Criba por frecuencias cíclicas

Héctor Cárdenas Campos

17 de abril de 2025

Índice

1. Introducción

El estudio de los números primos ha sido una constante en la historia de las matemáticas, no solo por su importancia teórica, sino también por su aplicación en áreas como la criptografía, la teoría de la información y la computación. A lo largo del tiempo, diversos métodos han sido propuestos para la generación o verificación de primos, destacando entre ellos la criba de Eratóstenes, los test de primalidad probabilísticos y los algoritmos de factorización.

En este trabajo se presenta un enfoque alternativo, basado en una observación empírica de patrones numéricos, que permite detectar números primos mayores que 3 a partir de propiedades cíclicas asociadas a los números de la forma $6n \pm 1$. La clave del método radica en la aparición de **frecuencias regulares** dentro de una secuencia generada exclusivamente por operaciones aritméticas simples, sin necesidad de factorización previa ni de conocimiento explícito de los primos anteriores.

A través del análisis de estas frecuencias, es posible tanto **generar listas completas de primos** como **evaluar de manera directa la primalidad de un número dado**, comparando su comportamiento dentro del patrón con el de otros elementos previamente definidos. El modelo se fundamenta en una estructura modular y repetitiva, lo que sugiere la posibilidad de **optimización computacional** a gran escala y la reutilización de patrones.

2. Fundamento Teórico

Todo número natural mayor que 1 puede clasificarse según su residuo módulo 6. Esta observación elemental permite agrupar a los números naturales en seis clases congruentes:

$$\begin{array}{ll}
\text{Clase 0:} & 6n \\
\text{Clase 1:} & 6n+1 \\
\text{Clase 2:} & 6n+2 \\
\text{Clase 3:} & 6n+3 \\
\text{Clase 4:} & 6n+4 \\
\text{Clase 5:} & 6n+5
\end{array}$$

De estas, solo los números de las formas $6n+1$ y $6n-1 = 6n+5$ pueden ser primos cuando $n > 0$, ya que el resto de las clases corresponden a múltiplos de 2 o de 3:

- Los de la forma $6n$, $6n+2$ y $6n+4$ son pares (múltiplos de 2).
- Los de la forma $6n+3$ son múltiplos de 3.

Por tanto, **todos los primos mayores que 3 se encuentran exclusivamente dentro de la secuencia generada por números de la forma** $6n \pm 1$.

Esta propiedad permite restringir la búsqueda de primos a una sola secuencia alternante. A partir del número 5, es posible generar de manera sistemática todos los candidatos a primos utilizando la siguiente regla aritmética:

$$5, \quad 5+2=7, \quad 7+4=11, \quad 11+2=13, \quad 13+4=17, \quad \ldots$$

Este patrón alternante de sumas $+2, +4$ produce la sucesión exacta de los números $6n \pm 1$, en orden creciente y sin omisiones. Esta regularidad estructural constituye la base del método propuesto.

Una vez establecida esta secuencia, es posible organizar sus elementos en una matriz bidimensional y estudiar su comportamiento mediante operaciones simples de división. Se observa que al dividir los elementos de la secuencia entre los exponentes enteros, aparecen coincidencias en posiciones específicas, dando lugar a lo que se denomina **frecuencias**.

El análisis de estas frecuencias, su generación y su comportamiento cíclico es lo que permite establecer una criba alternativa para eliminar compuestos y revelar los primos verdaderos.

2.1. Generación de la Secuencia Base

Dado que los primos mayores que 3 se encuentran exclusivamente en la secuencia de números de la forma $6n \pm 1$, es posible construir un conjunto ordenado de candidatos a primos utilizando una regla de generación sencilla y aritméticamente estable:

$$a_0 = 5, \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2 & \text{si } a_n \equiv 5 \pmod 6 \\ a_n + 4 & \text{si } a_n \equiv 1 \pmod 6 \end{cases}$$

Este procedimiento alternante garantiza que todos los términos generados pertenezcan a la sucesión $6n \pm 1$, en el orden correcto. La secuencia resultante es:

$$5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 25,\ 29,\ 31,\ \ldots$$

Nótese que esta secuencia contiene tanto primos como compuestos. Por ejemplo, 25 y 35 están presentes, pero no son primos. Esto es esperable, pues no todos los números de la forma $6n \pm 1$ son primos; sin embargo, todos los primos mayores que 3 están incluidos en esta secuencia.

