Aufgabe 1

a

 $N=\sum_{l=1}^L n^{(l)}$ ist die Anzahl aller gegebenen Daten Sei $x_i=x_1,...,x_N=x_1^{(1)},\ldots,x_{n^{(1)}}^{(1)},\ldots,x_1^{(L)},\ldots,x_{n^{(L)}}^{(L)}$ Daraus folgt dann:

$$rac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i = rac{1}{N} \sum_{l=1}^{L} \sum_{i=1}^{n^{(l)}} \left(x_i^{(l)}
ight) = rac{1}{N} \sum_{l=1}^{L} \left(n^{(l)} \overline{x}^{(l)}
ight)$$

b

Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass die Stichprobe geordnet ist und $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ gilt. Angenommen $\bar{x} \ge \tilde{x}$, so gilt

$$egin{aligned} |ar{x} - ilde{x}| &= rac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - ilde{x} \ &= rac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{rac{n+1}{2}} x_i + \sum_{i=rac{n+1}{2}+1}^n x_i
ight) - ilde{x} \ &\leq rac{1}{n} \left(rac{n+1}{2} x_{rac{n+1}{2}} + rac{n-1}{2} x_n
ight) - x_{rac{n+1}{2}} \ &= rac{n-1}{2n} \left(x_n - x_{rac{n+1}{2}}
ight) \ &\leq rac{n-1}{2n} \left(x_n - x_1
ight) \ &= rac{n-1}{2n} R \end{aligned}$$

Angenommen $ar{x} \leq ilde{x}$, so gilt

$$egin{aligned} |ar{x} - ilde{x}| &= ilde{x} - rac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \ &= ilde{x} - rac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{rac{n+1}{2}-1} x_i + \sum_{i=rac{n+1}{2}}^n x_i
ight) \ &\leq x_{rac{n+1}{2}} - rac{1}{n} \left(rac{n-1}{2} x_1 + rac{n+1}{2} x_{rac{n+1}{2}}
ight) \ &= rac{n-1}{2n} \left(x_{rac{n+1}{2}} - x_1
ight) \ &\leq rac{n-1}{2n} \left(x_n - x_1
ight) \ &= rac{n-1}{2n} R \end{aligned}$$

C

Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass die Stichprobe geordnet ist und $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ gilt. Angenommen $\bar x \ge \tilde x$, so gilt

$$egin{aligned} |ar{x} - ilde{x}| &= rac{1}{n} \sum_{i=1}^{rac{n}{2}} x_i + rac{1}{n} \sum_{i=rac{n}{2}+1}^n x_i - ilde{x} \ &\leq rac{1}{n} \left(rac{n}{2} x_{rac{n}{2}}
ight) + rac{1}{n} \left(rac{n}{2} x_n
ight) - ilde{x} \ &= rac{1}{2} x_{rac{n}{2}} + rac{1}{2} x_n - rac{1}{2} (x_{rac{n}{2}} + x_{rac{n}{2}+1}) \ &= rac{1}{2} \left(x_n - x_{rac{n}{2}+1}
ight) \ &\leq rac{1}{2} \left(x_n - x_1
ight) \ &= rac{1}{2} R \end{aligned}$$

Angenommen $ar{x} \leq ilde{x}$, so gilt

$$egin{aligned} |ar{x}-ar{x}| &= ilde{x} - rac{1}{n} \sum_{i=1}^{rac{n}{2}} x_i - rac{1}{n} \sum_{i=rac{n}{2}+1}^n x_i \ &\leq ilde{x} - rac{1}{n} \left(rac{n}{2} x_1
ight) - rac{1}{n} \left(rac{n}{2} x_{rac{n}{2}+1}
ight) \ &\leq rac{1}{2} (x_{rac{n}{2}} + x_{rac{n}{2}+1}) - rac{1}{2} x_1 - rac{1}{2} x_{rac{n}{2}+1} \ &= rac{1}{2} \left(x_{rac{n}{2}} - x_1
ight) \ &\leq rac{1}{2} \left(x_n - x_1
ight) \ &= rac{1}{2} R \end{aligned}$$