

生成树、最小生成树

辛济远

2017 年 11 月 26 日

1 生成树

定义: 如果连通图 G 的一个子图是一棵包含 G 的所有顶点的树, 则该子图称为 G 的生成树。即, 图上任意两点之间只有唯一一条通路。

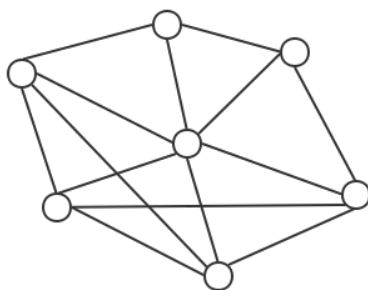


图 1: 连通图 G

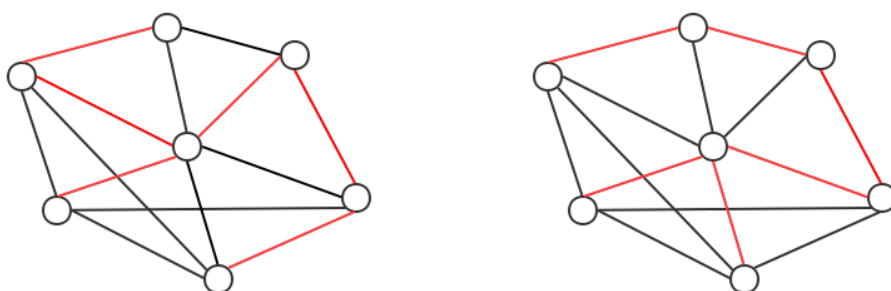


图 2: 两种可能的生成树

对于连通图 G (图一), 生成树不唯一。可以从图中的任意一节点开始, 通过深度优先搜索或者广度优先搜索对全图进行遍历, 进而得到图的一种生成树。由于搜索方法不同以及选取初始节点不同, 所得到的生成树也可能不同。对于某些问题, 需要我们求解连通图的最小生成树。

2 最小生成树

对于一张有权连通图 G ，其边权之和最小的生成树称为图 G 的最小生成树。如下图：

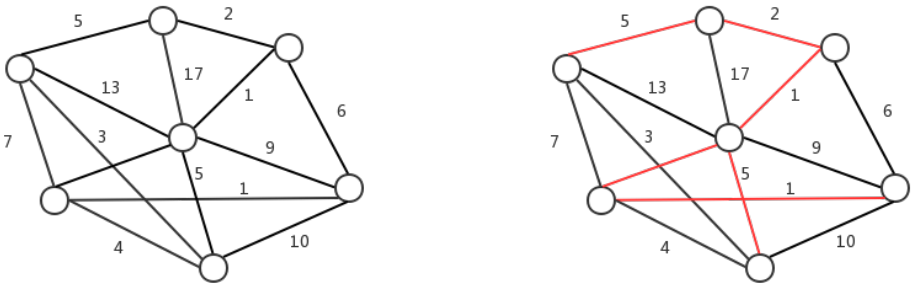


图 3: 连通图与其最小生成树

对最小生成树的求解一般有两种算法：Prim 算法和 Kruskal 算法。

2.1 Prim 算法

算法描述：

- 1) 初始化，令 $V_{new} = \{x\}$ 其中 x 是图 G 中的任意一点。
- 2) 从图 G 中寻找与集合 V 相邻的点，并选取其中距集合 V 距离最近的点，将其加入集合 V 。
- 3) 重复步骤 2) 直至 $V_{new} == V$ 。一般来说，Prim 算法可以简单的通过双重循环来进行实现，时

