Aufgabe 1

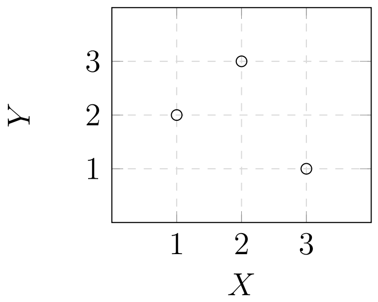
a

$$1 = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{X_1 + ... + X_n}\right) \overset{\text{Linearität des EW}}{=} \underbrace{\mathbb{E}\left(\frac{X_1}{X_1 + ... + X_N}\right) + ... + \mathbb{E}\left(\frac{X_n}{X_1 + ... + X_N}\right)}_{\text{N-viele}}$$

aus $\mathbb{E}\left(\frac{X_i}{X_1+...+X_N}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{X_j}{X_1+...+X_N}\right)$ für $i \neq j$ würde die Aussage folgen
Gilt $\mathbb{E}\left(\frac{X_i}{X_1+...+X_N}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{X_j}{X_1+...+X_N}\right)$ für $i \neq j$ für $i \neq j$?
Da $X_1, ..., X_n$ unabhängig sind, gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{X_i}{X_1 + ... + X_N}\right) &= \int \int \frac{x_i}{x_1 + ... + x_n} f(x_1)...f(x_N)dx_1...dx_N \\
&= \int \int \frac{x_j}{x_1 + ... + x_n} f(x_1)...f(x_N)dx_1...dx_N && \text{"tausche" } x_i \text{ und } x_j \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{X_j}{X_1 + ... + X_N}\right) && \text{für } i \neq j \text{ (und auch für } i = j) \\
&\Rightarrow \mathbb{E}\left(\frac{X_i}{X_1 + ... + X_N}\right) = \frac{1}{N}
\end{aligned}$$

b



$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{3}$$
$$\mathbb{P}(X = 2, Y = 3) = \frac{1}{3}$$
$$\mathbb{P}(X = 3, Y = 1) = \frac{1}{3}$$

Also sind X und Y gleichverteilt auf der Menge $\{1, 2, 3\}$, aber nicht unabhängig. Dann gilt

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right) = \frac{89}{180} \neq \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 2

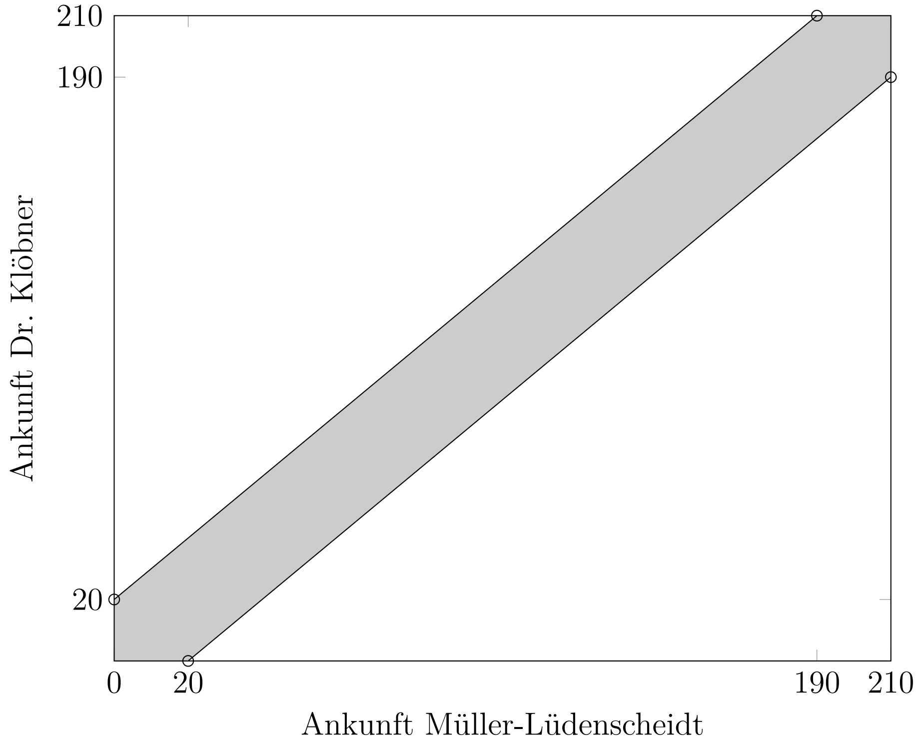
a

Lösung 1: "einfach durchrechnen"

