^{-\frac{1}{2}}$，$B=0$，$C=-e^{-\frac{1}{2}}$，从而 $AC-B^2>0$，$A<0$，所以 $f(x,y)$ 在（1，0）取得极大值，极大值为 $e^{-\frac{1}{2}}$；

代入（-1，0），得 $A=2e^{-\frac{1}{2}}$，$B=0$，$C=e^{-\frac{1}{2}}$，从而 $AC-B^2>0$，$A>0$，所以 $f(x,y)$ 在（-1，0）取得极小值，极小值为 $-e^{-\frac{1}{2}}$.

(17)求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

【考点】幂级数的收敛域、和函数

【难易度】★★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

（i）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛域的步骤：

（1）求收敛半径：设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$，则 $R=\begin{cases}1/l, & 0<l<+\infty,\\ 0, & l=+\infty,\\ +\infty, & l=0\end{cases}$

（2）讨论端点的敛散性：如果 $0<R<+\infty$，则需进一步讨论 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=\pm R$ 处的敛散性；

（3）写出幂级数的收敛域.

（ii）和函数的性质：

（1）和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内可导，并且有逐项求导公式：

$$S'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1};$$

（2）在幂级数的收敛域上逐项积分公式成立，即

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

本题中，直接用求收敛半径的公式，先求

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}}{\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(n+1)+1}$$

$$\cdot\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{4n^2+4n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}\cdot\frac{4(1+\frac{1}{n})^2+4(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})+\frac{3}{n^2}}{4+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}=1$$

于是收敛半径 $R=1$

当 $x=1$ 时，原级数= $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}$ ，第 n 项的极限即 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}=\infty\neq 0$ ，所以当 $x=1$ 时，原级数发散；同理可证，$x=-1$ 时，原级数也是发散的.

因此，原级数的收敛域为 $(-1,1)$.

和函数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}[(2n+1)+\frac{2}{2n+1}]x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}\quad(|x|<1)$

令 $S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$ ，$S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}$ ，

因为 $\int_0^x S_1(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(2n+1)t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=\frac{x}{1-x^2}\quad(|x|<1)$ ，

所以 $S_1(x)=(\frac{x}{1-x^2})'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\quad(|x|<1)$.

因为 $xS_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n+1}$ ，所以 $[xS_2(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}2x^{2n}=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{2}{1-x^2}\quad(|x|<1)$

所以 $xS_2(x)=\int_0^x[tS_2(t)]'dt=\int_0^x\frac{2}{1-t^2}dt=\int_0^x(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t})dt=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\quad(|x|<1)$

当 $x\neq 0$ 时，$S_2(x)=\frac{1}{x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ ；

当 $x=0$ 时，$S_1(0)=1$ ，$S_2(0)=2$.

所以 $S(x)=S_1(x)+S_2(x)=\begin{cases}3, & x=0,\\ \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|, & |x|<1, x\neq 0\end{cases}$

(18)已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\ y=\cos t\end{cases}\quad(0\le t<\frac{\pi}{2})$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$ ，$f'(t)>0$ $(0<t<\frac{\pi}{2})$.若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数 $f(t)$ 的表达式，并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

【考点】导数的几何意义、定积分的应用

【难易度】★★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

(ⅰ) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

(ⅱ) 由曲线 $y=f(x)$ $(f(x)\ge 0)$ 及直线 $x=a$ ，$x=b(a<b)$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A 是定积分 $A=\int_a^b f(x)dx$.

(Ⅰ) 求 $f(t)$.

当 $0 \le t < \frac{\pi}{2}$ 时，曲线 L 在切点 $A(f(t), \cos t)$ 处的切线斜率为 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-\sin t}{f'(t)}$ ，

切线方程为 $y = \cos t - \frac{\sin t}{f'(t)}[x - f(t)]$

令 $y = 0$ 得切线与 x 轴的交点 B 的 x 坐标为 $x = f(t) + \frac{\cos t f'(t)}{\sin t}$

于是 B 点坐标为 $(f(t) + \frac{\cos t f'(t)}{\sin t}, 0)$ ，切点 A 的坐标为 $(f(t), \cos t)$

依题设， A 与 B 的距离为 $\sqrt{\frac{f'^2(t)\cos^2 t}{\sin^2 t} + \cos^2 t} = 1$ ，

化简得 $f'(t) = \frac{\sin^2 t}{\cos t}$ ，

积分得 $f(t) = f(0) + \int_0^t \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int_0^t \frac{\sin^2 x - 1 + 1}{1 - \sin^2 x} d\sin x$

$= -\sin t + \frac{1}{2}\int_0^t (\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x}) d\sin x$

$= -\sin t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right| = -\sin t + \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin t)^2}{\cos^2 t}$

$= -\sin t + \ln|\sec t + \tan t|$

（Ⅱ）求无界区域的面积 S

曲线 $L: \begin{cases} x = f(t), \\ y = \cos t \end{cases} \quad (0 \le t < \frac{\pi}{2})$ 可表为 $y = g(x)(0 \le x < +\infty)$ ，当 $t \to \frac{\pi}{2} - 0$ 时 $x \to +\infty$

当 $x = f(t)$ 时 $g(x) = \cos t$ ，于是

$S = \int_0^{+\infty} g(x) dx \underline{\underline{x = f(t)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t df(t)$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot f'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{4}$

(19)已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$ ，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分 $J = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$

【考点】格林公式

【难易度】★★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

格林公式： $\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$

在本题中，记 $J = \int_L Pdx + Qdy$

1）$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=(3x^2+1)-3x^2=1$；

2）曲线 L 不封闭，添加辅助线 L_1：沿 y 轴由点 $B(0,2)$ 到点 $O(0,0)$.

$$\int_{L}Pdx+Qdy=\int_{L_1}Q(0,y)dy=\int_{2}^{0}-2ydy=\int_{0}^{2}2ydy=4$$；

3）在 L_1 与 L 围成的区域 D 上用格林公式（边界取正向，即逆时针方向）：

$$\int_{L+L_1}Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma=\iint_D 1d\sigma=\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2-\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{2}$$，

因此 $J=\int_L Pdx+Qdy=\dfrac{\pi}{2}-4$

(20)设 $A=\begin{bmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

（I）计算行列式 $|A|$；

（II）当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解.

【考点】行列式按行（列）展开定理；非齐次线性方程组有解的充分必要条件

【难易度】★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

（i）行列式按行（列）展开定理：行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$，

或 $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n)$.

（ii）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，方程组 $Ax=b$，则方程组有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})<n$

（I）按第一列展开，即得

$$|A|=1\cdot\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$$

（II）因为 $|A|=0$ 时，方程组 $Ax=\beta$ 有可能有无穷多解.由（I）知 $a=1$ 或 $a=-1$

当 $a=1$ 时，

$$(A|\beta)=\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&2\end{array}\right],$$

由于$r(A)=3$，$r(\overline{A})=4$，故方程组无解.因此，当$a=1$时不合题意，应舍去.

当$a=-1$时，

$$(A|\beta)=\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right],$$

由于$r(A)=r(\overline{A})=3$，故方程组$Ax=\beta$有无穷多解.选x_3为自由变量，得方程组通解为：

$(0,-1,0,0)^T+k(1,1,1,1)^T$（$k$为任意常数）.

(21)

已知$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$，二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$的秩为 2

（Ⅰ）求实数a的值；

（Ⅱ）求正交变换$x=Qy$将f化为标准形.

【考点】二次型的秩；实对称矩阵的特征值和特征向量；用正交变换化二次型为标准形

【难易度】★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

（i）实对称矩阵的特性：不同特征值的特征向量互相正交.

（ii）任给二次型$f=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\,(a_{ij}=a_{ji})$，总有正交变换$x=Py$，使$f$化为标准形

$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$f$的矩阵$A=(a_{ij})$的特征值.

（Ⅰ）二次型$x^T(A^TA)x$的秩为 2，即$r(A^TA)=2$

因为 $r(A^TA)=r(A)$，故 $r(A)=2$.对 A 作初等变换有

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以 $a=-1$.

（Ⅱ）当 $a=-1$ 时，$A^TA=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{bmatrix}$.由

$$\left|\lambda E-A^TA\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6),$$

可知矩阵 A^TA 的特征值为 0，2，6.

对 $\lambda=0$，由 $(0E-A^TA)x=0$ 得基础解系 $(1,1,\text{-}1)^T$，

对 $\lambda=2$，由 $(2E-A^TA)x=0$ 得基础解系 $(1,-1,0)^T$，

对 $\lambda=6$，由 $(6E-A^TA)x=0$ 得基础解系 $(1,1,2)^T$.

实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交，故只需单位化.

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,\text{-}1)^T,\ \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T,\ .\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T$$

于是得到正交矩阵

$$Q=\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{vmatrix}$$

在正交变换 $xQ=y$ 下，二次型的标准形为 $f=2y_2^{\ 2}+6y_3^{\ 2}$.

（22）

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

（Ⅰ）求 $P\{X=2Y\}$；

（Ⅱ）求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

【考点】随机变量的数学期望、方差；协方差及其性质

【难易度】★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

（i）$DX=EX^2-(EX)^2$；

（ii）$Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$，$Cov(X,X)=DX$，

$Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$.

（Ⅰ）由随机变量 (X,Y) 的概率分布可知，

$$P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$$

（Ⅱ）由条件知

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix},\ Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},\ XY\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12}\end{pmatrix},$$

从而 $EX=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ ，

$EY=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=1$ ，

$EY^2=0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$ ，

$E(XY)=0\cdot\frac{7}{12}+1\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$

又 $DY=EY^2-(EY)^2=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$ ，于是

$$Cov(X-Y,Y)=Cov(X,Y)-Cov(Y,Y)=E(XY)-EX\cdot EY-DY=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot 1-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}.$$

(23)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$ ，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$.设 $Z=X-Y.$

（Ⅰ）求 Z 的概率密度 $f(z,\sigma^2)$;

（Ⅱ）设 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\widehat{\sigma}^2$

（Ⅲ）证明 $\widehat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量

【考点】常见随机变量的分布；最大似然估计法；估计量的评选标准

【难易度】★★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

（i）正态分布 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}$ ，$-\infty<x<+\infty$

（ii）似然函数 $L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$ ，对数似然方程 $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0$

（iii）若估计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的数学期望 $E(\hat{\theta})$ 存在，且对于任意 $\theta\in\Theta$ 有 $E(\hat{\theta})=\theta$ ，则称 $\hat{\theta}$ 是未知参数 θ 的无偏估计量.

（Ⅰ）由条件知 Z 服从正态分布，且

$EZ=E(X-Y)=EX-EY=0$ ，$DZ=D(X-Y)=DX+DY=3\sigma^2$ ，

即 $Z\sim N(0,3\sigma^2)$ ，从而 Z 的概率密度为

$$f(z;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{3\sigma^2}}e^{-\frac{(z-0)^2}{2\cdot 3\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}，-\infty<z<+\infty.$$

（Ⅱ）由条件知似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(z_i;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{z_i^2}{6\sigma^2}}=\frac{1}{(\sqrt{6\pi})^n\sigma^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}z_i^2}{6\sigma^2}}$$，$-\infty<z_i<+\infty$，$i=1,2,\cdots,n$，

$$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln 6\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$$，

令$\dfrac{d\ln(\sigma^2)}{d(\sigma^2)}=-\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{1}{\sigma^2}+\dfrac{1}{6\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=0$，解得$\sigma^2=\dfrac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$.

于是σ^2的最大似然估计量为$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$.

（Ⅲ）由于$E\hat{\sigma}^2=E(\dfrac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2)=\dfrac{1}{3n}E(\sum_{i=1}^{n}Z_i^2)=\dfrac{1}{3n}\cdot nEZ^2$

$$=\frac{1}{3}[DZ+(EZ)^2]=\frac{1}{3}(3\sigma^2+0)=\sigma^2$$，

从而可知，$\hat{\sigma}^2$为σ^2的无偏估计量.