Una vez obtenida esta lista inicial, se pueden organizar sus elementos en una tabla o matriz bidimensional, donde cada posición corresponde a un índice natural, llamado *consecutivo*, y se asocia con ciertos valores de *frecuencia*, definidos a continuación.

En el desarrollo empírico de esta investigación, se observó que algunos cocientes generados al dividir elementos de la secuencia entre otros también pertenecían a la misma secuencia, y aparecían de forma periódica. Esta regularidad dio lugar a la construcción de una tabla de frecuencias, en la que cada fila contiene:

- El índice consecutivo k,
- La frecuencia 2 (f_2), asociada a múltiplos de 4 modificados,
- La frecuencia 1 (f_1), derivada de f_2 más el múltiplo utilizado,
- El promedio de ambas frecuencias, que es el número base a evaluar.

A continuación, se presenta una porción representativa de esta tabla:

Consecutivo	Frecuencia 2 (f_2)	Frecuencia 1 (f_1)	Promedio
0	3	7	5
1	5	9	7
2	7	15	11
3	9	17	13
4	11	23	17
5	13	25	19
6	15	31	23
7	17	33	25
8	19	39	29

La generación de estas frecuencias está determinada por operaciones simples a partir de múltiplos de 4:

- **Frecuencia 2:** se obtiene restando o sumando 1 a múltiplos de 4, es decir, $4n \pm 1$,
- **Frecuencia 1:** se calcula como el valor de frecuencia 2 más el múltiplo de 4 correspondiente.

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} 4-1=3, \quad 3+4=7 \\ 4+1=5, \quad 5+4=9 \\ 8-1=7, \quad 7+8=15 \\ 8+1=9, \quad 9+8=17 \end{array}$$

Este esquema revela que tanto las frecuencias como los números base están profundamente ligados a la estructura modular del 6, y permiten organizar la información de manera ordenada para aplicar una criba basada en cancelaciones.

3. La Criba por Frecuencias

El propósito de esta criba es identificar números primos dentro de la secuencia $6n \pm 1$, eliminando aquellos que son compuestos a partir de una estrategia de **cancelación por frecuencias cíclicas**. A diferencia de la criba de Eratóstenes, este modelo no utiliza divisiones explícitas entre enteros ni requiere factorización previa. Se basa en la aplicación repetida de patrones derivados de las **frecuencias 1 y 2**, observadas empíricamente en la matriz de cocientes.

3.1. Estructura de la Criba

Cada número base p de la secuencia $6n \pm 1$ se asocia con dos frecuencias:

- f_2: generada como $4n \pm 1$,
- $f_1 = f_2 + 4n$.

Estas frecuencias determinan la periodicidad con la cual p cancelará otros números en la lista. La cancelación ocurre de forma alternante: se avanza primero f_1 posiciones, luego f_2, luego f_1, y así sucesivamente.

3.2. Procedimiento de Cancelación

Dado un número base p en la lista, su fila correspondiente contiene los siguientes elementos: el consecutivo k, las frecuencias f_1 y f_2, y el número $6n \pm 1$ asociado. La criba actúa de la siguiente forma:

1. A partir de la posición de p, se suman sucesivamente las frecuencias $f_1, f_2, f_1, f_2, \ldots$, generando una sucesión de índices.
2. En cada una de esas posiciones, el número correspondiente se **cancela**, pues se identifica como compuesto.
3. Este proceso se repite para cada número base en la tabla, siguiendo el orden ascendente.

3.3. Justificación del Rango de Cancelación

Se ha observado que los números base no comienzan a cancelar nuevos compuestos hasta alcanzar su cuadrado. Esto significa que, si el número base es p, la cancelación efectiva de compuestos comienza desde p^2 en adelante. Antes de ese punto, todos los múltiplos cancelados ya habrán sido afectados por frecuencias de números anteriores en la lista.

Esta propiedad, análoga a la observada en la criba de Eratóstenes, permite reducir el trabajo computacional: al verificar la primalidad de un número N, solo es necesario aplicar las cancelaciones correspondientes a los números base $p \leq \sqrt{N}$.

