2 Теория колец

2.4 Гомоморфизм колец

2.4.1 Основные определения и примеры

Определение 1. *Гомоморфизмом колец $\varphi : R \to S$ (кольца) называется отображение:*

1. $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
2. $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

Изоморфизмом колец называется гомоморфизм колец, действующий биективно.

2.4.2 Свойства гомоморфизмов колец

Теорема 1. *Пусть $\varphi : R \to S$ - гомоморфизм колец, A - подкольцо в $R; B$ - идеал в S.*

1. *Для $\forall r \in R$ b положительного целого n :* $\begin{array}{l} \varphi(n \cdot r) = n \cdot \varphi(r) \\ \varphi(r^n) = (\varphi(r))^n \end{array}$
2. $\varphi(A) = \{\varphi(a) \big| a \in A\}$ *- подкольцо в S*
3. $\varphi^{-1}(B) = \{r \in R \big| \varphi(r) \in \varphi\}$ *- идеал в B*
4. *Если R - коммутативно, то $\varphi(R)$ - коммутативно*
5. *Если $1 \in R; S \neq \{0\}$ и φ - сюръективно, то $\varphi(1)$ - обратим (единица) в S*
6. *φ - изоморфизм $\Leftrightarrow$ φ - сюръективно и $Ker\ \varphi = \{r \in R \big| \varphi(r) = 0\} = \{0\}$*
7. *Если φ - изоморфизм, то φ^{-1} - изоморфизм*

Теорема 2. *Пусть $\varphi : R \to S$ - изоморфизм колец. Тогда $Ker\ \varphi = \{r \in R \big| \varphi(r) = 0\}$ - идеал в R*

Теорема 3. *Пусть $\varphi : R \to S$ - изоморфизм колец. Тогда отображение* $\begin{array}{l} {}^{R}/_{Ker\ \varphi} \to \varphi(R) \\ r + Ker\ \varphi \to \varphi(r) \end{array}$ *- изоморфизм:* ${}^{R}/_{Ker\ \varphi} \cong \varphi(R)$

Теорема 4. *$\forall$ идеал в кольце R является ядром гомоморфизма кольца R. В частности, идеал A из R есть $Ker\ \varphi$, где φ :* $\begin{array}{l} R \to {}^{R}/_{A} \\ r \to r + A \end{array}$

Теорема 5. *Пусть R - кольцо с единицей.*
Отображение φ : $\begin{array}{l} \mathbb{Z} \to R \\ n \to n \cdot 1 \end{array}$ *- гомоморфизм колец*

Следствие 1. *Если R - кольцо с единицей и $char(R) = n > 0$, то R содержит подкольцо, изоморфное $\mathbb{Z}_n$*
Если $char(R) = 0$, то R содержит подкольцо, изоморфное $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть 1 - единица R
Рассмотрим $S = \{k \cdot 1 \big| k \in Z\}$

По предыдущей теореме: отображение $\varphi : \begin{array}{c} \mathbb{Z} \to S \\ k \to k \cdot 1 \end{array}$ - гомоморфизм колец

По первой теореме об изоморфизмах: ${}^{\mathbb{Z}}/_{Ker\ \varphi} \cong \varphi(\mathbb{Z})$
$Ker\ \varphi = \{k \in \mathbb{Z} \big| \varphi(k) = 0\}$, где $\varphi(k) = k \cdot 1 \Rightarrow k \cdot 1 = 0 \Rightarrow k\ char\ S \Rightarrow k$ - аддитивный порядок $1 \Rightarrow Ker\ \varphi = (k)$
${}^{\mathbb{Z}}/_{Ker\ \varphi} = {}^{\mathbb{Z}}/_{(k)} = \mathbb{Z}_k$
$\varphi(\mathbb{Z}) \subset S$
$\mathbb{Z}_k \cong \varphi(\mathbb{Z}) \subset S$
Можно рассмотреть отображение на себя (сюръективность)
$k = char\ \mathbb{Z}_k = char\ S \Rightarrow \varphi(\mathbb{Z}) = S \Rightarrow \mathbb{Z}_k \cong S$
Если $char\ R = 0 \Rightarrow S \cong {}^{\mathbb{Z}}/(0) \cong \mathbb{Z}$ $\square$

Следствие 2. *Для $\forall$ положительныц целых m отображение $\varphi : \begin{array}{c} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \\ x \to x\ (mod\ m) \end{array}$ является гомоморфизмом.*

Следствие 3. *Пусть F - поле и $char\ F = p$. Тогда F содержит подполе, изоморфное $\mathbb{Z}_p$. Если $char\ F = 0$, то F содержит подполе, изоморфное полю рациональных чисел.*

Теорема 6. *Пусть D - кольцо целостности. Тогда $\exists$ поле F, которое содержит подкольцо, изоморфное D.*