Лабораторная работа №3.

Нахождение кратчайших путей. Алгоритм Дейкстры

Рассмотрим несколько алгоритмов нахождения кратчайшего пути между двумя заданными вершинами в орграфе. Пусть G={S,U,Ω} – ориентированный граф с взвешенными дугами. Обозначим через s-вершину начало пути, через t-вершину конец пути.

Общий подход к решению задачи о кратчайшем пути был развит американским математиком Ричардом Белланом[1], который предложил название динамического программирования. Задача о кратчайшем пути – частный случай следующей задачи: найти в заданном графе пути, соединяющие две заданные вершины и доставляющие минимум или максимум некоторой аддитивной функции, определенной на путях. Чаще всего это функция трактуется как длина пути, и задача называется задачей о кратчайших путях. Алгоритм Дейкстры[2] – одна из реализаций этой задачи. Его часто называют алгоритмом расстановки меток. В процессе работы этого алгоритма узлами сети $x_i \in S$ приписываются числа (метки) $d(x_i)$, которые служат оценкой длины (веса) кратчайшего пути от вершины к вершине x_i. Если вершина x_i получила на некотором шаге метку $d(x_i)$, это означает, что в графе G существует путь из s в x_i, имеющий вес $d(x_i)$. Метки могут находиться в двух состояниях – быть временными или постоянными. Превращение метки в постоянную означает, что кратчайшее расстояние от вершины s до соответствующей найдено.

Алгоритм Дейкстры содержит одно ограничение – веса дуг должны быть положительными. Сам алгоритм состоит из двух этапов. На первом находится длина кратчайшего пути, на втором стоится сам путь от вершины s к вершине t.

---

[1]Ридард Эрнест Беллман (1920–1984) – американский математик

[2]Едсгер Дейкстра (1930–2002) – нидерландский математик

Этап 1. Нахождение длины кратчайшего пути.

Шаг 1. Присвоение вершинам начальных меток.

Полагаем $d(s) = 0^*$ и считаем эту метку постоянной (постоянные метки помечаются звездочкой). Для остальных вершин $x_i \in S$, $x_i \neq s$ полагаем $d(s) = \infty$ и считаем эти метки временными. Пусть $\tilde{x} = s$, $\tilde{x}$ – обозначение текущей вершины.

Шаг 2. Изменение меток.

Для каждой вершины x_i с временной меткой, непосредственно следующей за вершиной $\tilde{x}$, меняем ее метку в соответствии со следующим правилом:

$$d_{нов}(x_i) = \min\{ d_{стар}(x_i), d(\tilde{x}) + \omega(\tilde{x}, x_i)\} \qquad (1.2)$$

Шаг 3. Превращение метки из временной в постоянную.

Из всех вершин с временными метками выбираем вершину x_j с наименьшим значением метки

$$d(x_j^*) = \min\{ d(x_j)/x_j \in S, d(x_j) \text{ –временная } \} \qquad (1.3)$$

Превращаем эту метку в постоянную и полагаем $\tilde{x} = x_j^*$.

Шаг 4. Проверка завершения первого этапа.

Если $\tilde{x} = t$, то $d(\tilde{x})$ – длина кратчайшего пути от s до t. В противном случае происходит возвращение ко второму шагу.

Этап 2. Построение кратчайшего пути.

Шаг 5. Последовательный поиск дуг кратчайшего пути.

Среди вершин, непосредственно предшествующих вершине $\tilde{x}$ с постоянными метками, находим вершину x_i, удовлетворяющую соотношению

$$d(\tilde{x}) = d(x_i) + \omega(x_i, \tilde{x}) \qquad (1.4)$$

Включаем дугу $(x_i, \tilde{x})$ в искомый путь и полагаем $\tilde{x} = x_i$.

Шаг 6. Проверка на завершение второго этапа.

Если $\tilde{x} = s$, то кратчайший путь найден – его образует последовательность дуг, полученных на пятом шаге и выстроенных в обратном порядке. В противном случае, возвращаемся к шагу пять.

Пример 1.

Задана весовая матрица Ω графа G. Необходимо найти минимальный путь из вершины x_1в вершину x_6 по алгоритму Дейкстры.

Решение: На рис. 1.24 изображен сам граф по данной матрице весов. Поскольку в данном графе есть цикл между вершинами x_2,x_3,x_5, то вершины графа нельзя упорядочить по алгоритму Фалкерсона, который будет рассматриваться ниже.

На рисунке графа временные и постоянные метки указаны над соответствующей вершиной. Итак, распишем подробно работу алгоритма по шагам.

$$
\Omega = \begin{array}{c|cccccc|}
 & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 \\
X_1 & - & 9 & \infty & 6 & 11 & \infty \\
X_2 & \infty & - & 8 & \infty & \infty & \infty \\
X_3 & \infty & \infty & - & \infty & 6 & 9 \\
X_4 & \infty & 5 & 7 & - & 6 & \infty \\
X_5 & \infty & 6 & \infty & \infty & - & 4 \\
X_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & -
\end{array}
$$

