INECUACIONES

➢ INTRODUCCIÓN

Una desigualdad es una expresión numérica o algebraica unida por uno de los cuatro signos de desigualdad: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

Por ejemplo:

- $-2 < 5$, $4 \geq x + 2$, $x^2 - 5 \geq x$, $x + y \geq 2$.

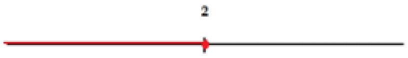
Una **inecuación** es una desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas.

El **grado** de una inecuación es el mayor de los grados al que están elevadas sus incógnitas.

Así: $4 \geq x + 2$ y $x + y \geq 2$ son inecuaciones de primer grado, mientras que x2 – 5 ≥ x es de segundo grado.

Resolver una inecuación consiste en encontrar los valores que la verifican. Éstos se denominan **soluciones** de la misma.

Por ejemplo:

- $3 \geq x + 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \quad \Leftrightarrow$ 

2.1. Inecuaciones equivalentes:

Dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

A veces, para resolver una inecuación, resulta conveniente encontrar otra equivalente más sencilla. Para ello, se pueden realizar las siguientes transformaciones:

- Sumar o restar la misma expresión a los dos miembros de la inecuación.

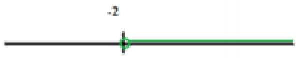
$$3x + 2 < 5 \Leftrightarrow 3x + 2 - 2 < 5 - 2 \Leftrightarrow 3x < 3$$

- Multiplicar o dividir ambos miembros por un número positivo.

$$3x < 3 \Leftrightarrow 3x : 3 < 3 : 3 \Leftrightarrow x < 1$$

- Multiplicar o dividir ambos miembros por un número negativo y cambiar la orientación del signo de la desigualdad.

$$-x < 2 \Leftrightarrow (-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2 \Leftrightarrow (-2, +\infty) \Leftrightarrow$$



➢ INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una inecuación de primer grado con una incógnita puede escribirse de la forma:

$$ax > b,\ ax \geq b,\ ax < b \ \text{ ó } \ ax \leq b.$$

Para resolver la inecuación en la mayoría de los casos conviene seguir el siguiente procedimiento:

1º) **Quitar denominadores**, si los hay. Para ello, se multiplica los dos miembros de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores.

2º) **Quitar los paréntesis**, si los hay.

3º) **Transponer** los términos con *x* a un miembro y los números al otro.

4º) **Reducir** términos semejantes.

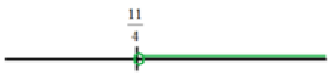
5º) **Despejar** la *x*.

Ejemplo:

- $$\frac{x-3}{3} - \frac{(x-7)}{6} > \frac{4-x}{2} \Leftrightarrow \frac{2(x-3)-(x-7)}{6} > \frac{3(4-x)}{6} \Leftrightarrow 2(x-3)-(x-7) > 3(4-x)$$

$$\Leftrightarrow 2x-6-x+7 > 12-3x \Leftrightarrow 2x-x+3x > 6-7+12 \Leftrightarrow 4x > 11 \Leftrightarrow x > \frac{11}{4}$$

$$x \in \left(\frac{11}{4}, +\infty\right)$$



INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

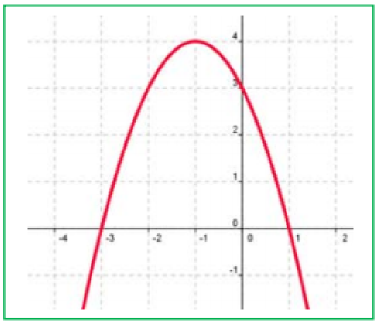
Una inecuación de segundo grado con una incógnita puede escribirse de la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

empleando cualquiera de los cuatro signos de desigualdad.
Para resolverla, calculamos las soluciones de la ecuación asociada, las representamos sobre la recta real, quedando por tanto la recta dividida en tres, dos o un intervalo, dependiendo de que la ecuación tenga dos, una o ninguna solución.
En cada uno de ellos, el signo del polinomio se mantiene constante, por lo que bastará con determinar el signo que tiene dicho polinomio para un valor cualquiera de cada uno de los intervalos. Para saber si las soluciones de la ecuación verifican la inecuación, bastará con sustituirla en la misma y comprobarlo.

