Aufgabe 2

a

Man legt k Punkte auf der Menge der Größe n fest, welche als Fixpunkte dienen sollen. Dies kann durch $\binom{n}{k}$ abgebildet werden. Dann gibt es noch $(n-k)!$ Möglichkeiten, die restlichen Postionen festzulegen. Dadurch ergeben sich dann $\binom{n}{k}(n-k)!$ Möglichkeiten für Funktionen mit k Fixpunkten. Da es $n!$ viele Funktionen gibt, ergibt sich somit eine Wahrscheinlichkeit von $\binom{n}{k}(n-k)! \cdot \frac{1}{n!}$ für Funktionen mit k Fixpunkten.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_n\right) &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}(n-k)! \cdot \frac{1}{n!} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}(n-k)! \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)! \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k-1)!}
\end{aligned}$$

Wir können $\mathbb{V}\left(X_n\right) = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) - \mathbb{E}\left(X_n\right)^2$ berechnen.
Für $\mathbb{E}\left(X_n^2\right)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_n^2\right) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k}(n-k)! \cdot \frac{1}{n!} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k}(n-k)! \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)! \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \frac{n!}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k-1)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(X_n\right) &= \mathbb{E}\left(X_n^2\right) - \mathbb{E}\left(X_n\right)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k-1)!} - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k-1)!}\right)^2
\end{aligned}$$