1 Aufgabe 2

1.1 a

Die Verteilungsfunktion von X ist definiert als

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Durch die gegebene Dichtefunktion $f(x)$ haben wir

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\pi}\mathbf{1}[0, 2\pi](t)dt.$$

Da $\mathbf{1}[0, 2\pi](t) = 0$ für alle $t < 0$ und $t > 2\pi$, können wir die untere Integralgrenze auf 0 setzen:

$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{[0,2\pi]}(t)dt.$$

Zusammengefasst erhalten wir die Verteilungsfunktion von X:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{2\pi} & \text{für } 0 \leq x \leq 2\pi, \\ 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x > 2\pi. \end{cases}$$

1.2 b

Um $\mathbb{E}\left(X^n\right)$ zu berechnen, können wir die Erwartungswerteformel verwenden:

$$\mathbb{E}\left(X^n\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx.$$

Für die gegebene Dichtefunktion $f(x)$ haben wir

$$\mathbb{E}\left(X^n\right) = \int_{0}^{2\pi} x^n \frac{1}{2\pi}dx = \frac{(2\pi)^n}{n+1}$$

Die Varianz von X ist definiert als

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2.$$

Wir haben bereits $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{(2\pi)^2}{3}$ und $\mathbb{E}(X) = \frac{2\pi}{2}$ berechnet, daher ist die Varianz von X

$$\mathbb{V}(X) = \frac{(2\pi)^2}{3} - \left(\frac{2\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{3}$$

1.3 c

Der Erwartungswert von $\cos(X)$ ist

$$\mathbb{E}(\cos(X)) = \int_{0}^{2\pi} \cos(x)\frac{1}{2\pi}dx = 0$$

Der Erwartungswert von $(\cos(X))^2$ ist

$$\mathbb{E}((\cos(X))^2) = \int_{0}^{2\pi} (\cos(x))^2\frac{1}{2\pi}dx = \frac{1}{2}$$

Die Varianz von $\cos(X)$ ist somit

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\cos(X)) &= \mathbb{E}((\cos(X))^2) - (\mathbb{E}(\cos(X)))^2 \\ &= \frac{1}{2} - 0^2 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

1.4 d

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{für } \sin(X) \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$