2013 年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题参考答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）已知极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中$c,k$为常数，且$c\neq0$，则（　）

（A）$k=2,c=-\dfrac{1}{2}$

（B）$k=2,c=\dfrac{1}{2}$

（C）$k=3,c=-\dfrac{1}{3}$

（D）$k=3,c=\frac{1}{3}$

【答案】D

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3))}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^k}=c,\therefore k=3,\ c=\frac{1}{3}$

（2）曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为（　　）

（A）$x-y+z=-2$

（B）$x+y+z=2$

（C）$x-2y+z=-3$

（D）$x-y-z=0$

【答案】A

【解析】设 $F(x,y,z)=x^2+\cos(xy)+yz+x$ ，

则 $F_x(x,y,z)=2x-y\sin(xy)+1\Rightarrow F_x(0,1,-1)=1$ ；

$F_y(x,y,z)=-x\sin(xy)+z\Rightarrow F_y(0,1,-1)=-1$ ；

$F_z(x,y,z)=y\Rightarrow F_z(0,1,-1)=1$ ，

所以该曲面在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为 $x-(y-1)+(z+1)=0$ ，

化简得 $x-y+z=-2$ ，选 A

（3）设 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|,(x\in[0,1])$ ，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx(n=1,2,\ldots)$ ，令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ ，则 $S(-\frac{9}{4})=$（　　）

（A）$\frac{3}{4}$

（B）$\frac{1}{4}$

（C）$-\frac{1}{4}$

（D）$-\frac{3}{4}$

【答案】C

【解析】根据题意，将函数在$[-1,1]$上奇延拓 $f(x)=\begin{cases}\left|x-\dfrac{1}{2}\right|, & 0<x<1\\ -\left|-x-\dfrac{1}{2}\right|, & -1<x<0\end{cases}$，它的傅里叶级数为 $S(x)$ 它是以 2 为周期的，则当 $x\in(-1,1)$ 且 $f(x)$ 在 x 处连续时，$S(x)=f(x)$，因此

$$S(-\frac{9}{4})=S(-\frac{9}{4}+2)=S(-\frac{1}{4})=-S(\frac{1}{4})=-f(\frac{1}{4})=-\frac{1}{4}$$

（4）设 $l_1:x^2+y^2=1,l_2:x^2+y^2=2,l_3:x^2+2y^2=2,l_4:2x^2+y^2=2,$ 为四条逆时针的平面曲线，记

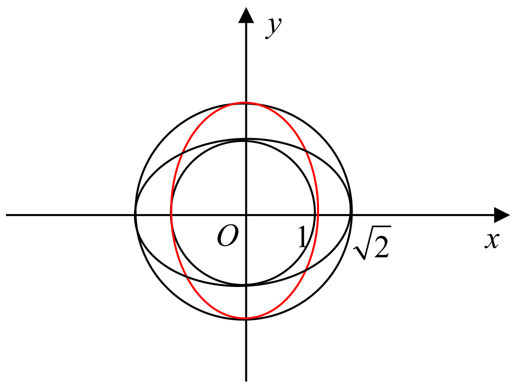
$I_i=\oint\limits_{l_i}(y+\dfrac{y^3}{6})dx+(2x-\dfrac{x^3}{3})dy(i=1,2,3,4)$，则 $MAX(I_i)=($　　$)$

（A）I_1

（B）I_2

（C）I_3

（D）I_4



【答案】D

【解析】$I_i=\oint\limits_{l_i}(y+\dfrac{y^3}{6})dx+(2x-\dfrac{x^3}{3})dy(i=1,2,3,4)$

$$=\iint\limits_{D_i}(1-x^2-\frac{y^2}{2})dxdy$$

利用二重积分的几何意义，比较积分区域以及函数的正负，在区域 D_1,D_4 上函数为正值，则区域大，积分大，所以 $I_4>I_1$，在 D_4 之外函数值为负，因此 $I_4>I_2,I_4>I_3$，故选 D。

（5）设矩阵 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$，且 B 可逆，则（　　）

（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

（D）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价

【答案】（B）

【解析】由 $C = AB$ 可知 C 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表示，又 B 可逆，故有 $A = CB^{-1}$，从而 A 的列向量组也可以由 C 的列向量组线性表示，故根据向量组等价的定义可知正确选项为（B）。

（6）矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \text{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

（A）$a = 0, b = 2$

（B）$a = 0, b$ 为任意常数

（C）$a = 2, b = 0$

（D）$a = 2, b$ 为任意常数

【答案】(B)

【解析】由于 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 为实对称矩阵，故一定可以相似对角化，从而 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \text{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $2, b, 0$。

又 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - b & -a \\ -1 & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda[(\lambda - b)(\lambda - 2) - 2a^2]$，从而 $a = 0, b$ 为任意常数。

（7）设 X_1，X_2，X_3 是随机变量，且 $X_1 \sim N(0,1)$，$X_2 \sim N(0, 2^2)$，$X_3 \sim N(5, 3^2)$，

$P_j = P\{-2 \le X_j \le 2\}(j = 1,2,3)$, 则（　　）

（A）$P_1 > P_2 > P_3$

（B）$P_2 > P_1 > P_3$

（C）$P_3 > P_1 > P_2$

（D）$P_1 > P_3 > P_2$

【答案】（A）

【解析】由 $X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim N(0,2^2), X_3 \sim N(5,3^2)$ 知，

$p_1 = P\{-2 \le X_1 \le 2\} = P\{|X_1| \le 2\} = 2\Phi(2)-1$ ，

$p_2 = P\{-2 \le X_2 \le 2\} = P\{|X_2| \le 2\} = 2\Phi(1)-1$ ，故 $p_1 > p_2$.

由根据 $X_3 \sim N(5,3^2)$ 及概率密度的对称性知，$p_1 > p_2 > p_3$ ，故选（A）

（8）设随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1,n)$, 给定 $a(0<a<0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X>c\}=a$,则 $P\{Y>c^2\}=$（ ）

（A）α

（B）$1-\alpha$

（C）2α

（D）$1-2\alpha$

【答案】（C）

【解析】由 $X \sim t(n), Y \sim F(1,n)$ 得，$Y = X^2$ ，故 $P\{Y>c^2\} = P\{X^2>c^2\} = P\{X<-c \text{或} X>c\} = 2a$

二、填空题(9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上)．

(9)设函数 $f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n(f(\frac{1}{n})-1) =$ ________ .

【答案】1

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty} n(f(\frac{1}{n})-1) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = f'(0)$

由 $y-x=e^{x(1-y)}$ ，当 $x=0$ 时，$y=1$

方程两边取对数 $\ln(y-x)=x(1-y)$

两边同时对 x 求导，得 $\frac{1}{y-x}(y'-1)=(1-y)-xy'$

将 $x=0$ ，$y=1$ 代入上式，得 $f'(0)=1$

(10)已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$ ，$y_2=e^{x}-xe^{2x}$ ，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，该方程

的通解为 $y=$________________ .

【答案】$y=C_1e^{3x}+C_2e^{x}-xe^{2x}$

【解析】因 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$ ，$y_2=e^{x}-xe^{2x}$ 是非齐次线性线性微分方程的解，则 $y_1-y_2=e^{3x}-e^{x}$ 是它所对应的齐次线性微分方程的解，可知对应的齐次线性微分方程的通解为 $y_p=C_1e^{3x}+C_2e^{x}$ ，因此该方程的通解可写为 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{x}-xe^{2x}$

(11)设 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$ （t 为参数），则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$________________ .

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】$\dfrac{dy}{dt}=\sin t+t\cos t-\sin t=t\cos t,\dfrac{dx}{dt}=\cos t$ ，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t\cos t}{\cos t}=t$ ，

$\dfrac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}=1$ ，所以 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{\cos t}$ ，所以 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$

(12) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$________________ .

【答案】$\ln 2$

【解析】$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=-\int_1^{+\infty}\ln x d(\frac{1}{1+x})=-\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx=[\ln x-\ln(1+x)]\Big|_1^{+\infty}=\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}=\ln 2$$

（13）设 $A=(a_{ij})$ 是三阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$, 则 $|A|=$_____

【答案】-1

【解析】

由 $a_{ij}+A_{ij}=0$ 可知，$A^T=-A^*$

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}$$

$$= -\sum_{j=1}^{3} a_{ij}^2 = -\sum_{i=1}^{3} a_{ij}^2 < 0$$

从而有$|A| = |A^T| = |-A^*| = -|A|^2$，故$|A|$=-1.

（14）设随机变量 X 服从标准正态分布 $X \sim N(0,1)$，则 $E(Xe^{2X})$ = ______。

【答案】$1-\frac{1}{e}$

【解析】由 $X \sim N(0,1)$ 及随机变量函数的期望公式知

$$E\left(Xe^{2X}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{2x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{1}{2}\left[(x-2)^2-4\right]} dx = 2e^2 .$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$，其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$

【解析】 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{\int_0^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt}{\sqrt{x}} dx = -\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \int_x^1 \frac{\ln(t+1)}{t} dt$

$$= -\int_0^1 dt \int_0^t \frac{\ln(t+1)}{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = -2\int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t} \cdot \sqrt{t} dt = -2\int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{\sqrt{t}} dt$$

$$= -4\int_0^1 \ln(t+1) d\sqrt{t} = -4\left[\sqrt{t}\ln(t+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t+1} dt\right]$$

$$= -4\ln 2 + 4\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t+1} dt = -4\ln 2 + 4\int_0^1 \frac{u}{u^2+1} \cdot 2u du$$

$$= -4\ln 2 + 8\int_0^1 \frac{u^2+1-1}{u^2+1} du = -4\ln 2 + 8\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{u^2+1}\right) du$$

$$= -4\ln 2 + 8\left(u - \arctan u\right)\Big|_0^1 = -4\ln 2 + 8(1 - \frac{\pi}{4}) = -4\ln 2 + 8 - 2\pi$$

（16）（本题满分 10 分）

设数列$\{a_n\}$满足条件：$a_0=3,a_1=1,a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geq 2)$，$S(x)$是幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数，

（III） 证明：$S''(x)-S(x)=0$，

（IV） 求$S(x)$的表达式.

【解析】（I）设$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$，$S'(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}$，

因为$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0$，因此$S''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$；

（II）方程$S''(x)-S(x)=0$的特征方程为$\lambda^2-1=0$，

解得$\lambda_1=-1,\lambda_1=1$，所以$S(x)=c_1e^{-x}+c_2e^x$，

又$a_0=S(0)=3\Rightarrow c_1+c_2=3$，$a_1=S'(0)=1\Rightarrow c_1-c_2=1$，

解得$c_1=2,c_2=-1$，所以$S(x)=2e^{-x}-e^x$。

17（本题满分 10 分）

求函数$f(x,y)=(y+\dfrac{x^3}{3})e^{x+y}$的极值.

【解析】$\begin{cases} f_x'=x^2e^{x+y}+(y+\dfrac{x^3}{3})e^{x+y}=(x^2+y+\dfrac{x^3}{3})e^{x+y}=0 \\ f_y'=e^{x+y}+(y+\dfrac{x^3}{3})e^{x+y}=(1+y+\dfrac{x^3}{3})e^{x+y}=0 \end{cases}$

解得$(1,-\dfrac{4}{3}),(-1,-\dfrac{2}{3})$，

$$A=f_{xx}''=(2x+x^2)e^{x+y}+(x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=(\frac{x^3}{3}+2x^2+2x+y)e^{x+y}$$

$$B=f_{xy}''=e^{x+y}+(x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=(\frac{x^3}{3}+x^2+y+1)e^{x+y}$$

$$C=f_{yy}''=e^{x+y}+(1+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=(\frac{x^3}{3}+y+2)e^{x+y}$$

对于$(1,-\dfrac{4}{3})$点，$A=3e^{-\frac{1}{3}},B=e^{-\frac{1}{3}},C=e^{-\frac{1}{3}},\Delta=AC-B^2>0,A>0,$

$\therefore (1,-\frac{4}{3})$ 为极小值点，极小值为 $-e^{-\frac{1}{3}}$

对于 $(-1,-\frac{2}{3})$ ，$A=-e^{-\frac{5}{3}},B=e^{-\frac{5}{3}},C=e^{-\frac{5}{3}},\Delta=AC-B^2<0$,不是极值.

（18）（本题满分 10 分）

设奇函数 $f(x)$在$[-1,1]$上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1$, 证明：

（III） 存在$\xi\in(0,1)$, 使得$f'(\xi)=1$

（IV） 存在$\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

【解析】（1）令 $F(x)=f(x)-x, F(0)=f(0)=0, F(1)=f(1)-1=0,$

则$\exists\xi\in(0,1)$使得 $F'(\xi)=0$, 即$f'(\xi)=1$

（2）令 $G(x)=e^x(f'(x)-1)$, 则 $G(\xi)=0,$

又由于 $f(x)$ 为奇函数，故 $f'(x)$ 为偶函数，可知 $G(-\xi)=0$,

则$\exists\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$使 $G'(\xi)=0,$

即 $e^{\eta}[f'(\eta)-1]+e^{\eta}f''(\eta)=0$ ，即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

（19）（本题满分 10 分）

设直线 L 过 $A(1,0,0),B(0,1,1)$ 两点 将 L 绕 Z 轴旋转一周得到曲面Σ, Σ与平面 $z=0,z=2$ 所围成的立体为Ω，

（III） 求曲面Σ的方程

（IV） 求Ω的形心坐标.

【解析】（1）l 过 A,B 两点，所以其直线方程为：$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{1}\Rightarrow\begin{cases}x=1-z\\y=z\end{cases}$

所以其绕着 z 轴旋转一周的曲面方程为：

$$x^2+y^2=(1-z)^2+z^2\Rightarrow\frac{x^2+y^2}{2}-(z-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$$

（2）由形心坐标计算公式可得 $\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz}{\iiint\limits_{\Omega} dxdydz}=\dfrac{\pi\int_0^2\left[z(1-z)^2+z^2\right]dz}{\pi\int_0^2\left[(1-z)^2+z^2\right]dz}=\dfrac{7}{5}$，所以形心坐标为 $(0,0,\dfrac{7}{5})$

（20）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C。

【解析】由题意可知矩阵 C 为 2 阶矩阵，故可设 $C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，则由 $AC-CA=B$ 可得线性方程组：

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\ -ax_1+x_2+ax_4=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases}\qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 0 & -1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a\\ 0 & -1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1-a\end{pmatrix}$$

由于方程组（1）有解，故有 $1+a=0,b-1-a=0$，即 $a=-1,b=0,$ 从而有

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$，故有 $\begin{cases}x_1=k_1+k_2+1\\ x_2=-k_1\\ x_3=k_1\\ x_4=k_2\end{cases}$，其中 k_1、k_2 任意.

