补充知识：线性判别函数与判别面

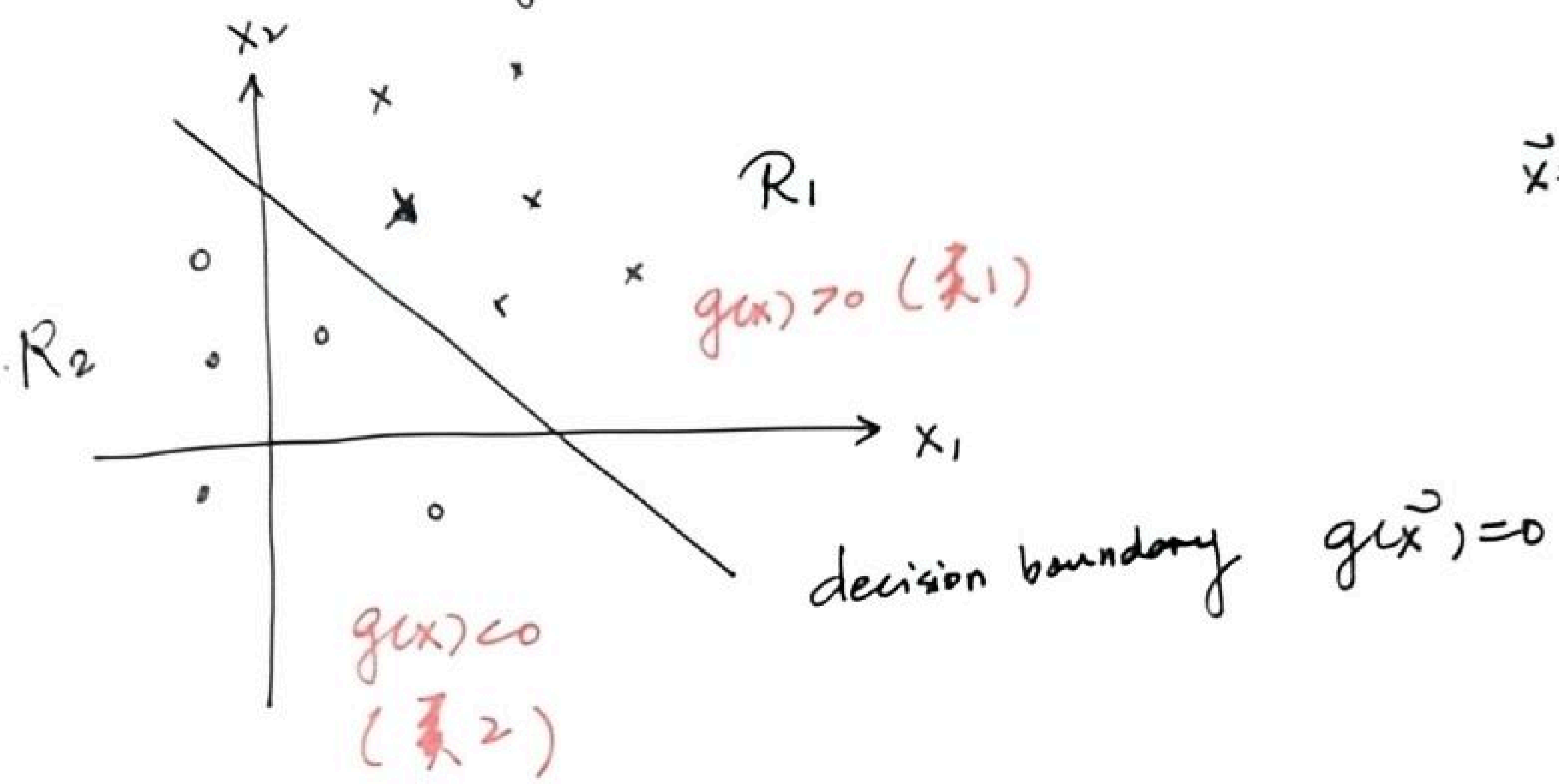
$$g(\vec{x}) = \vec{w}^T \vec{x} + b$$

Given: $\vec{x}$, $g(\vec{x})$ 的形式.

To-Do: $\vec{w}$, b

二分类问题：如果 $g(\vec{x}) > 0$ 则判为第一类.

