

Contrôle TD 2

Nom : HADJ

Prénom : Léonard

Classe : B2

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' - 2xy = (1 - 2x)e^x$.On pose (E) l'équation : $y' - 2xy = (1 - 2x)e^x$ (E₀) $y' - 2xy = 0$

$$y_0 = k e^{-\int 2x} = k e^{-(x^2)} = k e^{x^2}$$

solution particulière :

$$y_p = k(x) y_0$$

$$\text{donc } y'_p = k'(x) y_0 + k(x) y'_0$$

$$\text{On prend } k=1 \text{ dans } y_0 \text{ d'où : } y'_p = k'(x) e^{x^2} + k(x) 2x e^{x^2}$$

On remplace dans (E):

$$k'(x) e^{x^2} + k(x) 2x e^{x^2} - k(x) e^{x^2} \cdot 2x = (1 - 2x) e^x$$

$$k'(x) e^{x^2} = (1 - 2x) e^x$$

$$k'(x) = (1 - 2x) e^{-x} = e^{-x} - 2x e^{-x}$$

$$\text{donc } k(x) = \int (e^{-x} - 2x e^{-x}) dx = -e^{-x} + x^2 e^{-x}$$

$$\text{d'où } y_p = (e^{-x} + x^2 e^{-x}) e^{x^2} = e^x + x^2 e^x - (1 + x^2) e^x$$

donc

$$S = \left\{ k e^{x^2} + (-1 - x^2) e^x \text{ avec } k \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 2

Décider si les fonctions suivantes sont injectives et/ou surjectives en justifiant votre réponse uniquement dans les cas défavorables :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}, g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \{1\} \\ x \mapsto 1 \end{cases} \text{ et } h: \begin{cases} \{1\} \rightarrow \{1,2\} \\ x \mapsto 1 \end{cases}$$

1) (-1) n'a pas d'antécédant sur \mathbb{R} par f donc f n'est pas surjective et est injective

2) (1) a pour antécédant 0 et 1 donc g n'est pas injective et est surjective
 ~~g n'a pas d'antécédant sur~~

3) h est injective mais 2 n'a pas d'antécédant sur l'ensemble de départ donc h n'est pas surjective

Exercice 3

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

On cherche à montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Initial pour $n=1 \Rightarrow \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$ et $1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

donc P_1 est vraie

Hérédité

On suppose que $(P_n) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ est vraie

Montrons que P_{n+1} est vraie

$$(P_{n+1}) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Calcul pas clair

$$= 1 - \frac{(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{n+3}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+2} \quad P_{n+1} \text{ est vraie}$$

donc P_n est vrai $\forall n \in \mathbb{N}^*$ car P_1 est vraie et P_{n+1} est vraie

il ne suffit pas de montrer le résultat