95 ***EPITA / S1*** Octobre 2016

NOM : DAVID PRENOM : Clément GROUPE : B2

Contrôle 1 de Physique

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Réponses exclusivement sur le sujet

15,5 / 20

Exercice 1 (4 points)

On considère, dans un repère orthonormé de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, les trois vecteurs :

$\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ de composantes respectives: $\vec{U}(-4x,-2,+4)$; $\vec{V}(-1,+2,+3)$; $\vec{W}(-2,+4y,+6)$

a) Calculer la norme de chacun des vecteurs pour $x = 0$ et $y = -1$.

$U = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$ N

$V = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ N

$W = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 6^2} = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$ N

1,5

b) Calculer le produit scalaire $\vec{U}.\vec{V}$, donner la valeur de x pour laquelle $\vec{U}$ est orthogonal à $\vec{V}$.

$\vec{U}.\vec{V} = x_U x_V + y_U y_V + z_U z_V = (-4x)\times(-1) + (-2)\times 2 + 4\times 3 = 4x + 8$

Pour que les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ soient orthogonaux, il faut que leur produit scalaire soit nul $\Rightarrow$ que $x = -2$

1

2- Calculer le produit vectoriel : $\vec{V} \wedge \vec{W}$, pour quelle valeur de y les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont colinéaires.

$\vec{V}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ $W\begin{pmatrix}-2\\4y\\6\end{pmatrix}$

$\vec{V} \wedge \vec{W} = \begin{pmatrix}2\times 6 - 3\times 4y\\ 3\times(-2) - 6\times(-1)\\ (-1)\times 4y - 2\times(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12 - 12y\\ -6+6\\ -4y+4\end{pmatrix}$

1,5

pour que $\vec{V}$ et $\vec{W}$ soient colinéaires, il faut que leur produit vectoriel soit nul

$\Rightarrow$ que $y = 1$.

Exercice 2 Composition de vecteurs (5 points)

Calculer la norme de la résultante $\vec{R}$ des vecteurs forces dans les cas suivants (1) et (2) :

1) $F_1 = 4N$

$F_2 = 3N$

$\alpha = (\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 90^\circ$

$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5N$ 1

2) $F_1 = 1N$

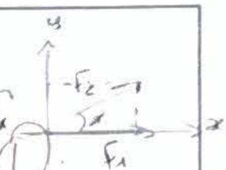
$F_2 = 2N$

$\alpha = (\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 60^\circ$

$R_x = F_1 + F_2 \cos\alpha \qquad R_y = F_2 \sin\alpha$

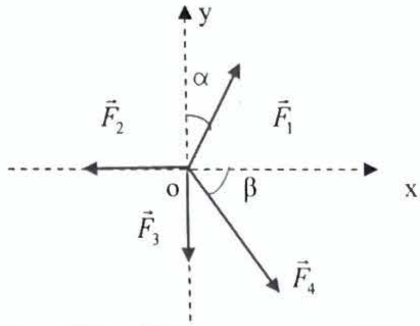
$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(F_1 + F_2\cos\alpha)^2 + (F_2 \sin\alpha)^2} = \sqrt{F_1^2 + 2F_1F_2\cos\alpha + F_2^2\cos^2\alpha + F_2^2\sin^2\alpha}$

$= \sqrt{F_1^2 + 2F_1F_2\cos\alpha + F_2^2} = \sqrt{1 + 2\times 1 \times 2 \times \cos\frac{\pi}{3} + 4} = \sqrt{1 + 4\times\frac{1}{2} + 4} = \sqrt{7}$ N 1



3) a- Donner les expressions littérales des composantes R_x et R_y de la résultante $\vec{R}$ des forces représentées sur le schéma ci-dessous, en fonction de F_1, F_2, F_3, F_4, α et β.

b- En déduire l'expression littérale de la norme de la résultante $\vec{R}$ en fonction des normes F_1, F_2, F_3, F_4, α et β.



$R_{x12} = F_2 + F_1 \sin\alpha \qquad R_{x34} = F_4\cos\beta$

$R_{y12} = F_1\cos\alpha \qquad R_{y34} = F_3 + F_4\cos\beta$

3

$R_x = F_2 + F_1\sin\alpha + F_4\cos\beta$

$R_y = F_1\cos\alpha + F_3 + F_4\cos\beta$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(F_2 + F_1\sin\alpha + F_4\cos\beta)^2 + (F_1\cos\alpha + F_3 + F_4\sin\beta)^2}$ (N)

Exercice 3 *Cinématique* (Sur 6 points)

Dans le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, la position d'un point M est définie à chaque instant t par les équations horaires: $\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = \sqrt{4(1-t^2)} \end{cases}$

1- Retrouver l'équation de la trajectoire. Préciser sa nature.

