2 Теория колец

2.3 Идеалы и фактор-кольца

Простые и max идеалы

Определение 1. *Простым идеалом A коммутативного кольца R называется собственный идеал в $R\Big|$ для $a, b \in R$ и $ab \in A \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \in A \\ b \in A \end{array}\right.$*

Определение 2. *Максимальным идеалом A коммутативного кольца R называется собственный идеал в $R\big|\nexists$ идеала B в $R\big|A \subset B \subset R$*

Теорема 1. *Пусть R - коммутативное кольцо с единицей; A - идеал в R. ${}^{R}/_{A}$ - кольцо целостности тогда и только тогда, когда A - простой идеал.*

Доказательство. Пусть ${}^{R}/_{A}$ - кольцо целостности.
Рассмотрим $ab \in A$, где $a, b \in R$
Так как $a, b \in R \Rightarrow a + A, b + A \in {}^{R}/_{A}$
Рассмотрим $(a + A)(b + a) = ab + A = A$ - нулевой элемент кольца ${}^{R}/_{A}$
Так как ${}^{R}/_{A}$ - кольцо целостности
и $(a+A)(b+a) = A \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a + A = A \\ b + A = A \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \in A \\ b \in A \end{array}\right. \Rightarrow A$ - простой идеал $\square$

Теорема 2. *Пусть R - коммутативное кольцо с единицей, A - идеал в R. ${}^{R}/_{A}$ - поле $\Leftrightarrow A$ - max.*

Доказательство. Необходимость Пусть ${}^{R}/_{A}$ - поле
Рассмотрим B - идеал в $R\big|A \subset B$
$\Rightarrow \exists b \in B$ и $b \notin A \Rightarrow b + A$ - ненулевой элемент в ${}^{R}/_{A} \Rightarrow$ так как ${}^{R}/_{A}$ - поле, то $\exists c + A \in {}^{R}/_{A}\big|(b + A)(c + A) = 1 + A = bc + A$
$1 - bc \in A \subset B \Rightarrow 1 - bc \in B \Rightarrow 1 \in B \Rightarrow B = R$ Таким образом $A \subset B \subseteq R \Rightarrow A$ - max

Достаточность
Пусть A - max. Рассмотрим $b \in R\big|b \notin A$
Рассмотрим $B = \{br + a\big|r \in R, a \in A\}$ - идеал в R и $A \subset B$
$\Rightarrow B = R \Rightarrow 1 \in B \Rightarrow 1 = bc + a'$, где $a' \in A, c \in R$
$1 + A = bc + a' + A = bc + A = (b + A)(c + A) \Rightarrow$ для класса $b + A \exists$ обратный класс $c + A\big|(b + A)(c + A) = 1 + A$, тое сть $b + A$ - обратим $\Rightarrow {}^{R}/_{A}$ - поле $\square$