Le filtrage

Cette document est une introduction à l'étude des filtres. Vous trouverez tout d'abord un extrait du « Cahier Bleu » de M. GABON, ancien professeur d'Electronique à l'EPITA. La dernière partie est composée de petits exercices d'application.

I. INTRODUCTION

Il est important, pour bien comprendre la notion de Filtrage, de savoir d'où elle sort, à quoi elle sert, pourquoi on peut utiliser les nombres complexes pour la traiter, et surtout sa capacité à traiter des problèmes dans un cadre bien plus large que l'électronique, d'où cette introduction, un peu longue et générale mais essentielle.

1. Deux exemples pour commencer :

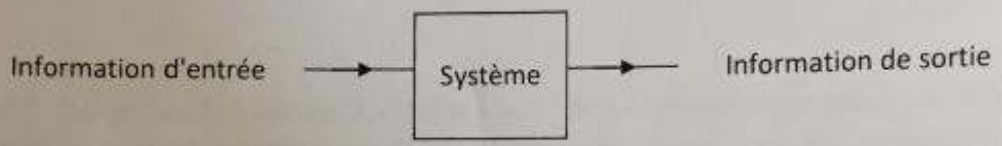
- Dans une chaîne HIFI, le signal issu du Tuner ou du lecteur de CD est très faible (typiquement 200 mV). Si on l'envoyait directement sur les enceintes, on n'entendrait pas grand chose !
  On envoie donc ce signal dans un Ampli qui ... l'amplifie : en sortie de l'ampli, l'amplitude du signal vaudra par exemple 20 V. Le signal d'entrée a donc été multiplié par 100 (20 V/200 mV) : ce facteur s'appelle l'Amplification.
  Une autre façon d'exprimer cette Amplification est de la donner en décibels, ce qui correspond à 20 fois le logarithme décimal de l'Amplification. Dans ce cas, on parle plutôt de Gain.
  Ici log10 (100) = 2 donc le Gain vaut 40 dB. Mais la valeur de ce Gain varie en fonction de la fréquence (un ampli HIFI n'amplifie pas des signaux de plusieurs Mégahertz !) et le constructeur ne garantit le Gain que dans une certaine plage de fréquence qu'il appelle la Bande Passante.

- Qu'est ce qui différencie deux chaînes de télé (en dehors de leur programme ...) ? La fréquence de leurs émetteurs respectifs. Pour changer de chaîne, on s'arrange pour qu'un circuit appelé Tuner n'amplifie que les signaux émis à la fréquence de l'émetteur choisi et atténue au maximum les signaux émis à d'autres fréquences.

On constate que, dans ces deux exemples, certains mots reviennent souvent : Amplification, Gain, Fréquence, Bande Passante. Ce sont ces termes-là et les notions qui vont avec que nous allons expliciter maintenant.

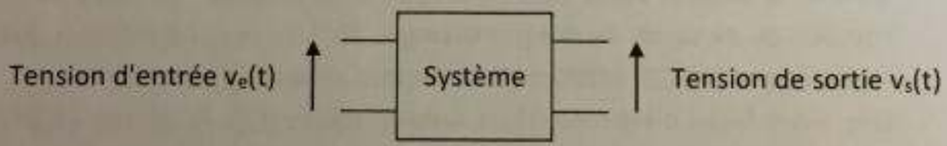
2. Généralisation

En physique, un Système est un ensemble de composants (électriques, mécaniques, ou autres ...) qui reçoit une ou plusieurs informations en entrée et qui restitue une ou plusieurs informations en sortie, lesquelles dépendent des informations d'entrée et du système utilisé. Dans notre étude, nous nous contenterons d'une seule information en entrée comme en sortie. On peut donc caractériser un système de ce type par le schéma suivant :



Les deux exemples vus ci-dessus sont des exemples de systèmes. Un moteur électrique est un autre système : l'information d'entrée est la tension ou la fréquence du signal qu'on lui applique et l'information de sortie est sa vitesse de rotation.

En électronique, les informations d'entrée et de sortie sont des tensions ou des courants et, en admettant qu'on ne regarde que les tensions, on peut symboliser un système par le schéma suivant :



Ce schéma s'adapte très bien au 1er exemple, la tension d'entrée de l'ampli étant les 200 mV et la tension de sortie les 20 V.

