Aufgabe 1

a

$N = \sum_{l=1}^{L} n^{(l)}$ ist die Anzahl aller gegebenen Daten
Sei $x_i = x_1, ..., x_N = x_1^{(1)}, \ldots, x_{n^{(1)}}^{(1)}, \ldots, x_1^{(L)}, \ldots, x_{n^{(L)}}^{(L)}$
Daraus folgt dann:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{n^{(l)}}\left(x_i^{(l)}\right) = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{L}\left(n^{(l)}\overline{x}^{(l)}\right)$$

b

Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass die Stichprobe geordnet ist und $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ gilt. Angenommen $\bar{x} \geq \tilde{x}$, so gilt

$$\begin{aligned}
|\bar{x} - \tilde{x}| &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \tilde{x} \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} x_i + \sum_{i=\frac{n+1}{2}+1}^{n} x_i\right) - \tilde{x} \\
&\leq \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{2} x_{\frac{n+1}{2}} + \frac{n-1}{2} x_n\right) - x_{\frac{n+1}{2}} \\
&= \frac{n-1}{2n}\left(x_n - x_{\frac{n+1}{2}}\right) \\
&\leq \frac{n-1}{2n}\left(x_n - x_1\right) \\
&= \frac{n-1}{2n} R
\end{aligned}$$

Angenommen $\bar{x} \leq \tilde{x}$, so gilt

$$
\begin{aligned}
|\bar{x}-\tilde{x}| &= \tilde{x} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\
&= \tilde{x} - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-1} x_i + \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n} x_i\right) \\
&\leq x_{\frac{n+1}{2}} - \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{2}x_1 + \frac{n+1}{2}x_{\frac{n+1}{2}}\right) \\
&= \frac{n-1}{2n}\left(x_{\frac{n+1}{2}} - x_1\right) \\
&\leq \frac{n-1}{2n}\left(x_n - x_1\right) \\
&= \frac{n-1}{2n}R
\end{aligned}
$$

C

Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass die Stichprobe geordnet ist und $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ gilt. Angenommen $\bar{x} \geq \tilde{x}$, so gilt

$$
\begin{aligned}
|\bar{x}-\tilde{x}| &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} x_i - \tilde{x} \\
&\leq \frac{1}{n}\left(\frac{n}{2}x_{\frac{n}{2}}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{2}x_n\right) - \tilde{x} \\
&= \frac{1}{2}x_{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2}x_n - \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) \\
&= \frac{1}{2}\left(x_n - x_{\frac{n}{2}+1}\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(x_n - x_1\right) \\
&= \frac{1}{2}R
\end{aligned}
$$

Angenommen $\bar{x} \leq \tilde{x}$, so gilt

$$
\begin{aligned}
|\bar{x}-\tilde{x}| &= \tilde{x} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} x_i \\
&\leq \tilde{x} - \frac{1}{n}\left(\frac{n}{2}x_1\right) - \frac{1}{n}\left(\frac{n}{2}x_{\frac{n}{2}+1}\right) \\
&\leq \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_{\frac{n}{2}+1} \\
&= \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} - x_1\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(x_n - x_1\right) \\
&= \frac{1}{2}R
\end{aligned}
$$