Aufgabe 1

a

1.) a) $\mathbb{K}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$

$$\mathbb{K}(\alpha X + a, \beta Y + b) = \mathbb{E}((\alpha X + a)(\beta Y + b)) - \mathbb{E}(\alpha X + a) \cdot \mathbb{E}(\beta Y + b)$$

$$= \mathbb{E}(\alpha X \beta Y + \alpha X b + a\beta Y + ab) - \mathbb{E}(\alpha X + a) \cdot \mathbb{E}(\beta Y + b)$$

$$\overset{3\infty}{=} \mathbb{E}(\alpha\beta XY) + \mathbb{E}(\alpha X b) + \mathbb{E}(a\beta Y) + \mathbb{E}(a \cdot b) - \mathbb{E}(\alpha X + a) \cdot \mathbb{E}(\beta Y + b)$$

$$= \alpha\beta \cdot \mathbb{E}(XY) + \alpha b \cdot \mathbb{E}(X) + \beta a \mathbb{E}(Y) + ab - (\mathbb{E}(\alpha X) + \mathbb{E}a)(\mathbb{E}(\beta Y) + \mathbb{E}b)$$

$$= \alpha\beta \cdot \mathbb{E}(XY) + \cancel{\alpha b \cdot \mathbb{E}(X)} + \cancel{\beta a \mathbb{E}(Y)} + ab - \alpha\beta\mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) - \cancel{\alpha b \mathbb{E}(X)} - \cancel{\beta a \mathbb{E}(Y)}$$

$$- \mathbb{E}(a) \cdot \mathbb{E}(b)$$

$$= \alpha\beta \cdot \mathbb{E}(XY) + \cancel{ab} - \alpha\beta\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \cancel{ab}$$

$$= \alpha\beta(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y)$$

$$= \alpha\beta\,\mathbb{K}(X,Y)$$

b

b) $(\mathbb{E}X)^2 \cdot \left(\mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}Y)^2\right) + (\mathbb{E}Y)^2 \cdot (\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2)$

$+ (\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2)(\mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}Y)^2)$

$$= \underline{(\mathbb{E}X)^2\,\mathbb{E}(Y^2)} - \underline{(\mathbb{E}X)^2 \cdot (\mathbb{E}Y)^2} + \underline{(\mathbb{E}Y)^2 \cdot \mathbb{E}(X^2)} - (\mathbb{E}Y)^2(\mathbb{E}X)^2$$

$$+ \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) - \underline{\mathbb{E}(X^2)(\mathbb{E}Y)^2} - \underline{(\mathbb{E}X)^2\,\mathbb{E}(Y^2)} + \underline{(\mathbb{E}X)^2(\mathbb{E}Y)^2}$$

$$= \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}Y)^2(\mathbb{E}X)^2$$

$$= \mathbb{V}(X \cdot Y)$$

c

Für eine Zufallsvariable entsteht die maximale Varianz, wenn der Erwartungswert genau in der Mitte der Spannweite liegt und die beide Seiten des Wertebereichs gleich gewichtet sind.
Z. B. wenn die Variable genau zwei möglich Belegungen hat, welche beide eine Wahrscheinlichkeit von 50% haben.
In diesem Fall tritt dann die maximale Varianz auf.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \\
=&\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)^2 \\
=&\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a \cdot b + \frac{1}{4}b^2\right) \\
=&\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}a \cdot b + \frac{1}{4}a^2 \\
=&\left(\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{4}(b-a)^2
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit $a < b$ und $a \leq X \leq b$, dass

$$\mathbb{V}(X) \leq \frac{1}{4}(b-a)^2$$

gilt.

d

Siehe Aufgabenteil c)