

Contrôle 2

0.9
20

Durée : trois heures

Documents et calculatrices non autorisés

Nom : DAVID

Prénom : Clément

Classe : B2

Entourer votre professeur de TD : Mme Boudin / Mme Daadaa / M. Ghanem / M. Goron / Mme Trémoulet

Consignes :

- vous devez répondre directement sur les feuilles jointes.
- aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.
- aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
- toute personne ne respectant pas ces consignes se verra attribuer la note 00/20.

Exercice 1 (4,5 points)

1. Via une double intégration par parties, calculer $I = \int_1^e \sin(\ln(x)) dx$.

2. Via une intégration par parties, calculer $J = \int_0^1 \arctan(x) dx$.

3. Via le changement de variable $u = \sqrt{x}$ puis une intégration par parties, calculer $K = \int_0^{x^2} \cos(\sqrt{x}) dx$.

Exercice 2 (3 points)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles strictement positives telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

1. Montrer que si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 \text{ car } u_{n+1} < u_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right) = 0$$

$$0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right) \leq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

2. Montrer que si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ alors $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty \text{ car } u_{n+1} > u_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right) > \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

Exercice 3 (3 points)

Encadrer le numéro des questions contenant les énoncés vrais.

Contrairement à l'habitude, les réponses erronées ne retirent pas de point!

1. Soient (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors l'assertion « si (u_n) converge vers ℓ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$ » est équivalente à l'assertion « s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > \ell$, alors (u_n) ne converge pas vers ℓ ».

- ☒ 2. Si (u_n) est une suite géométrique non nulle de raison $q \in \mathbb{R}^*$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{q}$.

3. Si (u_n) est une suite réelle bornée, il existe une suite extraite de (u_n) convergente.

- ☒ 4. Soit (u_n) une suite réelle. Alors (u_{6n}) est extraite de (u_{2n}) .

5. Soit (u_n) une suite réelle. Alors $(u_{2^{2n+1}})$ est extraite de (u_{6n}) .

6. Rien de ce qui précède.

Exercice 4 (3 points)

Soyent (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{(2n+4)!}$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1))!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+2)!} > 0 \end{aligned}$$

u_n est une suite croissante

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(2(n+1)+4)!} - u_n - \frac{1}{(2n+4)!} \\ &= \frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{(2n+4)!} = \frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{(2n+2)! \cdot (2n+3)(2n+4)} \\ &= \frac{1}{(2n+2)!} \left(1 - \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} \right) < 0 \end{aligned}$$

v_n est une suite décroissante

$$v_n = u_n + \frac{1}{(2n+4)!} \quad v_n - u_n = \frac{1}{(2n+4)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+4)!} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$$

Donc u_n et v_n sont deux suites adjacentes

Exercice 5 (2 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer (sans récurrence) que $\ln(n!) \leq n \ln(n)$.

$$e^{\ln(n!)} = n!$$

$$e^{n \ln(n)} = n^n$$

$$\text{et } n! \leq n^n \text{ donc } \ln(n!) \leq n \ln(n)$$

2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

$$\ln(n!) \rightarrow +\infty$$

$$n^2 \rightarrow +\infty$$

$$\text{et } \ln(n!) \leq n^2 \text{ donc } \frac{\ln(n!)}{n^2} \rightarrow 0$$

Exercice 6 (5,5 points)

Soit (u_n) la suite réelle définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Que vaut la somme $\sum_{k=1}^n q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$?

$$\sum_{k=1}^n q^{k-1} = U_0 \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) = \frac{1-q^n}{1-q}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Via la question précédente, montrer (sans récurrence), que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

$$\sum_{k=1}^n q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \text{ donc } \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$. Montrer (sans récurrence) que $\frac{1}{k!} = \frac{1}{2 \times 3 \times \dots \times k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.

Vérifier que l'inégalité est encore vraie pour $k = 1$.

$$k! = 1 \times 2 \times \dots \times k$$

$$2^{k-1} = \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{k-1 \text{ fois}}$$

$$\text{donc } k! \geq 2^{k-1} \quad \text{c.à.d.} \quad \boxed{\text{vrai}}$$

$$\text{donc } \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

4. Montrer que (u_n) est croissante.

$$\frac{1}{k!} > 0 \text{ et } \frac{1}{(k+1)!} > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ donc } \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} > \frac{1}{k!}$$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ est strictement croissante}$$

$$u_{n+1} - u_n = ?$$

5. Montrer (sans récurrence), via les questions 2 et 3, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 3$.

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$u_n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 3$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \quad \text{Non}$$

6. (u_n) est-elle convergente? Justifier votre réponse.

$$u_n \text{ est strictement croissante et } u_n \leq 3 \text{ donc } u_n \text{ est convergente.}$$