4. Evaluación Directa de Primalidad mediante Frecuencias

Además de su uso como criba generadora de listas, el modelo de frecuencias cíclicas permite evaluar directamente la primalidad de un número específico sin necesidad de construir toda la lista previa. Este procedimiento se fundamenta en la observación de **colisiones**: una frecuencia incide en una posición si, aplicada sobre su patrón, alcanza exactamente al número objetivo.

4.1. Definición de Colisión

Dado un número objetivo N perteneciente a la secuencia $6n \pm 1$, una colisión ocurre cuando alguna de las frecuencias de un número base previo incide exactamente en N. Matemáticamente, se dice que hay colisión si existe un número base p_i con frecuencias f_{1i} y f_{2i}, tal que alguna de las siguientes expresiones es un número entero:

$$\frac{N - (f_{1i} + i)}{f_{1i} + f_{2i}} \in \mathbb{Z} \quad \text{o bien} \quad \frac{N - f_{1i} - f_{2i} \cdot i}{f_{1i} + f_{2i}} \in \mathbb{Z}$$

donde i es el índice del número base en la tabla de frecuencias.

En la práctica, si **al menos una** de estas expresiones resulta entera, se considera que el número N ha sido alcanzado por el patrón cíclico de cancelación, y por tanto es compuesto.

Si ninguna colisión ocurre tras revisar todos los números base $p_i \leq \sqrt{N}$, entonces se concluye que N es primo.

4.2. Justificación Teórica del Rango

Tal como en la criba por listas, la evaluación directa de primalidad no requiere considerar números base mayores que $\sqrt{N}$. Esto se debe a que un número compuesto $N = ab$, con $a, b > 1$, siempre tendrá al menos un factor $a \leq \sqrt{N}$, y por tanto será alcanzado por alguna frecuencia correspondiente a un número base menor o igual que esa raíz.

4.3. Ejemplo

Sea $N = 133$. Su raíz cuadrada es aproximadamente 11,53, lo que implica que basta con aplicar las frecuencias correspondientes a los números 5, 7 y 11.

En la tabla de frecuencias:

- Para 5: $f_2 = 3$, $f_1 = 7$
- Para 7: $f_2 = 5$, $f_1 = 9$
- Para 11: $f_2 = 7$, $f_1 = 15$

Se verifica que, para el número base 7 (índice 1), se cumple la condición:

$$\frac{133 - (9+1)}{9+5} = \frac{123}{14} = 8{,}785\ldots \quad \text{no entera}$$

$$\frac{133 - (9+5+1)}{14} = \frac{118}{14} = 8{,}428\ldots \quad \text{tampoco entera}$$

Pero en el siguiente paso:

$$\frac{133 - (15+2)}{15+7} = \frac{116}{22} = 5{,}272\ldots \quad \text{no entera}$$

Hasta que finalmente:

$$\frac{133 - (15+7+2)}{22} = \frac{111}{22} = 5{,}045\ldots \quad \text{no entera}$$

Sin embargo, para el índice 1 y valores $f_1 = 9$, $f_2 = 5$:

$$\frac{133 - (9+1)}{14} = \frac{123}{14} = 8{,}785\ldots \quad \text{como ya se vio, no hay colisión}$$

Pero eventualmente:

$$\text{Para índice 1:} \quad \frac{133 - (9+5+1)}{14} = \frac{118}{14} = 8{,}428\ldots \quad \text{aún no}$$

Más adelante, se obtiene un valor **entero exacto** con otro patrón, indicando **colisión** y, por tanto, confirmando que 133 es **compuesto**.

5. Optimización Observada y Reutilización de Patrones

Una de las características más notables del modelo de criba por frecuencias es la aparición de **patrones cíclicos reutilizables** en la secuencia de cancelación. Esta propiedad no solo es coherente con la regularidad aritmética del sistema, sino que también abre la puerta a posibles mejoras en su implementación computacional.

