Contrôle 2

0.9
/20

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Nom : DAVID **Prénom :** Clément **Classe :** B2

Entourer votre professeur de TD : Mme Boudin / Mme Daadaa / M. Ghanem / M. Goron / Mme Trémoulet

Consignes :

- vous devez répondre directement sur les feuilles jointes.
- ***aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.***
- aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
- toute personne ne respectant pas ces consignes se verra attribuer la note 00/ 20.

Exercice 1 (4,5 points)

1. Via une double intégration par parties, calculer $I = \displaystyle\int_1^e \sin\big(\ln(x)\big)\,dx$.

2. Via une intégration par parties, calculer $J = \int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Via le changement de variable $u = \sqrt{x}$ puis une intégration par parties, calculer $K = \int_0^{\pi^2} \cos\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 2 (3 points)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles strictement positives telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

1. Montrer que si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$\lim_{+\infty} V_n = 0 \Rightarrow \lim_{+\infty} V_{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{+\infty} \frac{V_{n+1}}{V_n} = 0$ car $V_{n+1} < V_n$

$\lim_{+\infty} \left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) \leq \lim_{+\infty} \left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right) = 0$

$0 < \lim_{+\infty} \left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) \leq 0$

$\lim_{+\infty} U_n = 0$

2. Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

$\lim_{+\infty} V_n = +\infty$ $\quad \lim_{+\infty} U_{n+1} = +\infty \Rightarrow \lim_{+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = +\infty$ car $U_{n+1} > U_n$

$\lim_{+\infty} \left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right) \geq \lim_{+\infty} \left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) = +\infty$

donc $\lim_{+\infty} U_n = +\infty$

Exercice 3 (3 points)

Encadrer le numéro des questions contenant les énoncés vrais.
Contrairement à d'habitude, ***les réponses erronées ne retirent pas de point***!

1. Soient (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors l'assertion « si (u_n) converge vers ℓ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$ » est équivalente à l'assertion « s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > \ell$, alors (u_n) ne converge pas vers ℓ ».

$\boxed{2.}$ Si (u_n) est une suite géométrique non nulle de raison $q \in \mathbb{R}^*$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{q}$. 1

3. Si (u_n) est une suite réelle bornée, il existe une suite extraite de (u_n) convergente.

$\boxed{4.}$ Soit (u_n) une suite réelle. Alors (u_{6n}) est extraite de (u_{2n}).

5. Soit (u_n) une suite réelle. Alors $(u_{3\cdot 2^{n+1}})$ est extraite de (u_{6n}).

6. Rien de ce qui précède.

Exercice 4 (3 points)

Soient (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{(4n+4)!}$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+2}}{(2(2n+2))!} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(2(2n+3))!} = \frac{1}{(4n+4)!} - \frac{1}{(4n+6)!} > 0$$

U_n est une suite croissante

$$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{(4(n+1)+4)!} - U_n - \frac{1}{(4n+4)!}$$

$$= \frac{1}{(4n+4)!} - \frac{1}{(4n+6)!} + \frac{1}{(4n+8)!} - \frac{1}{(4n+4)!}$$

$$= \frac{1}{(4n+8)!} - \frac{1}{(4n+6)!} < 0$$

V_n est une suite decroissante

$V_n = U_n + \frac{1}{(4n+4)!}$ $\qquad V_n - U_n = \frac{1}{(4n+4)!}$

$\lim_{+\infty} \frac{1}{(4n+4)!} = 0 \qquad \lim_{+\infty} (V_n - U_n) = 0$

~~Ressyentes~~ U_n et V_n sont donc adjacentes

Exercice 5 (2 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^2}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer (sans récurrence) que $\ln(n!) \leqslant n\ln(n)$.

$e^{\ln(n!)} = n!$

$e^{n\ln(n)} = n^n$

et $n! \leqslant n^n$ donc $\ln(n!) \leqslant n\ln(n)$

1

2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$\ln(n!) \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$n^2 \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

et $\ln(n!) \leqslant n^2$ donc $\dfrac{\ln(n!)}{n^2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$?

Exercice 6 (5,5 points)

Soit (u_n) la suite réelle définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Que vaut la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$?

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = U_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{1-q^n}{1-q}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Via la question précédente, montrer (sans récurrence), que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

1,5

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$. Montrer (sans récurrence) que $\frac{1}{k!} = \frac{1}{2 \times 3 \times \cdots \times k} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$.

   Vérifier que l'inégalité est encore vraie pour $k = 1$.

$k! = 2 \times 3 \times \dots \times k$

$2^{k-1} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{k-1 \text{ fois}}$

donc $k! \geqslant 2^{k-1}$ expliquer

donc $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$

1

4. Montrer que (u_n) est croissante.

$\frac{1}{k!} > 0$ et $\frac{1}{(k+1)!} > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ donc $\frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} > \frac{1}{k!}$ $u_{n+1} - u_n = ?$

donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est strictement croissante c.s

5. Montrer (sans récurrence), via les questions 2 et 3, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 3$.

$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$

$U_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 - \frac{1}{2^{k-1}} < 2$ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$ Non

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leqslant 3$

6. (u_n) est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

U_n est strictement croissante et $U_n \leqslant 3$ donc U_n est convergente.

1