Aufgabe 1

(X_1, Y_1) und (X_2, Y_2) unabhängig und $(X_j, Y_j) \sim (X, Y)$
Es gilt fur $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_i \in A, Y_j \in B) &= \mathbb{P}((X_i, Y_i) \in A \times \mathbb{R}, (X_j, Y_j) \in \mathbb{R} \times B) \\
&\overset{(X_i,Y_i),(X_j,Y_j)\text{ unabh.}}{=} \mathbb{P}((X_i, Y_i) \in A \times \mathbb{R}) \cdot \mathbb{P}((X_j, Y_j) \in \mathbb{R} \times B) \\
&= \mathbb{P}(X_i \in A) \cdot \mathbb{P}(Y_j \in B) \\
&\Rightarrow X_i \text{ und } Y_j \text{ unabhängig}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_iY_i - X_i\bar{Y} - Y_i\bar{X} + \bar{X}\bar{Y}\right)\right) \\
&\overset{\sum X_i = n\bar{X}, \sum Y_i = n\bar{Y}}{=} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_iY_i) - n\cdot\bar{X}\bar{Y} - n\cdot\bar{Y}\bar{X} + n\cdot\bar{X}\bar{Y}\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_iY_i) - n\cdot\bar{X}\bar{Y}\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{E}(X_iY_i)) - n\cdot\mathbb{E}(\bar{X}\bar{Y})\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{n-1}\left(n\cdot\mathbb{E}(XY) - n\cdot\mathbb{E}\left(\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_iY_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n}(X_iY_j)\right)\right)\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{n-1}\left(n\cdot\mathbb{E}(XY) - n\left(\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\mathbb{E}(XY) + \frac{1}{n^2}\cdot\underbrace{n(n-1)}_{\substack{\text{da bei n vielen} \\ \text{Einträgen } i=j}}\cdot\underbrace{\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}_{\text{unabh.}}\right)\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{n-1}\left(n\cdot\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(XY) - (n-1)\cdot\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right)\right) \\
&= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathrm{Cov}(X, Y)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a

Wir haben eine Stichprobe. Unsere Stichprobe besitzt in Abhängigkeit von N die Wahrscheinlichkeit $1/\binom{N}{n}$. Es gilt $N \geq x_n$ und der Maximierer von $\max\limits_{N \geq x_n} \frac{1}{\binom{N}{n}}$ ist $N = x_n$.

$\Rightarrow x_n$ ist ML-Schätzung.

b

Sei Y gleichverteilt auf $\{A \subseteq \{1, \ldots, N\} \mid |A| = n\}$.
Weiter sei $x_1 = \min \underset{\substack{\uparrow \\ Menge}}{Y}$ und $x_2 = \max \underset{\substack{\uparrow \\ Menge}}{Y}$.

$\mathbb{E}(x_n)$ ist der Erwartungswert der möglichen maximalen Werte der Stichprobe. Da $|A| = n$ gilt, ist x_n mindestens n. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(x_n) &= \sum_{i=n}^{N} i \cdot \mathbb{P}(i = \max Y) \\
&= \sum_{i=n}^{N} i \cdot \frac{\binom{i-1}{n-1}}{\binom{N}{N}} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \cdot \sum_{i=n}^{N} i \cdot \frac{(i-1)!}{(n-1)! \cdot (i-n)!} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \cdot \sum_{i=n}^{N} i \cdot \frac{i!}{n! \cdot (i-n)!} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \cdot n \cdot \sum_{i=n}^{N} \binom{i}{n} \\
&\overset{\text{Nach Blatt 4 Aufgabe 2}}{=} \frac{1}{\binom{N}{n}} \cdot n \cdot \binom{N+1}{n+1} \\
&= \frac{n!(N-n)!}{N!} \cdot n \cdot \frac{(N+1)!}{(n+1)! \cdot (N-n)!} \\
&= (N+1) \cdot \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

Überlegung:

$$1 \quad 2 \underset{x_1}{3} \; 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \underset{x_n}{8} \; 9 \quad 10$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{E}(x_1) &= N - \mathbb{E}(x_n) + 1 && \mid \text{aus Symmetriegründen} \\
\Rightarrow \mathbb{E}(\hat{\vartheta}_1) &= \mathbb{E}(x_n) + \mathbb{E}(x_1) - 1 \\
&= \frac{n}{n+1} \cdot (N+1) + \frac{N-n}{n+1} \cdot (N+1) - 1 \\
&= \mathbb{E}(x_n) + N - \mathbb{E}(x_n) + 1 - 1 \\
&= N \\
\Rightarrow \mathbb{E}(\hat{\vartheta}_2) &= (N+1) \cdot \frac{n}{n+1} + \frac{(N+1)}{n+1} - 1 \\
&= (N+1) \cdot \frac{n+1}{n+1} - 1 \\
&= N + 1 - 1 \\
&= N
\end{aligned}$$