Le mot "système" est très général et, quand on cherche à évaluer l'évolution de la tension de sortie en fonction de la fréquence de la tension d'entrée, on l'appelle un FILTRE :

Un filtre est donc un circuit électronique qui "filtre" un signal c'est à dire qui l'amplifie ou l'atténue plus ou moins en fonction de sa fréquence.

3. Formes des signaux

Le signal qui arrive à l'entrée du filtre (la tension d'entrée de l'ampli par exemple) est aléatoire : son allure "contient" la musique que vous écoutez ou toute autre grandeur qui varie de façon imprévisible. Or on veut construire un filtre qui possède certaines caractéristiques bien précises : par exemple un ampli HIFI de Gain 20 dB et de Bande Passante 20 kHz.

Comment calculer les composants nécessaires en imaginant qu'on envoie "n'importe quoi" à l'entrée de cet ampli ? C'est bien sûr impossible. Heureusement ... une notion très importante nous sauve :

La notion d'harmonique

Les musiciens parmi vous en ont sans doute une idée intuitive : quand on pince une corde de guitare, elle vibre à une certaine fréquence qui dépend de sa longueur. Si on la pince au milieu, elle vibre deux fois plus vite et le son est deux fois plus aigu. Tous les sons sont en fait des sommes de vibrations à différentes fréquences. En généralisant, on peut dire qu'un signal périodique peut être décomposé en une somme de sinusoïdes : la sinusoïde de plus basse fréquence est appelée la Fondamentale et les sinusoïdes de fréquences multiples de la fondamentale sont appelées les Harmoniques.

La théorie mathématique qui sous-tend cette idée est la Transformation de Fourier (un peu complexe et que nous ne développerons pas, rassurez-vous !). Elle permet de passer d'un signal temporel (c'est à dire fonction du temps) à un signal fréquentiel qu'on appelle le Spectre du signal temporel, contenant toutes les sinusoïdes qui, regroupées, restituent le signal temporel aléatoire.

Exemples : un signal carré à 1 kHz est en fait la somme d'une sinusoïde à 1 kHz plus une autre à 2 kHz plus une autre à 3 kHz, etc. ... Le calcul prouverait que, plus le rang de l'harmonique augmente, plus son amplitude diminue. Les harmoniques de rang élevé ont une amplitude de plus en plus faible et on peut donc les négliger : En gardant par exemple les dix premières harmoniques, on peut dire qu'un signal carré de 1 kHz est constitué de 10 sinusoïdes, la première à une fréquence de 1 kHz et la dernière à 10 kHz.

Pour un signal aléatoire, on constate que son spectre s'atténue quand la fréquence augmente : on peut dire qu'il est limité à une certaine fréquence, l'influence des fréquences supérieures étant négligeable dans la reconstitution du signal temporel.

C'est cette idée qui nous sauve : au lieu d'imaginer qu'on envoie un signal aléatoire dans un filtre, on va supposer qu'on lui envoie un signal sinusoïdal de fréquence variable. L'analyse du signal de sortie en réponse à ce signal d'entrée sinusoïdal et de fréquence variable nous renseignera sur la réponse du filtre à un signal quelconque, dans la mesure où celui-ci peut être décomposé en somme d'harmoniques sinusoïdales.

Par exemple, dans l'exemple ci-dessus, pour amplifier correctement un signal carré de 1 kHz, on va calculer les composants d'un filtre qui amplifie correctement des signaux sinusoïdaux jusqu'à une fréquence de 10 kHz.

L'intérêt énorme de cette idée est que, dès qu'on travaille en sinusoïdal, on peut utiliser les nombres complexes et donc définir facilement les impédances des bobines et des condensateurs.

De plus, si l'on revient au cas général (signaux de forme aléatoire), les seules relations connues sont u(t) = L.di/dt pour une bobine et i(t) = C.du/dt pour un condensateur. Cela a deux conséquences :

- La relation entre le signal d'entrée et celui de sortie est une Equation Différentielle compliquée à résoudre (surtout si son ordre est supérieur à 2 !).
- La **forme** des signaux d'entrée est forcément modifiée par l'opération de dérivation.

