Aufgabe 1

Matrizen für die Rechnungen

Matrix: Eine Landmarke detektiert

$$M_L = \begin{bmatrix}
0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25
\end{bmatrix}$$

Matrix: Keine Landmarke detektiert

$$M_{KL} = \begin{bmatrix}
0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75
\end{bmatrix}$$

Matrix: 2 Schritte im Uhrzeigersinn

$$M_{2U} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Matrix: 4 Schritte im Uhrzeigersinn

$$M_{4U} = \begin{bmatrix}
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

Matrix: 2 Schritte gegen den Uhrzeigersinn

$$M_{2G} = \begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0
\end{bmatrix}$$

Matrix: 4 Schritte gegen den Uhrzeigersinn

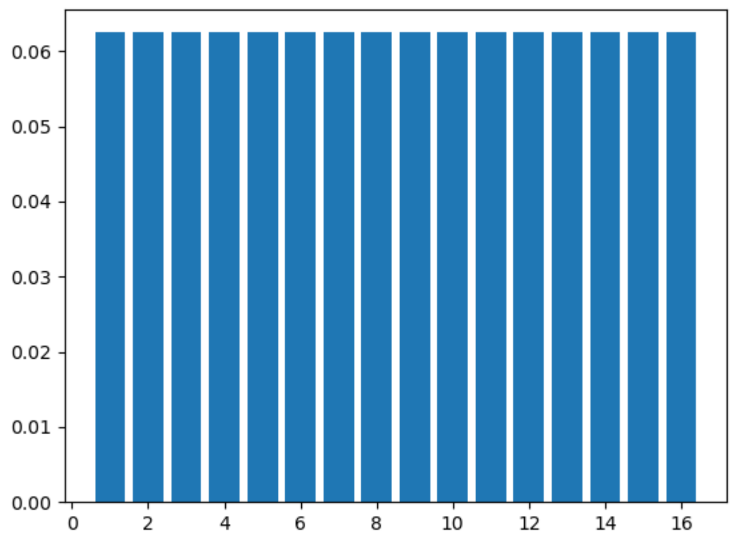
$$M_{4G} = \begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

A)

Initialisierung

Initialisiere alle Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Felder mit einer gleichverteilten Wahrscheinlichkeit von 1/16. Dabei wird der erste Eintrag des Vektors als Feld 1, der zweite als Feld 2 usw. interpretiert:

$$V_{t0} = \begin{bmatrix} 0.0625 \\ 0.0625 \\ 0.0625 \\ 0.0625 \\ 0.0625 \\ 0.0625 \\ 0.0625 \\ 0.0625 \\ 0.0625 \\ 0.0625 \\ 0.0625 \\ 0.0625 \\ 0.0625 \\ 0.0625 \\ 0.0625 \\ 0.0625 \end{bmatrix}$$



Schritt 1 - Eine Landmarke

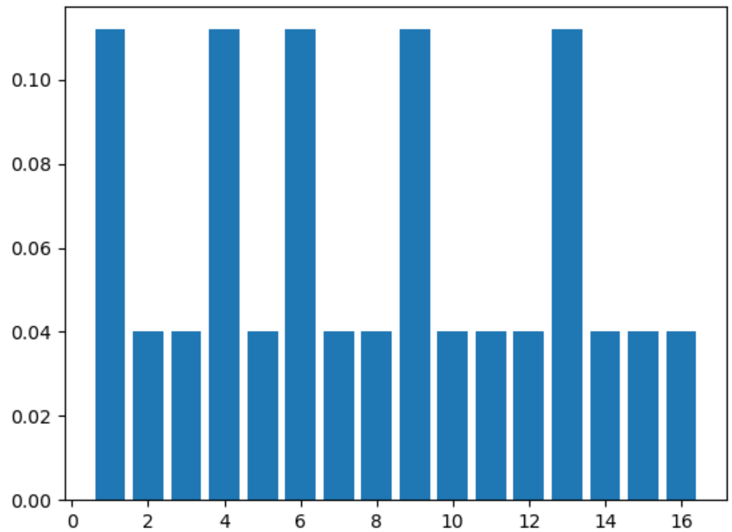
Multipliziere jeden Eintrag, auf welchem eine Landmarke steht mit 0.7 und jeden Eintrag auf welchem keine Landmarke steht mit 0.25.

$$\overline{V_{t1}} = M_L \cdot V_{t0} = \begin{bmatrix} 0.04375 \\ 0.015625 \\ 0.015625 \\ 0.04375 \\ 0.015625 \\ 0.04375 \\ 0.015625 \\ 0.015625 \\ 0.04375 \\ 0.015625 \\ 0.015625 \\ 0.015625 \\ 0.04375 \\ 0.015625 \\ 0.015625 \\ 0.015625 \end{bmatrix}$$

