Aufgabe 1

Zehn Kugeln sind mit einer 1 beschriftet.
Vier Kugeln sind mit einer 5 beschriftet.
Drei Kugeln sind mit einer 10 beschriftet.
Zwei Kugeln sind mit einer 20 beschriftet.
Eine Kugel ist mit einer 35 beschriftet.
Jede Kugel hat die gleiche Wahrscheinlichkeit gewählt zu werden.

a

$$X_1: \text{ Gutscheinwert einer Ziehung}$$
$$X_n: \text{ Gutscheinsumme von n-viele Ziehung}$$

$$\mathbb{E}\left(X_1\right) = 1 \cdot \frac{10}{20} + 5 \cdot \frac{4}{20} + 10 \cdot \frac{3}{20} + 20 \cdot \frac{2}{20} + 35 \cdot \frac{1}{20} = 6.75$$
$$\mathbb{E}\left(X_n\right) = n \cdot X_1 = n \cdot 6.75$$

b

$$Z_n: \text{ Höchste Zahl nach n Ziehung}$$

Um zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(Z_n\right) = 35$, muss gezeigt werden, dass die Wahrscheinlichkeit keine 35, da 35 die höchste Zahl ist, in n Zügen zu ziehen für $n \to \infty$ gegen 0 geht.
Die Wahrscheinlichkeit keine 35 in n Zügen zu ziehen liegt bei $\left(1 - \frac{1}{20}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{20}\right)^n = 0$$

Daraus folgt also, dass die Wahrscheinlichkeit keine 35 zu ziehen für n gegen unendlich gegen 0 geht. Daraus folgt dann, dass die Wahrscheinlichkeit eine 35 für $n \to \infty$ Züge gegen 1 konvergiert und somit gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(Z_n\right) = 35$.