Les avantages du régime sinusoïdal sont les suivants :

- La forme des signaux d'entrée n'est pas modifiée : en effet, les opérations de dérivation ou d'intégration ne modifient pas la **forme** d'un signal sinusoïdal mais seulement son amplitude et sa phase. Dans le plan complexe, cela se traduit donc par une homothétie et une rotation, soit une simple multiplication par un nombre complexe.
- La relation entre la tension d'entrée et celle de sortie est donc un nombre complexe, fonction de la fréquence du signal d'entrée : son module correspond au rapport d'homothétie (c'est à dire à l'Amplification) et son argument correspond au Déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée. Ces deux grandeurs (Amplification et Déphasage) et leur évolution en fonction de la fréquence sont justement celles que l'on cherche à calculer.

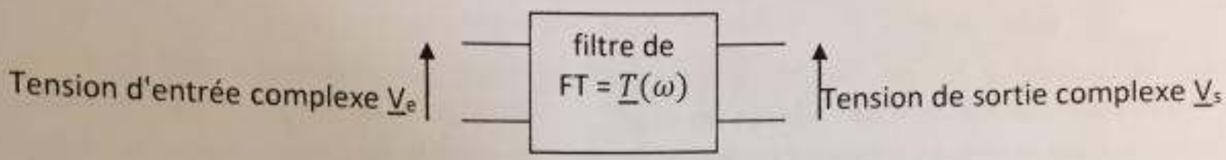
Ce nombre complexe ne dépend bien sur que du filtre étudié (et pas de la tension d'entrée).

C'est justement la Fonction de Transfert notée $\underline{T}(\omega)$

II. LES FONCTIONS DE TRANSFERT (FT)

1. Définitions générales

On peut maintenant représenter le filtre de la façon suivante :



Rem : il est d'usage de noter plutôt la FT en fonction de la pulsation ω que de la fréquence f car les calculs sont plus simples mais cela revient exactement au même en se rappelant que $\omega = 2\pi f$.

$v_e(t) = V_e.\sqrt{2}sin\ (\omega t)$ donc $\underline{V_e} = V_e$

- V_e est constante : la valeur efficace du signal d'entrée est fixée quelle que soit la fréquence.
- L'argument est nul par définition : c'est la référence par rapport à laquelle on appréciera le déphasage du signal de sortie.

$v_S(t) = V_S.\sqrt{2}sin\ (\omega t + \varphi)$ donc $\underline{V_S} = V_S e^{j\varphi}$

- V_S n'est pas constante : la valeur efficace du signal de sortie dépend de la fréquence de $v_e(t)$ et pour être rigoureux on devrait la noter $V_S(\omega)$.
- L'argument dépend aussi de la fréquence de $v_e(t)$ et on devrait le noter $\varphi\,(\omega)$.

On obtient : $\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_e}}$ soit en décomposant:

- $|\underline{T}(\omega)| = \frac{V_S}{V_e}$: le module de la FT correspond bien au rapport de la valeur efficace de la tension de sortie sur la valeur efficace de la tension d'entrée. c'est l'Amplification et on peut la noter $A(\omega)$. C'est une grandeur sans dimension et forcément positive ou nulle.
- $\varphi(\omega) = Arg\,(\underline{T}(\omega)) = Arg\,(num) - Arg\,(dén) = \varphi - 0 = \varphi$: l'argument de la FT correspond bien au déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée.
  Il s'exprime en radians ou mieux en degrés (directement mesurable à l'oscilloscope) et il est positif si le signal de sortie est en avance par rapport au signal d'entrée et négatif dans le cas contraire.

Si l'on trace sur papier semi-log les courbes du Gain en décibels et du déphasage, on obtient des graphiques appelés **Diagrammes de Bode**.

Pour calculer la FT, on utilise les lois fondamentales (loi d'Ohm, de Kirchoff, théorèmes de Thévenin ou de Norton, théorème de Millman, formule du pont diviseur en tension, etc. ...) en se souvenant que l'impédance complexe d'un condensateur s'écrit $1/jC\omega$ et celle d'une bobine $jL\omega$.

