Aufgabe 1

IA: Sei $n = 1$. Wir betrachten $\chi_1 = Z_1$ $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\chi_1^2 \le t) = \mathbb{P}(Z_1^2 \le t) &= \mathbb{P}\left(Z_1 \in \left[-\sqrt{t}, \sqrt{t}\right]\right) \\
&\overset{Z_1 \sim \mathcal{N}(0,1)}{=} \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\
&= 2 \cdot \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\
&\overset{x=y^2}{=} 2 \cdot \int_0^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}\, dx \\
&\Rightarrow f_{X_1^2}(x) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

IS: Annahme χ_n^2 besitzt die Dichte $f_{\chi_n^2}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$ (IV). Wir betrachten $\chi_{n+1}^2 = \chi_n^2 + Z_{n+1}^2$; $Z_{n+1} \sim \mathcal{N}(0,1)$ und Z_{n+1}^2 und χ_n^2 unabhängig; Dann folgt für die Dichte von χ_{n+1}^2

$$\begin{aligned}
f_{\chi_{n+1}^2}(x) &\overset{IV u.IA}{=} f_{Z_{n+1}^2}(x) * f_{\chi_n^2}(x) = \int_0^x f_{\chi_n^2}(t) \cdot f_{Z_{n+1}^2}(x-t)\, dt \\
&= \int_0^x \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} (x-t)^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{(x-t)}{2}}\, dt \\
&= \underbrace{\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}}_{c} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \int_0^x t^{\frac{n}{2}-1}(x-t)^{\frac{1}{2}-1}\, dt \\
&= c \cdot \int_0^2 x^{\frac{n}{2}-1} x^{\frac{1}{2}-1} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{-\frac{1}{2}-1} \frac{x}{x}\, dt \\
&\overset{y=\frac{t}{x}}{=} c \cdot \int_0^1 x^{\frac{n}{2}-1} y^{\frac{n}{2}-1} x^{\frac{1}{2}-1} (1-y)^{\frac{1}{2}-1} x\, dy \\
&= c \cdot x^{\frac{n+1}{2}-1} \underbrace{\int_x^1 y^{\frac{n}{2}-1}(1-y)^{\frac{1}{2}-1}\, dy}_{\mathrm{B}\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}} \\
&= \frac{1}{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{n+1}{2}-1} \\
&= f_{\chi_{n+1}^2}(x)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Der Amtsinhaber gewinnt, falls mehr als 5900000 unentschiedene Wähler für ihn stimmen. Sei $X_i = \mathbb{1}_{\{\text{unentschiedener Wähler } i \text{ wählt Amtsinhaber}\}}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow X_i \text{ ist bernoulli-verteilt} \\
&\Rightarrow \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2}, \mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{11815000} X_i > 5900000\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{11815000} X_i \leq 5900000\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{11815000}(X_i) - 5907500}{\frac{1}{2}\sqrt{11815000}} \leq \frac{5900000 - 5907500}{\frac{1}{2}\sqrt{11815000}}\right) \\
&\overset{\text{ZGWS}}{\approx} 1 - \Phi(-4.363896) = \Phi(4.363896) \geq 0.9999
\end{aligned}$$