曲率、曲率（对弧长）的导数以及曲率导数（对弧长）的导数的计算

本文参考这篇windSeS博主关于曲率的文章

1.曲线的表示形式

二维平面上的曲线有两种参数化形式，分别为：

- 参数方程1

$$\begin{cases} x_t = x(t) \\ y_t = y(t) \end{cases}$$

- 参数方程2

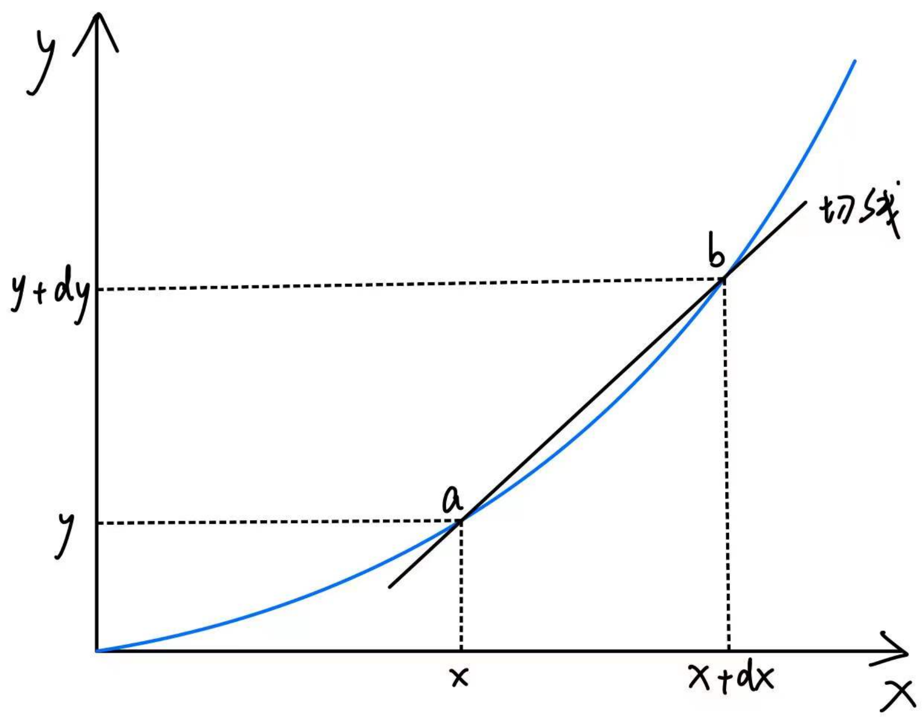
$$\begin{cases} x_t = x_t \\ y_t = y(x_t) \end{cases}$$

以上两种参数方程都可以唯一确定一条二维平面内的曲线。因此，下文计算的曲率、曲率的导数以及曲率导数的导数的公式都有两种等价的形式。

2.曲率计算公式及推导

2.1 参数方程1曲率公式推导

假定 (x_t, y_t) 处的切点为 α，则此点处曲线的斜率为 $tan(\alpha)$。(x_t, y_t) 的变量都为 t，假定 t 有一个小的增量 Δ_t，则 x_t 与 y_t 相应的都有一个小的增量 Δ_x 与 Δ_y。如下图所示，当 Δ_t 很小时，$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} \approx tan(\alpha)$。



a与b之间的距离dx即x的微分。dx曲线增量为dy，即y的微分。因为dx是无穷小量，所以ab连线即为切线，斜率是 $f'(x)=\frac{dy}{dx}$。

Δ_x 与 Δ_y 为 x_t 与 y_t 在 t 处的微分，一般分别表示为 dx 和 dy。$x\prime$ 与 $y\prime$ 表示函数 $x(t)$，$y(t)$ 对 t 的导数。

> 导数是函数图像在某一点处的斜率，是一个**比值**。微分是函数图像在某一点处的切线在横坐标取得 Δ_x 以后，纵坐标取得的增量，是一个**增量**。

当 $\Delta_t \rightarrow 0$ 时，$\frac{\Delta_y}{\Delta_x}=\frac{dy}{dx}=tan(\alpha) \Rightarrow \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=tan(\alpha) \Rightarrow \frac{y'}{x'}=tan(\alpha)$ 得:

$$\frac{y'}{x'}=tan(\alpha)$$

对上式两边分别求导得:

$$\frac{y''x'-x''y'}{x'^2}dt=(1+tan^2(\alpha)d\alpha)=(\frac{x'^2+y'^2}{x'^2})d\alpha$$

化简得:

$$\frac{y''x'-x''y'}{x'^2+y'^2}dt=d\alpha$$

又因为 $ds=\sqrt{x'^2+y'^2}dt$,代入上式得到曲线参数方程1对应的曲率计算公式（曲率为角度对弧度的导数）:

$$k=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{y''x'-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{1}$$

2.2 参数方程2曲率公式推导

此时曲线的自变量为 x，曲线在点 (x_t,y_t) 处的导数为 $y'=f'(x)=tan(\alpha)$ 。等式两边分别求导得:

$$y''dx=(1+tan^2(\alpha))d\alpha=(1+y'^2)d\alpha$$

化简得:

$$\frac{y''}{1+y'^2}dx=d\alpha$$

又因为 $ds=\sqrt{1+y'^2}dx$，代入上式得到曲线参数方程2对应的曲率计算公式（曲率为角度对弧度得导数）:

$$k=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{2}$$

2.3 小结

两种参数方程得到的曲率公式推导过程和最终公式形式相似。在表示曲线时，不同情况下用到的参数方程不一样。为了简便，可以统一两种参数方程，令 $x(t)=t$ 时，参数方程1就变成了参数方程2。此时 $x'=1,x''=0$，代入式(1)就得到了式(2)。下文中只求针对参数方程1的曲率导数 k' 以及曲率导数的导数 k''。

3.曲率的导数（或称为变化率）公式及推导

对曲率公式 $k=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{y''x'-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ 两边分别求导，得：

$$k'=\frac{dk}{ds}=\frac{\frac{(y''x'-x''y')'(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}-((x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}})'(y''x'-x''y')}{(x'^2+y'^2)^3}dt}{ds}$$

将 $ds=\sqrt{x'^2+y'^2}dt$ 代入上式可得 k' 计算公式如下（对应参数方程1）：

$$k'=\frac{(y'''x'-x'''y')(x'^2+y'^2)-3(x'x''+y'y'')(y''x'-x''y')}{(x'^2+y'^2)^3} \tag{3}$$

令 $x'=1$，$x''=0$，$x'''=0$ 代入式(3)可得参数方程2的 k' 计算公式如下：

$$k'=\frac{y'''+y'''y'^2-3y'y''^2}{(1+y'^2)^3} \tag{4}$$

4.曲率导数的导数公式及推导

$$k''=\frac{dk'}{ds}=\frac{d\frac{(y'''x'-x'''y')(x'^2+y'^2)-3(x'x''+y'y'')(y''x'-x''y')}{(x'^2+y'^2)^3}}{ds}=\ldots$$