Ejemplo:

- Representa gráficamente la parábola $y = -x^2 - 2x + 3$ e indica en qué intervalos es $-x^2 - 2x + 3 > 0$.



Observa en la gráfica que la parábola toma valores positivos entre –3 y 1. La solución de la inecuación es:

$$x \in (-3, 1).$$

El punto –3 no es solución, ni tampoco el punto 1, pues el problema tiene una desigualdad estricta, >. Si tuviera la desigualdad ≥, $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$ la solución sería:

$$x \in [-3, 1].$$

Si fuera $-x^2 - 2x + 3 < 0$, la solución sería: $x \in (-\infty,-3) \cup (1, +\infty)$.
Si fuera $-x^2 - 2x + 3 \leq 0$, la solución sería: $x \in (-\infty,-3] \cup [1, +\infty)$.

SISTEMAS DE INECUACIONES

Un sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita es aquel en el que la única variable que interviene en todas las ecuaciones está elevada a un exponente igual a la unidad.

Sistemas de dos ecuaciones, tienen por expresión general: $\begin{cases} a_1x < b_1 \\ a_2x < b_2 \end{cases}$, con cualesquiera de los signos $<$, $>$, $\leq$ ó $\geq$.

Para resolverlos, independientemente del número de inecuaciones que compongan el sistema, se resuelve cada inecuación por separado, y al final se determina la solución como la intersección de todas ellas.

Ejemplo:

$\begin{cases} 2x > 4 \\ x + 5 \geq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 5 \end{cases}$, los intervalos solución son $\begin{cases} (2, +\infty) \\ (-\infty, 5] \end{cases} \Rightarrow (2, +\infty) \cap (-\infty, 5] = (2, 5]$

Luego la solución común a ambas está en la intersección de ambos, es $(2, 5]$.

Gráficamente puede verse:

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Una inecuación en valor absoluto es aquella en la que parte de la inecuación, o toda ella, viene afectada por el valor absoluto de la misma.

La expresión general es de la forma $|ax + b| \leq c$, empleando cualquiera de los cuatro signos de desigualdad.

Para resolverla, aplicamos la definición de valor absoluto de una cantidad y pasamos en ocasiones a un sistema de dos ecuaciones cuya solución es la solución de la inecuación.

$$|ax + b| \leq c \text{ por definición } \begin{cases} ax + b \leq c \\ -ax - b \leq c \end{cases}$$

Ejemplo:

$|2x - 4| \leq 12 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4 \leq 12 \\ -2x + 4 \leq 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x \geq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-\infty, 8] \\ [-4, +\infty) \end{cases} \Rightarrow [-4, 8] \Rightarrow$

$|2x - 6| > 10 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 6 > 10 \\ -2x + 6 > 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 8 \\ x < -2 \end{cases}$. Observa que ahora no es un sistema de ecuaciones. No existe ningún x que a la vez sea menor que -2 y mayor que 8, pero la solución son los valores que o bien pertenecen a un intervalo o bien al otro: $x \in (-\infty, -2) \cup (8, +\infty)$.

Comprueba que, por ejemplo, $x = 10$ verifica que $2x - 6 = 20 - 6 = 14 > 10$, y que $x = -3$, también ya que $2x - 6 = -6 - 6 = -12$ cuyo valor absoluto es mayor que 10.

Actividades propuestas

22. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|x + 3| < 2$ b) $|2x + 5| > 1$ c) $|x - 6| \leq 2$ d) $|x - 2| \geq 2$