从而有 $C=\begin{pmatrix}k_1+k_2+1 & -k_1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}$

（21）（本题满分 11 分）

设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)^2+\left(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3\right)^2$，记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$。

（I）证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$；

（Ⅱ）若 α,β 正交且均为单位向量，证明二次型 f 在正交变化下的标准形为二次型 $2y_1^2+y_2^2$。

【解析】(1)

$$f=(2a_1^2+b_1^2)x_1^2+(2a_2^2+b_2^2)x_2^2+(2a_3^2+b_3^2)x_3^2+(4a_1a_2+2b_1b_2)x_1x_2$$
$$+(4a_1a_3+b_1b_3)x_1x_3+(4a_2a_3+2b_2b_3)x_2x_3$$

$$\text{则}f\text{的矩阵为}\begin{pmatrix}2a_1^2+b_1^2 & 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_1a_3+b_1b_3\\ 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_2^2+b_2^2 & 2a_2a_3+b_2b_3\\ 2a_1a_3+b_1b_3 & 2a_2a_3+b_2b_3 & 2a_3^2+b_3^2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3\\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3\\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3\\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2\end{pmatrix}$$
$$=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$$

（2）令 $A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，则 $A\alpha=2\alpha\alpha^T\alpha+\beta\beta^T\alpha=2\alpha, A\beta=2\alpha\alpha^T\beta+\beta\beta^T\beta=\beta$，则 1,2 均为 A 的特征值，又由于 $r(A)=r(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)=2$，故 0 为 A 的特征值，则三阶矩阵 A 的特征值为 2,1,0，故 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2 & 0<x<3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，令随机变量 $Y=\begin{cases}2 & x\le 1\\ x & 1<x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$，

（Ⅰ）求 Y 的分布函数

（Ⅱ）求概率 $P\{X\le Y\}$

【解析】（1）$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

由 Y 的概率分布知，当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y>2$ 时，$F_Y(y)=1$；

当 $1\le y\le 2$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y=1\}+P\{1<Y\le y\}=P\{Y=1\}+P\{1<X\le y\}$

$$=P\{X\ge 2\}+P\{1<X\le y\}=\int_2^3\frac{1}{9}x^2dx+\int_1^y\frac{1}{9}x^2dx$$
$$=\frac{1}{27}(y^3+18)$$

(2) $P\{X\le Y\}=P\{X\le Y,X\le 1\}+P\{X\le Y,1<X<2\}+P\{X\le Y,X>2\}=\dfrac{8}{27}$

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots X_N$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求 θ 的矩估计量；

（2）求 θ 的最大似然估计量.

【解析】(1) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}dx=\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\theta}{x}}d(-\dfrac{\theta}{x})=\theta$ ，令 $EX=\overline{X}$ ，故 θ 矩估计量为 $\overline{X}$.

(2) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{\theta^2}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}} & x_i>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\theta^{2n}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}} & x_i>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

当 $x_i>0$ 时，

$$\ln L(\theta)=2n\ln\theta-3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$$

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}=0$ ，

得 $\theta=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$ ，所以得 θ 极大似然估计量 $\hat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$.

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题参考答案

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列曲线有渐近线的是 ( )

(A) $y = x + \sin x$ (B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin\frac{1}{x}$ (D) $y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$

【答案】(C)

【解析】关于 C 选项：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}1 + \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x} = 1+0=1$ ，又

$\lim\limits_{x\to\infty}[x+\sin\frac{1}{x}-x] = \lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$ ，所以 $y = x+\sin\frac{1}{x}$ 存在斜渐近线 $y = x$.

故选(C).

(2) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$ ，则在区间 $[0,1]$ 上 ( )

(A) 当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$ (B) 当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

(C) 当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$ (D) 当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

【答案】(D)

【解析】令 $F(x) = g(x) - f(x) = f(0)(1-x) + f(1)x - f(x)$ ，则

$$F(0) = F(1) = 0,$$

$$F'(x) = -f(0) + f(1) - f'(x), F''(x) = -f''(x).$$

若 $f''(x)\ge 0$ ，则 $F''(x)\le 0$ ，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上为凸的.

又 $F(0) = F(1) = 0$ ，所以当 $x\in[0,1]$ 时，$F(x)\ge 0$ ，从而 $g(x)\ge f(x)$.

故选(D).

(3) 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx =$ ( )

(A) $\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy + \int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

(B) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy + \int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

【答案】(D)

【解析】

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx = \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr .$$

故选(D).

(4) 若 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1\cos x - b_1\sin x)^2 dx = \min\limits_{a,b\in R} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2 dx \right\}$，则

$a_1\cos x + b_1\sin x =$ ( )

(A) $2\sin x$　　(B) $2\cos x$　　(C) $2\pi\sin x$　　(D) $2\pi\cos x$

【答案】(A)

【解析】

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[(x - b\sin x)^2 - 2a\cos x(x - b\sin x) + a^2 x\cos^2 x \right] dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - 2bx\sin x + b^2\sin^2 x + a^2\cos^2 x) dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx + 2\int_0^{\pi} (b^2\sin^2 x + a^2\cos^2 x - 2bx\sin x) dx$$

$$= 4(a^2 + b^2)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} - 4b\frac{\pi}{2}\cdot 2 + \frac{2}{3}\pi^3$$

$$= \pi(a^2 + b^2 - 4b) + \frac{2}{3}\pi^3$$

$$= \pi\left[a^2 + (b-2)^2 - 4 \right] + \frac{2}{3}\pi^3$$

当 $a = 0, b = 2$ 时，积分最小.

故选(A).

(5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ ( )

(A) $(ad-bc)^2$ (B) $-(ad-bc)^2$ (C) $a^2d^2-b^2c^2$ (D) $b^2c^2-a^2d^2$

【答案】(B)

【解析】由行列式的展开定理展开第一列

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -ad(ad-bc)+bc(ad-bc)$$

$$= -(ad-bc)^2.$$

故选(B).

(6) 设a_1,a_2,a_3均为三维向量，则对任意常数k,l,向量组a_1+ka_3,a_2+la_3线性无关是向量组

$\boldsymbol{B}=\left(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3\right)$线性无关的 ( )

(A)必要非充分条件 (B)充分非必要条件

(C)充分必要条件 (D)既非充分也非必要条件

【答案】(A)

【解析】$\left(\alpha_1+k\alpha_3 \quad \alpha_2+l\alpha_3\right)=\left(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$.

$\Leftarrow$) 记$A=\left(\alpha_1+k\alpha_3 \quad \alpha_2+l\alpha_3\right)$，$B=\left(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3\right)$，$A$. 若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则

$r(A)=r(BC)=r(C)=2$，故$P(A-B)=0.3$线性无关.

$P(B-A)=$ 举反例. 令$\alpha_3=0$，则α_1,α_2线性无关，但此时$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$却线性相关.

综上所述，对任意常数$Q=40-2p$，向量p线性无关是向量D线性无关的必要非充分条件.

故选(A).

(7) 设随机事件A与B相互独立，且$P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则$P(B-A)=$ ( )

(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4

【答案】(B)

【解析】 已知 $a=$ ，$\because A$ 与 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1{}^2-x_2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 独立，a ，

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$$

$$=P(A)-0.5P(A)=0.5P(A)=0.3\ ,$$

则 $\quad P(A)=0.6$ ，

则 $P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)=0.5-0.5\times0.6=0.5-0.3=0.2$.

故选(B).

(8) 设连续性随机变量 X_1 与 X_2 相互独立，且方差均存在， X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ ，随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$ ，随机变量 $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$ ，则 ( )

(A) $EY_1>EY_2$ ，$DY_1>DY_2$ (B) $EY_1=EY_2$ ，$DY_1=DY_2$

(C) $EY_1=EY_2$ ，$DY_1<DY_2$ (D) $EY_1=EY_2$ ，$DY_1>DY_2$

【答案】(D)

【解析】 用特殊值法. 不妨设 $X_1,X_2\sim N(0,1)$ ，相互独立.

$$f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\ ,\ Y_1\sim N(0,1)\,.$$

$$Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)\ ,\ E(Y_2)=\frac{1}{2}(E(X_1)+E(X_2))=0,D(Y_2)=\frac{1}{4}(D(X_1)+D(X_2))=\frac{1}{2}\,.$$

$$E(Y_1)=E(Y_2)=0,D(Y_1)=1>D(Y_2)=\frac{1}{2}\,.$$

故选(D).

二、填空题：9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为________.

【答案】 $2x-y-z=1$

【解析】由于 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ ，所以

$$z_x' = 2x(1-\sin y) - \cos x \cdot y^2 \text{ ， } z_x'(1,0) = 2 \text{ ；}$$

$$z_y' = -x^2 \cos y + 2y(1-\sin x) \text{ ， } z_y'(1,0) = -1 .$$

所以，曲面在点$(1,0,1)$处的法向量为$\vec{n} = \{2,-1,-1\}$.

故切平面方程为$2(x-1)+(-1)(y-0)-(z-1)=0$，即

$$2x - y - z = 1 .$$

(10) 设$f(x)$是周期为 4 的可导奇函数，且$f'(x) = 2(x-1),\quad x \in [0,2]$，则$f(7) =$________.

【答案】1

【解析】由于$f'(x) = 2(x-1)$，$x \in [0,2]$，所以$f(x) = (x-1)^2 + C$，$x \in [0,2]$.

又$f(x)$为奇函数，$f(0) = 0$，代入表达式得$C = -1$，故

$$f(x) = (x-1)^2 - 1 \text{ ， } x \in [0,2] .$$

$f(x)$是以 4 为周期的奇函数，故

$$f(7) = f(-1+8) = f(-1) = -f(1) = -[(1-1)^2 - 1] = 1 .$$

(11) 微分方程$xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$满足条件$y(1) = e^3$的解为$y =$________.

【答案】$y = xe^{2x+1} (x > 0)$

【解析】$xy' + y(\ln x - \ln y) = 0 \Rightarrow y' = \frac{y}{x}\ln(\frac{y}{x})$.

令$u = \frac{y}{x}$，则$y = x \cdot u$，$y' = xu' + u$，代入原方程得

$$xu' + u = u\ln u \Rightarrow u' = \frac{u(\ln u - 1)}{x}$$

分离变量得，$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$，两边积分可得

$$\ln|\ln u - 1| = \ln x + C \text{ ，即 } \ln u - 1 = Cx .$$

故$\ln\frac{y}{x} - 1 = Cx$. 代入初值条件$y(1) = e^3$，可得$C = 2$，即$\ln\frac{y}{x} = 2x + 1$.

由上，方程的解为$y = xe^{2x+1}, (x > 0)$.

(12) 设L是柱面$x^2 + y^2 = 1$与平面$y + z = 0$的交线，从z轴正向往z轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分

$\oint_L zdx + ydz =$______.

【答案】π

【解析】由斯托克斯公式，得

$$\oint_L zdx + ydz = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & 0 & y \end{vmatrix} = \iint_\Sigma dydz + dzdx$$

$$= \iint_{D_{xy}} dydz + dzdx = \pi \text{ ，}$$

其中 $D_{xy} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围______.

【答案】$[-2,2]$

【解析】配方法：$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + ax_3)^2 - a^2x_3^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + 4x_3^2$

由于二次型负惯性指数为 1，所以 $4 - a^2 \ge 0$，故 $-2 \le a \le 2$.

(14) 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, \theta < x < 2\theta, \\ 0, \quad 其他, \end{cases}$ 其中 θ 是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单样本，若 $E(c\sum_{i=1}^{n} X_i^2) = \theta^2$，则 $c =$______.

【答案】$\frac{2}{5n}$

【解析】$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x;\theta)dx = \int_\theta^{2\theta} x^2 \cdot \frac{2x}{3\theta^2} dx$

$$= \frac{2}{3\theta^2} \cdot \frac{1}{4} x^4 \Big|_\theta^{2\theta} = \frac{5\theta^2}{2} \text{ ，}$$

$$E[c\sum_{i=1}^{n} X_i^2] = ncE(X^2) = \frac{5n}{2}\theta^2 \cdot c = \theta^2 \text{ ，}$$

$$\therefore \quad c = \frac{2}{5n}.$$

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步

骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\cdot\dfrac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}[x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-x]$$

$$\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1}{2t}=\lim_{t\to0^+}\frac{t}{2t}=\frac{1}{2}.$$

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y=f\left(x\right)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f\left(x\right)$ 的极值.

【解析】对方程两边直接求导：

$$3y^2y'+y^2+2xyy'+x^2y'+2xy=0 \qquad ①$$

令 x_1 为极值点，则由极值必要性知： $y'(x_1)=0$ ，代入①式得：

$$y^2(x_1)+2x_1y(x_1)=0.$$

即 $y(x_1)=0$ 或 $y(x_1)=-2x_1$. 将其代入原方程知： $y(x_1)=0$ （舍去），即 $y(x_1)=-2x_1$. 代入，有 $-8x_1^3+4x_1^3-2x_1^3+6=0$ ，$\therefore x_1=1$. 即 $y(1)=-2$ ，$y'(1)=0$.

对①式两边再求导：

$$6y(y')^2+3y^2y''+2yy'+2x(y')^2+2xyy''+2yy'+2xy'+x^2y''+2y+2xy'=0 .$$

将 $y(1)=-2$ ，$y'(1)=0$ 代入得： $y''(1)=\dfrac{4}{9}>0$.

