



## 1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

### 一、填空题(本题满分 15 分, 每小题 3 分.)

- (1) 设  $\begin{cases} x=1+t^2, \\ y=\cos t, \end{cases}$  则  $\frac{d^2y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- (2) 由方程  $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$  所确定的函数  $z = z(x, y)$  在点  $(1, 0, -1)$  处的全微分  $dz = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- (3) 已知两条直线的方程是  $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$ ;  $L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ , 则过  $L_1$  且平行于  $L_2$  的平面方程是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
- (4) 已知当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$  与  $\cos x - 1$  是等价无穷小, 则常数  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- (5) 设 4 阶方阵  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $A$  的逆阵  $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

### 二、选择题(本题满分 15 分, 每小题 3 分.)

- (1) 曲线  $y = \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$  ( )
- (A) 没有渐近线 (B) 仅有水平渐近线  
(C) 仅有铅直渐近线 (D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线
- (2) 若连续函数  $f(x)$  满足关系式  $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + \ln 2$ , 则  $f(x)$  等于 ( )
- (A)  $e^x \ln 2$  (B)  $e^{2x} \ln 2$   
(C)  $e^x + \ln 2$  (D)  $e^{2x} + \ln 2$
- (3) 已知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  等于 ( )
- (A) 3 (B) 7 (C) 8 (D) 9
- (4) 设  $D$  是  $xOy$  平面上以  $(1, 1)$ 、 $(-1, 1)$  和  $(-1, -1)$  为顶点的三角形区域,  $D_1$  是  $D$  在第一象限的部分, 则  $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy$  等于 ( )
- (A)  $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$  (B)  $2 \iint_{D_1} xy dx dy$



(C)  $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$  (D) 0

- (5) 设  $n$  阶方阵  $A$ 、 $B$ 、 $C$  满足关系式  $ABC = E$ , 其中  $E$  是  $n$  阶单位阵, 则必有 ( )
- (A)  $ACB = E$  (B)  $CBA = E$
- (C)  $BAC = E$  (D)  $BCA = E$

### 三、(本题满分 15 分, 每小题 5 分.)

(1) 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$ .

- (2) 设  $n$  是曲面  $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$  在点  $P(1, 1, 1)$  处的指向外侧的法向量, 求函数

$u = \frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$  在点  $P$  处沿方向  $n$  的方向导数.

- (3)  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z) dV$ , 其中  $\Omega$  是由曲线  $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转一周而成的曲面与平面  $z = 4$  所围成的立体.

### 四、(本题满分 6 分)

在过点  $O(0, 0)$  和  $A(\pi, 0)$  的曲线族  $y = a \sin x (a > 0)$  中, 求一条曲线  $L$ , 使沿该曲线从  $O$  到  $A$  的积分

$\int_L (1 + y^3) dx + (2x + y) dy$  的值最小.

### 五、(本题满分 8 分.)

将函数  $f(x) = 2 + |x| (-1 \leq x \leq 1)$  展开成以 2 为周期的傅立叶级数, 并由此求级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  的和.

### 六、(本题满分 7 分.)

设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续,  $(0, 1)$  内可导, 且  $3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = f(0)$ , 证明在  $(0, 1)$  内存在一点  $c$ , 使

$f'(c) = 0$ .

### 七、(本题满分 8 分.)

已知  $\alpha_1 = (1, 0, 2, 3)$ ,  $\alpha_2 = (1, 1, 3, 5)$ ,  $\alpha_3 = (1, -1, a+2, 1)$ ,  $\alpha_4 = (1, 2, 4, a+8)$ , 及

$\beta = (1, 1, b+3, 5)$ .



(1)  $a$ 、 $b$  为何值时,  $\beta$  不能表示成  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$  的线性组合?

(2)  $a$ 、 $b$  为何值时,  $\beta$  有  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$  的唯一的线性表示式? 并写出该表示式.

#### 八、(本题满分 6 分)

设  $A$  为  $n$  阶正定阵,  $E$  是  $n$  阶单位阵, 证明  $A+E$  的行列式大于 1.

#### 九、(本题满分 8 分)

在上半平面求一条向上凹的曲线, 其上任一点  $P(x, y)$  处的曲率等于此曲线在该点的法线段  $PQ$  长度的倒数 ( $Q$  是法线与  $x$  轴的交点), 且曲线在点  $(1, 1)$  处的切线与  $x$  轴平行.

