Aufgabe 2

a

Da es sich um einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum handelt, muss gelten: $\mathbb{P}(X = a_1, X = a_2) = \mathbb{P}(X = a_1) \cdot \mathbb{P}(X = a_2)$ damit X zu sich selbst unabhängig ist.
$\mathbb{P}(X = a_1, X = a_2) = \mathbb{P}(\{X = a_1\} \cap \{X = a_2\}) = \mathbb{P}(X = k)$ mit $k = a_1 = a_2$
Damit das dies gilt, muss für jede Variable k gelten: $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = k) \cdot \mathbb{P}(X = k)$
Dies gilt nur, wenn $\mathbb{P}(X = k) = 1$
$\mathbb{P}(X = k) = 0$ ist hier nicht möglich, da dies für jede Variable gelten muss und gilt dies für alle Variablen, so gilt $P(\Omega) = 1$ nicht mehr.

b

Durch die diskrete Definitionsmenge Ω folgt eine diskrete Bildmenge der Funktionen e^{X-1} und e^{Y-1}.
Aus der diskreten Definitionsmenge, der diskreten Bildmenge und der strengen Monotonie der Exponentialfunktion folgt, dass beide Funktionen bijektiv sind.
Nach Definition 5.8 und Bemerkung 3 folgt daraus dann die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X und Y.

d

Da $\mathbb{P}(X = c) = \mathbb{P}(Y = c)$ für alle $\in \mathbb{R}$ erfüllt ist, folgt daraus, dass alle Ereignisse von X die gleiche Wahrscheinlichkeit wie in Y haben. Gilt dies nun wirklich für alle Ereignisse, so gibt es kein Ereignis in X bzw. in Y, welches nicht auch in der jeweiligen anderen Zufallsvariable liegen würde.
Da alle Ereignisse welche in beiden liegen die gleiche Wahrscheinlichkeit haben und es keine gibt, welche nicht in beiden liegen, folgt daraus $\mathbb{P}(X = Y) = 1$

e

Das Quadrat einer Zahl kann nur größer gleich 0 sein. Ist der Erwartungswert der quadrierten Differenz nun 0, so muss daraus folgen, dass alle Werte der Differenz 0 sind.
Haben X und Y nun eine Differenz von 0, so folgt daraus $\mathbb{P}(X = Y) = 1$
Sind X und Y die gleichen Zufallsvariablen, so ist die Differenz immer 0 und somit der Erwartungswert des Quadrats der Differenz auch immer 0.

f

Nach Satz 5.5 2) folgt aus $X \leq Y$, dass gilt $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$
Existiert nun $\mathbb{E}Y$, so folgt nach dem Satz auch die Existenz von $\mathbb{E}X$