$g(\vec{x}) < 0$ 　" 第二类



$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

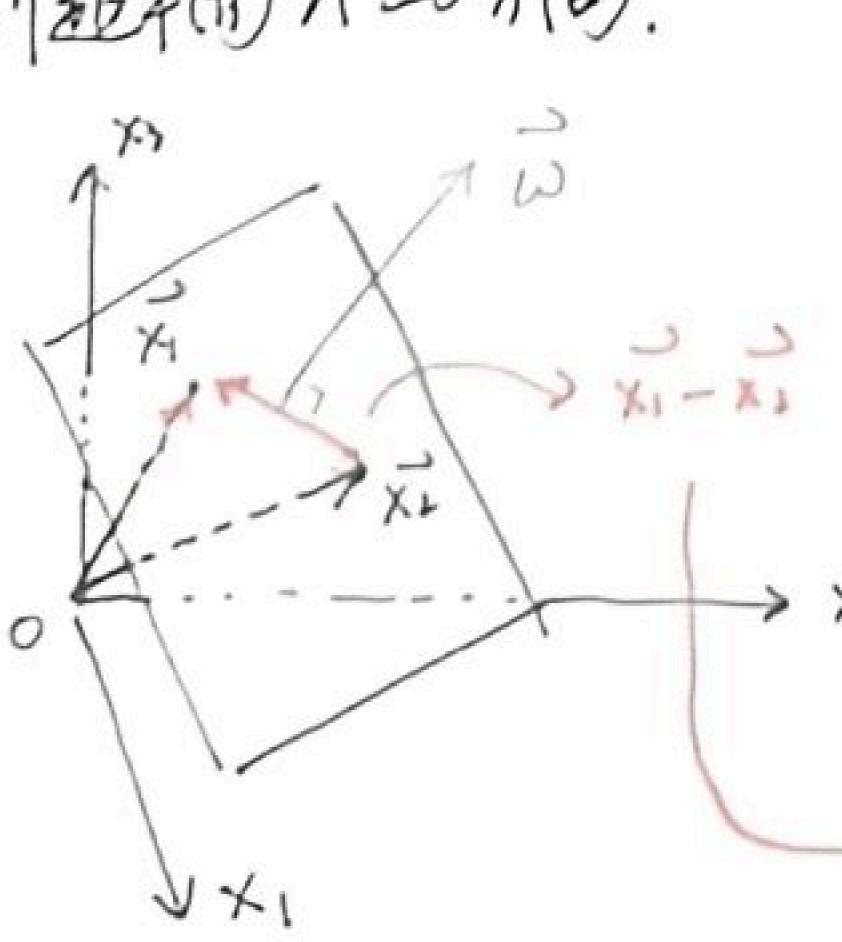
判别界面 ⟷ 判别超平面

- 1D：点
- 2D：线
- 3D：面

…

△ 空间中一个点 $\vec{x}$ 到判别超平面H的距离 r，如何计算？

① 判别超平面H的方向.