$\therefore y=f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值， $y=f(1)=-2$.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f\left(e^x\cos y\right)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$ 若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

【解析】

$$因为\frac{\partial z}{\partial x}=f'(e^x\cos y)e^x\cos y, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\cos^2 y+f'(e^x\cos y)e^x\cos y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(e^x\cos y)e^x\sin y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\cos^2 y-f'(e^x\cos y)e^x\cos y$$

$$所以，f''(e^x\cos y)e^{2x}=\left[4f(e^x\cos y)+e^x\cos y\right]e^{2x}$$

$$f''(u)=4f(u)+u$$

上述方程的通解为

$$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{u}{4}$$

由 $f(0)=0, f'(0)=0$ 得

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ 2C_1-2C_2=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$解得，C_1=\frac{1}{16}, C_2=-\frac{1}{16}$$

$$故，f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}C_2e^{-2u}-\frac{u}{4}$$

(18)(本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ $(z\le 1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy .$$

【解析】$\sum$ 非闭，补 Σ_1 ：平面 $z=1$，被 $z=x^2+y^2$ 所截有限部分下侧，由 Gauss 公式，有

$$-\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1\right]dV$$

$$=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV-6\iiint\limits_{\Omega}xdV-6\iiint\limits_{\Omega}ydV+7\iiint\limits_{\Omega}dV$$

$\sum$ 和 $\sum_1$ 所围立体为 Ω ，Ω 关于 yoz 面和 zox 面对称，则 $\iiint\limits_{\Omega}xdV=\iiint\limits_{\Omega}ydV=0$

$$\because\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy\int_{x^2+y^2}^{1}dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2(1-r^2)rdr$$

$$=2\pi(\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{6}r^6)\Big|_0^1=2\pi(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})=\frac{\pi}{6}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}dV=\int_0^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z}dxdy=\int_0^1\pi zdz=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore-\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}=3\cdot\frac{\pi}{6}+7\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{7}{2}\pi=4\pi$$

$$\therefore-\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}=4\pi$$

$$又\because\iint\limits_{\Sigma_1}=\iint\limits_{\Sigma_1}(z-1)dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(1-1)dxdy=0$$

$$\therefore I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_{11}}-\iint\limits_{\Sigma_1}=-4\pi$$

(19)(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\frac{\pi}{2}$ ，$0<b_n<\frac{\pi}{2}$ ，$\cos a_n-a_n=\cos b_n$ ，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

(I) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(II) 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

【解析】(I) $\because\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛　　$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

$$\because a_n=\cos a_n-\cos b_n=-2\sin\frac{a_n+b_n}{2}\sin\frac{a_n-b_n}{2}>0$$

$$\therefore\sin\frac{a_n-b_n}{2}<0$$

$$又\because-\frac{\pi}{4}<\frac{a_n-b_n}{2}<\frac{\pi}{4}，\therefore-\frac{\pi}{4}<\frac{a_n-b_n}{2}<0$$

即：$a_n<b_n$

又 $\because 0<a_n<b_n,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$　$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

(II)证明：由(I) $a_n=-2\sin\frac{a_n+b_n}{2}\sin\frac{a_n-b_n}{2}$

$$\therefore \frac{a_n}{b_n}=\frac{-2\sin\frac{a_n+b_n}{2}\sin\frac{a_n-b_n}{2}}{b_n}$$

$$\le\frac{2\frac{a_n+b_n}{2}\frac{b_n-a_n}{2}}{b_n}=\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}<\frac{b_n^2}{2b_n}=\frac{b_n}{2}$$

又$\because \sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2}$收敛,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$收敛

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$，$E$ 为三阶单位矩阵.

(I)求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

(II)求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B.

【解析】

$$(A|E)=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&-3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&4&-3&1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{pmatrix},$$

(I) $Ax=0$ 的基础解系为 $\xi=(-1,2,3,1)^T$

(II) $e_1=(1,0,0)^T,e_2=(0,1,0)^T,e_3=(0,0,1)^T$

$Ax=e_1$ 的通解为 $x=k_1\xi+(2,-1,-1,0)^T=(2-k_1,-1+2k_1,-1+3k_1,k_1)^T$

$Ax=e_2$ 的通解为 $x=k_2\xi+(6,-3,-4,0)^T=(6-k_2,-3+2k_2,-4+3k_2,k_2)^T$

$Ax=e_3$ 的通解为 $x=k_3\xi+(-1,1,1,0)^T=(-1-k_3,1+2k_3,1+3k_3,k_3)^T$

$$\therefore B=\begin{pmatrix}2-k_1&6-k_2&-1-k_3\\-1+2k_1&-3+2k_2&1+2k_3\\-1+3k_1&-4+3k_2&1+3k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}\quad（k_1,k_2,k_3 \text{为任意常数}）$$

(21)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

【解析】已知 $A=\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，

则 A 的特征值为 n ，$0\,(n-1$ 重).

A 属于 $\lambda=n$ 的特征向量为 $(1,1,\cdots,1)^T$ ；$r(A)=1$ ，故 $Ax=0$ 基础解系有 $n-1$ 个线性无关的解向量，即 A 属于 $\lambda=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，故 A 相似于对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

B 的特征值为 n ，$0\,(n-1$ 重)，同理 B 属于 $\lambda=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，故 B 相似于对角阵 Λ.

由相似关系的传递性，A 相似于 B.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$, 在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i),(i=1,2)$.

(Ⅰ) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ ；

(Ⅱ) 求 EY.

【解析】(Ⅰ) 设 Y 的分布函数为 $F_Y(\mathrm{y})$ ，则

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X=1\}P\{Y\le y\,|\,X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\le y\,|\,X=2\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{Y\le y\,|\,X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\le y\,|\,X=2\}$$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$ ；

当 $0\le y<1$ 时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}(\mathrm{y}+\frac{y}{2})=\frac{3y}{4}$ ；

当 $1\le y<2$ 时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}(1+\frac{y}{2})$ ；

当 $y\ge 2$ 时，$F_Y(y)=1$.

所以 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \dfrac{3y}{4}, & 0\le y<1\\ \dfrac{1}{2}(1+\dfrac{y}{2}), & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

(II) Y 的概率密度为

$$f_Y(\mathrm{y})=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, & 0<y<1,\\ \dfrac{1}{4}, & 1\le y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,\mathrm{d}\,y=\int_0^1 y\frac{3}{4}dy+\int_1^2 y\frac{1}{4}dy$$
$$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{4}$$

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 其中 θ 是未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ) 求 $E(X)$，$E(X^2)$；

(Ⅱ) 求 θ 的最大似然估计量 $\widehat{\theta}_n$；

(Ⅲ) 是否存在实数 a，使得对任何 $\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\widehat{\theta}_n-a\right|\ge\varepsilon\right\}=0$ ？

【解析】 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=F'(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

(Ⅰ) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)dx=\int_0^{+\infty}x\dfrac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$

$$=-\int_0^{+\infty}xde^{-\frac{x^2}{\theta}}=-[xe^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx]$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x;\theta)dx=\int_0^{+\infty} x^2\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty} x^2 de^{-\frac{x^2}{\theta}}=-[x^2e^{-\frac{x^2}{\theta}}|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}}\cdot 2xdx]$$

$$=\theta\int_0^{+\infty}\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$=\theta$$

（Ⅱ）似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x;\theta)==\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{\theta}e^{-\frac{x_i^2}{\theta}}, x_i>0\\ 0\quad, \quad 其它\end{cases}$

当 $x_i>0(i=1,\cdots,n)$ 时，$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{\theta}e^{-\frac{x_i^2}{\theta}}$，

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}[\ln 2x_i-\ln\theta-\frac{x_i^2}{\theta}]$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\sum_{i=1}^{n}[-\frac{1}{\theta}+\frac{x_i^2}{\theta^2}]=\frac{1}{\theta^2}[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\theta]=0$$

解得 $\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

所以，θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

（Ⅲ）依题意，问 $\hat{\theta}_n$ 是否为 θ 的一致估计量.

$$E(\hat{\theta}_n)=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=E(X^2)=\theta$$

$$D(\hat{\theta}_n)=\frac{1}{n}D(X^2)=\frac{1}{n}[E(X^4)-E^2(X^2)]$$

$$E(X^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4f(x;\theta)dx=\int_0^{+\infty}x^4\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}x^4de^{-\frac{x^2}{\theta}}=-[x^4e^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{\theta}}\cdot 4x^3dx]$$

$$=4\int_0^{+\infty}x^3e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$=-2\theta\int_0^{+\infty}x^2de^{-\frac{x^2}{\theta}}=-2\theta[x^2e^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{\theta}}\cdot 2xdx]$$

$$=4\theta\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$=-2\theta^2\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{\theta}}d(-\frac{x^2}{\theta})$$

$$=2\theta^2$$

$$\therefore D(\hat{\theta}_n)=\frac{1}{n}[2\theta^2-\theta^2]=\frac{\theta^2}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}D(\hat{\theta}_n)=0$ $\therefore \hat{\theta}_n$ 为 θ 的一致估计量 $\therefore a=\theta$

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

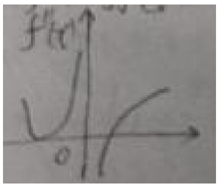
数学一试题参考答案

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点

的个数为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3



【答案】（C）

【解析】拐点出现在二阶导数等于 0，或二阶导数不存在的点，并且在这点的左右两侧二阶导函数异号。因此，由 $f''(x)$ 的图形可得，曲线 $y=f(x)$ 存在两个拐点.故选（C）.

(2)设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{3})e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解，则 ( )

(A) $a=-3,b=2,c=-1$

(B) $a=3,b=2,c=-1$

(C) $a=-3,b=2,c=1$

(D) $a=3,b=2,c=1$

【答案】（A）

【分析】此题考查二阶常系数非齐次线性微分方程的反问题——已知解来确定微分方程的系数，此类题有两种解法，一种是将特解代入原方程，然后比较等式两边的系数可得待估系数值，另一种是根据二阶线性微分方程解的性质和结构来求解，也就是下面演示的解法.

【解析】由题意可知，$\frac{1}{2}e^{2x}$、$-\frac{1}{3}e^{x}$ 为二阶常系数齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解，所以 2,1 为特征方程 $r^{2}+ar+b=0$ 的根，从而 $a=-(1+2)=-3$，$b=1\times 2=2$，从而原方程变为 $y''-3y'+2y=ce^{x}$，再将特解 $y=xe^{x}$ 代入得 $c=-1$.故选（A）

(3) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$与$x=3$依次为幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$的（　）

(A) 收敛点，收敛点

(B) 收敛点，发散点

(C) 发散点，收敛点

(D) 发散点，发散点

【答案】（B）

【分析】此题考查幂级数收敛半径、收敛区间，幂级数的性质.

【解析】因为$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，即$x=2$为幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$的条件收敛点，所以$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$的收敛半径为1，收敛区间为$(0,2)$.而幂级数逐项求导不改变收敛区间，故$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$的收敛区间还是$(0,2)$.因而$x=\sqrt{3}$与$x=3$依次为幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$的收敛点，发散点.故选（B）.

(4) 设D是第一象限由曲线$2xy=1$，$4xy=1$与直线$y=x$，$y=\sqrt{3}x$围成的平面区域，函数$f(x,y)$在D上连续，则$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$　　（　）

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) rdr$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) rdr$

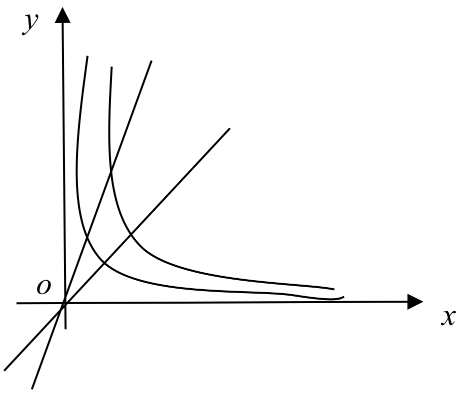
(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$

【答案】（B）

【分析】此题考查将二重积分化成极坐标系下的累次积分

【解析】先画出 D 的图形，



所以 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ ，故选（B）

(5) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$ ，$b=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$ ，若集合 $\Omega=\{1,2\}$ ，则线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解的充分必要条件为　　　　　　　　　　　　　（　）

(A) $a\notin\Omega,d\notin\Omega$

(B) $a\notin\Omega,d\in\Omega$

(C) $a\in\Omega,d\notin\Omega$

(D) $a\in\Omega,d\in\Omega$

【答案】D

【解析】$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{pmatrix}$，

由$r(A)=r(A,b)<3$，故$a=1$或$a=2$，同时$d=1$或$d=2$。故选（D）

(6)设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 在正交变换为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$ ，其中

$\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\right)$ ，若$\boldsymbol{Q}=\left(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2\right)$ ，则$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$下的标准形为

(　)

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$

(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$

(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

【答案】(A)

【解析】由$x=Py$，故$f=x^TAx=y^T(P^TAP)y=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.且

$$P^TAP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

$$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=PC$$

$$Q^TAQ=C^T(P^TAP)C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

所以$f=x^TAx=y^T(Q^TAQ)y=2y_1^2-y_2^2+y_3^2$。选（A）

(7) 若 A,B 为任意两个随机事件，则　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　)

(A) $P(AB)\le P(A)P(B)$　　(B) $P(AB)\ge P(A)P(B)$

(C) $P(AB)\le\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$　　(D) $P(AB)\ge\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

【答案】(C)

【解析】由于 $AB\subset A, AB\subset B$ ，按概率的基本性质，我们有 $P(AB)\le P(A)$ 且 $P(AB)\le P(B)$ ，从而 $P(AB)\le\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$ ，选(C)．

(8)设随机变量 X,Y 不相关，且 $EX=2,EY=1,DX=3$ ，则 $E\left[X\left(X+Y-2\right)\right]=$ (　)

(A) -3　　(B) 3　　(C) -5　　(D) 5

【答案】(D)

【解析】$E[X(X+Y-2)]=E(X^2+XY-2X)=E(X^2)+E(XY)-2E(X)$

$=D(X)+E^2(X)+E(X)\cdot E(Y)-2E(X)$

$=3+2^2+2\times1-2\times2=5$ ，选(D)．

二、填空题：9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$ ________．

【答案】$-\dfrac{1}{2}$

【分析】此题考查 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限，可直接用洛必达法则，也可以用等价无穷小替换.

