Computer Grafik Blatt 2

May 2023

Aufgabe 1:

a)

Mittelpunkt:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eckpunkte:

$$luv : \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} ruv : \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} ruh : \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} luh : \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$loh : \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} roh : \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} rov : \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} lov : \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es wird unterschieden in links-rechts, unten-oben und vorne-hinten.

Projektionen:

$$luv' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$ruv' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$ruh' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,8 \\ -0,2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

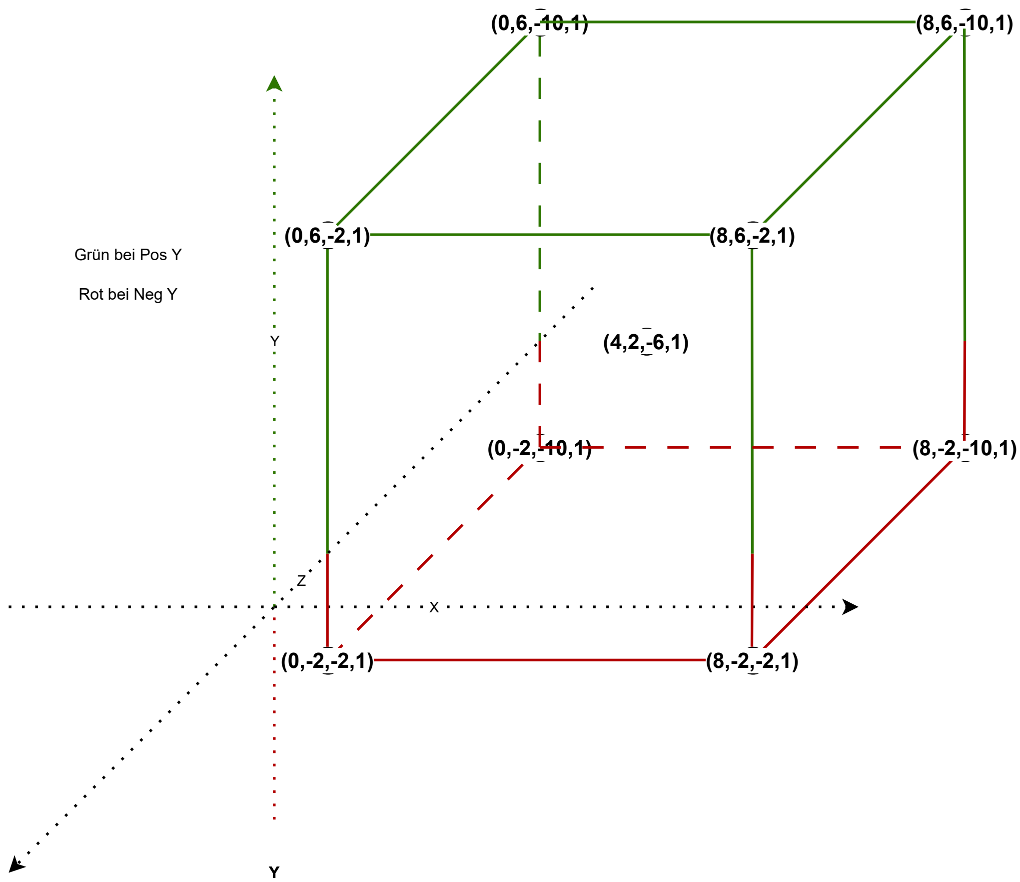
$$luh' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -0,2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

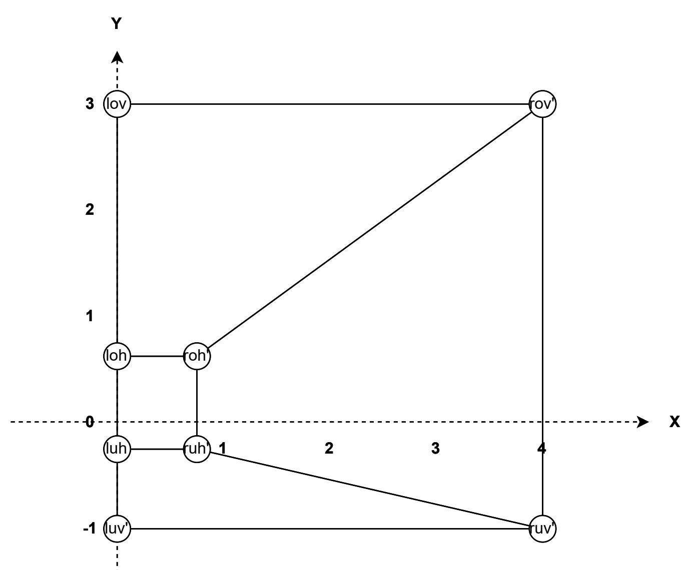
$$loh' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0,6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$roh' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$rov' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$lov' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$


(0,6,-10,1)
(8,6,-10,1)
(0,6,-2,1)
(8,6,-2,1)
Grün bei Pos Y
Rot bei Neg Y
Y
(4,2,-6,1)
(0,-2,-10,1)
(8,-2,-10,1)
Z
X
(0,-2,-2,1)
(8,-2,-2,1)


Y
3
lov
rov'
2
1
loh
roh'
0
X
luh
ruh'
1
2
3
4
-1
luv'
ruv'

b)

1. Zuerst überprüfen wir ob Richtung $\overrightarrow{d}$ und up-Vektor $\overrightarrow{u}$senkrecht zueinander sind:

$$d^T u = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \checkmark$$

2. Danach bestimmen wir $\overrightarrow{r}$:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{d} \times \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - \frac{3}{5} \cdot 1 \\ \frac{3}{5} \cdot 0 - (-\frac{4}{5}) \cdot 0 \\ -\frac{4}{5} \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ 0 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

3. Dann bestimmen wir $-r^T c$, $-u^T c$ und $d^T c$:

$$-r^T c = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{17}{5}$$

$$-u^T c = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$d^T c = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{6}{5}$$

4. Am Ende ergibt sich aus der Formel im Kompaktskritp:

$$M_{LookAt_{\overrightarrow{r}, \overrightarrow{u}, -\overrightarrow{d}, c}} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

1.

$$||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{\cos\alpha \cdot v^T \cdot v} = \sqrt{1 \cdot \begin{pmatrix} -5 & 4 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -20 \end{pmatrix}} = \sqrt{441} = 21$$

2.

$$v^T w = \cos\alpha \cdot ||v|| \cdot ||w|| = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -16$$

$$||v|| = \sqrt{0^2 + 8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$$

$$||w|| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2$$

$$\cos\alpha \cdot ||v|| \cdot ||w|| = \cos\alpha \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2 = -16| \div 2| \div 8\sqrt{2}$$

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} = 135^\circ$$

3.

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \cdot 1 - (-4) \cdot 1 \\ (-4) \cdot 1 - 6 \cdot 1 \\ 6 \cdot 1 - 36 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -10 \\ -30 \end{pmatrix}$$

4. Gesucht ist $\overrightarrow{v}$, sodass $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0$.

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3 = 0$$

Da $\overrightarrow{w} = ((-1, 8, 7) - \overrightarrow{v})$ folgt daraus in die Formel eingesetzt

$$\begin{aligned} v_1 \cdot (-1 - v_1) + v_2 \cdot (8 - v_2) + v_3 \cdot (7 - v_3) &= 0 \\ \Leftrightarrow -v_1^2 - v_1 - v_2^2 - v_3^2 + 8v_2 + 7v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Durch die möglichen Lösungen für die Gleichung ergeben sich dann beispielsweise folgende Vektoren für $\overrightarrow{v}$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \ldots$$