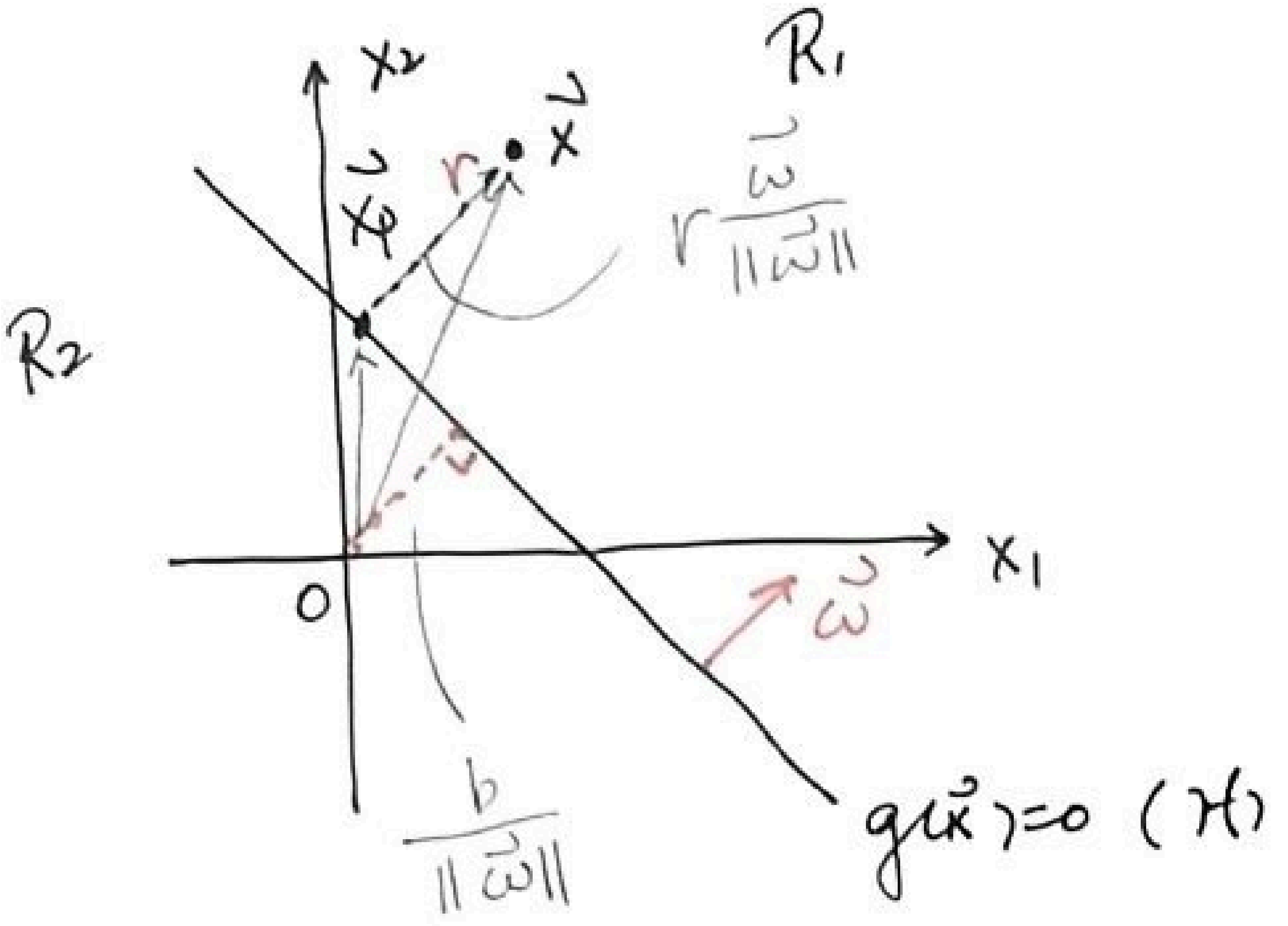


令 $\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$ 是H上的两个点，则

$$\left.\begin{aligned} g(\vec{x_1}) &= \vec{w}^T \vec{x_1} + b = 0 \\ g(\vec{x_2}) &= \vec{w}^T \vec{x_2} + b = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{w}^T(\vec{x_1} - \vec{x_2})$$

因此 H的方向由 $\vec{w}$ 决定且 $\vec{w}$ 为垂直于H上的任一个向量

(2) 以二分类问题为例.



$g(\vec{x})=\vec{\omega}^T\vec{x}+b$

令 $\vec{x_p}$ 为 $\vec{x}$ 投影到 $\mathcal{H}$ 上之点, 则

$$\vec{x}=\vec{x_p}+r\frac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|}$$

$$\begin{aligned}\therefore g(\vec{x})&=\vec{\omega}^T\vec{x}+b\\&=\vec{\omega}^T\left(\vec{x_p}+r\frac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|}\right)+b\\&=\vec{\omega}^T\vec{x_p}+r\|\vec{\omega}\|+b\end{aligned}$$

$\because$ $\vec{x_p}$ 在 $\mathcal{H}$ 上 $\therefore g(\vec{x_p})=\vec{\omega}^T\vec{x_p}+b\overset{0}{=}\Rightarrow \vec{\omega}^T\vec{x_p}=-b$

$$\Downarrow$$

$$g(\vec{x})=r\|\vec{\omega}\| \quad \therefore r=\frac{g(\vec{x})}{\|\vec{\omega}\|}$$

任一点 $\vec{x}$ 到 $\mathcal{H}$ 的距离

(3) 原点 $\vec{0}$ 到 $\mathcal{H}$ 的距离

$\because g(\vec{0})=\vec{\omega}^T\vec{0}+b \qquad \therefore r=\frac{g(\vec{0})}{\|\vec{\omega}\|}=\frac{b}{\|\vec{\omega}\|}$