2. Etude du module (ou Amplification $A(\omega)$)

a) Ordre du filtre

Quand on calcule la FT, on obtient un polynôme complexe ou un quotient de polynômes complexes où apparaissent des termes en ω, ω^2 ... : l'ordre du filtre correspond au degré du polynôme, c'est à dire à l'exposant du terme de plus haut degré en ω. Nous nous limiterons à des filtres d'ordre 2.

Physiquement, l'ordre du filtre correspond au nombre de composants non résistifs (bobines ou condensateurs) du circuit.

b) Type de filtre

L'Amplification variant en fonction de la fréquence, l'étude de cette variation se mène comme l'étude classique d'une fonction $y = f(x)$, x étant la pulsation ω et y l'Amplification : étude de la dérivée, recherche des extremums, sens de variation, valeurs particulières.

Selon le sens de variation, on peut avoir 4 **types** de filtres :

$A(\omega)$ augmente quand f augmente : filtre passe-haut
$A(\omega)$ diminue quand f augmente : filtre passe-bas
$A(\omega)$ augmente puis diminue quand f augmente : filtre passe-bande (forcément d'ordre >1)
$A(\omega)$ diminue puis augmente quand f augmente : filtre coupe-bande (forcément d'ordre >1)

Rem : pour des filtres du 1er ordre, $A(\omega)$ est forcément monotone (croissante ou décroissante).

c) Gain

L'Amplification d'un filtre pouvant varier dans des proportions très importantes (1000 voir plus), il est plus intéressant de travailler sur son **Gain** : le Gain d'un filtre est égal à 20 fois le **logarithme décimal** de l'Amplification : il s'exprime en décibels (symbole : dB).

$$\textbf{On a donc } G(\omega) \textbf{ en dB} = 20.\log(A(\omega)) \textbf{ ou } 20.\log(|\underline{T}(\omega)|)$$

Rem 1 : la fonction"log" étant strictement monotone et croissante, le sens de la variation du Gain est évidemment le même que celui de l'amplification.

Rem 2 : si V_{SMAX} est plus grande que V_{eMAX}, $A(\omega) > 1$ et $G(\omega) > 0$, sinon $G(\omega) < 0$ (dans ce dernier cas on constate une atténuation du signal mais le terme d'Amplification est pris au sens général et peut englober une atténuation). Un Gain positif correspondra donc à une "vraie" amplification et un Gain négatif à une atténuation.

On cherchera la valeur du Gain maximum (G_{MAX}) qui est un paramètre important du filtre, ainsi que la fréquence pour laquelle on obtient ce Gain maximum.

d) Fréquence d'accord (ou centrale)

Pour un filtre passe-bande (ou coupe-bande) la fréquence pour laquelle le Gain est maximum (ou minimum) s'appelle la **fréquence d'accord** ou centrale : c'est un des paramètres les plus importants qui caractérise un filtre.

e) Fréquences de coupure

La fréquence de coupure est la fréquence pour laquelle le Gain est inférieur de 3 dB par rapport au Gain maximum ou, ce qui revient au même, c'est la fréquence pour laquelle l'Amplification est égale à l'Amplification maximum divisée par racine de 2 (la 2ème définition est plus pratique pour les calculs).

On a donc : pour $f = f_C$, $G_C = G_{MAX} - 3\ dB$ ou $A_C = A_{MAX} / \sqrt{2}$ (l'indice c veut dire coupure)

Rem 1 : pour des filtres passe-bas ou passe-haut, il n'y a qu'une fréquence de coupure et pour des filtres passe-bande ou coupe-bande, il y en a deux qu'on appelle fréquence de coupure basse (f_{cB}) et fréquence de coupure haute (f_{cH}).

Rem 2 : contrairement à l'idée contenue dans le mot coupure, il ne faut pas dire (ou croire ...) qu'au delà de la fréquence de coupure, le signal ne passe plus : il est seulement de plus en plus atténué mais il ne disparaît pas brutalement.

f) Bande passante

C'est la plage de fréquence comprise entre les deux fréquences de coupure :

La largeur de la bande passante – pour les filtres passe-bande et coupe-bande - est égale à la différence $f_{cH} - f_{cB}$.

