# 3 Поля

## 3.3 Алгебраические расширения

**Определение 1.** *Пусть $E$ - расширение поля $F$ ($^E/_F$) и $\alpha \in E$. $\alpha$ называется алгебраическим над $F$, если $\alpha$ является корнем некоторого ненулевого многочлена в $F[X]$. Если $\alpha$ не является алгебраическим над $F$, то $\alpha$ называется транцендентом.*
*Расширение $^E/_F$ называется алгебраическим, если $\forall$ элемент из $E$ является алгебраическим над $F$. В противном случае $^E/_F$ называется транцендентным.*
*Расширение поля $F$ вида $F(\alpha)$ называется простым расширением поля $F$.*

**Теорема 1.** *Пусть $^E/_F$ - расширение полей, $\alpha \in E$. Если $\alpha$ - трансцендентный над $F$, то $F(\alpha) \cong F[X]$. Если $\alpha$ - алгебраический над $F$, то $F(\alpha) \cong {}^{F[X]}/_{(P(X))}$, где $P(X) \in F[X]$. $\deg p$ - минимальна и $P(\alpha) = 0$. $P(X)$ - неприводим над $F$.*

**Теорема 2.** *Если $\alpha$ - алгебраический над $F$, тогда $\exists!$ унитарный неприводимый многочлен $P(X) \in F[X] \big| P(\alpha) = 0$. $P$ - минимальный многочлен элемента $\alpha$.*

**Теорема 3.** *Пусть $\alpha$ - алгебраический над $F, P(X) - min$ многочлен элемента $\alpha$ над $F$. Если $f(X) \in F[X]$ и $f(\alpha) = 0$, то $P(X)|f(X)$ в $F[X]$.*

### Конечные расширения

**Определение 2.** *Пусть $^E/_F$ - расширение полей. Будем говорить, что $E$ имеет степень $n$ над $F([E : F] = n)$, если $\dim_F E = n$. Если $[E : F]$ меньше бесконечности, то $^E/_F$ конечен, иначе - бесконечен.*

**Теорема 4.** *Если $^E/_F$ - конечно расширение полей, то $^E/_F$ - алгебраическое.*

*Доказательство.* Пусть $[E : F] = n$
Рассмотрим $\alpha \in E$
Базис состоит из $n$ элементов
Рассмотрим $\{1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^n\}$ - линейно независимы над $F$
$\Rightarrow \exists c_0, c_1, ..., c_n \in F \big| c_n\alpha^n + c_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + c_1\alpha + c_0 = 0$
$f(X) = c_nX^n + c_{n-1}X^{n-1} + ... + c_1X + c_0 = 0$
$\Rightarrow \alpha$ - алгебраический над $F$ $\square$

**Теорема 5.** *Пусть $F \subset E \subset K$, $^K/_E$ и $^E/_F$ - конечны. Тогда $^K/_F$ - конечное и $[K : F] = [K : E] \cdot [E : F]$.*