#### 十、填空题(本题满分 6 分, 每小题 3 分.)

(1) 若随机变量  $X$  服从均值为 2, 方差为  $\sigma^2$  的正态分布, 且  $P\{2 < X < 4\} = 0.3$ , 则

$$P\{X < 0\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 随机地向半圆  $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$  ( $a$  为正常数) 内掷一点, 点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比, 则原点和该点的连线与  $x$  轴的夹角小于  $\frac{\pi}{4}$  的概率为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

#### 十一、(本题满分 6 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

求随机变量  $Z = X + 2Y$  的分布函数.



## 1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题满分 15 分, 每小题 3 分.)

(1) 【答案】  $\frac{\sin t - t \cos t}{4t^3}$

【解析】这是个函数的参数方程, 满足参数方程所确定函数的微分法, 即

如果  $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$ , 则  $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{\phi'(t)}$ .

所以  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{2t}$ ,

再对  $x$  求导, 由复合函数求导法则得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left( \frac{-\sin t}{2t} \right) \cdot \frac{1}{2t} \\ &= \frac{-2t \cos t + 2 \sin t}{4t^2} \cdot \frac{1}{2t} = \frac{\sin t - t \cos t}{4t^3}. \end{aligned}$$

(2) 【答案】  $dx - \sqrt{2}dy$

【解析】这是求隐函数在某点的全微分, 这里点  $(1, 0, -1)$  的含义是  $z = z(1, 0) = -1$ .

将方程两边求全微分, 由一阶全微分形式不变性得

$$d(xyz) + \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0,$$

再由全微分四则运算法则得

$$(xy)dz + (ydx + xdy)z = -\frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

令  $x=1, y=0, z=-1$ , 得  $dy = \frac{dx - dz}{\sqrt{2}}$ , 即  $dz = dx - \sqrt{2}dy$ .

(3) 【答案】  $x - 3y + z + 2 = 0$

【解析】所求平面  $\Pi$  过直线  $L_1$ , 因而过  $L_1$  上的点  $(1, 2, 3)$ ;

因为  $\Pi$  过  $L_1$  平行于  $L_2$ , 于是  $\Pi$  平行于  $L_1$  和  $L_2$  的方向向量, 即  $\Pi$  平行于向量  $\vec{l}_1 = (1, 0, -1)$  和向量

$\vec{l}_2 = (2, 1, 1)$ , 且两向量不共线, 于是平面  $\Pi$  的方程



$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

即  $x-3y+z+2=0$ .

(4) 【答案】  $-\frac{3}{2}$

【解析】 因为当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin x \sim x, (1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}x$ ,

当  $x \rightarrow 0$  时  $ax^2 \rightarrow 0$ , 所以有

$$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3}ax^2, \cos x - 1 = -\frac{1}{2}\sin^2 x \sim -\frac{1}{2}x^2,$$

所以 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{2}{3}a.$$

因为当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$  与  $\cos x - 1$  是等价无穷小, 所以  $-\frac{2}{3}a = 1$ , 故  $a = -\frac{3}{2}$ .

(5) 【答案】 
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

【解析】 为求矩阵的逆可有多种办法, 可用伴随, 可用初等行变换, 也可用分块求逆. 根据本题的特点, 若知道分块求逆法, 则可以简单解答.

注意: 
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

对于 2 阶矩阵的伴随矩阵有规律:  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , 则求  $A$  的伴随矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

如果  $|A| \neq 0$ , 这样



$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{|ad-bc|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

再利用分块矩阵求逆的法则： $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ , 易见

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

## 二、选择题(本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 满分 15 分.)

(1) 【答案】(D)

【解析】由于函数的定义域为  $x \neq 0$ , 所以函数的间断点为  $x = 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-1} = \infty, \text{ 所以 } x=0 \text{ 为铅直渐近线,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-1} = 1, \text{ 所以 } y=1 \text{ 为水平渐近线.}$$

所以选(D).

【相关知识点】铅直渐近线: 如函数  $y = f(x)$  在其间断点  $x = x_0$  处有  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , 则  $x = x_0$  是函数的一条铅直渐近线;

水平渐近线: 当  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$  ( $a$  为常数), 则  $y = a$  为函数的水平渐近线.