Wir arbeiten mit dem Intervall $[0; 210]$, denn $[09{:}00\text{ Uhr}; 12{:}30\text{ Uhr}]$ enthält 210 Minuten.
Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{Sie treffen sich}) &= \int_0^{210} \int_0^{210} \mathbb{1}_{\{|x-y| \leq 20\}} \cdot \frac{1}{210} \cdot \frac{1}{210} dy dx \quad \text{da unabhängig und gleichverteilt auf } [0;210] \\
&= \int_0^{210} \int_{\max\{0,x-20\}}^{\min\{210,x+20\}} \frac{1}{210^2} dy dx \\
&= \frac{1}{210^2} \int_0^{210} \left(\min\{210, x+20\} - \max\{0, x-20\}\right) dx \\
&= \frac{1}{210^2} \left(\int_0^{20} x + 20 - 0 dx + \int_{20}^{190} x + 20 - (x-20) dx + \int_{190}^{210} 210 - (x-20) dx \right) \\
&\text{Substitution: } y = x - 190 \\
&= \frac{1}{210^2} \left(\int_0^{20} x + 20 dx + \int_0^{20} 40 - y dy + (170 \cdot 40) \right) \\
&= \frac{1}{210^2} \left(\int_0^{20} 60 dx + (170 \cdot 40) \right) \\
&= \frac{1}{210^2} \left((20 \cdot 60) + (170 \cdot 40) \right) \\
&= \frac{80}{441} \\
&\approx 18.14\%
\end{aligned}$$

Lösung 2: "zeichnerisch"

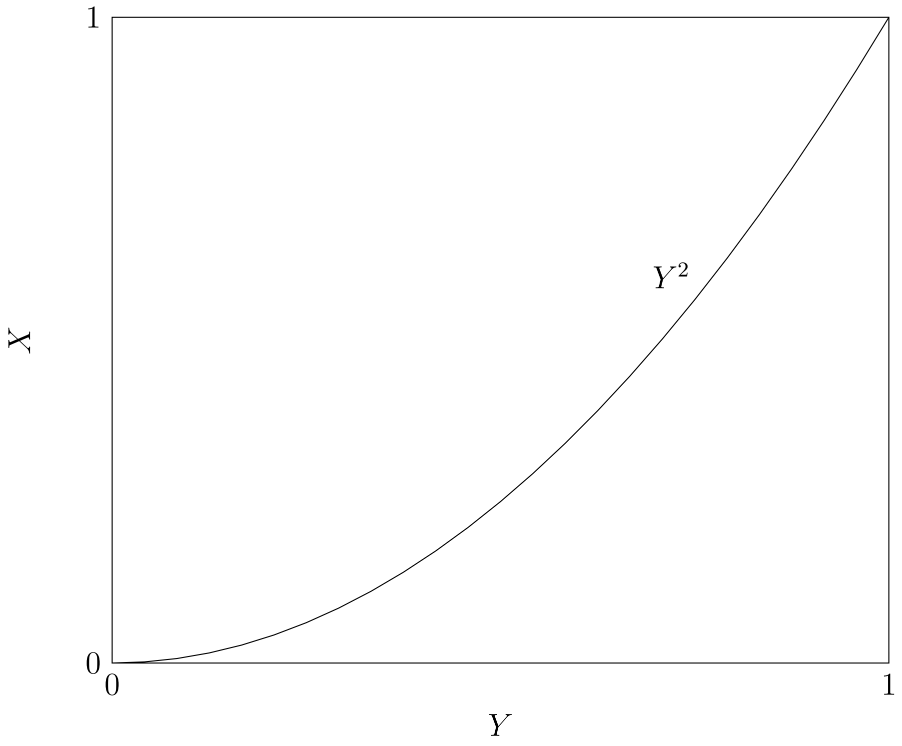


In dem markierten Bereich treffen sich die beiden.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{Sie treffen sich}) &= \frac{\text{Fläche des markierten Bereichs}}{\text{gesamte Fläche}} \\
&= \frac{210^2 - 190^2}{210^2} \\
&= 1 - \frac{19^2}{21^2} \\
&= 1 - \frac{361}{441} \\
&= \frac{80}{441} \\
&\approx 18.14\%
\end{aligned}$$

Vips

X, Y sind gleichverteilt auf $[0; 1]$ und unabhängig.



Flächeninhalt der Kurve ist 0.
Alternativ:

$$\mathbb{P}(X = Y^2) = \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_{\{x=y^2\}} dx dy = \int_0^1 \underbrace{\int_{y^2}^{y^2} 1 dx}_{=0} \, dy = 0$$