Лабораторная работа №4.

<table>
<tr><td rowspan="4">Лабораторная работа № 4

Тема:
« Алгоритм нахождения максимального пути »</td><td>Студент</td><td>Иванов И. И.</td></tr>
<tr><td>Группа</td><td>XX-999</td></tr>
<tr><td>Дата</td><td>дд.мм.гг</td></tr>
<tr><td>Выполнение</td><td></td></tr>
<tr><td>Вариант № __</td><td>Отчет</td><td></td></tr>
</table>

Оформите протокол лабораторной работы. Он должен содержать:
Задание
1 условие (матрица весов + изобразить граф)
2. Теоретическое решение

Упорядочивание дуг и вершин орграфа

Расчеты в задачах, связанных с графами, заметно упрощаются, если их элементы упорядочены. В частности, для вершин упорядоченного графа легче найти порядковые функции.

Говорят, что вершина x_i **предшествует** вершине x_j, если существует путь из x_i в x_j, тогда x_i называют **предшествующей** вершине x_j, а x_j – **последующей за** x_i. Под **упорядочиванием вершин** связного орграфа без контуров понимают такое разбиение его вершин на группы, при котором:

1) вершины первой группы не имеют предшествующих (таких вершин может быть несколько и они еще называются **минорантами**), а вершины последней – последующих (таких вершин также может быть несколько, их называют **мажорантами**); 2) вершины любой другой группы не имеют предшествующих в следующей группе; 3) вершины одной и той же группы дугами не соединяются. Можно показать, что описанное разбиение всегда возможно.

Аналогичным образом вводится понятие **упорядочивания дуг**. В результате упорядочивания элементов получают граф, изоморфный данному. Упорядочивание элементов выполняют графическим или матричным способом.

Рассмотрим *графический* способ упорядочивания вершин – *алгоритм Фалкерсона*:

Шаг 1. Находят вершины графа, в которые не входит ни одна дуга. Они образуют первую группу. Нумеруют вершины группы в натуральном порядке 1, 2. При этом присвоение номеров вершинам внутри группы может быть сделано не единственным образом, что не имеет значения.

Шаг 2. Мысленно вычеркивают все пронумерованные вершины и дуги, из них выходящие. В получившемся графе найдется, по крайней мере, одна вершина, в которую не входит ни одна дуга. Этой вершине, входящей во вторую группу, присваивают очередной номер и так далее. Этот шаг повторяют до тех пор, пока все вершины не будут упорядочены (пронумерованы).

Аналогичным образом упорядочивают дуги орграфа. Сначала находят дуги, не имеющие непосредственно предшествующих (они образуют первую группу). После вычеркивания дуг первой группы в оставшемся графе вновь выделяют дуги, не имеющие непосредственно предшествующих (они образуют вторую группу). И так до тех пор, пока все дуги не будут разбиты на группы. В заключение упорядоченным дугам присваивают новые обозначения с индексами 1, 2,… .

Алгоритм нахождения максимального пути

Для нахождения максимального пути граф G (сеть) должен быть ациклическим, ибо в противном случае может оказаться, что длины некоторых путей не ограничены сверху. Если G_n – ациклический граф, то для любых его вершин $x_i \neq x_j$ выполняется одно из трех условий:

1) x_i предшествует x_j, $x_i \in S_{предш}(x_j)$;

2) x_i следует за x_j, $x_i \in S_{след}(x_j)$;

3) нет пути между x_i и x_j.

Первое и второе условия одновременно невыполнимы из-за требуемой ацикличности графа. Перед вычислением максимального пути в орграфе необходимо упорядочить вершины орграфа по алгоритму Фалкерсона. Сам алгоритм перебирает все возможные пути от текущей вершины до всех последующих, достижимых из текущей вершины.

Пусть d_j – длина максимального пути от вершины x_1 до вершины x_j, тогда величина d_j удовлетворяет следующим рекуррентным соотношениям:

$$d_1 = 0,\ d_j=\infty,\ j=k+2,\ k+3,\dots,n.$$

$$d_j = \max(d_i + w_{ij} /\ x_i \in S_{предш}(x_j)),\ j=2,3,\dots,k+1) \qquad (1)$$

Соотношения (1) позволяют легко вычислять длины максимальных путей от $s= x_1$ до вершин, достижимых из вершины s. Сами пути могут быть построены методом последовательного возвращения (второй этап в алгоритме Дейкстры).