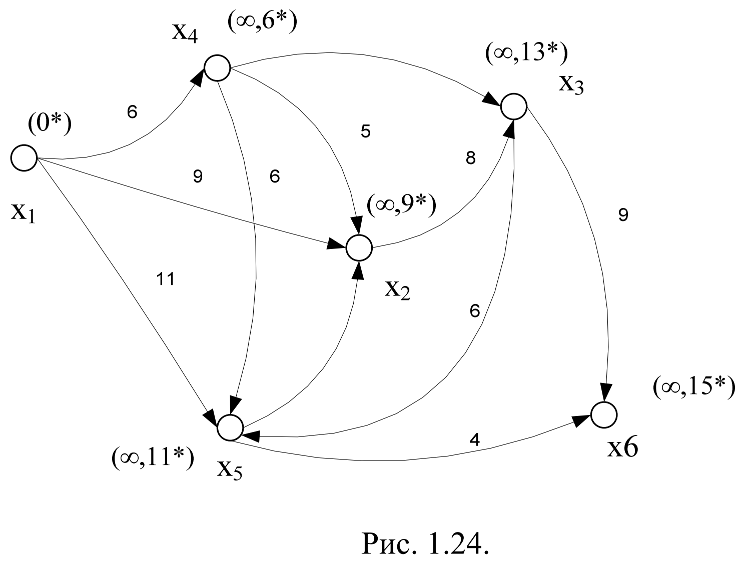

Рис. 1.24.

Этап 1.

Шаг 1. Полагаем

$d(x_1) = 0^*$, $\tilde{x} = x_1$,

$d(x_2) = d(x_3) = d(x_4) = d(x_5) = d(x_6) = \infty$.

1-я итерация

Шаг 2

Множество вершин, непосредственно следующих за $\tilde{x} = x_1$ с временными метками $\tilde{S} = \{x_2, x_4, x_5\}$. Пересчитываем временные метки этих вершин:

$d(x_2) = \min\{\infty, 0^*+9\} = 9$,

$d(x_4) = \min\{\infty, 0^*+6\} = 6$,

$d(x_5) = \min\{\infty, 0^*+11\} = 11$.

Шаг 3

Одна из временных меток превращается в постоянную:

$\min\{9,\infty,6,11,\infty\} = 6^* = d(x_4)$, $\tilde{x} = x_4$

Шаг 4

$\tilde{x} = x_4 \neq t = x_6$, происходит возвращение на второй шаг.

2-я итерация

Шаг 2

$\tilde{S} = \{x_2, x_3, x_5\}$, $d(x_2) = \min\{9, 6^*+5\} = 9$

$d(x_3) = \min\{\infty, 6^*+7\} = 13$

$d(x_5) = \min\{11, 6^*+6\} = 11$.

Шаг 3

$\min\{d(x_2),d(x_3),d(x_5),d(x_6)\} = \min\{9,13,11,\infty\} = 9^* = d(x_2)$, $\tilde{x} = x_2$.

Шаг 4

$x_2 \neq x_6$, возвращение на второй шаг.

3-я итерация

Шаг 2

$\tilde{S} = \{x_3\}$, $d(x_3) = \min\{13, 9^*+8\} = 13$.

Шаг 3.

$\min\{d(x_3),d(x_5),d(x_6)\} = \min\{13,11,\infty\}= 11^*= d(x_5)$, $\tilde{x} = x_5$.

Шаг 4

$x_5 \neq x_6$, возвращение на второй шаг.

4-я итерация

Шаг 2

$\tilde{S} = \{x_6\}$, $d(x_6) = \min\{\infty,11^*+4\} = 15$.

Шаг 3

$\min\{d(x_3),d(x_6)\} = \min\{13,15\}= 13^*= d(x_3)$, $\tilde{x} = x_3$.

Шаг 4

$x_3 \neq x_6$, возвращение на второй шаг.

5-я итерация

Шаг 2

$\tilde{S} = \{x_6\}$, $d(x_6) = \min\{15,13^*+9\} = 15$.

Шаг 3.

$\min\{d(x_6)\} = \min\{15\}= 15^*$, $\tilde{x} = x_6$.

Шаг 4

$x_6 = t = x_6$, конец первого этапа.

Этап 2

1-я итерация

Шаг 5

Составим множество вершин, непосредственно следующих за $\tilde{x} = x_6$ с постоянными метками $\tilde{S} = \{x_3, x_5\}$. Проверим для этих двух вершин выполнение равенства (1.4).

$d(\tilde{x}) = 15=11^*+4 = d(x_5)+ \omega(x_5,x_6)$,

$d(\tilde{x}) = 15\neq 13^*+9 = d(x_3)+ \omega(x_3,x_6)$.

Включаем дугу (x_5,x_6) в кратчайший путь $\tilde{x} = x_5$.

Шаг 6

$\tilde{x} \neq s= x_1$, возвращение на пятый шаг.

2-я итерация

Шаг 5

$\tilde{S} = \{x_1, x_4\}$,

$d(\tilde{x}) = 11 = 0^* + 11 = d(x_1) + \omega(x_1, x_5)$,

$d(\tilde{x}) = 11 \neq 6^* + 6 = d(x_4) + \omega(x_4, x_5)$.

Включаем дугу (x_1, x_5) в кратчайший путь. $\tilde{x} = x_1$.

Шаг 6

$\tilde{x} = s = x_1$, завершение второго этапа.

Итак, кратчайший путь от вершины x_1 до вершины x_6 построен. Его длина (вес) равен 15, сам путь образует следующая последовательность дуг: $\mu = (x_1, x_5) – (x_5, x_6)$ – ответ.

<u>Вопросы для подготовки к отчету лабораторной работы:</u>

1. МАРШРУТЫ, ПУТИ, ЦЕПИ, ЦИКЛЫ, КОНТУРЫ
2. Операции над графами
3. Цикломатическое число графа. Изоморфизм, гомоморфизм
4. Части графа
5. Алгоритм Дейкстры