(2) 【答案】(B)

【解析】令  $u = \frac{t}{2}$ , 则  $t = 2u, dt = 2du$ , 所以

$$f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + \ln 2 = \int_0^x 2f(u) du + \ln 2,$$

两边对  $x$  求导, 得  $f'(x) = 2f(x)$ , 这是一个变量可分离的微分方程, 即  $\frac{d[f(x)]}{f(x)} = 2dx$ . 解之得  $f(x) = Ce^{2x}$

, 其中  $C$  是常数.

又因为  $f(0) = \int_0^0 2f(u) du + \ln 2 = \ln 2$ , 代入  $f(x) = Ce^{2x}$ , 得  $f(0) = Ce^0 = \ln 2$ , 得

$C = \ln 2$ , 即  $f(x) = e^{2x} \cdot \ln 2$ .



(3) 【答案】(C)

【解析】因为

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + \cdots \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \quad (\text{收敛级数的结合律与线性性质}),\end{aligned}$$

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 5 - 2 = 3.$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) + \cdots$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 5 + 3 = 8,$$

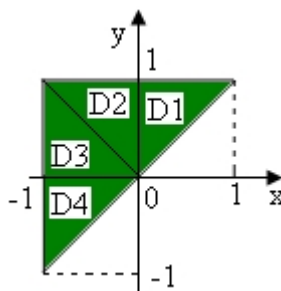
故应选(C).

(4) 【答案】(A)

【解析】如图, 将区域  $D$  分为  $D_1, D_2, D_3, D_4$  四个子区域.

显然,  $D_1, D_2$  关于  $y$  轴对称,  $D_3, D_4$  关于  $x$  轴对称.

令 
$$\begin{cases} I_1 = \iint_D xy dx dy \\ I_2 = \iint_D \cos x \sin y dx dy \end{cases},$$



由于  $xy$  对  $x$  及对  $y$  都是奇函数, 所以

$$\iint_{D_1+D_2} xy dx dy = 0, \quad \iint_{D_3+D_4} xy dx dy = 0.$$

而  $\cos x \sin y$  对  $x$  是偶函数, 对  $y$  是奇函数, 故有

$$\iint_{D_3+D_4} \cos x \sin y dx dy = 0, \quad \iint_{D_1+D_2} \cos x \sin y dx dy = 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy,$$

所以 
$$\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy = I_1 + I_2 = 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy,$$

故选(A).

(5) 【答案】(D)

【解析】矩阵的乘法公式没有交换律, 只有一些特殊情况可以交换.

由于  $A, B, C$  均为  $n$  阶矩阵, 且  $ABC = E$ , 对等式两边取行列式, 据行列式乘法公式



$|A||B||C|=1$ , 得到  $|A| \neq 0$ 、 $|B| \neq 0$ 、 $|C| \neq 0$ , 知  $A$ 、 $B$ 、 $C$  均可逆, 那么, 对于  $ABC = E$ , 先左乘  $A^{-1}$

再右乘  $A$  有  $ABC = E \rightarrow BC = A^{-1} \rightarrow BCA = E$ , 故应选 (D).

其实, 对于  $ABC = E$  先右乘  $C^{-1}$  再左乘  $C$ , 有  $ABC = E \rightarrow AB = C^{-1} \rightarrow CAB = E$ .

### 三、(本题满分 15 分, 每小题 5 分.)

(1) 【解析】这是  $1^\infty$  型未定式求极限.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + (\cos \sqrt{x} - 1))^{\frac{1}{\cos \sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\pi(\cos \sqrt{x} - 1)}{x}}$$

令  $\cos \sqrt{x} - 1 = t$ , 则  $x \rightarrow 0^+$  时  $t \rightarrow 0^-$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + (\cos \sqrt{x} - 1))^{\frac{1}{\cos \sqrt{x} - 1}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

所以 
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + (\cos \sqrt{x} - 1))^{\frac{1}{\cos \sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\pi(\cos \sqrt{x} - 1)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\pi(\cos \sqrt{x} - 1)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi(\cos \sqrt{x} - 1)}{x}}.$$

因为当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin x \sim x$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi(\cos \sqrt{x} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2\pi \sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2\pi \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}{x} = -\frac{\pi}{2},$$

