Prof. Matthias Reitzner
Bernhard Hafer

Einführung in die Stochastik für Informatiker
Wintersemester 22/23

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit endlichem dritten Moment. Zeigen Sie, dass die empirische Kovarianz

$$s_{xy}(X_1, \dots, X_n)^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

ein erwartungstreuer Schätzer für die Kovarianz ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Das Smartphone UNLIMITED1, welches von dem Unternehmen TOUCH entwickelt wurde, war der Verkaufsschlager des vergangenen Jahres. Sie sind Journalist im Wirtschaftsressort einer renommierten Tageszeitung und werden vom Ressortleiter gebeten herauszufinden, wie viele UNLIMITED1 denn bisher insgesamt verkauft wurden. Das Unternehmen TOUCH will Ihnen darüber keine Auskunft geben und alle Versuche an Informationen über die Verkaufszahlen zu kommen scheitern.

Sie möchten daher versuchen die Verkaufszahlen wenigstens zu schätzen. Im Rahmen Ihrer Recherchen haben Sie zumindest herausgefunden, dass die UNLIMITED1s durchnummeriert (beginnend bei 1) sind. Der Plan ist es nun aus einer Stichprobe von Seriennummern die Anzahl an verkauften UNLIMITED1s zu schätzen. Da die Seriennummern in einzelnen Regionen womöglich dicht beieinander liegen, lassen Sie auch zahlreiche Auslandskorrespondenten Seriennummern von verkauften UNLIMITED1s „sammeln“. Weiterhin nehmen Sie an, dass alle bisher gekauften UNLIMITED1s noch genutzt werden.

Es liegen schließlich Seriennummern

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

vor. Die Anzahl an bisher verkauften UNLIMITED1s bezeichnen wir mit N.

a) Zeigen Sie, dass
$$\hat{\vartheta}_{\mathrm{L}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{1 \le i \le n} x_i = x_n$$
der Maximum-Likelihood-Schätzer für N ist.

b) Zeigen Sie, dass
$$\hat{\vartheta}_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n + x_1 - 1$$
und
$$\hat{\vartheta}_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n + \frac{x_n - n}{n}$$
erwartungstreue Schätzer für N sind.

Besprechung in der Übung am Freitag, den 3. Februar 2023, 8:30 Uhr in Raum 66/E33