Пример 2

Граф (сеть, рис. 1) задан весовой матрицей **Ω**. Необходимо найти длину максимального пути из вершины x_1в вершину x_6 и сам этот путь.

$$\Omega = \begin{array}{c|cccccc|} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 \\ X_1 & - & 4 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ X_2 & \infty & - & 7 & 8 & 6 & \infty \\ X_3 & \infty & \infty & - & \infty & 7 & 5 \\ X_4 & \infty & \infty & 8 & - & 9 & \infty \\ X_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 3 \\ X_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{array}$$

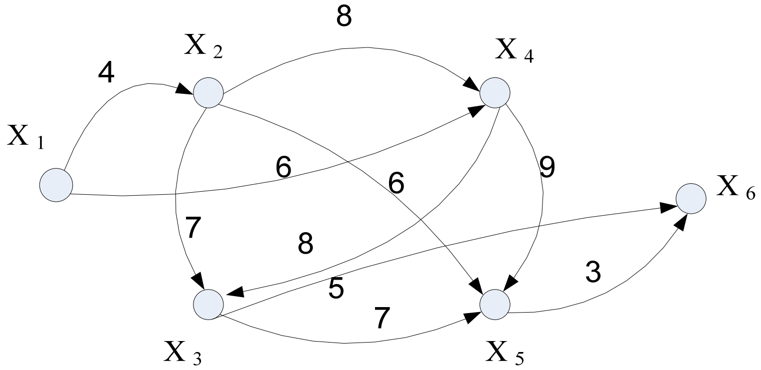

Рис. 1.

Этот граф ациклический, поэтому возможно упорядочивание его вершин по алгоритму Фалкерсона. Вершина x_1 не содержит входящих дуг, поэтому вычеркнем все дуги, исходящие из этой вершины, а саму вершину отнесем к группе 1, в результате получим граф, изображенный на рис. 2.

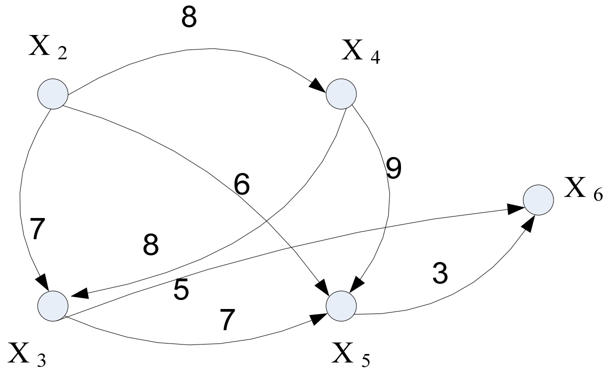

Рис. 2

В нем опять находим вершины, в которые не заходит ни одна дуга, это вершина x_2, она будет относиться к группе 2, и в результате вычеркивания дуг, из нее исходящих, получим граф, изображенный на рис. 3.

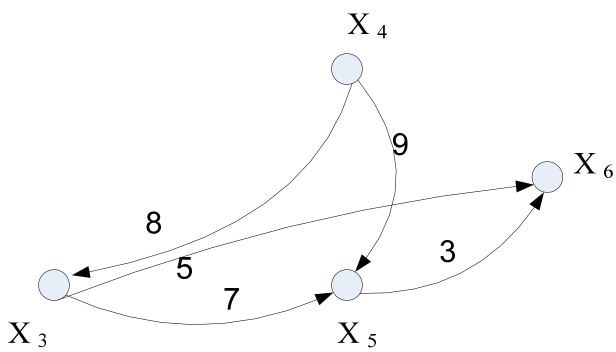

Рис. 3

В нем опять находим вершины, в которые не заходит ни одна дуга, это вершина x_4, она будет относиться к группе 3, переобозначим ее как x'_{3}, и в результате вычеркивания дуг, из нее исходящих, получим граф, изображенный на рис. 4.

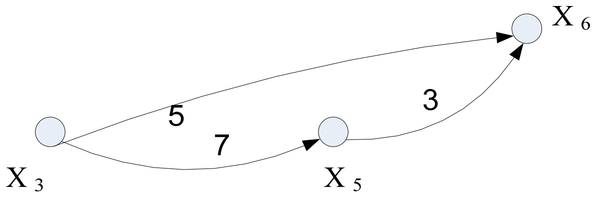

Рис. 4

В нем опять находим вершины, в которые не заходит ни одна дуга, это вершина x_3, она будет относиться к группе 4, пере обозначим ее как x'_{4}, и в результате вычеркивания дуг, из нее исходящих, получим граф, изображенный на рис. 5.

