Prof. Matthias Reitzner
Bernhard Hafer

Einführung in die Stochastik für Informatiker
Wintersemester 22/23

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Seien X und Y diskrete Zufallsvariablen.

a) Zeigen Sie, dass
$$\mathbb{K}(\alpha X + a, \beta Y + b) = \alpha\beta\mathbb{K}(X, Y)$$
für alle $\alpha, a, \beta, b \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass
$$\mathbb{V}(XY) = (\mathbb{E}(X))^2\mathbb{V}(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$$
gilt, falls X und Y unabhängig sind.

c) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.
Zeigen Sie, dass aus $a \leq X \leq b$ die Abschätzung
$$\mathbb{V}(X) \leq \frac{1}{4}(b-a)^2$$
für die Varianz von X folgt.

d) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $a \leq X \leq b$ (also wie in c)).
Zeigen Sie, dass die Gleichheit
$$\mathbb{V}(X) = \frac{1}{4}(b-a)^2$$
genau dann gilt, wenn
$$\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X = b) = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei
$$\Omega_n = \{f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} |\text{ Die Funktion } f \text{ ist bijektiv.}\}.$$
und $\mathbb{P}_n$ die Gleichverteilung auf Ω_n.

Weiterhin definieren wir eine Zufallsvariable $X_n : \Omega_n \to \{1, \dots, n\}$ durch
$$X_n(f) := |\{i \in \{1, \dots, n\} | f(i) = i\}|.$$
Der Funktionswert $X_n(f)$ gibt also die Anzahl der Fixpunkte der Funktion $f \in \Omega_n$ an.

a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X_n)$.

b) Bestimmen Sie $\mathbb{V}(X_n)$.

Hinweis zu a): Beispiel 5.4

Besprechung in der Übung am Freitag, den 16. Dezember 2022, 8:30 Uhr in Raum 66/E33