故 
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi(\cos \sqrt{x} - 1)}{x}} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

(2) 【解析】先求方向  $\vec{n}$  的方向余弦, 再求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ , 最后按方向导数的计算公式

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \text{ 求出方向导数.}$$

曲面  $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$  在点  $P(1,1,1)$  处的法向量为

$$\pm \{4x, 6y, 2z\} \Big|_P = \{4x, 6y, 2z\} \Big|_{(1,1,1)} = \pm 2\{2, 3, 1\},$$

在点  $P(1,1,1)$  处指向外侧, 取正号, 并单位化得

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1}} \{2, 3, 1\} = \frac{1}{\sqrt{14}} \{2, 3, 1\} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}.$$





$$\text{又} \quad \begin{cases} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_P = \frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}} \Big|_P = \frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}} \Big|_{(1,1,1)} = \frac{6}{\sqrt{14}} \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_P = \frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}} \Big|_P = \frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}} \Big|_{(1,1,1)} = \frac{8}{\sqrt{14}} \\ \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_P = -\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2} \Big|_P = -\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2} \Big|_{(1,1,1)} = -\sqrt{14} \end{cases},$$

所以方向导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \\ &= \frac{6}{\sqrt{14}} \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{8}{\sqrt{14}} \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} - \sqrt{14} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{11}{7}. \end{aligned}$$

(3) 【解析】由曲线  $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转一周而围成的旋转面方程是  $x^2 + y^2 = 2z$ .

于是,  $\Omega$  是由旋转抛物面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  与平面  $z = 4$  所围成. 曲面与平面的交线是

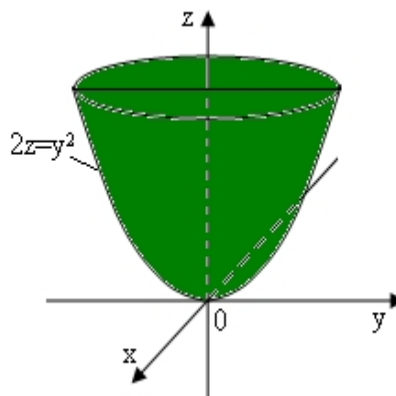
$$x^2 + y^2 = 8, z = 4.$$

选用柱坐标变换, 令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$ , 于是

$$\Omega: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 4, 0 \leq r \leq \sqrt{2z},$$

因此

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z) dV \\ &= \int_0^4 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} (r^2 + z) r dr \\ &= 2\pi \int_0^4 \left[ \left( \frac{r^4}{4} + \frac{r^2 z}{2} \right) \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{2z}} \right] dz \\ &= 4\pi \int_0^4 z^2 dz = \frac{256}{3} \pi. \end{aligned}$$



#### 四、(本题满分 6 分)

【解析】曲线  $y = a \sin x, (x \in [0, \pi])$ , 则  $dy = a \cos x dx$ , 所以



$$\begin{aligned}
I &= \int_L (1+y^3)dx + (2x+y)dy \\
&= \int_0^\pi [1+(a\sin x)^3 + (2x+a\sin x) \cdot a\cos x]dx \\
&= \int_0^\pi \left(1+a^3\sin^3 x + 2ax\cos x + \frac{a^2}{2}\sin 2x\right)dx \\
&= \pi + a^3 \int_0^\pi \sin^3 x dx + 2a \int_0^\pi x \cos x dx + \frac{a^2}{2} \int_0^\pi \sin 2x dx \\
&= \pi + a^3 \int_0^\pi (\cos^2 x - 1)d\cos x + 2a \int_0^\pi x d\sin x + \frac{a^2}{4} \int_0^\pi \sin 2x d2x \\
&= \pi + a^3 \left[ \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x \right]_0^\pi + 2a [x \sin x + \cos x]_0^\pi + \frac{a^2}{4} [-\cos 2x]_0^\pi \\
&= \pi + \frac{4}{3}a^3 - 4a.
\end{aligned}$$

对关于  $a$  的函数  $I = \pi + \frac{4}{3}a^3 - 4a$  两边对  $a$  求导数, 其中  $a > 0$ , 并令  $I' = 0$ , 得

$$I' = 4a^2 - 4 = 0.$$

所以  $a = 1$ , 且  $\begin{cases} I' < 0, 0 < a < 1 \\ I' > 0, 1 < a < +\infty \end{cases}$ .

