95

Contrôle TD 1

$\frac{6}{10}$

Nom : NAVID **Prénom :** Clement **Classe :** B2

Question de cours (1,5 points)

Soient une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.
Donner la définition mathématique précise (avec les quantificateurs) de « f est continue en a ».

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \quad |x - a| < \eta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

1,5

Question de cours (1,5 points)

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Donner la définition mathématique (en utilisant les quantificateurs) de « f tend vers $-\infty$ au voisinage de $+\infty$ ».

$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| > \eta \Rightarrow f(x) < A$

1,5

Exercice 1 (3 points)

Déterminer le module et un argument des deux nombres complexes $z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}$ et $z_2 = \dfrac{i - \sqrt{3}}{i - 1}$.

$z_1 = \frac{z}{z'}$ $\quad |z| = 2$ $\quad |z'| = 2$

$\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ $\quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \theta = \frac{2\pi}{3}$ $\quad |z_1| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{2}{2} = 1$

$\cos(\theta') = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin(\theta') = -\frac{1}{2}$ $\quad \theta' = -\pi/6$ $\quad \theta_1 = \theta - \theta' = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

2

$z_2 = \frac{z}{z'}$ $\quad |z| = 2$ $\quad \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin(\theta) = \frac{1}{2}$ $\quad \theta = \frac{5\pi}{6}$ $\quad |z_2| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$|z'| = \sqrt{2}$ $\quad \cos(\theta') = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sin(\theta') = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \theta' = \frac{3\pi}{4}$ $\quad \theta_2 = \theta - \theta' = \frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{4}$

$= \frac{20\pi}{12} - \frac{18\pi}{12} = \frac{2\pi}{12}$

$= \cancel{\frac{\pi}{6}}$

$\frac{\pi}{12}$

Exercice 2 (1 points)

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+x^2) + x - 1$.
Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = 0$.

$f(x)$ est une fonction composée de deux fonctions continues ~~su~~ $[0,1]$, elle est continue sur $[0,1]$

$f(0) = -1 < 0$; $f(1) = \ln 2 + 1 > 0$; $f(0) \times f(1) < 0$ donc d'après le theorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in [0,1]$ $f(c) = 0$

1

Exercice 3 (3 points)

Déterminer (sans intégration par parties ni changement de variables) les intégrales $I = \int_0^{\pi/3} \tan(x)\,\mathrm{d}x$, $J = \int_0^{\ln(3)} \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ et $K = \int_0^1 xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

$I = \int_0^{\pi/3} \tan(x)\,dx = [\text{Arctan}\, x]_0^{\pi/3} = \text{Arctan}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \text{Arctan}(0)$

$J = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} =$

$J = \int_0^{\ln(3)} \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,d(x) = \left[\frac{-1}{(e^x+1)}\right]_0^{\ln(3)} = \frac{-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$k = \int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e-1)$