【解析】方法一：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\tan x}{2x}=-\dfrac{1}{2}.$

方法二：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}.$

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|)\mathrm{d}x=$________.

【答案】$\frac{\pi^2}{4}$

【分析】此题考查定积分的计算，需要用奇偶函数在对称区间上的性质化简.

【解析】$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx=\frac{\pi^2}{4}$.

(11)若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^x+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$________.

【答案】$-dx$

【分析】此题考查隐函数求导.

【解析】令 $F(x,y,z)=e^z+xyz+x+\cos x-2$ ，则

$$F_x'(x,y,z)=yz+1-\sin x, F_y'=xz, F_z'(x,y,z)=e^z+xy$$

又当 $x=0,y=1$ 时 $e^z=1$ ，即 $z=0$.

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}=-\frac{F_x'(0,1,0)}{F_z'(0,1,0)}=-1,\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}=-\frac{F_y'(0,1,0)}{F_z'(0,1,0)}=0$ ，因而 $dz\big|_{(0,1)}=-dx$.

(12)设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面平面所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=$__________.

【答案】$\frac{1}{4}$

【分析】此题考查三重积分的计算，可直接计算，也可以利用轮换对称性化简后再计算.

【解析】由轮换对称性，得

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=6\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=6\int_0^1 zdz\iint\limits_{D_z}dxdy ,$$

其中 D_z 为平面 $z=z$ 截空间区域 Ω 所得的截面，其面积为 $\frac{1}{2}(1-z)^2$.所以

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=6\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=6\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2dz=3\int_0^1(z^3-2z^2+z)dz=\frac{1}{4}.$$

(13) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} =$ ____________.

【答案】$2^{n+1}-2$

【解析】按第一行展开得

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} + (-1)^{n+1}2(-1)^{n-1} = 2D_{n-1} + 2$$

$$= 2(2D_{n-2}+2)+2 = 2^2 D_{n-2} + 2^2 + 2 = 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2$$

$$= 2^{n+1} - 2$$

(14)设二维随机变量 (x,y) 服从正态分布 $N(1,1,0,1,0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$ _________.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】由题设知，$X\sim N(1,1), Y\sim N(0,1)$，而且 X、Y 相互独立，从而

$$P\{XY-Y<0\} = P\{(X-1)Y<0\} = P\{X-1>0, Y<0\} + P\{X-1<0, Y>0\}$$

$$= P\{X>1\}P\{Y<0\} + P\{X<1\}P\{Y>0\} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

【答案】$a=-1, b=-\frac{1}{2}, k=-\frac{1}{3}.$

【解析】法一：原式 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=1$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)+bx\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)}{kx^3}=1$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3-\frac{b}{6}x^4+o\left(x^3\right)}{kx^3}=1$$

即 $1+a=0,b-\dfrac{a}{2}=0,\dfrac{a}{3k}=1$

$\therefore a=-1,b=-\dfrac{1}{2},k=-\dfrac{1}{3}$

法二：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=1$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}=1$$

因为分子的极限为 0，则 $a=-1$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{-1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}=1$$ ，分子的极限为 0，$b=-\dfrac{1}{2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{2}{(1+x)3}-2b\sin x-b\sin x-bx\cos x}{6k}=1$$ ，$k=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore a=-1,b=-\dfrac{1}{2},k=-\dfrac{1}{3}$

(16)(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式.

【答案】$f(x)=\dfrac{8}{4-x}$.

【解析】设 $f(x)$ 在点 $\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ 处的切线方程为：$y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$,

令 $y=0$，得到 $x=-\dfrac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)}+x_0$，

故由题意，$\frac{1}{2}f(x_0)\cdot(x_0-x)=4$，即$\frac{1}{2}f(x_0)\cdot\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=4$，可以转化为一阶微分方程，

即$y'=\frac{y^2}{8}$，可分离变量得到通解为：$\frac{1}{y}=-\frac{1}{8}x+C$，

已知$y(0)=2$，得到$C=\frac{1}{2}$，因此$\frac{1}{y}=-\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}$；

即$f(x)=\frac{8}{-x+4}$.

(17)(本题满分 10 分)

已知函数$f(x,y)=x+y+xy$，曲线C: $x^2+y^2+xy=3$，求$f(x,y)$在曲线C上的最大方向导数.

【答案】3

【解析】因为$f(x,y)$沿着梯度的方向的方向导数最大，且最大值为梯度的模.

$f_x'(x,y)=1+y, f_y'(x,y)=1+x$，

故$gradf(x,y)=\{1+y,1+x\}$，模为$\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$，

此题目转化为对函数$g(x,y)=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$在约束条件$C:x^2+y^2+xy=3$下的最大值.即为条件极值问题.

为了计算简单，可以转化为对$d(x,y)=(1+y)^2+(1+x)^2$在约束条件$C:x^2+y^2+xy=3$下的最大值.

构造函数：$F(x,y,\lambda)=(1+y)^2+(1+x)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$

$$\begin{cases}F_x'=2(1+x)+\lambda(2x+y)=0\\F_y'=2(1+y)+\lambda(2y+x)=0\\F_\lambda'=x^2+y^2+xy-3=0\end{cases}$$，得到$M_1(1,1),M_2(-1,-1),M_3(2,-1),M_4(-1,2)$.

$d(M_1)=8,d(M_2)=0,d(M_3)=9,d(M_4)=9$

所以最大值为$\sqrt{9}=3$.

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ) 设函数$u(x), v(x)$可导，利用导数定义证明$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

(Ⅱ) 设函数 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ 可导，$f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式.

【解析】(Ⅰ) $[u(x)v(x)]' = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x+h)v(x)+u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x)$$

$$= u(x)v'(x)+u'(x)v(x)$$

(Ⅱ) 由题意得

$$f'(x) = [u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)]'$$

$$= u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$$

(19)(本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases}$ 起点为 $A\left(0,\sqrt{2},0\right)$，终点为 $B\left(0,-\sqrt{2},0\right)$，计算曲线积分

$I = \int_L (y+z)\ dx+(z^2-x^2+y)dy+x^2y^2dz$

【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

【解析】由题意假设参数方程 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta \\ z=\cos\theta \end{cases}$，$\theta:\dfrac{\pi}{2}\to-\dfrac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}[-(\sqrt{2}\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta+(1+\sin^2\theta)\sin\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2}\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+(1+\sin^2\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

(20) (本题满 11 分)

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

（I）证明向量组 $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$ 为 R^3 的一个基;

（II）当 k 为何值时，存在非 0 向量 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与基 $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$ 下的坐标相同，并求所有的 ξ .

【答案】

【解析】(I)证明：

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(2\alpha_1+2k\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_1+(k+1)\alpha_3)$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&1\\2k&k+1\end{vmatrix}=4\neq0$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 R^3 的一个基.

（II）由题意知，

$$\xi=k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,\xi\neq0$$

即

$$k_1(\beta_1-\alpha_1)+k_2(\beta_2-\alpha_2)+k_3(\beta_3-\alpha_3)=0,\quad k_i\neq0,i=1,2,3$$

$$k_1(2\alpha_1+2k\alpha_3-\alpha_1)+k_2(2\alpha_2-\alpha_2)+k_3(\alpha_1+(k+1)\alpha_3-\alpha_3)=0$$

$k_1(\alpha_1+2k\alpha_3)+k_2(\alpha_2)+k_3(\alpha_1+k\alpha_3)=0$ 有非零解

即 $|\alpha_1+2k\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1+k\alpha_3|=0$

即 $\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{vmatrix}=0$，得 k=0

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_1=0$$

$$\therefore k_2=0,k_1+k_3=0$$

$$\xi=k_1\alpha_1-k_1\alpha_3,k_1\neq0$$

(21) (本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

(II) 求 a,b 的值；

(II) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ ，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵..

【解析】(I) $A\sim B\Rightarrow tr(A)=tr(B)\Rightarrow 3+a=1+b+1$

$$|A|=|B|\Rightarrow\begin{vmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}a-b=-1\\ 2a-b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ b=5\end{cases}$$

(II)

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ -1 & 2 & -3\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}=E+C$$

$$C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ -1 & 2 & -3\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

C 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=4$

$\lambda=0$ 时 $(0E-C)x=0$ 的基础解系为 $\xi_1=(2,1,0)^T;\xi_2=(-3,0,1)^T$

$\lambda=5$ 时 $(4E-C)x=0$ 的基础解系为 $\xi_3=(-1,-1,1)^T$

A 的特征值 $\lambda_A=1+\lambda_C:1,1,5$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$,

$$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 5\end{pmatrix}$$

(22) (本题满分 11 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, x>0,\\ 0, \quad x\le 0.\end{cases}$

对 X 进行独立重复的观测,直到 2 个大于 3 的观测值出现的停止.记 Y 为观测次数.

(I)求 Y 的概率分布;

(II)求 EY

【解析】(I) 记 p 为观测值大于 3 的概率，则 $p=P(X>3)=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2dx=\frac{1}{8}$，

从而 $P\{Y=n\}=C_{n-1}^1 p(1-p)^{n-2}p=(n-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{n-2}$，$n=2,3,\cdots$

为 Y 的概率分布；

(II) $E(Y)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n\cdot P\{Y=n\}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{n-2}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)[(\frac{7}{8})^{n-2}-2(\frac{7}{8})^{n-1}+(\frac{7}{8})^n]$

记 $S_1(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}\quad -1<x<1$，则 $S_1(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}=(\sum\limits_{n=2}^{\infty}n\,x^{n-1})'=(\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^n)''=\frac{2}{(1-x)^3}$，

$S_2(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-1}=x\sum\limits_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}=xS_1(x)=\frac{2x}{(1-x)^3}$，

$S_3(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n}=x^2\sum\limits_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}=x^2S_1(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3}$，

所以 $S(x)=S_1(x)-2S_2(x)+S_3(x)=\frac{2-4x+2x^2}{(1-x)^3}=\frac{2}{1-x}$，

从而 $E(Y)=S(\frac{7}{8})=16$.

(23) (本题满分 11 分)设总体 X的概率密度为：

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{1-\theta}, \theta\le x\le 1,\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(I)求θ的矩估计量.

(II)求θ的最大似然估计量.

【解析】(I) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;\theta)dx=\int_{\theta}^{1} x\cdot\frac{1}{1-\theta}dx=\frac{1+\theta}{2}$，

令$E(X)=\overline{X}$，即$\frac{1+\theta}{2}=\overline{X}$，解得$\hat{\theta}=2\overline{X}-1$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$为$\theta$的矩估计量；

(II) 似然函数$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$，

当$\theta\le x_i\le 1$时，$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\theta}=(\frac{1}{1-\theta})^n$，则$\ln L(\theta)=-n\ln(1-\theta)$.

从而$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{1-\theta}$，关于$\theta$单调增加，

所以$\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$为$\theta$的最大似然估计量.

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题参考答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在**答题纸**指定位置上.

(1)若反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$收敛，则( )

$(A)a<1$且$b>1$　$(B)\ a>1$且$b>1$　$(C)a<1$且$a+b>1$　$(D)a>1$且$a+b>1$

【答案】：(C)

【解析】:注意到$\frac{1}{x^a}$在$x=0$为瑕积分，在$x=\infty$为无穷限反常积分，$\frac{1}{(1+x)^b}$仅在$x=\infty$为无穷限反常积分，

所以$a<1,a+b>1$

（2）已知函数$f(x)=\begin{cases}2(x-1),x<1\\ \ln x,x\geq 1\end{cases}$，则$f(x)$一个原函数是（　）

$(A)F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x-1),x\geq 1\end{cases}$　　$(B)\ F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x+1)-1,x\geq 1\end{cases}$

$(C)\ F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x+1)+1,x\geq 1\end{cases}$　　$(D)F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x-1)+1,x\geq 1\end{cases}$

【答案】：(D)

【解析】：由于原函数一定是连续，可知函数$F(x)$在$x=1$连续，而(A)、(B)、(C)中的函数在$x=1$处均不连续，故选(D)。

（3）若$y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$，$y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$是微分方程$y'+p(x)y=q(x)$两个解，则$q(x)=$（　）

$(A)3x(1+x^2)$　　$(B)-3x(1+x^2)$　　$(C)\dfrac{x}{1+x^2}$　　$(D)-\dfrac{x}{1+x^2}$

【答案】：(A)

【解析】：分别将$y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$，$y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$带入微分方程$y'+p(x)y=q(x)$，两式做差，可得$p(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$. 两式做和，并且将$p(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$带入，可得$q(x)=3x(1+x^2)$ **（4）**已知函数$f(x)=\begin{cases}x,x\leq 0\\ \dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n+1}<x\leq\dfrac{1}{n}\end{cases}$，$n=1,2,\cdots$（　）

(A) $x=0$是$f(x)$第一类间断点　　(B) $x=0$是$f(x)$第二类间断点

(C) $f(x)$ 在$x=0$处连续但不可导　　(D) $f(x)$在$x=0$处可导

【答案】：(D)

【解析】：$f_-'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=1$

$f_+^{'}(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f\left(x\right)}{x}$。当$\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}$时，$1\le\frac{f\left(x\right)}{x}<\frac{n+1}{n}$,由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，由夹逼

定理可知：$f_+^{'}(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f\left(x\right)}{x}=1$。故$f\left(x\right)$在$x=0$处可导，选$\left(D\right)$。

(5) 设A,B是可逆矩阵，且A与B相似，则下列结论错误的是(　　)

$\left(A\right)$ A^T与B^T相似　　　　$\left(B\right)$ A^{-1}与B^{-1}相似

$\left(C\right)$ $A+A^T$与$B+B^T$相似　　　　$\left(D\right)$ $A+A^{-1}$与$B+B^{-1}$相似

【答案】：$\left(C\right)$

【解析】：因为A与B相似，所以存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$,两端取转置与逆可得：