故  $a = 1$  为函数  $I = \pi + \frac{4}{3}a^3 - 4a, (a > 0)$  的极小值点, 也是最小值点. 故所求的曲线为

$$y = \sin x, \quad (x \in [0, \pi]).$$

## 五、(本题满分 8 分.)

【解析】按傅式级数公式, 先求  $f(x)$  的傅式系数  $a_n$  与  $b_n$ . 因  $f(x)$  为偶函数, 所以

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots), \\
a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \\
&= 2 \int_0^1 (2+x) \cos n\pi x dx = 4 \int_0^1 \cos n\pi x dx + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 x d \sin n\pi x \\
&= -\frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x dx = \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots), \\
a_0 &= 2 \int_0^1 (2+x) dx = 5.
\end{aligned}$$

因为  $f(x) = 2 + |x|$  在区间  $(-1 \leq x \leq 1)$  上满足狄利克雷收敛定理的条件, 所以



$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2 + |x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right) \\
 &= \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \\
 &= \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x \quad (-1 \leq x \leq 1).
 \end{aligned}$$

令  $x=0$ , 有  $f(0) = 2 + 0 = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos 0$ , 所以,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .

又 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

所以, 
$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}, \text{ 即 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

#### 六、(本题满分 7 分.)

【解析】由定积分中值定理可知, 对于  $\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx$ , 在区间  $(\frac{2}{3}, 1)$  上存在一点  $\xi$  使得

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = f(\xi) \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} f(\xi),$$

即  $3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = f(\xi) = f(0).$

由罗尔定理可知, 在区间  $(0, 1)$  内存在一点  $c (0 < c < \xi < 1)$ , 使得  $f'(c) = 0$ .

#### 七、(本题满分 8 分)

【解析】设  $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 + x_4 \alpha_4 = \beta$ , 按分量写出, 则有

$$\begin{cases}
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
 x_2 - x_3 \alpha_3 + 2x_4 = 1 \\
 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 + 4x_4 = b+3 \\
 3x_1 + 5x_2 + x_3 + (a+8)x_4 = 5
 \end{cases}$$

对方程组的增广矩阵作初等行变换:

第一行分别乘以  $(-2)$ 、 $(-3)$  加到第三行和第四行上, 再第二行乘以  $(-1)$ 、 $(-2)$  加到第三行和第四行上, 有



$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & \vdots & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 & \vdots & b+1 \\ 0 & 2 & -2 & a+5 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & \vdots & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & \vdots & 0 \end{pmatrix},$$

所以, 当  $a = -1, b \neq 0$  时,  $r(A) + 1 = r(\bar{A})$ , 方程组无解. 即是不存在  $x_1, x_2, x_3, x_4$  使得

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \beta$  成立,  $\beta$  不能表示成  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的线性组合;

当  $a \neq -1$  时,  $r(A) = r(\bar{A}) = 4$ . 方程组有唯一解  $\left(-\frac{2b}{a+1}, \frac{a+b+1}{a+1}, \frac{b}{a+1}, 0\right)^T$ ,

故  $\beta$  有唯一表达式, 且  $\beta = -\frac{2b}{a+1}\alpha_1 + \frac{a+b+1}{a+1}\alpha_2 + \frac{b}{a+1}\alpha_3 + 0 \cdot \alpha_4$ .

**【相关知识点】** 非齐次线性方程组有解的判定定理:

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 线性方程组  $Ax = b$  有解的充分必要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵  $\bar{A} = (A:b)$

的秩, 即是  $r(A) = r(\bar{A})$  (或者说,  $b$  可由  $A$  的列向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表出, 亦等同于  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  与

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, b$  是等价向量组).

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 线性方程组  $Ax = b$ , 则

(1) 有唯一解  $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) = n$ .

(2) 有无穷多解  $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$ .

(3) 无解  $\Leftrightarrow r(A) + 1 = r(\bar{A})$ .

$\Leftrightarrow b$  不能由  $A$  的列向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表出.