Danach wird der Vektor normalisiert, sodass alle Wahrscheinlichkeiten addiert 1 ergeben. Der Normalisierungsfaktor lässt sich bestimmen, durch 1/SummeDerWahrscheinlichkeiten. Hier wäre dieser also $1/0.390625$. Dann multipliziert man jeden Eintrag mit dem Normalisierungsfaktor um die Wahrscheinlichkeiten zu normalisieren.

$$\eta = 1/\left|\overline{V_{t1}}\right| = 1/0.390625 = 2.56$$

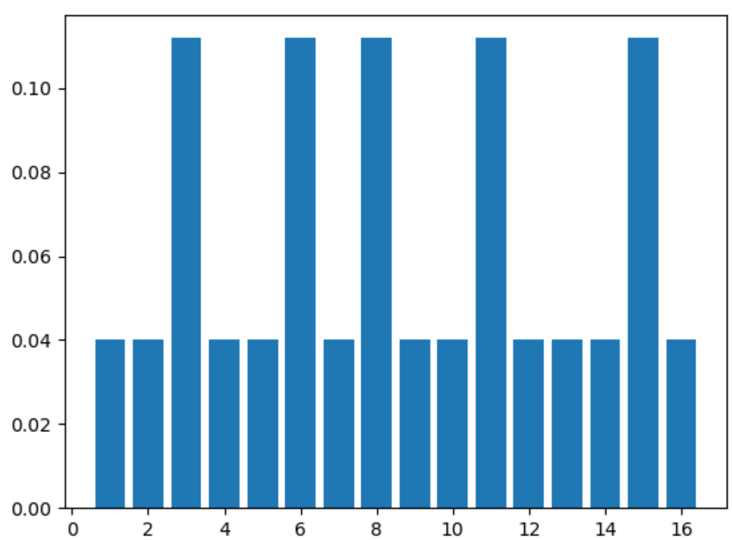
$$V_{t1} = \eta \cdot \overline{V_{t1}} = \begin{bmatrix} 0.112 \\ 0.04 \\ 0.04 \\ 0.112 \\ 0.04 \\ 0.112 \\ 0.04 \\ 0.04 \\ 0.112 \\ 0.04 \\ 0.04 \\ 0.04 \\ 0.112 \\ 0.04 \\ 0.04 \\ 0.04 \end{bmatrix}$$



Schritt 2 - 2 Schritte im Uhrzeigersinn

Der Roboter bewegt sich zwei Zellen im Uhrzeigersinn, was bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeiten in dem Vektor um je zwei Stellen weiter verschoben werden. Dies geschieht dabei dann 'im Kreis':

$$V_{t2} = M_{2U} \cdot V_{t1} = [0.04, 0.04, 0.112, 0.04, 0.04, 0.112, 0.04, 0.112, 0.04, 0.04, 0.112, 0.04, 0.04, 0.04, 0.112, 0.04]^T$$



Schritt 3 - Eine Landmarke

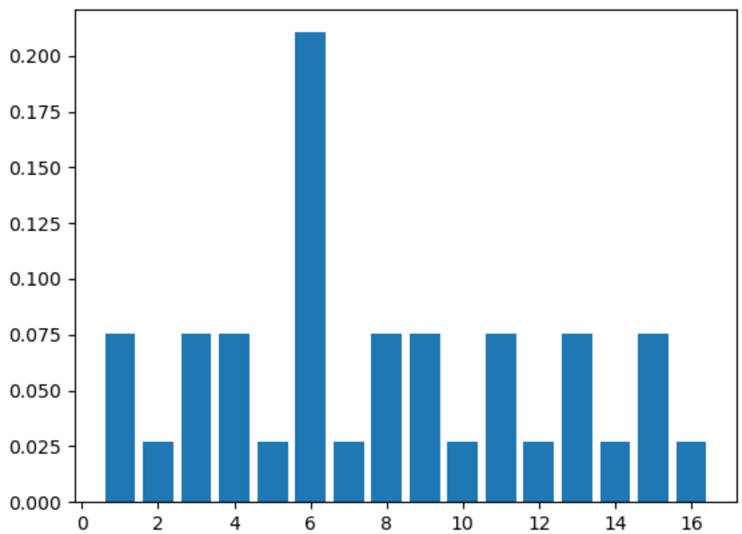
Multipliziere jeden Eintrag, auf welchem eine Landmarke steht mit 0.7 und jeden Eintrag auf welchem keine Landmarke steht mit 0.25.

$$\overline{V_{t3}} = M_L \cdot V_{t2} = [0.028, 0.01, 0.028, 0.028, 0.01, 0.0784, 0.01, 0.028, 0.028, 0.01, 0.028, 0.01, 0.028, 0.01, 0.028, 0.01]^T$$