$P^TA^T\left(P^T\right)^{-1}=B^T$,$P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$,$P^{-1}\left(A+A^{-1}\right)P=B+B^{-1}$,可知$\left(A\right)$、$\left(B\right)$、$\left(D\right)$均正确，故选择$\left(C\right)$。

(6) 设二次型　$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+4x_1x_2+4x_2x_3+4x_1x_3$，则$f(x_1,x_2,x_3)=2$在空间直角坐标系下表示的二次曲面是(　　)

(A)单叶双曲面　　(B)双叶双曲面　　(C)椭球面　　(D)柱面

【答案】：(B)

【解析】：求出二次型矩阵的特征值。设$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$。

$\left|\lambda E-A\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{pmatrix}\right|=\left(\lambda+1\right)\left(\lambda^2-5\lambda-4\right)$,从而可知二次型的正惯性指数为1，负惯性指数为2，从而二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2$表示双叶双曲面，故选择(B)。

(7) 设随机变量X为$X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,记$p=P\{X\le\mu+\sigma^2\}$.则(　　)

$(A)p$随着μ增加而增加　　　　$(B)p$随着σ增加而增加

$(C)p$随着μ增加而减少　　　　$(D)p$随着σ增加而减少

【答案】：(B)

【解析】：将 X 标准化，$p=P\{X\le\mu+\sigma^2\}=P\{X-\mu\le\sigma^2\}=P\{\frac{X-\mu}{\sigma}\le\sigma\}$

从而可知，p 随着 σ 增加而增加

（8） 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1,A_2,A_3 且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$，将试验 E 独立重复做两次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示两次试验中结果 A_2 发生的次数，则 X Y 的相关系数为(　　)

$(A)-\frac{1}{2}$　　$(B)-\frac{1}{3}$　　$(C)\frac{1}{3}$　　$(D)\frac{1}{2}$

【答案】：(A)

【解析】：可知二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1	2
0	1/9	2/9	1/9
1	2/9	2/9	0
2	1/9	0	0

所以 $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{EXY-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=-\frac{1}{2}$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9） $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2}=$________.

【答案】：$\frac{1}{2}$

【解析】：原式为：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{\frac{1}{2}x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$

（10） 向量场 $A(x,y,z)=(x+y+z)\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，旋度 $rotA=$________

【答案】：$rot(A)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+y+z & xy & 2 \end{vmatrix}=j+(y-1)k$

（11）设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz|_{(0,1)}=$______

【答案】：$dz\big|_{(0,1)}=-dx+2dy$

【解析】：由一阶微分形式不变性，

$$zdx+(x+1)dz-2ydy=2xf(x-z,y)dx+x^2f_1'(x-z,y)(dx-dz)+x^2f_2'(x-z,y)dy$$

将 $x=0,y=1,z=1$ 代入，$dx+dz-2dy=0$，所以，$dz\big|_{(0,1)}=-dx+2dy$

（12）设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 $a=$______

【答案】：$\dfrac{1}{2}$

【解析】：$f(x)=x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)-x\left(1-ax^2+o(x^2)\right)=\left(a-\dfrac{1}{3}\right)x^3+o(x^3)$

$f'''(0)=1$，可知 $a-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，故 $a=\dfrac{1}{2}$

（13）行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=$______

【答案】：$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$

【解析】：令 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=D_4$

由展开定理地递推公式 $D_4=\lambda D_3+4, D_3=\lambda D_2+3, D_2=\lambda^2+\lambda+2$，故

$$D_4=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$$

（14）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值 $\bar{X}=9.5$，参数 μ 置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 置信度为 0.95 的双侧置信区间为______.

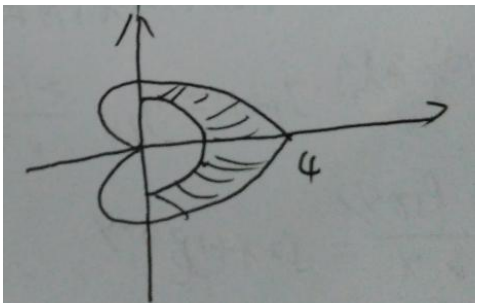
【答案】$[8.2,10.8]$

【解析】置信区间的中心为$\overline{x}$，可知置信下限为8.2，故置信区间为$[8.2,10.8]$。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）已知平面区域$D=\left\{(r,\theta)\mid 2\le r\le 2(1+\cos\theta),-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分$\iint\limits_D x\,dxdy$。

【答案】：积分区域关于x轴对称，D_1为x轴上方区域



$$\iint\limits_D xdxdy=2\iint\limits_{D_1}xdxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)}r^2\cos\theta dr$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos\theta+3\cos^2\theta+\cos^3\theta)\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta)d\theta$$

$$=\frac{16}{3}(3\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+3\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2})$$

$$=\frac{16}{3}(\frac{15\pi}{16}+2)=5\pi+\frac{32}{3}$$

（16）设函数$y(x)$满足方程$y''+2y'+ky=0$，其中$0<k<1$。

（1）证明：反常积分$\int_0^{+\infty}y(x)dx$收敛

（2）若$y(0)=1,y'(0)=1$，求$\int_0^{+\infty}y(x)dx$的值

【解析】：（1）$y''+2y'+ky=0$的特征方程为$\lambda^2+2\lambda+k=0$，

所以$\lambda_1=\dfrac{-2+\sqrt{4-4k}}{2}=-1+\sqrt{1-k},\lambda_2=-1-\sqrt{1-k}$

由于$0<k<1$，所以$\lambda_1<0,\lambda_2<0$，

所以$y(x)=C_1e^{\left(-1+\sqrt{1-k}\right)x}+C_2e^{\left(-1-\sqrt{1-k}\right)x}$

所以$\int_0^{+\infty}y(x)dx=C_1\int_0^{+\infty}e^{\lambda_1 x}dx+C_2\int_0^{+\infty}e^{\lambda_2 x}dx$

又因为$\lambda_1<0,\lambda_2<0$，所以$\int_0^{+\infty}y(x)dx$收敛

（2）由（1）可知$\int_0^{+\infty}y(x)dx=\dfrac{C_1}{1-\sqrt{1-k}}+\dfrac{C_2}{\sqrt{1-k}+1}$，

由于$y(0)=1,y'(0)=1$，所以$\begin{cases}C_1+C_2=1\\C_1\left(\sqrt{1-k}-1\right)+C_2\left(-\sqrt{1-k}-1\right)=1\end{cases}$

故$\int_0^{+\infty}y(x)dx=\dfrac{C_1}{1-\sqrt{1-k}}+\dfrac{C_2}{\sqrt{1-k}+1}=\dfrac{3}{k}$

（17）设函数$f(x,y)$满足$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且$f(0,y)=y+1$，$L_t$是从点$(0,0)$到点$(1,t)$的光滑曲线，计算曲线积分$I(t)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$，并求$I(t)$的最小值。

【答案】：由于$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，所以$f(x,y)=xe^{2x-y}+\varphi(y)$，

由于$f(0,y)=y+1$，所以$f(0,y)=\varphi(y)=y+1$，所以$f(x,y)=xe^{2x-y}+y+1$

由于$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy=df(x,y)$，故

$I(t)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy=f(x,y)\Big|_{(0,0)}^{(1,t)}=e^{2-t}+t$

$I(t)=e^{2-t}+t$，$I'(t)=1-e^{2-t}$，令$I'(t)=0$，得$t=2$

当$t<2$时，可知$I'(t)<0$，$I(t)$单调递减；当$t>2$时，可知$I'(t)>0$，$I(t)$单调递增；

所以$I(t)$在$t=2$时取得最小值，$I(2)=3$

（18）设有界区域Ω由曲面$2x+y+2z=2$与三个坐标平面围成，Σ为Ω整个表面的外侧，计算曲面积分

$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2+1\right)dydz-2ydzdx+3zdxdy$。

【解析】：由 Gauss 公式可得

$$I=\iiint\limits_V(2x-2+3)dxdydz=\iiint\limits_V(2x-2+3)dxdydz$$
$$=\int_0^1 dz\iint\limits_{2x+y\le 2-2z}(2x+1)dxdy=\frac{1}{2}$$

（19）已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1,0<f'(x)<\frac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$，证明

（1）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；（2）$\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在且 $0<\lim_{n\to\infty}x_n<2$。

【解析】：证明：（1）由 Lagrange 中值定理可知

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=|f'(\xi_n)|\cdot|x_n-x_{n-1}|,$$

其中 ξ_n 在 x_n 与 x_{n-1} 之间。

由于 $0<f'(x)<\frac{1}{2}$，所以 $|x_{n+1}-x_n|<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|$，

同理可知，$|x_{n+1}-x_n|<\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$

注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛。

（2）由于 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛，所以部分和数列 $S_n=x_{n+1}-x_n+x_n-x_{n-1}\cdots+x_2-x_1=x_{n+1}-x_1$ 收敛，也即

$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_1)$ 存在，所以 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在。

设 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(x_n)$，所以 $a=f(a)$。

令 $g(x)=f(x)-x$，

$g(0)=1>0$，$g(2)=f(2)-2=f(0)+f'(\xi)(2-0)-2<f(0)+\frac{1}{2}(2-0)-2<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上有一根，又 $g'(x)=f'(x)-1<0$，则 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内唯一的根在 $(0,2)$ 上。故

$0<a<1$，也即 $0<\lim_{n\to\infty}x_n<2$。

（20） 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$，当 a 为何值时，方程 $AX=B$ 无解，有唯一解，有无穷多解？在有解时，求解此方程。

【解析】：（1）当 $|A|\neq 0$ 时，可知方程 $AX=0$ 有唯一解

$|A|=(a-1)(a+2)$ 即当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -2$ 时方程有唯一解

$$(A\vdots B)\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\2&a&1\vdots&0&a\\-1&1&a&-a-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3\vdots&-4&a-4\\0&0&a-1&1-a&0\end{pmatrix}$$

令 $\beta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\-a-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}2\\a\\-2\end{pmatrix}$

所以方程组 $Ax=\beta_1$ 可解的 $\alpha_1=\left(1-\dfrac{1}{a+2}-\dfrac{1}{a+2},-1\right)^T$

方程组 $Ax=\beta_2$ 可解的 $\alpha_2=\left(2+\dfrac{a-4}{a+2},\dfrac{a-4}{a+2},0\right)^T$

所以 $X=(\alpha_1,\alpha_2)$

（2）当 $a=1$ 时，方程 $Ax=B$ 有无穷多解

方程组 $Ax=\beta_1$ 可解的 $\alpha_1=\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{4}{3}-k_1,k_1\right)^T$，$k_1$ 为常数

方程组 $Ax=\beta_2$ 可解的 $\alpha_2=(1,\text{-}1\text{-}k_2,k_2)^T$，$k_2$ 为常数

所以 $X=(\alpha_1,\alpha_2)^T$

（3）当 $a=-2$ 时，方程 $Ax=B$ 无解

（21）(本题满分 11 分)已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

（1）求 A^{99}.

（2）设三阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$，记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

的线性组合。

【解析】：（1）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ -2 & \lambda+3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2+3\lambda+2)\lambda$，可知 A 的特征值为：$0,-1,-2$。

$A\to\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 0 的特征向量为$\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$

$A+E\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 -1 的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$A+2E\to\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 -2 的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

令 $P=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & -1 & \\ & & -2\end{pmatrix}$，$A=P\Lambda P^{-1}$，

则有

$$A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & \\ & -1 & \\ & & -2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{99}-2 & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ 2^{100}-2 & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

（2）$B^2=BA$ 可知 $B^{100}=BA^{99}$，即

$$(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix}2^{99}-2 & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ 2^{100}-2 & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

则 $\beta_1=(2^{99}-2)\alpha_1+(2^{100}-2)\alpha_2$，$\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2$，$\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2$

（22）(本题满分 11 分)设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$ 服从均匀分布，令

$U=\begin{cases}1 & X\le Y\\ 0 & X>Y\end{cases}$

（1）写出(X,Y)的概率密度.

（2）问U与X是否相互独立，说明理由。

（3）求$Z=U+X$的分布函数$F(Z)$.

【解析】：（1）D的面积$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{1}{3}$，则$(X,Y)$的概率密度$f(x,y)=\begin{cases}3 & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$.

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3dy=3(\sqrt{x}-x^2), & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)dt=\begin{cases}0 & x<0\\ 2x^{\frac{3}{2}}-x^3 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

当$U=0$时，$P\{X\le x\}=\begin{cases}0 & x<0\\ 3x^2-2x^3 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$，可知$X$与$U$有关，故不独立。

（3）$F(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+U\le z\}$

$$=P\{U=1\}P\{X+U\le z\,|\,U=1\}+P\{U=0\}P\{X+Y\le z\,|\,U=0\}$$
$$=\frac{1}{2}P\{X\le z-1\,|\,U=1\}+\frac{1}{2}P\{X\le z\,|\,U=0\}$$

其中$P\{X\le x\,|\,U=0\}=\begin{cases}0 & x<0\\ 3x^2-2x^3 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases},P\{X\le x\,|\,U=1\}=\begin{cases}0 & x<0\\ 4x^{\frac{3}{2}}-3x^2 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$

故$P\{X\le z-1\,|\,U=1\}=\begin{cases}0 & z<1\\ 4(z-1)^{\frac{3}{2}}-3(z-1)^2 & 1\le z<2\\ 1 & z\ge 2\end{cases}$

$P\{X\le z\,|\,U=0\}=\begin{cases}0 & z<0\\ 3z^2-2z^3 & 0\le z<1\\ 1 & z\ge 1\end{cases}$.

