lundi 27 mars 2017

Contrôle TD 4

7,5 / 10

Nom : DAVID Prénom : Clément Classe : B2

Question de cours

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $x \in E$ et $L = (e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.
Donner la définition mathématique précise (avec les quantificateurs adéquats) de « $x \in \mathrm{Vect}(L)$ ».

$x \in \mathrm{Vect}(L) \iff$

$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \; x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

écrire un énoncé complet

1

Exercice 1

Soient $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n\}$ et $F = \{f \in C^0([a,b], \mathbb{R}),\ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0\}$. E et F sont-ils des $\mathbb{R}$-ev ? Justifier votre réponse.

$E = \{U_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n\}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$ev

* $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ car $U_n = 0 \Rightarrow 0 = 2 0 + 0$ donc $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in E$

* Stabilité sur + : Soit $(u, v) \in E^2$, $w = u + v$

$W_{n+2} = U_{n+2} + V_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n + 2V_{n+1} - V_n = 2(U_{n+1} + V_{n+1}) - (U_n + V_n)$

$= 2(W_{n+1}) + W_n$

donc $w \in E$

* Stabilité sur . : Soit $u \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $w = \lambda u$

$W_{n+2} = 2(\lambda U_{n+1}) - \lambda U_n = 2W_{n+1} - W_n$

donc $w_n \in E$. E est stable sur + et . donc E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donc un $\mathbb{R}$ev

1,5

$F = \{f \in C([a,b], \mathbb{R}), \int_a^b f(t)dt = 0\}$ $C^0([a,b], \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ev

* $\int_a^b 0_{C([a,b],\mathbb{R})} = 0$ donc $0_{C^0([a,b],\mathbb{R})} \in F$

* Stabilité pour +, Soit $(f, g) \in F^2$, $h = f + g$

$\int_a^b h(t)dt = \int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt = 0 + 0 = 0$ donc $h \in F$

1,5

* Stabilité pour . : Soit $f \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$\int_a^b (\lambda f)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt = 0$ donc $\lambda f \in F$. F est stable pour + et . donc F est un sev de $C^0_{[a,b],\mathbb{R}}$

donc F est un $\mathbb{R}$ev.

Exercice 2

Soient $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telle que $f(0) = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire que $G = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telle que $\exists k \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) = k\}$. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F \oplus G$.

Montrons que $F \cap G = \{0\}$

* Mq $\{0\} \supset F \cap G$, Soit $f \in F$ et $f \in G$ ($f \in F \cap G$)

$f \in F \Rightarrow f(0) = 0$

$f \in G \Rightarrow f(x) = k$ et en particulier $f(0) = 0$ donc $k = 0$
donc $f(x) = 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$

1,5

donc $f \in \{0\}$ donc $F \cap G \subset \{0\}$

* F et G sont des $\mathbb{R}$ev donc $\{0\} \in F$ et $\{0\} \in G$ donc $\{0\} \in F \cap G$

donc $F \cap G = \{0\}$

Montrons que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F + G$

* F et G sont des sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ donc $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $G \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ donc $F + G \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

* Mq $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \subset F + G$, Soit $f \in F$ et $g \in G$

Non fait

$h = f + g$

$h(0) = f(0) + g(0) = k$, $k \in G$ donc $k \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$h(x) = f(x) + g(x) = f(x) + k$ et $f(x) \in F$ donc $f(x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$ev donc $f(x) + k \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ donc $h(x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

CCL : $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ donc $F \oplus G = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 3

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que : } x + y = 0 \text{ et } x - y = 0 \right\}$. Écrire E sous forme de sev engendré en utilisant la notation Vect.

$u = (x, y, z) \in E \iff x + y = 0$ et $x - y = 0$

$\iff x = y = 0$

$\iff u = (0, 0, z)$

$u = z(0,0,1) = zu_1$ avec $u_1 = (0,0,1)$

2

$E = \text{Vect}(u_1)$