

Aufgabe 1

a)

$$\overline{Bel}(R_1) = P(R_1|\neg R_0) \cdot P(\neg R_0) + P(R_1|R_0) \cdot P(R_0) = 0.3 \cdot 0.5 + 0.7 \cdot 0.5 = 0.5$$

$$\overline{Bel}(\neg R_1) = P(\neg R_1|\neg R_0) \cdot P(\neg R_0) + P(\neg R_1|R_0) \cdot P(R_0) = 0.7 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5 = 0.5$$

b)

$$Bel(R_1) = P(u_1|R_1) \cdot \overline{Bel}(R_1) = 0.9 \cdot 0.5 = 0.45$$

$$Bel(\neg R_1) = P(u_1|\neg R_1) \cdot \overline{Bel}(\neg R_1) = 0.2 \cdot 0.5 = 0.1$$

Bestimmung von η für die Normierung:

$$\eta = \frac{1}{0.45+0.1} = \frac{20}{11}$$

$$\rightarrow Bel(R_1) = 0.45 \cdot \frac{20}{11} = \frac{9}{11}$$

$$Bel(\neg R_1) = 0.1 \cdot \frac{20}{11} = \frac{2}{11}$$

c)

Mit normierten $Bel(R_1)$ und $Bel(\neg R_1)$, also W.keiten mit Regenschirm an Tag 1, aus b).

$$\overline{Bel}(R_2) = P(R_2|R_1) \cdot Bel(R_1) + P(R_2|\neg R_1) \cdot Bel(\neg R_1) = 0.7 \cdot \frac{9}{11} + 0.3 \cdot \frac{2}{11} = \frac{69}{110}$$

$$\overline{Bel}(\neg R_2) = P(\neg R_2|R_1) \cdot Bel(R_1) + P(\neg R_2|\neg R_1) \cdot Bel(\neg R_1) = 0.3 \cdot \frac{9}{11} + 0.7 \cdot \frac{2}{11} = \frac{41}{110}$$

d)

$$Bel(R_2) = P(u_2|R_2) \cdot \overline{Bel}(R_2) = 0.9 \cdot \frac{69}{110} = \frac{621}{1100}$$

$$Bel(\neg R_2) = P(u_2|\neg R_2) \cdot \overline{Bel}(\neg R_2) = 0.2 \cdot \frac{41}{110} = \frac{41}{550}$$

Normierung:

$$Bel(R_2) = \frac{621/1100}{(621/1100)+(41/550)} = \frac{621}{703}$$

$$Bel(\neg R_2) = \frac{41/550}{(621/1100)+(41/550)} = \frac{82}{703}$$

e)

Mit normierten $Bel(R_2)$ und $Bel(\neg R_2)$ aus d).

Tag 3

$$\overline{Bel}(R_3) = P(R_3|R_2) \cdot Bel(R_2) + P(R_3|\neg R_2) \cdot Bel(\neg R_2) = 0.7 \cdot \frac{621}{703} + 0.3 \cdot \frac{82}{703} = \frac{4593}{7030}$$

$$\overline{Bel}(\neg R_3) = P(\neg R_3 | R_2) \cdot Bel(R_2) + P(\neg R_3 | \neg R_2) \cdot Bel(\neg R_2) = 0.3 \cdot \frac{621}{703} + 0.7 \cdot \frac{82}{703} = \frac{2437}{7030}$$

Beobachteter Regenschirm:

$$Bel(R_3) = P(u_3 | R_3) \cdot \overline{Bel}(R_3) = 0.9 \cdot \frac{4593}{7030} = \frac{41337}{70300} \approx 0.59$$

$$Bel(\neg R_3) = P(u_3 | \neg R_3) \cdot \overline{Bel}(\neg R_3) = 0.2 \cdot \frac{2437}{7030} = \frac{2437}{35150} \approx 0.07$$

Normierung:

$$\eta = \frac{1}{(\frac{41337}{70300}) + (\frac{2437}{35150})} = \frac{70300}{46211} \approx 1.52$$

$$Bel(R_3) = \frac{41337}{70300} \cdot \eta = \frac{41337}{46211} \approx 0.89$$

$$Bel(\neg R_3) = \frac{2437}{35150} \cdot \eta = \frac{4874}{46211} \approx 0.11$$

