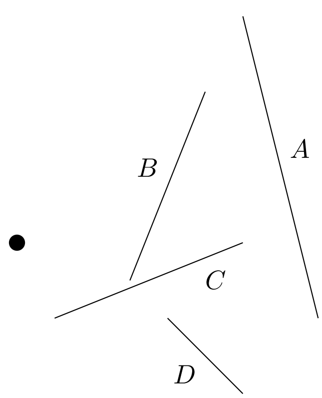
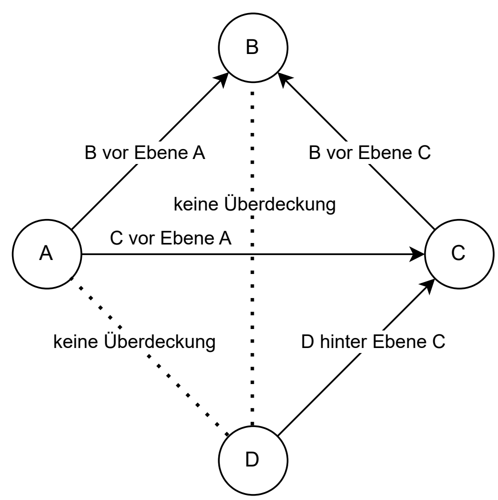
Computer Grafik Blatt 5

May 2023

Aufgabe 1

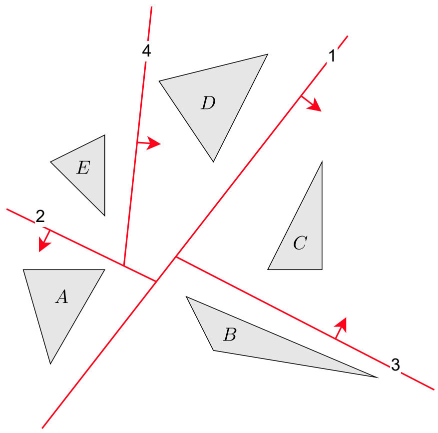
a)

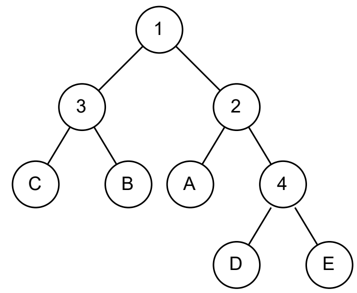




Daraus ergeben sich die Reihenfolgen A, D, C, B bzw. D, A, C, B

b)





c)

$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normale des Dreiecks bestimmen:

$$\begin{aligned} n &= \frac{(b-a) \times (c-a)}{||(b-a) \times (c-a)||} \\ &= \begin{pmatrix} 3-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0-0 \\ 2-0 \\ -1-0 \end{pmatrix} \div ||(b-a) \times (c-a)|| \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \div ||(b-a) \times (c-a)|| \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \div \sqrt{0^2 + 3^2 + 6^2} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit Normale Schnittpunkt von Gerade und Dreiecksebene bestimmen:

$$
\begin{aligned}
n^T \cdot (x + \lambda \vec{w} - a) &= 0 \\
\lambda &= \frac{n^T \cdot (a - x)}{n^T \cdot \vec{w}} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}} \\
&= \frac{-\frac{7\sqrt{5}}{5}}{-\frac{\sqrt{10}}{5}} \\
&= -\frac{7\sqrt{2}}{2} \approx 4.95
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich der Punkt $p = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Mit Hilfe der baryzentrischen Koordinaten prüfen, ob der Punkt im Dreieck liegt:

$$
\begin{aligned}
A(\triangle_{abc}) &= \frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} | & | & | \\ b-a & c-a & n_{\triangle} \\ | & | & | \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 45 = 22.5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A(\triangle_{pbc}) &= \frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} | & | & | \\ b-p & c-p & n_{\triangle} \\ | & | & | \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} 2.5 & -0.5 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0.5 & -0.5 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 15 = 7.5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A(\triangle_{pca}) &= \frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} | & | & | \\ c-p & a-p & n_{\triangle} \\ | & | & | \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ -0.5 & 0.5 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 7.5 = 3.75
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A(\triangle_{pab}) &= \frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} | & | & | \\ a-p & b-p & n_{\triangle} \\ | & | & | \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} -0.5 & 2.5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0.5 & 0.5 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 22.5 = 11.25
\end{aligned}
$$

