EPITA

Mathématiques

Partiel (S2)

juin 2017

Nom : DAVID

Prénom : Clement

Nom de l'enseignant : M^ Ghanem

Classe : B2

NOTE : 13/20

Exercice 1 (2 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A^{-1} en prenant soin de vérifier (au brouillon) le résultat final.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = -x + 3y - z \\ b = 3x - 5y + 2z \\ c = -x + 2y - z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a + b + c \\ y = a - c \\ z = -x + 3y - a = -(a+b+c) + 3(a-c) - a \\ \quad = a - b - 4c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -x + 3y - z \\ a - c = y \\ a + b + c = x \end{cases} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Après vérification, $AA^{-1} = I_3$

2

Exercice 2 (4,5 points)

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $F(X) = \dfrac{X^2+X+1}{(X+1)(X-1)(X-3)}$

$\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)(x-1)(x-3)} = \dfrac{P}{Q}$ d°P < d°Q donc $F(x) = \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{B}{(x-1)} + \dfrac{C}{(x-3)}$

Calcul de A $\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x-3)} = A + \dfrac{B(x+1)}{(x-1)} + \dfrac{C(x+1)}{x-3}$ pour $x = -1$: $A = \dfrac{1}{8}$

Calcul de B : pour $x = 1$ $B = \dfrac{-3}{4}$

Calcul de C pour $x = 3$ $C = \dfrac{13}{2}$ $F(x) = \dfrac{1}{8(x+1)} - \dfrac{3}{4(x-1)} + \dfrac{13}{2(x-3)}$

1

2. $G(X) = \dfrac{X^3 - X - 1}{(X+1)(X+3)}$

$G(x) = \dfrac{x^3-x-1}{x^2+4x+3} = \dfrac{P}{Q}$ d°P > d°Q

$$\begin{array}{r|l} \overbrace{x^3-x-1}^{P} & \overbrace{x^2+4x+3}^{Q} \\ -(x^3+4x^2+3x) & \underbrace{x-4}_{E} \\ -4x^2-4x-1 & \\ +(4x^2+16x+12) & \\ \underbrace{12x+11}_{R} & \end{array}$$

$P = QE + R$

$\dfrac{P}{Q} = E + \dfrac{R}{Q}$

$G(x) = (x-4) + \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{B}{(x+3)}$

Calcul de A : pour $x = -1$

$A = \dfrac{(-1)^3-(-1)-1}{(-1+3)} = \dfrac{-1}{2}$

Calcul de B pour $x = -3$

$B = \dfrac{(-3)^3-(-3)-1}{(-3+1)} = \dfrac{-27+3-1}{-2} = \dfrac{26}{2} = 13$

$G(x) = (x-4) - \dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{13}{(x+3)}$

1

3. $H(X) = \dfrac{X^2 - X - 1}{(X-2)(X^2+1)}$

$H(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{(x-2)(x^2+1)} = \dfrac{P}{Q}$ $d°(P) < d°(Q)$

$H(x) = \dfrac{A}{(x-2)} + \dfrac{Bx+C}{(x^2+1)}$

Calcul de A : x = 2

$A = \dfrac{2^2 - 2 - 1}{(2^2+1)} = \dfrac{4-2-1}{4+1} = \dfrac{1}{5}$

0,5

Calcul de B et C : x = i

$Bx + C = \dfrac{i^2 - i - 1}{i - 2} = \dfrac{-i-2}{i-2} = \dfrac{(-2-i)(-2+i)}{(-2)^2 + i^2} = \dfrac{4 - 2i + 2i - i^2}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

donc B = 0 et C = 1

$H(x) = \dfrac{1}{5(x-2)} + \cancel{\dfrac{1}{(x^2+1)}}$

Exercice 3 (3 points)

1. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par $f(P(X)) = (P(1), P(2))$.

   Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^2$.

$f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2 \\ f(P_x) \to (P1, P2) \end{cases}$

$B_{\mathbb{R}_2[x]} = \{1, x, x^2\}$

$B_{\mathbb{R}^2} = \{(0,1), (1,0)\}$

$P(x) = 1 \Rightarrow f(P(x)) = (P(1), P(2)) = (1,1) = (0,1) + (1,0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P(x) = x \Rightarrow f(P(x)) = (P(1), P(2)) = (1, 2) = 2(0,1) + (1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P(x) = x^2 \Rightarrow f(P(x)) = (P(1), P(2)) = (1, 4) = 4(0,1) + (1,0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$M_{\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1 ~~0~~

2. Soit $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x,y,z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y & y+z \\ x+z & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$

Déterminer la matrice de u relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$B_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} : \left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \right\}$ $\quad B_{\mathbb{R}^3} : \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$

$u(0,0,1) : \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

$u(0,1,0) : \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

$u(1,0,0) = \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

$M_{\mathbb{R}^3, \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}(u) = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

Exercice 4 (3 points)

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E)$. On note comme d'habitude $f^2 = f \circ f$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.