Rem : on mesure la sélectivité d'un filtre passe-bande ou coupe-bande par le rapport : fréquence centrale sur bande passante : plus ce rapport est grand, plus le filtre est sélectif.

g) Pente et ordre du filtre

On s'intéresse aussi à la "vitesse" à laquelle décroît le Gain G(ω) quand on sort de la bande passante. Plus il décroît vite, plus le filtre atténue efficacement des signaux en dehors de la bande passante (qui est à priori la zone utile)

Dans l'expression du Gain, on fait donc tendre ω vers 0 puis vers l'infini : on trace ses asymptotes. Ce sont des droites dans un repère semi-log et on peut calculer la pente (cf. chapitre : les axes log).

On exprime cette pente en décibels par décade (variation d'un facteur 10 de la fréquence).

Elle est liée à **l'ordre** du filtre :

- filtre du 1er ordre : pente de l'asymptote : ± 20 dB par décade.
- filtre du 2ème ordre (passe-bas ou passe-haut) : pente de l'asymptote : ± 40 dB par décade.
- filtre d'ordre n (passe-bas ou passe-haut) : pente de l'asymptote : ± 20.n dB par décade.

La pente traduit donc l'efficacité avec laquelle le filtre atténue les signaux indésirables.

h) Tracé de la courbe de Gain

On peut tracer point par point la courbe du Gain en fonction de la fréquence sur du papier millimétré semi-logarithmique : en effet, la pente du Gain étant linéaire par rapport au log de la fréquence (quand f est très loin de la bande passante), la courbe sera rectiligne dans cette partie du graphe.

i) Etude de l'argument (ou Déphasage $\varphi(\omega)$)

Le déphasage variant en fonction de la fréquence, l'étude de cette variation se mène comme celle du Gain : étude de la dérivée, recherche des extremums, sens de variation, valeurs particulières.

Attention : il faut soigneusement étudier dans quel cadran du plan complexe se trouve le nombre complexe représentant la FT. En effet $Arg\,(\underline{T}(\omega)) = Arctan(b/a)$ si $\underline{T}(\omega) = a + jb$, mais la calculatrice ramène toujours l'angle entre $-90°$ et $+90°$, c'est à dire qu'elle "voit" $a > 0$.

La variation totale du déphasage est liée à l'ordre n du filtre et vaut n.90°

Rem : Pour des raisons pratiques qui seront expliquées plus tard, on aura intérêt ***si possible*** *à mettre le dénominateur de la fonction de transfert sous la forme normalisée ci-dessous :*

$1 + j\frac{\omega}{\omega_C}$ *pour un filtre du 1er ordre et* $1 + 2jz\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$ *pour un filtre du 2ème ordre.*

Les paramètres A, z et ω_0 correspondant à des caractéristiques physiques du filtre.

III. METHODOLOGIE D'ETUDE DES FILTRES

- Déterminer l'ordre du filtre : il correspond au nombre de composants non résistifs.
- Déterminer le type du filtre : il suffit d'imaginer que la fréquence du signal d'entrée tend vers 0 puis vers l'infini et de calculer l'amplitude du signal de sortie dans ces 2 cas.

  Pour cela on applique les règles suivantes :

  $f \to 0 \Rightarrow |\underline{Z}_C| \to \infty$: on enlève le condensateur

  $f \to 0 \Rightarrow |\underline{Z}_L| \to 0$: on remplace la bobine par un fil

  $f \to \infty \Rightarrow |\underline{Z}_C| \to 0$: on remplace le condensateur par un fil

  $f \to \infty \Rightarrow |\underline{Z}_L| \to \infty$: on enlève la bobine

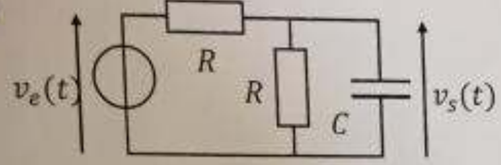
  Dans le montage, il ne reste que le générateur d'entrée et des résistances : le calcul de la tension de sortie s'effectue très simplement.
- Calculer la FT et la mettre sous forme normalisée (qui sera vue plus tard).
- En déduire les relations entre les composants du filtre et ses paramètres (Gain maximum, fréquence(s) de coupure, Bande Passante, etc....).
- Calculer les valeurs des composants pour obtenir les paramètres demandés.