$$\alpha = \frac{A(\triangle_{pbc})}{A(\triangle_{abc})} = \frac{7.5}{22.5} = \frac{1}{3}$$
$$\beta = \frac{A(\triangle_{pca})}{A(\triangle_{abc})} = \frac{3.75}{22.5} = \frac{1}{6}$$
$$\gamma = \frac{A(\triangle_{pab})}{A(\triangle_{abc})} = \frac{11.25}{22.5} = \frac{1}{2}$$

Positive baryzentrische Koordinaten für p Zeigen, dass p im Dreieck liegt. Somit ist der Schnittpunkt $p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

d)

z-Buffer initial mit 1 und color-Buffer mit $(1, 1, 1)$ füllen.

1. $[z = 0.2; c = (0.7, 0.7, 0)]$
   - z-Buffer = 0.2; color-Buffer = $(0.7, 0.7, 0)$
2. $[z = 0.4; c = (0, 0, 0)]$
   - z-Buffer = 0.2; color-Buffer = $(0.7, 0.7, 0)$
3. $[z = 0.9; c = (0.1, 0.2, 0.9)]$
   - z-Buffer = 0.2; color-Buffer = $(0.7, 0.7, 0)$
4. $[z = -0.3; c = (0.1, 0.9, 1)]$
   - z-Buffer = -0.3; color-Buffer = $(0.1, 0.9, 1)$
5. $[z = -0.8; c = (0, 1, 0.8)]$
   - z-Buffer = -0.8; color-Buffer = $(0, 1, 0.8)$

e)

α-Buffer initial mit 0 füllen und color-Buffer mit $(1, 1, 1)$ füllen.

1. $[z = 0.2; c = (0.1, 0.1, 0.1), \alpha = 0.2]$
2. $[z = -1.0; c = (0, 1, 1), \alpha = 0.8]$
3. $[z = -0.3; c = (0, 1, 0), \alpha = 1.0]$
4. $[z = 0.6; c = (0.7, 0.8, 0.9), \alpha = 0.2]$

5. $[z = 0.2; c = (1, 1, 1), \alpha = 0.5]$

Fragmente vom großen zum kleinen z-Wert sortieren, da große Werte hinten und kleine Werte vorne liegen. Entsprechend der Formel $C_i = \alpha_i \cdot c_i + (1 - \alpha_i) \cdot C_{i-1}$ berechnet, beginnend mit $C_0 = (1, 1, 1)$:

1. $[z = 0.6;\ c = (0.7, 0.8, 0.9);\ \alpha = 0.2]$
   - $C_1 = 0.2 \cdot (0.7, 0.8, 0.9) + (1 - 0.2) \cdot (1, 1, 1) = (0.94, 0.96, 0.98)$
2. $[z = 0.2;\ c = (0.1, 0.1, 0.1);\ \alpha = 0.2]$
   - $C_2 = 0.2 \cdot (0.1, 0.1, 0.1) + (1 - 0.2) \cdot (0.94, 0.96, 0.98) = (0.772, 0.788, 0.804)$
3. $[z = -0.2;\ c = (1, 1, 1);\ \alpha = 0.5]$
   - $C_3 = 0.5 \cdot (1, 1, 1) + (1 - 0.5) \cdot (0.772, 0.788, 0.804) = (0.886, 0.894, 0.902)$
4. $[z = -0.3;\ c = (0, 1, 0);\ \alpha = 1.0]$
   - $C_4 = 1.0 \cdot (0, 1, 0) + (1 - 1.0) \cdot (0.886, 0.894, 0.902) = (0.0, 1.0, 0.0)$
5. $[z = -1.0;\ c = (0, 1, 1);\ \alpha = 0.8]$
   - $C_5 = 0.8 \cdot (0, 1, 1) + (1 - 0.8) \cdot (0.0, 1.0, 0.0) = (0.0, 1.0, 0.8)$

Somit erhalten wir $(0.0, 1.0, 0.8)$ als Ergebnis.