Aufgabe 1

Die χ_n^2-Verteilung ist Summe von n unabhängigen Standardnormalverteilungen Z. Daraus folgt dann die Dichte $f_{Z^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Induktionsannahme:

$$f_{\chi_n^2}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

Induktionanfang $n = 1$:

$$f_{\chi_1^2}(x) = f_{Z^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Induktionsschritt: Mit Satz 7.4 folgt für $n-1$:

$$\begin{aligned}
f_{\chi_n^2}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\chi_{n-1}^2}(x_1) f_{\chi_n^2}(x - x_1) dx_1 \\
&= |x_1 = xz| = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 z^{\frac{n-1}{2}-1} (1-z)^{\frac{1}{2}-1} dz \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$