## 八、(本题满分 6 分)

**【解析】方法 1:** 因为  $A$  为  $n$  阶正定阵, 故存在正交矩阵  $Q$ , 使

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$



其中  $\lambda_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ ,  $\lambda_i$  是  $A$  的特征值.

$$\text{因此 } Q^T(A+E)Q = Q^T A Q + Q^T Q = \Lambda + E$$

$$\text{两端取行列式得 } |A+E| = |Q^T(A+E)Q| = |\Lambda+E| = \prod (\lambda_i + 1),$$

从而  $|A+E| > 1$ .

**方法 2:** 设  $A$  的  $n$  个特征值是  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . 由于  $A$  为  $n$  阶正定阵, 故特征值全大于 0.

由  $\lambda$  为  $A$  的特征值可知, 存在非零向量  $\alpha$  使  $A\alpha = \lambda\alpha$ , 两端同时加上  $\alpha$ ,

得  $(A+E)\alpha = (\lambda+1)\alpha$ . 按特征值定义知  $\lambda+1$  是  $A+E$  的特征值. 因为  $A+E$  的特征值是

$\lambda_1+1, \lambda_2+1, \dots, \lambda_n+1$ . 它们全大于 1, 根据  $|A| = \prod \lambda_i$ , 知  $|A+E| = \prod (\lambda_i+1) > 1$ .

**【相关知识点】** 阵特征值与特征向量的定义: 设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 若存在数  $\lambda$  及非零的  $n$  维列向量  $X$  使得  $AX = \lambda X$  成立, 则称  $\lambda$  是矩阵  $A$  的特征值, 称非零向量  $X$  是矩阵  $A$  的特征向量.

## 九、(本题满分 8 分)

**【解析】** 曲线  $y = y(x)$  在点  $P(x, y)$  处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) \quad (\text{当 } y' \neq 0 \text{ 时}),$$

它与  $x$  轴的交点是  $Q(x + yy', 0)$ , 从而

$$|PQ| = \sqrt{(yy')^2 + y^2} = y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

当  $y' = 0$  时, 有  $Q(x, 0)$ ,  $|PQ| = y$ , 上式仍然成立.

因此, 根据题意得微分方程

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}},$$

即  $yy'' = 1 + y'^2$ . 这是可降阶的高阶微分方程, 且当  $x = 1$  时,  $y = 1, y' = 0$ .

$$\text{令 } y' = P(y), \text{ 则 } y'' = P \frac{dP}{dy}, \text{ 二阶方程降为一阶方程 } yP \frac{dP}{dy} = 1 + P^2, \text{ 即 } \frac{PdP}{1 + P^2} = \frac{dy}{y}.$$

即  $y = C\sqrt{1 + P^2}$ ,  $C$  为常数.

因为当  $x = 1$  时,  $y = 1, P = y' = 0$ , 所以  $C = 1$ , 即  $y = \sqrt{1 + P^2} = \sqrt{1 + y'^2}$ ,



所以  $y' = \pm\sqrt{y^2-1}$ . 分离变量得  $\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \pm dx$ .

令  $y = \sec t$ , 并积分, 则上式左端变为

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} &= \int \frac{\sec t \tan t dt}{\tan t} = \ln|\sec t + \tan t| + C \\ &= \ln|\sec t + \sqrt{\sec^2 t - 1}| + C = \ln|y + \sqrt{y^2 - 1}| + C.\end{aligned}$$

因曲线在上半平面, 所以  $y + \sqrt{y^2-1} > 0$ , 即  $\ln(y + \sqrt{y^2-1}) = C \pm x$ .

故  $y + \sqrt{y^2-1} = Ce^{\pm x}$ .

当  $x=1$  时,  $y=1$ ,

当  $x$  前取+时,  $C = e^{-1}$ ,  $y + \sqrt{y^2-1} = e^{x-1}$ ,

$$y - \sqrt{y^2-1} = \frac{y - \sqrt{y^2-1}}{(y + \sqrt{y^2-1})(y - \sqrt{y^2-1})} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{e^{x-1}} = e^{1-x};$$

当  $x$  前取-时,  $C = e$ ,  $y + \sqrt{y^2-1} = e^{-x+1}$ ,

$$y - \sqrt{y^2-1} = \frac{y - \sqrt{y^2-1}}{(y + \sqrt{y^2-1})(y - \sqrt{y^2-1})} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{e^{1-x}} = e^{x-1};$$

所以  $y = \frac{1}{2}(e^{(x-1)} + e^{-(x-1)})$ .

