Wir haben

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right)$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j$$

Nun können wir die Summe unterteilen:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} X_i X_j$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, |i-j|\geq k}^{n} X_i X_j.$$

Da die X_i unkorreliert sind, falls $|i-j| \geq k$, haben wir:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,|i-j|\geq k}^{n} X_i X_j = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,|i-j|\geq k}^{n} \mathbb{E}\left(X_i X_j\right)$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,|i-j|\geq k}^{n} \mathbb{E}\left(X_i\right)\mathbb{E}\left(X_j\right)$$
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,|i-j|\geq k}^{n} \mu^2$$
$$= \frac{n(n-1-2k+2)}{n^2}\mu^2$$

Für die Summe der quadrierten X_i haben wir:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \frac{1}{n^2}\left(\mathbb{V}\left(X_i\right) + \left(\mathbb{E}\left(X_i\right)\right)^2\right)$$
$$= \frac{\sigma^2+\mu^2}{n^2}$$

Diese Gleichung basiert auf der Varianzformel:

$$\mathbb{V}\left(X\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2$$

Fügen wir diese beiden Gleichungen zusammen, erhalten wir:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \leq \frac{\sigma^2+\mu^2}{n^2} + \frac{n(n-1-2k+2)}{n^2}\mu^2 \leq \frac{1}{n}\left(\sigma^2 + 2(k-1)\sigma^2\right)$$