从而 $F(z)=\begin{cases}0, z<0\\ \frac{1}{2}\left(3z^2-2z^3\right), 0\le z<1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[4(z-1)^{\frac{3}{2}}-3(z-1)^2\right], 1\le z<2\\ 1, z\ge 2\end{cases}$

(23) 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{3x^2}{\theta^3}, 0<x<\theta\\ 0, else\end{cases}$，其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，$T=\max\{X_1,\mathrm{X}_2,X_3\}$。

（1）求 T 的概率密度；

（2）确定 a，使得 aT 为 θ 的无偏估计.

【解析】：（1）T 的分布函数为

$$F_T(x)=P\{T\le x\}=P\{X_1\le x, X_2\le x, X_3\le x\}$$

$$=\prod_{i=1}^{3}P\{X_i\le x\} \qquad (F(x)\text{为}X\text{的分布函数}).$$
$$=[F(x)]^3$$

则 T 的概率密度为 $f_T(x)=3[F(x)]^2 f(x)=\begin{cases}\frac{9x^8}{\theta^9} & 0<x<\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$.

(2) $ET=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_T(x)dx=\int_0^\theta\frac{9x^9}{\theta^9}dx=\frac{9\theta}{10}$，则 $E(aT)=aET=\frac{9a}{10}\theta$，可知 $a=\frac{10}{9}$.

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题参考答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\le 0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则（　）

（A）$ab=\dfrac{1}{2}$　　（B）$ab=-\dfrac{1}{2}$　　（C）$ab=0$　　（D）$ab=2$

【答案】（A）

【解析】由连续的定义可知：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$，其中 $f(0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=b$，

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{ax}=\dfrac{1}{2a}$，从而 $b=\dfrac{1}{2a}$，也即 $ab=\dfrac{1}{2}$，故选（A）。

（2）若函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则（　）

（A）$f(1)>f(-1)$　　（B）$f(1)<f(-1)$

（C）$|f(1)|>|f(-1)|$　　（D）$|f(1)|<|f(-1)|$

【答案】（C）

【解析】令 $F(x)=f^2(x)$，则有 $F'(x)=2f(x)f'(x)$，故 $F(x)$ 单调递增，则 $F(1)=F(-1)$，即

$[f(1)]^2>[f(-1)]^2$，即 $|f(1)|>|f(-1)|$，故选 C。

（3）函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $n=(1,2,2)$ 的方向导数为（　）

（A）12　　（B）6　　（C）4　　（D）2

【答案】（D）

【解析】$gradf=\{2xy,x^2,2z\}$，将点 $(1,2,0)$ 代入得 $gradf\big|_{(1,2,0)}=\{4,1,0\}$，则

$\frac{\partial f}{\partial u}=gradf.\frac{u}{|u|}=\{4,1,0\}.\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\}=2$。

（4）甲、乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方10（单位：m）处，图中实线表示甲的速度曲线$v=v_1(t)$（单位：m/s），虚线表示乙的速度$v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为$10、20、3$，计时开始后乙追上甲的时刻记为t_0（单位：s），则（　）

（A）$t_0=10$　　（B）$15<t_0<20$　　（C）$t_0=25$　　（D）$t_0>25$

【答案】（C）

【解析】从0到t_0时刻，甲乙的位移分别为$\int_0^{t_0}V_1(t)dt$与$\int_0^{t_0}V_2(t)dt$要使乙追上甲，则有$\int_0^{t_0}[V_2(t)-V_1(t)]dt$，由定积分的几何意义可知，$\int_0^{25}[V_2(t)-V_1(t)]dt=20-10=10$，可知$t_0=25$

，故选（C）。

（5）设α是n维单位列向量，E为n阶单位矩阵，则

（A）$E-\alpha\alpha^T$不可逆　　（B）$E+\alpha\alpha^T$不可逆

（C）$E+2\alpha\alpha^T$不可逆　　（D）$E-2\alpha\alpha^T$不可逆

【答案】（A）

【解析】因为$\alpha\alpha^T$的特征值为0（$n-1$重）和1，所以$E-\alpha\alpha^T$的特征值为1（$n-1$重）和0，故$E-\alpha\alpha^T$不可逆。

（6）设矩阵$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则

（A）A与C相似，B与C相似　　（B）A与C相似，B与C不相似

（C）A与C不相似，B与C相似　　（D）A与C不相似，B与C不相似

【答案】（B）

【解析】由$(\lambda E-A)=0$ 可知A的特征值为2,2,1。

$\because\ 3-r(2E-A)=1$。$\therefore$ ***A***可相似对角化，且$A\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

由$|\lambda E-B|=0$ 可知 ***B***的特征值为 2,2,1。

$\because\ 3-r(2E-B)=2$。$\therefore$ ***B***不可相似对角化，显然 ***C***可相似对角化，

$\therefore\ A\sim C$。且 ***B***不相似于 ***C***。

（7）设A,B为随机事件，若$0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，则$P(A|B)>P(A|\bar{B})$的充要条件是

（A）$P(B|A)>P(B|\bar{A})$　　（B）$P(B|A)<P(B|\bar{A})$

（C）$P(\bar{B}|A)>P(B|\bar{A})$　　（D）$P(\bar{B}|A)<P(B|\bar{A})$

【答案】（A）

【解析】因为$P\left(A|B\right)>P(A|\bar{B})$，所以$\dfrac{P(AB)}{P(B)}>\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$，从而

$P(AB)>P(A)P(B)$，且$P\left(B|A\right)=\dfrac{P(AB)}{P(A)},P(B|\bar{A})=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$，所以

$P\left(B|A\right)>P(B|\bar{A})$。

（8）设$X_1,X_2\cdots X_n(n\geq 2)$为来自总体$N(\mu,1)$的简单随机样本，记$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论中不正确的是

（A）$\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$服从$\chi^2$分布　　（B）$2(X_n-X_1)^2$服从$\chi^2$分布

（C）$\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$服从$\chi^2$分布　　（D）$n(\bar{X}-\mu)^2$服从$\chi^2$分布

【答案】（B）

【解析】（A）$X_i-\mu\sim N(0,1)$故$\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$；

（B）$X_n-X_1\sim N(0,2)\Rightarrow\dfrac{X_n-X_1}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$

$$\Rightarrow\left(\frac{x_n-x_1}{\sqrt{2}}\right)^2\sim\chi^2(1)$$

即$\dfrac{(x_n-x_1)^2}{2}\sim\chi^2(1)$。

（C）由$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,(n-1)S^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$。

（D）$(\bar{X}-\mu)\sim N\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，则$\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)\sim N(0,1)$，所以$n(\bar{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1)$。

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）已知函数$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则$f^{(3)}(0)=$ ______。

【答案】 0

【解析】

因为

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$f'''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2n(2n-1)(2n-2)x^{2n-3}$$

将$x=0$带入$f'''(0)=0$

（10）微分方程$y''+2y'+3y=0$的通解为$y=$ ______。

【答案】 $e^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x)$

【解析】

因为$y''+2y'+3y=0$，所以$\lambda^2+2\lambda+3=0$，$\lambda=\pm\sqrt{2}i-1$，通解为$e^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}x+c_1\sin\sqrt{2}x)$

（11）若曲线积分$\int_L\dfrac{xdx-aydy}{x^2+y^2-1}$在区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$内与路径无关，则$a=$ ______。

【答案】 -1

【解析】

$P(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2-1},Q(x,y)=\dfrac{-ay}{x^2+y^2-1}$ ，

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2-1)^2},\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{2axy}{(x^2+y^2-1)^2}$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial P}{\partial x}=0$ ，则 $2a=-2,a=-1$

（12）幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)=$ ______。

【答案】$\dfrac{1}{(1+x)^2}$。

【解析】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n\right]'=\left[\dfrac{x}{1+x}\right]'=\dfrac{1}{(1+x)^2}$。

（13）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$ ，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为 ______。

【答案】2。

【解析】因为 $(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ ，

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

故 $r(A)=2$ ，所以 $(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)$ 秩为 2。

（14）设随机变量 X 的分布函数为 $\boldsymbol{F}(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\dfrac{x-4}{2})$ ，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $EX=$ ______。

【答案】2

【解析】

$$f(x)=F'(x)=0.5\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}+0.5\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\frac{x-4}{2}\right)^2}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=0.5\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}+0.5\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2}e^{-\frac{(x-4)^2}{2\cdot 2^2}}$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos x)$，求 $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0}$，$\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{x=0}$。

【解析】由复合函数求导法则，可得：

$$\frac{dy}{dx}=f_1'e^x+f_2'(-\sin x)$$

故 $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0}=f_1'(1,1)$

进一步地：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^xf_1'+e^x\frac{d(f_1')}{dx}-\cos xf_2'-\sin x\frac{d(f_2')}{dx}$$

$$=e^xf_1'+e^x(f_{11}''e^x-f_{12}''\sin x)-\cos xf_2'-\sin x(f_{21}''e^x-f_{22}''\sin x)$$

$$=e^xf_1'-\cos xf_2'+e^{2x}f_{11}''-2e^x\sin xf_{21}''+\sin^2xf_{22}''$$

故 $\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{x=0}=f_1'(1,1)-f_2'(1,1)+f_{11}''(1,1)$

(16) (本题满分 10 分)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})$。

【解析】由定积分的定义式可知

原式= $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\ln(1+x)dx$，再由分部积分法可知：

$$\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)d(x^2-1)=\frac{x^2-1}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2-1}{2}d\ln(1+x)$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)dx=-\frac{1}{4}(x-1)^2\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

(17) (本题满分 10 分)已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值。

【解析】等式两边同时对 x 求导可得，

$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$ ......(1)

令 $y'=0$ 可得 $3x^2-3=0$，故 $x=\pm1$。由极限的必要条件可知，函数的极值之梦能取在 $x=-1$ 与 $x=1$ 处，为了检验该点是否为极值点，下面来计算函数的二阶导数，对(1)式两边同时求导可得，

$6x+6y(y')^2+3y^2y''+3y''=0$......(2)

当 $x=1$ 时，$y=1$，将 $x=1,y=1,y'=0$ 代入（2）式可得 $y''=-2$，故 $y(1)=1$ 是函数的极大值。

当 $x=-1$ 时，$y=0,y'=0$，代入（2）式可得 $y''=2$，故 $y(-1)=0$ 是函数的极小值。

(18) (本题满分 11 分)设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$。

证明：（Ⅰ）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根。

（Ⅱ）方程 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根。

【证明】（I）由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$，则由保号性可知：$\exists\delta>0$，使得当 $x\in(0,\delta)$ 时，$\frac{f(x)}{x}<0$，也即 $f(x)<0$。又由于 $f(1)>0$，则由零点存在定理可知，$f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根。

（II）令 $F(x)=f(x)f'(x)$。由 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$ 可知 $f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0$。

又由（I）可知：$\exists x_0\in(0,1)$ 使得 $f(x_0)=0$。

由罗尔定理可知：$\exists\xi_1\in(0,x_0)$ 使 $f'(\xi_1)=0$，从而 $F(0)=F(\xi_1)=F(x_0)=0$。

再由罗尔定理可知：$\exists\xi_2\in(0,\xi_1)$，$\xi_3\in(\xi_1,x_0)$ 使得 $F'(\xi_2)=F'(\xi_3)=0$。

也即 $F'(x)=f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在 $(0,x_0)\subset(0,1)$ 内有两个不同的实根。

(19)（本题满分 10 分）设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点的

密度为$\mu=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，记圆锥面与柱面的交线为C。

(Ⅰ)求C在xOy面上的投影曲线的方程；

(Ⅱ)求S的质量M。

【解析】（Ⅰ）C的方程为$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2x \end{cases}$，从中消去$z$可得$x^2+y^2=2x$

则C在xoy平面上的投影为$\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ z=0 \end{cases}$。

（Ⅱ）S的质量$m=\iint\limits_S \mu(x,y,z)dS=\iint\limits_S 9\sqrt{x^2+y^2+z^2}dS$

将$z=\sqrt{x^2+y^2}$带入可得：$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$

故$m=\iint\limits_D 9\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy$，其中$D$为平面区域$\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2x\}$

利用极坐标计算该二重积分可得：

$$\begin{aligned} m&=18\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy \\ &=18\iint\limits_D r^2drd\theta \\ &=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr \\ &=\frac{144}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta \\ &=64 \end{aligned}$$

(20)（本题满分 11 分） 设 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$=（α_1，α_2，α_3）有 3 个不同的特征值，且$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$ 。

3) 证明：$r(\boldsymbol{A})=2$

4) 若$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ ，求方程组$\boldsymbol{Ax}=\beta$的通解。

(Ⅰ)**【证明】**因为A有三个不同的特征值，所以$A\ne O$，$r(A)\ge 1$，假若$r(A)=1$时，0 是二重的，故不符合，

那么$r(A)\ge 2$，又因为$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，所以$r(A)\le 2$，即$r(A)=2$。

（Ⅱ）**【解析】**因为$r(A)=2$，所以$Ax=0$的基础解系只有一个解向量，又因为$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，即$\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$，即基础解系的解向量为$(1,2,-1)^T$，又因为$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，故$Ax=\beta$的特解为$(1,1,1)^T$，所以$Ax=\beta$的通解为$k(1,2,-1)^T+(1,1,1)^T$，$k\in R$。

(21)（本题满分 11 分）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$，在正交变换$x=Qy$下的标准型为$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求$a$的值及一个正交矩阵$Q$。