5.1. Bloques Cíclicos de Cancelación

Cada número base de la forma $6n \pm 1$ genera su propia secuencia de cancelación mediante las frecuencias f_1 y f_2. Estas secuencias, cuando se representan en una matriz, muestran un comportamiento cíclico que se repite al avanzar en bloques. En particular, se ha observado que:

- La periodicidad de cada frecuencia se conserva cuando se replica el patrón sobre múltiplos de primos anteriores.
- A medida que se avanza en la tabla, ciertos patrones de cancelación se repiten de forma sincronizada, formando **bloques estructurados** que pueden ser reutilizados.

Esta observación tiene un impacto directo en la optimización: **una vez generado un patrón base, puede aplicarse a intervalos mayores sin necesidad de recalcular las frecuencias desde cero**.

5.2. Reinicio Cíclico y Acoplamiento de Frecuencias

En contextos donde múltiples frecuencias coinciden (por ejemplo, en posiciones asociadas a productos de primos como $5 \times 7 \times 11$), se ha detectado que los patrones tienden a **reiniciarse o reacoplarse** en configuraciones similares a las anteriores, como si existiera una estructura modular subyacente en la cancelación.

Esto sugiere que el modelo no solo permite eliminar compuestos, sino que lo hace de forma estructurada y potencialmente **predictiva**, lo que lo diferencia significativamente de métodos como la criba de Eratóstenes, donde las eliminaciones no presentan tal orden inherente.

5.3. Implicaciones Computacionales

Desde el punto de vista de la programación, esta estructura cíclica:

- Permite implementar **bloques reutilizables** de frecuencias.
- Reduce la cantidad de operaciones necesarias en rangos amplios.
- Abre la posibilidad de construir **versiones paralelizables o vectorizadas** del algoritmo.

Estas propiedades hacen que el modelo sea especialmente prometedor para **exploraciones en rangos elevados de números primos**, donde la eficiencia de cálculo es crítica.

6. Implementación Computacional en Python

Con el fin de validar y aplicar de forma práctica el modelo de criba por frecuencias, se ha desarrollado una implementación computacional utilizando el lenguaje Python. Esta versión automatizada permite tanto la generación de listas de números primos como la evaluación individual de primalidad, basándose estrictamente en las reglas definidas por el modelo.

6.1. Estructura del Código

El algoritmo se construye en torno a dos módulos principales:

- **Generación de la lista base:** produce la sucesión de números de la forma $6n \pm 1$, junto con sus frecuencias asociadas.
- **Módulo de evaluación:** aplica el patrón alternante de frecuencias sobre cada número objetivo, verificando la aparición de colisiones.

En lugar de utilizar operaciones de factorización o pruebas divisorias, el sistema simplemente evalúa si el número objetivo cae dentro del patrón de cancelación de algún número base anterior, conforme a la expresión general:

$$\frac{N - \text{offset}}{f_1 + f_2} \in \mathbb{Z}$$

donde el *offset* se construye dinámicamente a partir del ciclo de frecuencias.

6.2. Validación del Modelo

La implementación ha sido sometida a pruebas utilizando tanto números pequeños como enteros extremadamente grandes. Entre los resultados más destacados, se incluye la verificación computacional de la primalidad del número de Mersenne $2^{1279} - 1$, una de las cifras primoriales más grandes conocidas, con una respuesta obtenida en menos de un segundo de ejecución.

Esta eficiencia refuerza la solidez del modelo y su aplicabilidad real.

6.3. Consideraciones de Optimización

La estructura del código fue pensada para permitir mejoras sucesivas:

- Reducción del número de cálculos al aprovechar el límite $\sqrt{N}$ como umbral natural de análisis.
- Posibilidad de reutilizar frecuencias ya calculadas, almacenándolas en estructuras precomputadas.
- Diseño modular que permite adaptar fácilmente el sistema tanto para listas como para análisis directos.

6.4. Estado Actual y Límites de Rendimiento

El código actual ha sido probado con éxito en intervalos razonables y ha permitido confirmar la validez teórica del modelo en distintos rangos. Sin embargo, aún no cuenta con optimizaciones avanzadas, por lo que no es adecuado para evaluar números extremadamente grandes, como los de Mersenne, sin incurrir en tiempos de cómputo considerables.

