Prof. Matthias Reitzner
Bernhard Hafer

# Einführung in die Stochastik für Informatiker
# Wintersemester 22/23

## Übungsblatt 6

---

## Aufgabe 1 (8 Punkte)

Auf einem Weihnachtsmarkt können die Besucher mit etwas Glück einen Einkaufsgutschein für die anstehenden Weihnachtseinkäufe gewinnen. Sie ziehen dazu aus einem Sack eine von 20 Weihnachtskugeln. Diese 20 Weihnachtskugeln haben alle exakt die gleiche Form, werden also mit gleicher Wahrscheinlichkeit gezogen. Jede Weihnachtskugel ist mit einer Zahl beschriftet, welche die Höhe des Einkaufsgutscheins angibt. Wer eine Kugel mit einer 10 zieht, bekommt also einen Gutschein im Wert von 10 Euro. Zehn Kugeln sind mit einer 1 beschriftet, vier mit einer 5, drei mit einer 10, zwei mit einer 20 und eine mit einer 35. Nach der Ziehung wird die Kugel wieder zurück in den Sack gelegt.

a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $X_n$ eine Zufallsvariable, welche die Anzahl der nach $n$ Ziehungen verschiedenen gezogenen Gutscheinsummen angibt. Bestimmen Sie
$$\mathbb{E}(X_n).$$

b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $Z_n$ eine Zufallsvariable, welche die nach $n$ Ziehungen höchste gezogene Gutscheinsumme angibt. Zeigen Sie, dass
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z_n) = 35$$
gilt.

## Aufgabe 2 (12 Punkte)

Seien $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.

a) $X$ ist genau dann unabhängig von sich selbst, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

b) $X$ und $Y$ sind genau dann unabhängig, wenn $e^{X-1}$ und $e^{Y-1}$ unabhängig sind.

c) $X$ und $Y$ sind genau dann unabhängig, wenn $X^4$ und $Y^4$ unabhängig sind.

d) Es gilt $\mathbb{P}(X = Y) = 1$ genau dann, wenn $\mathbb{P}(X = c) = \mathbb{P}(Y = c)$ für alle $c \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

e) Es gilt $\mathbb{P}(X = Y) = 1$ genau dann, wenn $\mathbb{E}((X - Y)^2) = 0$.

f) Aus $X \leq Y$ und der Existenz von $\mathbb{E}(Y)$ folgt die Existenz von $\mathbb{E}(X)$.

---

Besprechung in der Übung am Freitag, den 9. Dezember 2022, 8:30 Uhr in Raum 66/E33