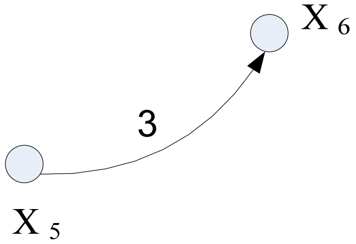

Рис. 5

В нем опять находим вершины, в которые не заходит ни одна дуга, это вершина x_5, она будет относиться к группе 5. Получаем одну вершину x_6 – принадлежит к шестой группе. В результате вычеркивания дуг, исходящих из x_5, получим граф, изображенный на рис. 6, который будет изоморфным исходному графу.

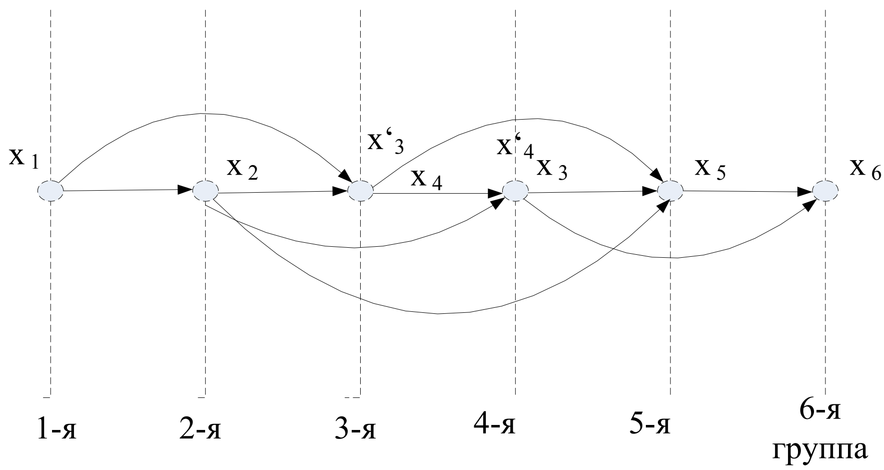

Рис. 6

Применим рекуррентные формулы (1).

Этап 1

$d_1 = 0$,

$d_2 = \max(d_1 + 4) = 4$,

$d_3 = \max(d_1 + 6, d_2 + 8) = \max(0+6,4+8) = 12$,

$d_4 = \max(d_3 + 8, d_2 + 7) = \max(12+8,4+7) = 20$,

$d_5 = \max(d_4 + 7, d_3 + 9, d_2 + 6) = \max(20+7,12+9,4+6) = 27$,

$d_6 = \max(d_5 + 3, d_4 + 5) = \max(27+3,20+5) = 30$.

Итак, длина максимального пути из вершины x_1в вершину x_6 равна 30.

Этап 2

x_6: $d_6 = 30 = d_5 + 3 = 27 + 3$ – включаем дугу (x_5, x_6) в максимальный путь, $d_6 = 30 \neq d_4 + 5 = 20 + 5$.

x_5: $d_5 = 27 = d_4 + 7 = 20 + 7$ – включаем дугу (x'_4, x_5) в максимальный путь, $d_5 = 27 \neq d_3 + 9 = 12 + 9$, $d_5 = 27 \neq d_2 + 6 = 4 + 6$.

x'_4: $d_4 = 20 = d_3 + 8 = 12 + 8$ – включаем дугу (x'_3, x'_4) в максимальный путь, $d_4 = 20 \neq d_2 + 7 = 4 + 7$.

x'_3: $d_3 = 12 = d_2 + 8 = 4 + 8$ – включаем дугу (x_2, x'_3) в максимальный путь, $d_3 = 12 \neq d_1 + 6 = 0 + 6$.

x_2: $d_2 = 4 = d_1 + 4 = 0 + 4$ – включаем дугу (x_1, x_2) в максимальный путь.

$\mu_{max} = (x_1, x_2) - (x_2, x'_3) - (x'_3, x'_4) - (x'_4, x_5) - (x_5, x_6) = 30$ или в первоначальных обозначениях

Ответ:

$\mu_{max} = (x_1, x_2) - (x_2, x_4) - (x_4, x_3) - (x_3, x_5) - (x_5, x_6) = 30$.

Порядок выполнения задания.

1. Постройте для своего варианта связный граф по матрице весов.
2. Упорядочите граф одним из способов: графическим или матричным (с описанием и рисунками на каждом шаге).
3. Решите для графа задачу нахождения максимального пути (2 Этапа).
4. Оформите протокол отчета, записав в него граф и решение задачи. Загрузите протокол в ЭИОС.
5. Подготовьтесь к отчету лабораторной работы.

Темы для подготовки к отчету:

1. Упорядочивание графа
2. Поиск максимального пути
3. Плоские и планарные графы
4. Деревья.
5. Поиск остова графа. Алгоритм МОД.
6. Двудольный граф