

# EPITA

## Mathématiques

Partiel (S2)

juin 2017

Nom : DAVID

Prénom : Clement

Nom de l'enseignant : H<sup>a</sup> Chanem

Classe : B2

NOTE :

13  
20

## Exercice 1 (2 points)

Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ . Déterminer la matrice  $A^{-1}$  en prenant soin de vérifier (au brouillon) le résultat final.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = -x + 3y - z \\ b = 3x - 5y + 2z \\ c = -x + 2y - z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a + b + c \\ y = a - c \\ z = -x + 3y - a = -(a + b + c) + 3(a - c) - a \\ \quad = a - b - 4c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -x + 3y - z \\ b - c = y \\ a + b + c = x \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Après vérification,  $AA^{-1} = I_3$ .

## Exercice 2 (4,5 points)

Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  les fractions rationnelles suivantes :

1.  $F(X) = \frac{X^2 + X + 1}{(X+1)(X-1)(X-3)}$

$$\frac{X^2 + X + 1}{(X+1)(X-1)(X-3)} = \frac{P}{Q} \quad d(P) < d(Q) \quad \text{donc} \quad F(X) = \frac{A}{(X+1)} + \frac{B}{(X-1)} + \frac{C}{(X-3)}$$

$$\text{Calcul de A : } \frac{X^2 + X + 1}{(X+1)(X-3)} = A \cdot \frac{B(X+1)}{(X-1)} + \frac{C(X+1)(X-1)}{(X-3)} \quad | \cdot \frac{1}{8}$$

$$\text{Calcul de B : pour } x=1 \quad B = \frac{-3}{4}$$

$$\text{Calcul de C : pour } x=3 \quad C = \frac{13}{2} \quad F(x) = \frac{1}{8(X+1)} + \frac{-3}{4(X-1)} + \frac{13}{2(X-3)}$$

2.  $G(X) = \frac{X^3 - X - 1}{(X+1)(X+3)}$

$$G(X) = \frac{X^3 - X - 1}{X^2 + 4X + 3} = \frac{P}{Q} \quad d(P) > d(Q)$$

$$\begin{array}{r} \overbrace{X^3 - X - 1}^P \quad \overbrace{X^2 + 4X + 3}^Q \\ -(X^3 + 4X^2 + 3X) \quad \text{---} \quad X - 4 \\ \hline -4X^2 - 4X - 1 \\ + (4X^2 + 16X + 12) \\ \hline 12X + 11 \\ \hline R \end{array}$$

$$P = QE + R$$

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}$$

$$G(X) = (X-4) + \frac{4}{(X+1)} + \frac{13}{(X+3)}$$

$$\text{Calcul de A : pour } x=-1$$

$$A = \frac{(-1)^3 - (-1) - 1}{(-1+3)} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{Calcul de B pour } x=-3$$

$$G(X) = (X-4) - \frac{1}{2(X+1)} + \frac{13}{(X+3)}$$

$$B = \frac{(-3)^3 - (-3) - 1}{(-3+1)} = \frac{-24+3-1}{-2} = \frac{26}{2} = 13$$

3.  $H(X) = \frac{X^2 - X - 1}{(X-2)(X^2+1)}$

$$H(x) = \frac{x^2 - x - 1}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{P}{Q} \quad d(P) < d(Q)$$

$$H(x) = \frac{A}{(x-2)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

Calcul de A :  $x = 2$

$$A = \frac{2^2 - 2 - 1}{(2^2 + 1)} = \frac{4 - 2 - 1}{4 + 1} = \frac{1}{5}$$

OK

Calcul de B et C :  $x = i$

$$Bx + C = \frac{i^2 - i - 1}{i - 2} = \frac{-i - 2}{i - 2} = \frac{(-2-i)(-2+i)}{(-2)^2 + i^2} = \frac{4 - 2i + 2i - i^2}{3} = \frac{4 - (-1)}{3} = \frac{5}{3}$$

donc  $B = 0$  et  $C = 1$

$$H(x) = \frac{1}{5(x-2)} + \frac{1}{(x^2+1)}$$

### Exercice 3 (3 points)

1. Soit  $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie pour tout  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  par  $f(P(X)) = (P(1), P(2))$ .

Déterminer la matrice de  $f$  relativement aux bases canoniques de  $\mathbb{R}_2[X]$  et  $\mathbb{R}^2$ .

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ f(P) \rightarrow (P(1), P(2)) \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}_2[X]} = \{1, X, X^2\}$$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \{(0, 1), (1, 0)\}$$

$$P(x) = 1 \Rightarrow f(P(x)) = (P(1), P(2)) = (1, 1) = 1(0, 1) + 1(1, 0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x) = x \Rightarrow f(P(x)) = (P(1), P(2)) = (1, 2) = 2(0, 1) + 1(1, 0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x) = x^2 \Rightarrow f(P(x)) = (P(1), P(2)) = (1, 4) = 4(0, 1) + 1(1, 0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_2[X]}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

~~16~~



2. Soit  $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x+y & y+z \\ x+z & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

Déterminer la matrice de  $u$  relativement aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

$B_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$   $B_{\mathbb{R}^3} = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$

$u(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$M_{B_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}, B_{\mathbb{R}^3}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

~~111~~

#### Exercice 4 (3 points)

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On note comme d'habitude  $f^2 = f \circ f$ .

1. Montrer que  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ .

$\text{Ker}(f) = \{x \in E, f(x) = 0\}$

$\text{Ker}(f^2) = \{x \in E, f(f(x)) = 0\}$

donc  $f(x) \in \text{Ker}(f)$  donc  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$

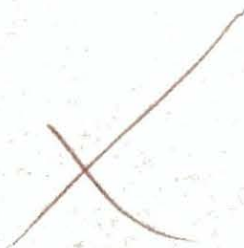
2. Montrer que  $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ .

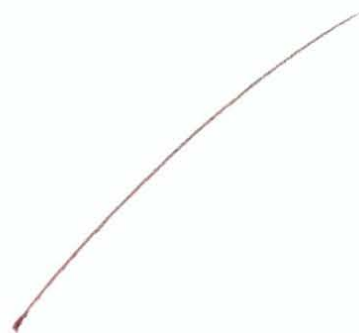
$\text{Im}(f) = \{y \in E, \exists x \in E, f(x) = y\}$

$\text{Im}(f^2) = \{y \in E, \exists x \in E, f(f(x)) = y\}$

donc  $f(f(x)) \in \text{Im}(f)$  donc  $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$

3. Montrer que :  $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\} \iff \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ .





### Exercice 5 (2 points)

On se place dans  $\mathbb{R}_2[X]$ . Dans les trois questions suivantes, vos réponses doivent être justifiées.

1.  $\mathcal{B}_1 = \{X^2 + X; X + 3\}$  engendre-t-elle  $\mathbb{R}_2[X]$ ?

Soit  $P = X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}_2[X]$

On cherche  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda_1(X^2 + X) + \lambda_2(X + 3) = X^2 + X + 1$

$\lambda_1 X^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)X + 3\lambda_2$ . Il n'existe pas de  $\lambda_1, \lambda_2$  possible donc cette base n'engendre pas  $\mathbb{R}_2[X]$  oui

2.  $\mathcal{B}_2 = \{2; X + 1; 2X^2; X^2 + 3\}$  est-elle une famille libre de  $\mathbb{R}_2[X]$ ?

Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$

On cherche  $2\lambda_1 + (\lambda_1 + 1)\lambda_2 + (2X^2)\lambda_3 + X^2 + 3\lambda_4 = 0$

Pour qu'un polynôme soit nul, il faut que tous ces coefficients soient nuls

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -\lambda_4 \\ \lambda_1 = \frac{3}{2}\lambda_4 \end{cases}$$

ou  $\lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4 \neq \lambda_1 \neq 0$  donc cette famille n'est pas libre.

3.  $\mathcal{B}_3 = \{1; X + 1; X^2 + 2X\}$  est-elle une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ ?

Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$  On cherche  $\lambda_1 + (\lambda_1 + 1)\lambda_2 + (\lambda_1^2 + 2X)\lambda_3 = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \text{ cette famille est libre.}$$

De plus,  $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1, X + 1, X^2 + 2X)$  donc  $\mathcal{B}_3$  est génératrice

$\mathcal{B}_3$  est libre et génératrice, c'est donc une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

## Exercice 6 (3 points)

Soient  $a$  et  $b$  deux réels,  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $J^2$  puis  $J^k$  pour  $k \geq 3$ .

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^3 = J^2 \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Donc  $J^k$  pour  $k \geq 3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Exprimer  $A$  en fonction de  $I$ ,  $J$  et  $J^2$  où  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$A = I + aJ + bJ^2$$

3. En déduire  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.

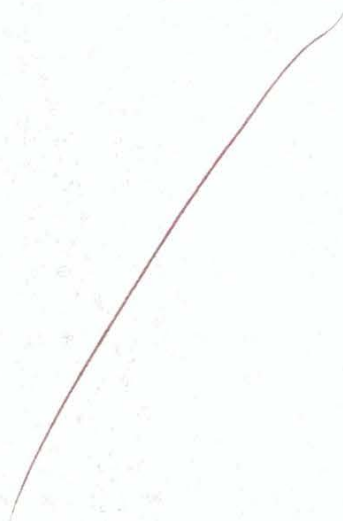
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 2b+a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 3b+3a^2 \\ 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4a & 4b+6a^2 \\ 0 & 1 & 4a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = (I + aJ + bJ^2)^2 = I + 2aJ + 2bJ^2 + a^2J^2$$

$$A^3 = (I + aJ + bJ^2)^3 = I + 3aJ + 3bJ^2 + 3a^2J^2$$

$$A^n = (I + aJ + bJ^2)^n = I + naJ + nbJ^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k a^2 J^2$$





## Exercice 7 (4 points)

Soit  $f: \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto (x+y, 2x+y+z, x+t) \end{cases}$

1. Montrer que  $f$  est linéaire.

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x + \lambda y + \lambda z, \lambda x + \lambda t) = \lambda(x, y, 2x+y+z, x+t) = \lambda f(x, y, z, t)$$

Soit  $u = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in \mathbb{R}^4$  et  $v = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, t_1+t_2) \\ &= ((x_1+x_2) + (y_1+y_2), 2(x_1+x_2) + (y_1+y_2) + (z_1+z_2), (x_1+x_2) + (t_1+t_2)) \\ &= (x_1+y_1, 2x_1+y_1+z_1, x_1+t_1) + (x_2+y_2, 2x_2+y_2+z_2, x_2+t_2) \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

$$0_{\mathbb{R}^4} = (0, 0, 0, 0)$$

$$f(0_{\mathbb{R}^4}) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$f$  est stable pour l'addition et la multiplication et l'élément neutre existe dans les deux ensembles donc  $f$  est linéaire.

2. Déterminer  $\text{Ker}(f)$  et donner sa dimension.

$$\text{Ker}(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, f(x, y, z, t) = 0\}$$

$$f(x, y, z, t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x+t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-y=-t \\ z=-2x-y=2y-y=y \end{cases}$$

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, -1, -1, -1))$$

$\text{Ker}(f)$  a donc une dimension égale à 1

3. En déduire  $\text{Im}(f)$ .

On sait que

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4)$$

$$\dim(\text{Im}(f)) = 4 - 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) \text{ donc } \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$$