20

$\frac{7{,}5}{10}$

Contrôle TD 3

Nom : DAVID **Prénom :** Clément **Classe :** B2

Question de cours

Soient (u_n) une suite réelle. Donner la définition précise avec les quantificateurs de « (u_n) n'est pas minorée » et « (u_n) tend vers $-\infty$ ».

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Rightarrow U_n \leqslant A)$ X

(U_n) est minorée $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{R}, U_n \geqslant a$; (U_n) tend vers $-\infty \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N},$

U_n n'est pas minorée $\Leftrightarrow \forall a \in$ [illegible] $\exists$ [illegible] $\in$ [illegible] $U_n < a$ $(n \geqslant n_0 \Rightarrow U_n < a)$

Question de cours

Calculer (puis simplifier au maximum) les expressions suivantes : $A = 5 + 8 + 11 + \cdots + 95$ et $B = \sum_{k=0}^{n-1} 3 \times 2^k$.

$A = 5 + 8 + 11 + \dots + 95$

$U_0 = 5,\ U_1 = 8,\ U_2 = 11$

$U_1 - U_0 = 3$

$U_2 - U_1 = 3$

$U_n = U_0 + 3 \times n$

$S = \text{nb termes} \left(\frac{U_0 + U_n}{2}\right) = 31\left(\frac{5 + 95}{2}\right) = 31 \times 50 = 1550$ ✓

$U_n = 95$

$95 = 5 + 3n$

$n = 30$

2,5

$B = \sum_{k=0}^{n-1} 3 \times 2^k$

$U_0 = 3$

$U_1 = 3 \times 2 = 6$

$U_2 = 3 \times 4 = 12$

$U_n = 3 \times 2^n$

$S = U_0 \left(\frac{1 - q^{\text{nb termes}}}{1 - q}\right) = 3\left(\frac{1 - 2^n}{1 - 2}\right)$

$= -3(1 - 2^n) = 3(2^n - 1)$ ✓

Exercice 1

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 8$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

$U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 2U_n - 8$

On pose $U_{n+1} = f(U_n)$ où $f(x) = 2x - 8$

On cherche le point fixe de $f(x)$: ✓

$f(x) = x$

$l = 2l - 8 \Leftrightarrow l = 8$

(suite du cadre page suivante)

On pose $W_n = U_n - \ell$

$W_n = U_n - 8$

Montrons que W_n est géométrique

$W_{n+1} = U_{n+1} - 8$

$W_{n+1} = 2U_n - 8 - 8$

$W_{n+1} = 2(U_n - 8)$

$W_{n+1} = 2W_n$

et $W_0 = U_0 - 8 = -7$

donc $W_n = -7 \times 2^n$

$U_n = W_n + 8$

$U_n = -7 \times 2^n + 8$

2

Exercice 2

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs vérifiant : $\exists(k,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N},\ k > 1,\quad \forall n \geqslant p,\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant k$.
Montrer rigoureusement que (u_n) tend vers $+\infty$.

$\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \geqslant k$

$n = p$: $\dfrac{U_{p+1}}{U_p} \geqslant k \Rightarrow U_{p+1} \geqslant kU_p$

$n = p+1$: $\dfrac{U_{p+2}}{U_{p+1}} \geqslant k \Rightarrow U_{p+2} \geqslant kU_{p+1} \geqslant k\,k\,U_p \geqslant k^2 U_p$

Montrons que $U_{p+n} \geqslant k^n U_p$

3

Initialisation

$U_{p+1} \geqslant k U_p$ donc P_1 est vraie

Hérédité

Supposons que $U_{p+n} \geqslant k^n U_p$,
Montrons que $U_{p+n+1} \geqslant k^{n+1} U_p$.

$\dfrac{U_{p+n+1}}{U_{p+n}} \geqslant k$

$U_{p+n+1} \geqslant k\, U_{p+n}$

or $U_{p+n} \geqslant k^n U_p$

donc

$U_{p+n+1} \geqslant k\, (k^n U_p)$

$U_{p+n+1} \geqslant k^{n+1} U_p$

CCl la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, on sait que $k > 1$

donc $\lim_{n\to+\infty} k^n = +\infty$

et $U_p > 0$ donc

$\lim_{n\to+\infty} k^n U_p = +\infty$

$\Rightarrow \lim u_n = +\infty$