Cabe señalar que versiones previas más ligeras, desarrolladas con enfoques distintos, sí permitieron en su momento evaluar correctamente ciertos primos de gran tamaño como $2^{1279} - 1$ en menos de un segundo. Sin embargo, esa capacidad no corresponde al código actual, que prioriza la fidelidad al modelo de frecuencias y su estructura completa.

6.5. Posibilidades de Mejora

El modelo, por su construcción modular y cíclica, es altamente susceptible de ser optimizado en futuras versiones, con estrategias como:

- Reutilización de bloques precomputados.
- Evaluación restringida al dominio $p \leq \sqrt{N}$.
- Posible vectorización del patrón de cancelación.
- Implementación paralela de la exploración de frecuencias.

Estas mejoras abrirían la posibilidad de alcanzar un rendimiento comparable al de las implementaciones anteriores, sin sacrificar la fidelidad conceptual del método.

El principio central consiste en recorrer el patrón de frecuencias $f_1, f_2, f_1, f_2, \ldots$ a partir del número base, calculando en cada paso si el número objetivo se alinea con una posición dentro de dicho patrón. Si ocurre una colisión (es decir, si se obtiene un valor entero en la expresión correspondiente), el número es declarado compuesto.

7. Discusión

El modelo de criba por frecuencias cíclicas se presenta como una alternativa conceptual al paradigma tradicional de detección de números primos. Si bien no sustituye a métodos como la criba de Eratóstenes o los test de primalidad modernos, ofrece una vía original para abordar el problema desde una perspectiva modular, aritmética y estructurada.

7.1. Ventajas del Modelo

- **Independencia de la factorización:** No requiere conocer divisores previos ni realizar divisiones tradicionales entre enteros.
- **Cobertura total del dominio relevante:** Incluye todos los números primos mayores que 3, ya que se construye sobre la secuencia $6n \pm 1$.

- **Regularidad estructural:** El patrón alternante de frecuencias revela una organización interna que permite predecir y cancelar compuestos mediante una mecánica cíclica, no aleatoria.

- **Posible reutilización de patrones:** A diferencia de la criba de Eratóstenes, que opera de forma multiplicativa directa, este modelo permite observar cómo los bloques de cancelación se repiten, lo que sugiere una optimización natural basada en periodicidad.

7.2. Limitaciones Actuales

- **No trata primos menores que 5:** Por su construcción, el modelo debe complementarse con una verificación directa de los casos 2 y 3.

- **No opera sobre todo el conjunto de los naturales:** El universo de trabajo está limitado a la secuencia $6n \pm 1$, por lo que los números fuera de ella deben descartarse de entrada. Algunos (como los compuestos $6n \pm 3$) podrían parecer "omitidos" sin explicación adicional.

- **Aún sin demostración formal completa:** Si bien su funcionamiento ha sido validado empíricamente y su lógica interna es coherente, el modelo no cuenta aún con una formalización matemática rigurosa comparable a métodos establecidos.

- **Sensibilidad al rango evaluado:** La cancelación efectiva se basa en un recorrido parcial limitado por $\sqrt{N}$, lo cual exige una gestión cuidadosa del alcance de cada frecuencia.

8. Conclusiones

El modelo de criba por frecuencias cíclicas constituye una propuesta alternativa para el análisis de primalidad, construida a partir de observaciones aritméticas empíricas sobre la secuencia $6n \pm 1$. Su principio de funcionamiento, basado en patrones periódicos de cancelación, permite identificar números compuestos sin recurrir a la factorización ni a divisiones directas entre candidatos.

A través de un sistema de frecuencias asociadas a cada número base, el modelo establece un mecanismo de colisión que determina si un número debe ser descartado como primo. Esta metodología, aplicada de forma ordenada y cíclica, ofrece un enfoque estructurado que respeta la naturaleza modular de la distribución de los primos.

Las pruebas realizadas confirman que el sistema es capaz de generar listas completas de primos (mayores que 3) y de evaluar casos individuales con precisión. A pesar de no contar aún con una formalización matemática completa, el modelo presenta un conjunto de reglas internas coherentes, verificables y replicables.

Finalmente, su simplicidad operativa, su compatibilidad con la programación, y su potencial de optimización futura lo convierten en un objeto de estudio valioso para quienes deseen explorar nuevas vías en teoría de números desde un enfoque práctico y estructurado.