Contrôle TD 2

Nom : HAUID Prénom : Clément $\frac{7}{10}$ Classe : B2

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' - 2xy = (1-2x)e^x$.

On pose (E) l'équation : $y' - 2xy = (1-2x)e^x$

(E_0) $y' - 2xy = 0$ $y_0 = ke^{-\int -2x} = ke^{-(-x^2)} = ke^{x^2}$ 2

solution particulière :

$y_p = k(x) y_0$

donc $y'_p = k'(x) y_0 + k(x) y_0'$

On prend $k = 1$ ~~dans~~ y_0 d'où : $y'_p = k'(x)e^{x^2} + k(x) 2x e^{x^2}$

On remplace dans (E) :

$k'(x)e^{x^2} + k(x) 2x e^{x^2} - k(x)e^{x^2} \times 2x = (1-2x)e^x$

$k'(x)e^{x^2} = (1-2x)e^x$

$k'(x) = (1-2x)e^{-x} = e^{-x} - 2xe^{-x}$

donc $k(x) = \cancel{(1-2x)} e^{-x} + x^2 e^{-x}$

d'où $y_p = (e^{-x} + x^2 e^{-x}) e^{x^2} = -e^x + x^2 e^x = (-1 + x^2)e^x$

donc

$S = \{ ke^{x^2} + (-1 + x^2)e^x \text{ avec } k \in \mathbb{R} \}$

Exercice 2

réciser si les fonctions suivantes sont injectives et/ou surjectives en justifiant votre réponse uniquement dans les cas défavorables :

$$: \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2 \end{cases}, g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \{1\} \\ x & \longmapsto 1 \end{cases} \text{ et } h : \begin{cases} \{1\} & \longrightarrow \{1, 2\} \\ x & \longmapsto 1 \end{cases}$$

1) (-1) n'a pas d'antécédant sur $\mathbb{R}$ par f donc f n'est pas surjective et f est injective 1

2) (1) a pour antécédant 0 et 1 donc g n'est pas injective et g est surjective 1

~~2 n'a pas d'antécédant sur~~

3) h est injective mais mais 2 n'a pas d'antécédant sur l'ensemble de départ donc h n'est pas surjective 1

Exercice 3

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

On cherche à montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Init pour $n = 1 \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}$ et $1 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 0,5

donc P_1 est vraie

Hérédité

On suppose que (P_n) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ est vraie

Montrons que P_{n+1} est vraie

$(P_{n+1}) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)}$??? 1,5

Calcul pas clair

$= 1 - \frac{(n+2)+1}{(n+2)(n+1)} = 1 - \frac{n+1}{(n+2)(n+1)}$

$= 1 - \frac{1}{n+2}$ $P(n+1)$ est vraie

donc P_n est vrai $\forall n \in \mathbb{N}^*$ car P_0 est vraie et $P(n+1)$ est vraie

il ne suffit pas de marquer le bon résultat