IV. Applications :

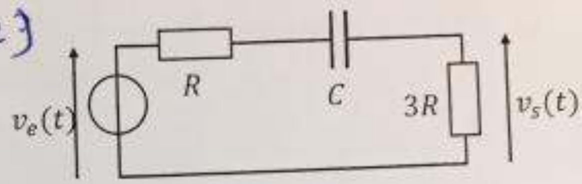
1. Exercice 1

Dans les circuits suivants, calculer les valeurs limites du gain quand $f \to 0$ et $f \to \infty$ et en déduire le type de filtre.

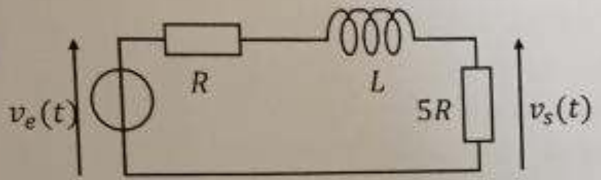
1)



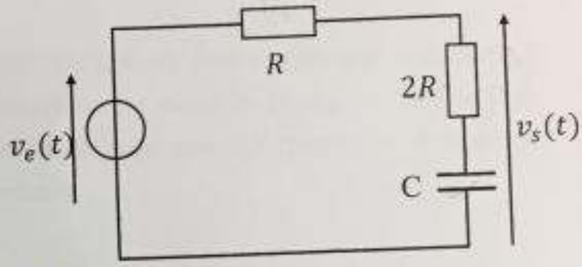
2)



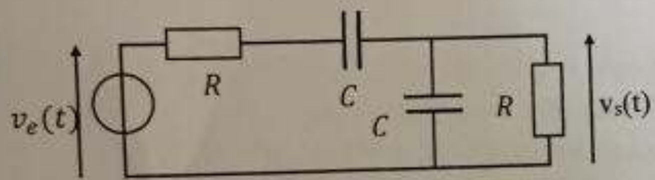
3)



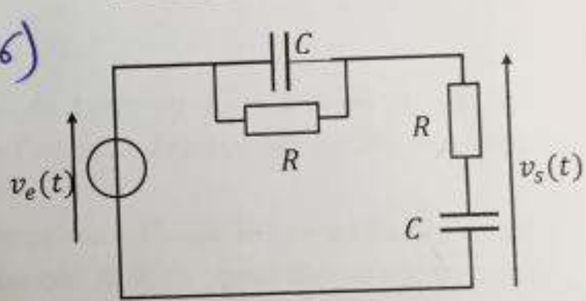
4)



5)



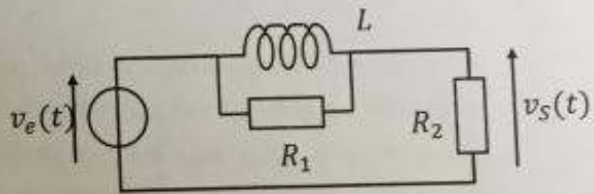
6)



2. Exercice 2

a. Calculer les valeurs limites du gain quand $f \to 0$ et $f \to \infty$ et en déduire le type de filtre.

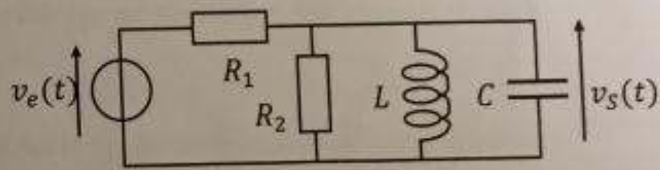
b. Calculer R_2 pour que $G_{min} = -12dB$ si $R_1 = 3\ k\Omega$ (rappel : log 2 = 0,3)



3. Exercice 3

a. Calculer les valeurs limites du gain quand $f \to 0$ et $f \to \infty$ et en déduire le type de filtre.

b. Calculer l'admittance (= inverse de l'impédance) du dipôle (R_2, L, C)



c. A quelle fréquence (en fonction de L et C) le gain sera-t-il maximum ?

d. Calculer R_2 pour que $G_{Max} = -9\ dB$ si $R_1 = 1\ k\Omega$