【解析】二次型对应的矩阵为$A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$，因为标准型为$\lambda_1y_1{}^2+\lambda_2y_2{}^2$，所以$|A|=0$，从而$a+4=6$，即$a=2$，代入得$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=0$，解得$\lambda=0,-3,6$；

当$\lambda=0$时，$0E-A=\begin{pmatrix}-2&-1&4\\-1&1&-1\\4&-1&-2\end{pmatrix}$，化简得$\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$，对应的特征向量为$k_1(1,2,1)^T$；

当$\lambda=-3$时，$-3E-A=\begin{pmatrix}-5&-1&4\\-1&-2&-1\\4&-1&-5\end{pmatrix}$，化简得$\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，对应的特征向量为$k_2(1,-1,1)^T$；

当$\lambda=6$时，$6E-A=\begin{pmatrix}4&-1&4\\-1&7&-1\\4&-1&4\end{pmatrix}$，化简得$\begin{pmatrix}-1&7&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，对应的特征向量为$k_3(-1,0,1)^T$；

从而正交矩阵$Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$。

(22)（本题满分 11 分）设随机变量为 *X*，*Y*相互独立，且 *X*的概率分布为$P(X=0)=P(X=2)=\frac{1}{2}$，*Y*

的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

3）求 $P(Y \le EY)$；

4）求 $Z = X + Y$ 的概率密度。

【解析】（Ⅰ）由数字特征的计算公式可知：$EY=\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy=\int_0^1 2y^2dy=\frac{2}{3}$。

则 $P\{Y\le EY\}=P\left\{Y\le\frac{2}{3}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{2}{3}} f(y)dy=\int_0^{\frac{2}{3}}2ydy=\frac{4}{9}$。

（Ⅱ）Z 的分布函数记为 $F_z(z)$，那么

$$
\begin{aligned}
F_z(Z)&=P\{Z\le z\}\\
&=P\{X+Y\le z\}\\
&=P\{X=0\}P\{X+Y\le z|X=0\}+P\{X=2\}P\{X+Y\le z|X=2\}\\
&=\frac{1}{2}P\{Y\le z\}+\frac{1}{2}P\{Y\le z-2\}
\end{aligned}
$$
；

当 $z<0$ 时，$F_z(z)=0$

当 $0\le z<1$ 时，$F_z(z)=\frac{1}{2}P\{Y\le z\}=\frac{z^2}{2}$；

当 $1\le z<2$ 时，$F_z(z)=\frac{1}{2}$；

当 $2\le z<3$ 时，$F_z(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P\{Y\le z-2\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(z-2)^2$；

当 $3\le z$ 时，$F_z(z)=1$；

所以，Z 的概率密度为

$$F_z(z)=\begin{cases}z,0<z<1\\ z-2,2<z<3\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

(23)（本题满分 11 分）某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$。该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu| (i = 1, 2, \cdots, n)$，利用 $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ 估计 σ。

4）求 Z_i 的概率密度；

5）利用一阶矩阵求 σ 的矩估计量。

6）求 σ 的最大似然估计量。

【解析】（Ⅰ）因为 $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 $Y_i = X_i - \mu \sim N(0,\sigma^2)$，对应的概率密度为 $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$，

设 Z_i 的分布函数为 $F(z)$，对应的概率密度为 $f(z)$；

当 $z < 0$ 时，$F(z) = 0$；

当 $z \geq 0$ 时，$F(z) = P\{Z_i \leq z\} = P\{|Y_i| \leq z\} = P\{-z \leq Y_i \leq z\} = \int_{-z}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$；

则 Z_i 的概率密度为 $f(z) = F'(z) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$；

（Ⅱ）因为 $EZ_i = \int_0^{+\infty} z \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$，所以 $\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} EZ_i$，从而 σ 的矩估计量为

$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \overline{Z}$；

（Ⅱ）由题知对应的似然函数为 $L(z_1, z_2, \ldots, z_n, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}}$，取对数得：

$\ln L = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \ln \sigma - \frac{z_i^2}{2\sigma^2} \right)$，所以 $\frac{d \ln L(\sigma)}{d\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{\sigma} + \frac{z_i^2}{\sigma^3} \right)$，令 $\frac{d \ln L(\sigma)}{d\sigma} = 0$，

得 $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i^2}$，所以 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i^2}$。

2018 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题参考答案

一、选择题

1.D 2.B 3. B 4. C 5.A 6.A 7.A 8. D

二、填空题

9. -2 **10.** $2\ln 2-2$ **11.** $\vec{i}-\vec{k}$ **12.** 0 **13.** -1 **14.** $\frac{1}{4}$

三、 解答题

15. 解：$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}de^{2x}$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot\frac{\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}}{1+(e^x-1)}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^x-1+1}{\sqrt{e^x-1}}de^x$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\sqrt{e^x-1}+\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}d(e^x-1)$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{e^x-1}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}+C$$

16. 解：设圆的周长为 x ，正三角周长为 y，正方形的周长为 z，由题设 $x+y+z=2$ ，则目标函数：

$S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{y}{3}\right)^2+\left(\frac{z}{4}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}y^2+\frac{z^2}{16}$ ，故拉格朗日函数为

$L(x,y,z,\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}y^2+\frac{z^2}{16}+\lambda(x+y+z-2)$ 则：

$$L_x=\frac{x}{2\pi}+\lambda=0$$

$$L_y=\frac{2\sqrt{3}y}{36}+\lambda=0$$

$$L_z=\frac{2z}{16}+\lambda=0$$

$$L_\lambda=x+y+z-2=0$$

解得 $x=\dfrac{2\pi}{\pi+3\sqrt{3}+4}$， $y=\dfrac{6\sqrt{3}\pi}{\pi+3\sqrt{3}+4}, z=\dfrac{8}{\pi+3\sqrt{3}+4}, \lambda=\dfrac{-1}{\pi+3\sqrt{3}+4}$.

此时面积和有最小值 $S=\dfrac{1}{\pi+3\sqrt{3}+4}$.

17. 解：构造平面 $\sum ':\begin{cases}3y^2+3z^2=1\\ x=0\end{cases}$ ，取后侧，设 $\sum '$ 和 $\sum$ 所围区域为 Ω ；

记 $P=x, Q=y^3+z, R=z^3$;借助高斯公式，有：

$$\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx-Rdxdy=\iint\limits_{\Sigma-\Sigma'}Pdydz+Qdzdx-Rdxdy\text{-}\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx-Rdxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(P_x^{'}+Q_y^{'}+R_z^{'})dxdy-0=\iiint\limits_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)dxdydz$$

$$=\iint\limits_{2y^2+3z^2n^1}dydz\int_0^{\sqrt{1-3y^2-3z^2}}(1+3y^2+3z^2)dx$$

$$=\iint\limits_{2y^2+3z^2n^1}\sqrt{1-3y^2-3z^2}(1+3y^2+3z^2)dydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^2}(1+3r^2)\cdot rdr$$

$$=2\pi(-\frac{1}{6})\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^2}(1+3r^2)d(1-3r^2)$$

$$=\frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^2}(1-3r^2-2)d(1-3r^2)$$

$$=\frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left[\left(1-3r^2\right)^{\frac{3}{2}}-2(1+3r^2)^{\frac{1}{2}}\right]d(1-3r^2)$$

$$=\frac{\pi}{3}\left[\frac{2}{5}(1-3r^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(1-3r^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{14\pi}{45}$$

18. （1）解：通解

$$y(x) = e^{-\int dx}(\int xe^{\int dx}dx + C)$$
$$= e^{-x}(\int xe^{x}dx + C)$$
$$= e^{-x}\left[(x-1)e^{z} + C\right]$$
$$= (x-1) + Ce^{x}$$

(2)证明：设$\int(x+T)=f(x)$,即T是$f(x)$的周期

通解

$$y(x) = e^{-\int dx}[\int f(x)e^{\int dx}dx + C]$$
$$= e^{-x}[\int f(x)e^{x}dx + C]$$
$$= e^{-x}\int f(x)e^{x}dx + Ce^{-x}$$

不妨设$y(x) = e^{-x}\int_0^x f(x)e^{x}dx + Ce^{-x}$, 则有

$$y(x+T) = e^{-(x+T)}\int_x^{x+T} f(x+T)e^{x+T}d(x+T) + Ce^{(x+y)}$$
$$= e^{-(x+T)}\int_0^x f(u+T)e^{u+T}d(u+T) + (Ce^{-T})\cdot e^{-x}$$
$$= e^{-(x+y)}\int_0^x f(u)e^{u}\cdot e^{y}du + (Ce^{-T})\cdot e^{-x}$$
$$= e^{-x}\int_0^2 f(u)e^{u}du + (Ce^{-y})\cdot e^{-x}$$

即$y(x+T)$依旧是方程的通解，结论得证

19. 证明：设$f(x)=e^{x}-1-x,x>0$,则有

$f'(x)=e^{x}-1>0$,因此$f(x)>0$,$\dfrac{e^{x}-1}{x}>1$，

从而$e^{x_2}=\dfrac{e^{x_1}-1}{x_1}>1,x_2>0$;

猜想$x_1>0$,现用数学归纳法证明;

$n=1$时，$x_1>0$,成立;假设

$n=k\,(k=1,2,\ldots\ldots)$ 时，有$x_k>0$, 则$n=k+1$时有

$e^{x_{k+1}}=\dfrac{e^{x_k}-1}{x_e}>1$, 所以$x_{k+1}>0$;

因此$x_n>0$,有下界.

又 $x_{n+1}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-\ln e^{x_n}=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}$;

设 $g(x)=e^x-1-xe^x$,

$x>0$时，$g'(x)=e^x-e^x-xe^x-xe^x<0$,

所以 $g(x)$单调递减，$g(x)<g(0)=0$,即有$e^x-1<xe^x$,

因此 $x_{n+1}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}<\ln 1=0$, x_n单调递减.

由单调有界准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在 .

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则有$Ae^A=e^A-1$;

因为 $g(x)=e^x-1-xe^x$只有唯一的零点$x=0$, 所以$A=0$.

20.解：(1)由 $f(x_1,x_2,x_3)=0$得 $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ x_2+x_3=0,\\ x_1+ax_3=0,\end{cases}$ 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\1&0&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}$,

$a\neq 2$时，$r(A)=3$, 方程组有唯一解：$x_1=x_2=x_3=0$;

$a=2$时，$r(A)=2$, 方程组有无穷解：$x=k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $k\in R$.

(2) $a\neq 2$时，令$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3,\\ y_2=x_2+x_3,\\ y_3=x_1+ax_3,\end{cases}$ 这是一个可逆变换，

因此其规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$;

$a=2$时，$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_1+2x_3)^2$

$=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_2x_3+6x_1x_3$

$=2(x_2-\frac{x_2-3x_3}{2})^2+\frac{3(x_2+x_3)^2}{2}$,

此时规范形为$y_1^2+y_2^2$.

因此其规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$;

21 解：

（1）A 与 B 等价，则 r(A)=r(B),

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{vmatrix}\overset{r_3-r_1}{=\!=}\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\3&9&0\end{vmatrix}=0$$

$$\text{又所以}|B|=\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{=\!=}\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&a+1&3\end{vmatrix}=2-a=0,$$

$$a=2$$

(2)AP=B，即解矩阵方程 AX=B:

$$(A,B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\text{得}P=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix};$$

$$\text{又}P\text{可逆，所以}|P|\neq0\text{，即}k_2\neq k_3,$$

$$\text{最终}P=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}\text{，其中}k_1,\ k_2,\ k_3\text{为任意常数，且}k_2\neq k_3$$

22.解：（1）由已知 $P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，$P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$，Y服从λ的泊松分布，

所以$\operatorname{cov}(X,Z)=\operatorname{cov}(X,XY)=E(X^2Y)-E(X)E(XY)$

$E(X^2)E(Y)-E^2(X)E(Y)=D(X)E(Y)=\lambda.$

（2）由条件可知 Z 的取值为 $0,\pm1,\pm2$......

$$P\{Z=0\}=P\{X=-1,Y=0\}+P\{X=1,Y=0\}=e^{-\lambda},$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda},P\{Z=-1\}=P\{X=-1,Y=1\}=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda},$$

同理，$P\{Z=k\}=\frac{1}{2}\frac{\lambda^{|k|}e^{-\lambda}}{|k|!},k=\pm1,\pm2\ldots\ldots,$

$P\{Z=0\}=e^{-\lambda}.$

23. 解：（1）由条件可知，似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{\eta}\frac{1}{2\sigma}e^{\frac{|x_1|}{n}},x_1\in R,i=1,2\ldots n,$$

$$\text{取对数}:\ln L(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\left[-\ln 2\sigma-\frac{|x_i|}{\sigma}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[-\ln 2-\ln\sigma-\frac{|x_i|}{\sigma}\right],$$

$$\text{求导}:\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sigma}+\frac{|x_i|}{\sigma^2}\right]=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{\mu}|x_i|}{\sigma^2}=0,$$

$$\text{解得}\sigma\text{得极大似然估计}\sigma=\frac{\sum_{i=1}^{\mu}|x_i|}{n}.$$

$$E(\hat{\sigma})=E(|X|)=\int_{\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{a}}dx=\sigma$$

（2）由第一问可知 $\sigma=\frac{\sum_{i=1}^{\mu}|x_i|}{n}$，所以 $D(\hat{\sigma})=D(\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_1|}{n})=\frac{1}{n}D(|X|)=\frac{1}{n}\{E(X^2)-E^2(|X|)\}$

$$=\frac{1}{n}\{\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{a}}dx=\sigma^2\}=\frac{1}{n}\{\int_{0}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{|x|}{a}}dx\}=\frac{\sigma^2}{n}.$$