$t = \frac{x(t)}{2}$

$y(x) = \sqrt{4\left(1-\left(\frac{x(t)}{2}\right)^2\right)} = \sqrt{4 - x(t)^2}$ 0/1

La trajectoire est ~~parabolique~~.

2- a) Déterminer les composantes cartésiennes du vecteur vitesse. Exprimer sa norme.

$\vec{v} \begin{cases} \dot{x}(t) = v_x = 2 \\ \dot{y}(t) = v_y = \frac{-4}{\sqrt{4-4t^2}} \end{cases}$

$v = \sqrt{2^2 + \left(\frac{-4}{\sqrt{4-4t^2}}\right)^2}$ 1

$v = \sqrt{4 + \frac{-4^2}{4-4t^2}} = \sqrt{4 - \frac{16}{4-4t^2}}$ m.s⁻¹

b) En déduire les composantes a_T et a_N du vecteur accélération dans la base de Frenet

3- a) Déterminer les composantes cartésiennes du vecteur accélération. Exprimer sa norme.

$$\vec{a} \begin{cases} \dot{v}_x = 0 \\ \dot{v}_y = \sqrt{4-4t^2} \end{cases}$$

$$a = \sqrt{4-4t^2} \ m.s^{-2}$$

b) En déduire que le module du vecteur accélération est indépendant du repère d'étude.

Exercice 4 Cinématique (5 points)

On considère le mouvement d'un point matériel sur une spirale tracée sur un cône. Les équations horaires du mouvement en coordonnées cylindriques sont données par :

$$\begin{cases} \rho(t) = \rho_0 \exp(\omega.t) \\ z(t) = a\rho_0 \exp(\omega.t) \end{cases}$$ (a, ρ_0, ω sont des constantes positives et $\dot{\theta} = \omega$)

1- Donner le vecteur position $\vec{OM}$ en coordonnées cylindriques.

$\vec{OM} = \rho(t)\,\vec{U_\rho} + z(t)\,\vec{U_z} = \rho_0 \exp(\omega t)\,\vec{U_\rho} + a\rho_0 \exp(\omega t)\,\vec{U_z}$

1

2- Exprimer le vecteur vitesse en coordonnées cylindriques. En déduire sa norme.

$\vec{V} = \dot{\vec{OM}} = \rho_0 \omega \exp(\omega t)\,\vec{U_\rho} + \rho_0 \dot{\theta} \exp(\omega t)\,\vec{U_\theta} + a\rho_0 \omega \exp(\omega t)\,\vec{U_z}$

$= \rho_0 \omega \exp(\omega t)\,\vec{U_\rho} + \rho_0 \omega \exp(\omega t)\,\vec{U_\theta} + a\rho_0 \omega \exp(\omega t)\,\vec{U_z}$

$V = \sqrt{(\rho_0 \omega \exp(\omega t))^2 + (\rho_0 \omega \exp(\omega t))^2 + (a\rho_0 \omega \exp(\omega t))^2}$

$V = \sqrt{(\rho_0 \omega \exp(\omega t))^2 (2 + a^2)} = \rho_0 \omega \exp(\omega t) \sqrt{2 + a^2}$ rad.s^{-1}

2

3- Exprimer les composantes du vecteur accélération dans les mêmes coordonnées. En déduire sa norme.

$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \rho_0 \omega^2 \exp(\omega t)\,\vec{U_\rho} + \rho_0 \omega^2 \exp(\omega t)\,\vec{U_\theta} + \rho_0 \omega^2 \exp(\omega t)\,\vec{U_\theta} - \rho_0 \omega^2 \exp(\omega t)\,\vec{U_\rho}$

$+ a\rho_0 \omega^2 \exp(\omega t)\,\vec{U_z}$.

$\vec{a} = 2\rho_0 \omega^2 \exp(\omega t)\,\vec{U_\theta} + a\rho_0 \omega^2 \exp(\omega t)\,\vec{U_z}$

$a = \rho_0 \omega^2 \exp \omega t \sqrt{4 + a^2}$ rad.s^{-2}

2