#### 十、填空题(本题满分 6 分, 每小题 3 分.)

(1) 【解析】一般说来, 若计算正态分布随机变量在某一范围内取值的概率, 应该已知分布的两个参数  $\mu$  和  $\sigma^2$ , 否则应先根据题设条件求出  $\mu$ ,  $\sigma^2$ , 再计算有关事件的概率, 本题可从

$\Phi(\frac{2}{\sigma}) = 0.8$ , 通过查  $\Phi(x)$  表求出  $\sigma$ , 但是注意到所求概率  $P(x < 0)$  即是  $\Phi(\frac{-2}{\sigma})$  与  $\Phi(\frac{2}{\sigma})$  之间的关系, 可以直接由  $\Phi(\frac{2}{\sigma})$  的值计算出  $\Phi(\frac{-2}{\sigma})$ .

因为  $X \sim N(2, \sigma^2)$ , 所以可标准化得  $\frac{X-2}{\sigma} \sim N(0, 1)$ ,

由标准正态分布函数概率的计算公式, 有

$$P(2 < x < 4) = \Phi(\frac{4-2}{\sigma}) - \Phi(\frac{2-2}{\sigma}),$$



$$\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = P(2 < x < 4) + \Phi(0) = 0.8.$$

由正态分布函数的对称性可得到  $P(x < 0) = \Phi\left(\frac{0-2}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.2.$

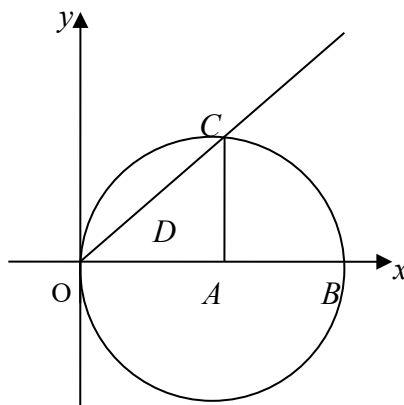
(2) 【解析】设事件  $A =$  “掷的点和原点的连线与  $x$  轴的夹角小于  $\frac{\pi}{4}$ ”，

这是一个几何型概率的计算问题. 由几何概率公式

$$P(A) = \frac{S_D}{S_{\text{半圆}}}, \text{ 而 } S_{\text{半圆}} = \frac{1}{2}\pi a^2,$$

$$S_D = S_{\square OAC} + S_{\frac{1}{4}\text{圆}} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}\pi a^2,$$

$$\text{故 } P(A) = \frac{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}\pi a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}.$$



### 十一、(本题满分 6 分)

【解析】二维连续型随机变量的概率等于对应区域的二重积分, 所以有

$$F(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X + 2Y \leq z\} = \iint_{x+2y \leq z} f(x, y) dx dy.$$

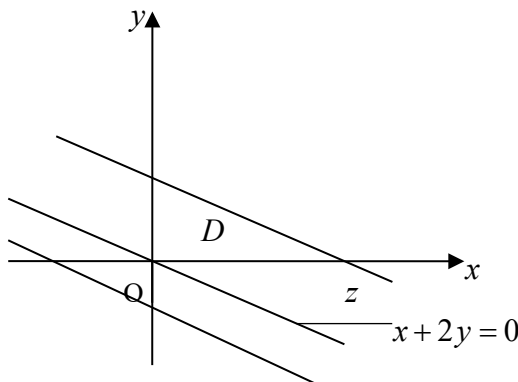
当  $z \leq 0$  时,  $F(z) = 0.$

因为  $x + 2y = z$  在直线  $x + 2y = 0$  的下方

与  $x > 0, y > 0$  (即第一象限) 没有公共区域,

所以  $F(z) = 0.$

当  $z > 0$  时,  $x + 2y = z$  在直线  $x + 2y = 0$



的上方与第一象限相交成一个三角形区域  $D$ , 此即为积分区间.

$$F(z) = \int_0^z dx \int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)} dy = \int_0^z (e^{-x} - e^{-z}) dx = 1 - e^{-z} - ze^{-z}.$$

所以  $Z = X + 2Y$  的分布函数  $F(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1 - e^{-z} - ze^{-z}, & z \geq 0. \end{cases}$