$\mathrm{Ker}(f) : \{x \in E, f(x) = 0\}$
$\mathrm{Ker}(f^2) : \{f(x) \in E, f(f(x)) = 0\}$
donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$

?

2. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

$\mathrm{Im}(f) = (y \in E, \exists x \in E, f(x) = y)$
$\mathrm{Im}(f^2) = (y \in E, \exists f(x) \in E, f(f(x)) = y)$
donc $f(f(x)) \in \mathrm{Im} f(x)$ donc $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im} f$

?

3. Montrer que : $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 5 (2 points)

On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$. Dans les trois questions suivantes, vos réponses doivent être justifiées.

1. $\mathscr{B}_1 = \{X^2 + X; X + 3\}$ engendre-t-elle $\mathbb{R}_2[X]$?

Soit $P = X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}_2[X]$

On cherche $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(X^2+X) + \lambda_2(X+3) = X^2+X+1$

$\lambda_1 X^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)X + 3\lambda_2$. Il n'existe pas de λ_1, λ_2 possible donc cette base n'engendre pas $\mathbb{R}_2[X]$

2. $\mathscr{B}_2 = \{2; X + 1; 2X^2; X^2 + 3\}$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$?

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$

On cherche $2\lambda_1 + (X+1)\lambda_2 + (2X^2)\lambda_3 + X^2 + 3\lambda_4 = 0$

Pour qu'un polynome soit nul, il faut que tous ces coeficients soient nuls

$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -\lambda_4 \\ \lambda_1 = \frac{3}{2}\lambda_4 \end{cases}$

$\lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4 \neq \lambda_1 \neq 0$ donc cette famille n'est pas libre.

3. $\mathscr{B}_3 = \{1; X + 1; X^2 + 2X\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ On cherche $\lambda_1 + (X+1)\lambda_2 + (X^2+2X)\lambda_3 = 0$

$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ cette famille est libre.

De plus, $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1, X+1, X^2+2X)$ donc $\mathscr{B}_3$ est generatrice

$\mathscr{B}_3$ est libre et generatrice, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 6 (3 points)

Soient a et b deux réels, $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2 puis J^k pour $k \geqslant 3$.

$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Donc J^k pour $k \geq 3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1

2. Exprimer A en fonction de I, J et J^2 où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$A = I + aJ + bJ^2$

0,5

3. En déduire A^n pour tout entier naturel n non nul.

$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 2b+a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 3b+3a^2 \\ 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4a & 4b+6a^2 \\ 0 & 1 & 4a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = (I + aJ + bJ^2)^2 = I + aJ + bJ^2$

$A^3 = (I + aJ + bJ^2)^3 = I + 2aJ + 2bJ^2 + a^2J^2$

$A^n = (I + aJ + bJ^2)^n = I + naJ + nbJ^2 + \sum_{k=1}^{n-1} ka^2J^2$

[suite du cadre page suivante]

Exercice 7 (4 points)

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto (x+y, 2x+y+z, x+t) \end{cases}$

1. Montrer que f est linéaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}, (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$

$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x + \lambda y + \lambda z, \lambda x + \lambda t) = \lambda(x+y, 2x+y+z, x+t)$
$= \lambda f(x,y,z,t)$

Soit $u = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in \mathbb{R}^4$ et $v = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4$

$f(u+v) = f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, t_1+t_2)$
$= ((x_1+x_2)+(y_1+y_2), 2(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2), (x_1+x_2)+(t_1+t_2))$
$= (x_1+y_1, 2x_1+y_1+z_1, x_1+t_1) + (x_2+y_2, 2x_2+y_2+z_2, x_2+t_2)$
$= f(u) + f(v)$

$0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0)$
$f(0_{\mathbb{R}^4}) = 0_{\mathbb{R}^3}$

f est stable pour l'addition et la multiplication et l'élément neutre existe dans les deux ensembles donc f est linéaire.

1

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et donner sa dimension.

$\mathrm{Ker}(f) : \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, f(x,y,z,t) = 0\}$

$f(x,y,z,t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x+t=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -y = -t \\ z = -2x - y = 2y - y = y \end{cases}$

$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1,-1,-1,-1))$

$\mathrm{Ker}(f)$ a donc une dimention égale à 1

2

3. En déduire $\mathrm{Im}(f)$.

1

On sait que
$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4)$
$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 4 - 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$