Aufgabe 2

a

Ein Maximum-Likelihood-Schätzer schätzt das plausibelste Ereignis. Hat man als maximale Seriennummer x_n, so ist egal welche kleineren Seriennummern man gefunden hat, da man weiß, dass diese beginnend bei 1 durch nummeriert sind. Hat man keine Seriennummern darüber gefunden, so ist das plausibelste Ereignis, dass x_n viele Geräte verkauft wurden. Somit ist $\max_{1 \leq i \leq n} x_i = x_n$ dann der Maximum-Likelihood-Schätzer.

b

Seriennummern gleichverteilt, daraus folgt $\mu = \mathbb{E}(X) = \frac{N+1}{2}$
Stichprobenmittelwert ist

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Als Zufallsvariable folgt daraus

$$\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Nun prüft man, ob $\bar{X}$ erwartungstreu ist

$$\mathbb{E}[\bar{X}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu = \mu$$

Somit ist $\bar{X}$ erwartungstreu. Aus $\mu = \frac{N+1}{2}$ folgt $N = 2\mu - 1$ und daraus ergibt sich, dass der hier gegebene Schätzer auch erwartungstreu ist.