Tag 4

$$\overline{Bel}(R_4) = P(R_4 | R_3) \cdot Bel(R_3) + P(R_4 | \neg R_3) \cdot Bel(\neg R_3) = 0.7 \cdot \frac{41337}{46211} + 0.3 \cdot \frac{4874}{46211} = \frac{303981}{462110} \approx 0.66$$

$$\overline{Bel}(\neg R_4) = P(\neg R_4 | R_3) \cdot Bel(R_3) + P(\neg R_4 | \neg R_3) \cdot Bel(\neg R_3) = 0.3 \cdot \frac{41337}{46211} + 0.7 \cdot \frac{4874}{46211} = \frac{158129}{462110} \approx 0.34$$

Beobachteter Regenschirm:

$$Bel(R_4) = P(u_4 | R_4) \cdot \overline{Bel}(R_4) = 0.9 \cdot \frac{303981}{462110} = \frac{2735829}{4621100} \approx 0.59$$

$$Bel(\neg R_4) = P(u_4 | \neg R_4) \cdot \overline{Bel}(\neg R_4) = 0.2 \cdot \frac{158129}{462110} = \frac{158129}{2310550} \approx 0.07$$

Normierung:

$$\eta = \frac{1}{(\frac{2735829}{4621100}) + (\frac{158129}{2310550})} = \frac{4621100}{3052087} \approx 1.51$$

$$Bel(R_4) = \frac{2735829}{4621100} \cdot \eta = \frac{2735829}{3052087} \approx 0.90$$

$$Bel(\neg R_4) = \frac{158129}{2310550} \cdot \eta = \frac{316258}{3052087} \approx 0.10$$

Trägt der Direktor jeden Tag einen Regenschirm bei sich. konvergiert die Wahrscheinlichkeiten für Regen gegen 0.9 und die für Nicht-Regen gegen 0.1.

f)

Mit normierten $Bel(R_2)$ und $Bel(\neg R_2)$ aus d).

Tag 3

$$\overline{Bel}(R_3) = P(R_3 | R_2) \cdot Bel(R_2) + P(R_3 | \neg R_2) \cdot Bel(\neg R_2) = 0.7 \cdot \frac{621}{703} + 0.3 \cdot \frac{82}{703} = \frac{4593}{7030}$$

$$\overline{Bel}(\neg R_3) = P(\neg R_3 | R_2) \cdot Bel(R_2) + P(\neg R_3 | \neg R_2) \cdot Bel(\neg R_2) = 0.3 \cdot \frac{621}{703} + 0.7 \cdot \frac{82}{703} = \frac{2437}{7030}$$

Da keine Beobachtung auftritt, ändert sich die W.keit nicht.

$$Bel(R_3) = \overline{Bel}(R_3) = \frac{4593}{7030}$$

$$Bel(\neg R_3) = \overline{Bel}(\neg R_3) = \frac{2437}{7030}$$

Normieren - keine Änderung:

$$\eta = \frac{1}{(4593/7030) + (2437/7030)} = 1$$

$$Bel(R_3) = \frac{4593}{7030} \cdot \eta = \frac{4593}{7030} \approx 0.65$$

$$Bel(\neg R_3) = \frac{2437}{7030} \cdot \eta = \frac{2437}{7030} \approx 0.35$$

Tag 4

$$\overline{Bel}(R_4) = P(R_4|R_3) \cdot Bel(R_3) + P(R_4|\neg R_3) \cdot Bel(\neg R_3) = 0.7 \cdot \frac{4593}{7030} + 0.3 \cdot \frac{2437}{7030} = \frac{19731}{35150}$$

$$\overline{Bel}(\neg R_4) = P(\neg R_4|R_3) \cdot Bel(R_3) + P(\neg R_4|\neg R_3) \cdot Bel(\neg R_3) = 0.3 \cdot \frac{4593}{7030} + 0.7 \cdot \frac{2437}{7030} = \frac{15419}{35150}$$

Da keine Beobachtung auftritt, ändert sich die W.keit nicht.

$$Bel(R_3) = \overline{Bel}(R_3) = \frac{19731}{35150}$$

$$Bel(\neg R_3) = \overline{Bel}(\neg R_3) = \frac{15419}{35150}$$

Normieren - keine Änderung:

$$\eta = \frac{1}{(19731/35150) + (15419/35150)} = 1$$

$$Bel(R_3) = \frac{19731}{35150} \cdot \eta = \frac{19731}{35150} \approx 0.56$$

$$Bel(\neg R_3) = \frac{15419}{35150} \cdot \eta = \frac{15419}{35150} \approx 0.44$$

Wird der Direktor nicht mehr beobachtet, konvergieren die Wahrscheinlichkeiten für Regen und Nicht-Regen gegen 0.5.

Ohne zusätzliche Beobachtungen nähert sich die Verteilung immer weiter dem Zufall, da der Einfluss der Beobachtungen der ersten beiden Tage stetig sinkt.