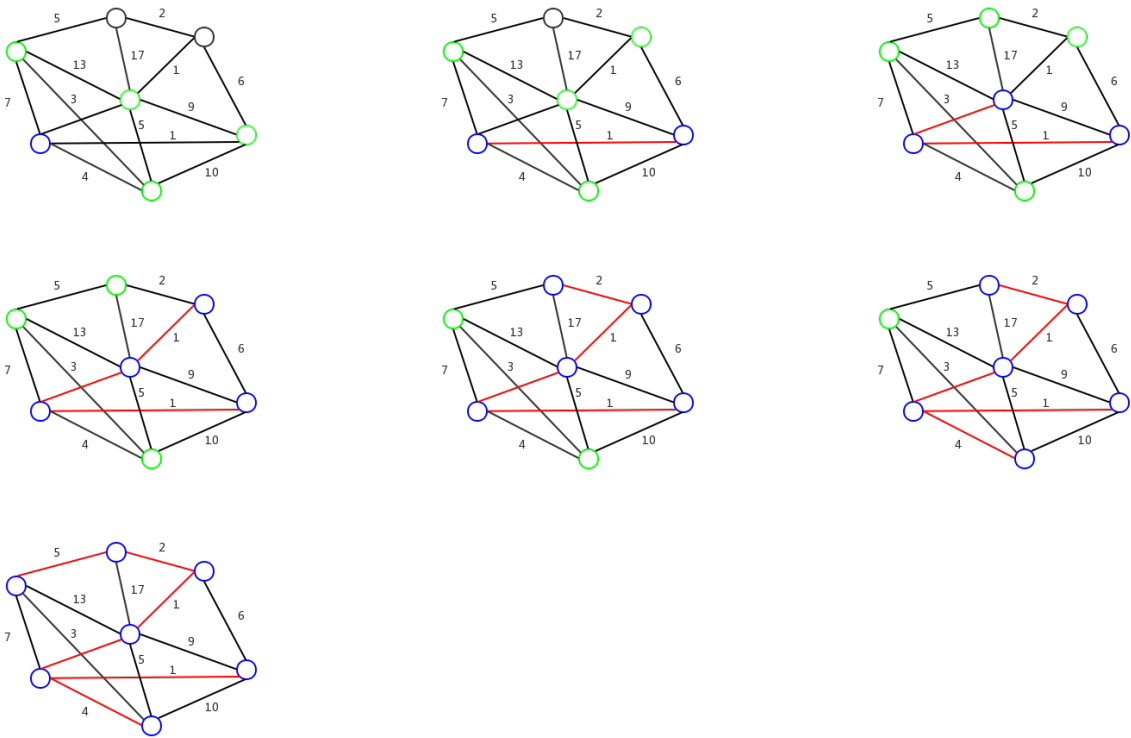


图 4: Prim 算法图示

间复杂度为 $O(n^2)$ 。对于寻找与集合 V 相邻的最近的点，也可以使用优先队列对其进行优化，进行优化后，时间复杂对为 $O(n \log n)$ 。

2.2 Kruskal 算法

Kruskal 算法是一种基于贪心和并查集的最小生成树求解方法。

算法描述：

- 1) 首先认为图 G 中的每一个点为一棵树，整张图为一个森林。
- 2) 选取图中最短的一条边，若边的起点和终点不为同一棵树，则合并这两棵树。
- 3) 重复步骤 2) 直至图中只剩一棵树，即为最小生成树。

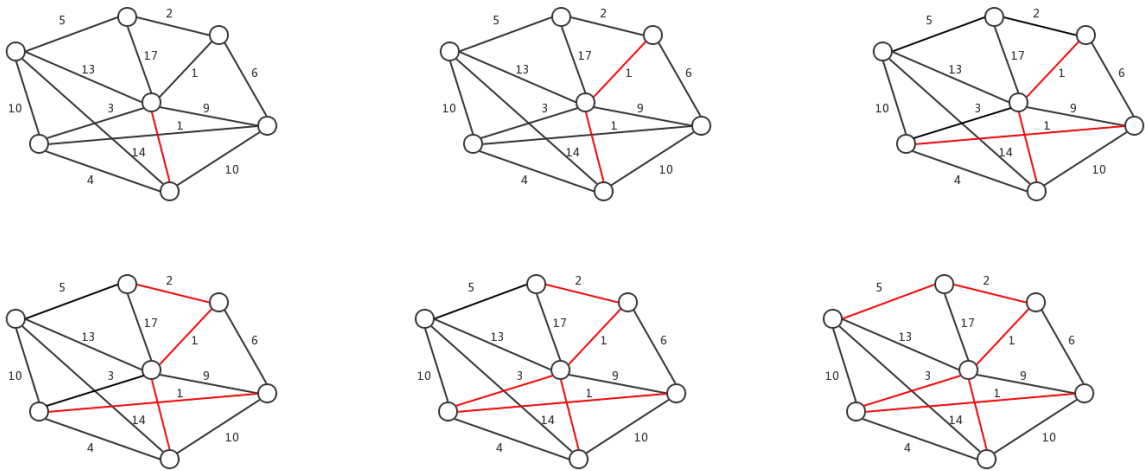


图 5: Kruskal 算法图示

3 题目

HDU 畅通工程系列
HDU 3938 Portal
NOIP * 货车运输