

3 Поля

3.1 Векторные пространства

Определение 1. Множество V называется векторным пространством над полем F , если V - абелева группа относительно сложения и если для $\forall a \in F$ и $\forall v \in V \exists av \in V$ выполняются условия:

1. $a(v + u) = av + au$
2. $(a + b)v = av + bv$
3. $a(bv) = (ab)v$
4. $1 \cdot v = v, \forall a, b \in F, \forall u, v \in V$

Определение 2. Пусть V - векторное пространство над полем F , U - подмножество в V . U называется подпространством V , если U - векторное пространство над F относительно операций в V .

Определение 3. Пусть $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ - множество векторов. Векторы из S называются линейно зависимыми над F , если $\exists a_1, \dots, a_n$ и не все $a_i = 0$ $| a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$. В противном случае векторы из S называются линейно независимыми.

Определение 4. Пусть V - векторное пространство над F . Подмножество $B \subset V$ называется базисом пространства V , если B - линейно независимо над F и \forall элемент из V есть линейная комбинация элементов из B .

Теорема 1. Если $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ и $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ - базисы векторного пространства V над полем F , то $m = n$.

Определение 5. Пусть векторное пространство имеющее базис, состоящий из n элементов. В этом случае говорят, что размерность $V(\dim_F V) = n$.

3.2 Расширение полей

Определение 6. Поле E называется расширением поля F , если $F \subseteq E$ и операции в F - операции из E , суженные до F .

Теорема 2 (Кронекера). Пусть F - поле и $f(X) (\neq \text{const}) \in F[X]$. Тогда \exists расширение E поля F , в котором многочлен $f(X)$ имеет ноль (корень).

Определение 7. Пусть E - расширение поля F и $f(X) \in F[X]$. Многочлен f расщепляется в E , если f разлагается в произведение линейных множителей в $E[X]$. E называется полем разложения для f над F , если f расщепляется в E , но ни в каком другом собственном подполе E .

Теорема 3. Пусть F - поле, $f(X) (\neq \text{const}) \in F[X]$. Тогда \exists поле разложения E/F для многочлена $f(X)$.