Danach wird der Vektor normalisiert, sodass alle Wahrscheinlichkeiten addiert 1 ergeben:

$$\eta = 1/\left|\overline{V_{t3}}\right| = 2.69$$

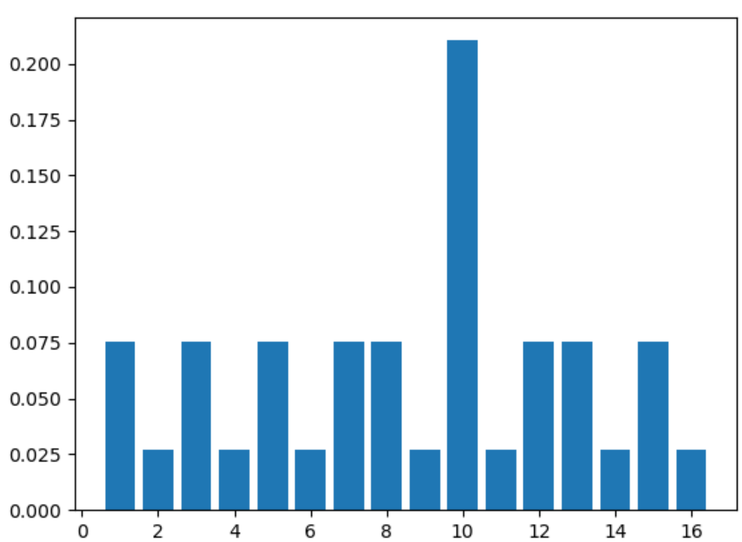
$$V_{t3} = \eta \cdot \overline{V_{t3}} = [0.0752, 0.0269, 0.0752, 0.0752, 0.0269, 0.2105, 0.0269, 0.0752, 0.0752, 0.0269, 0.0752, 0.0269, 0.0752, 0.0269, 0.0752, 0.0269]^T$$



Schritt 4 - 4 Schritte im Uhrzeigersinn

Der Roboter bewegt sich vier Zellen im Uhrzeigersinn, was bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeiten in dem Vektor um je vier Stellen weiter verschoben werden. Dies geschieht dabei dann 'im Kreis':

$$V_{t4} = M_{4U} \cdot V_{t3} = [0.0752, 0.0269, 0.0752, 0.0269, 0.0752, 0.0269, 0.0752, 0.0752, 0.0269, 0.2105, 0.0269, 0.0752, 0.0752, 0.0269, 0.0752, 0.0269$$



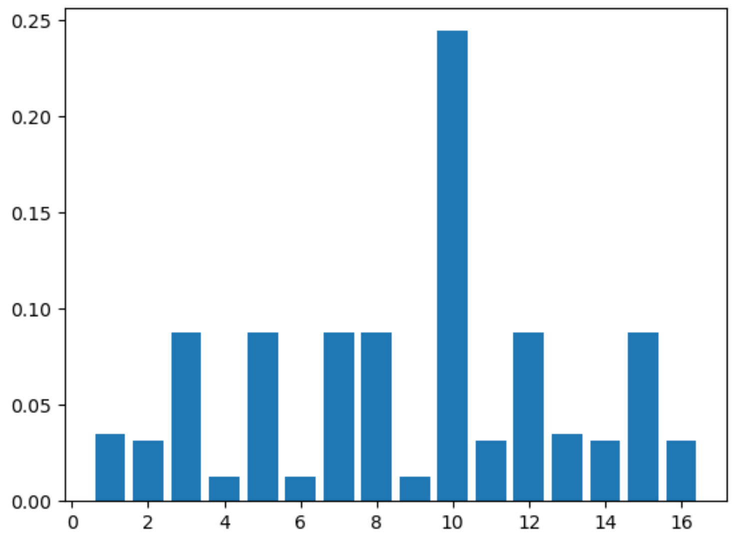
Schritt 5 - Keine Landmarke

Multipliziere jeden Eintrag, auf welchem eine Landmarke steht mit 0.3 und jeden Eintrag auf welchem keine Landmarke steht mit 0.75.

$$\overline{V_{t5}} = M_{KL} \cdot V_{t4} =$$
$$[0.02256, 0.020175, 0.0564, 0.00807, 0.0564, 0.00807, 0.0564, 0.0564, 0.00807, 0.157875, 0.020175, 0.0564, 0.02256, 0.020175, 0.0564, 0.020175$$

Danach wird der Vektor normalisiert, sodass alle Wahrscheinlichkeiten addiert 1 ergeben:

$$\eta = 1 / \left|\overline{V_{t5}}\right| = 1.55$$
$$V_{t5} = \eta \cdot \overline{V_{t5}} = [0.0349, 0.0312, 0.0873, 0.0125, 0.0873, 0.0125, 0.0873, 0.0873, 0.0125, 0.2444, 0.0312, 0.0873, 0.0349, 0.0312, 0.0873, 0.0312]^T$$



Der Roboter steht mit Wahrscheinlichkeit 0.2444 auf Feld: [10]

Da er 6 Schritte im Uhrzeigersinn gefahren ist, ist das wahrscheinlichste Startfeld: [4]

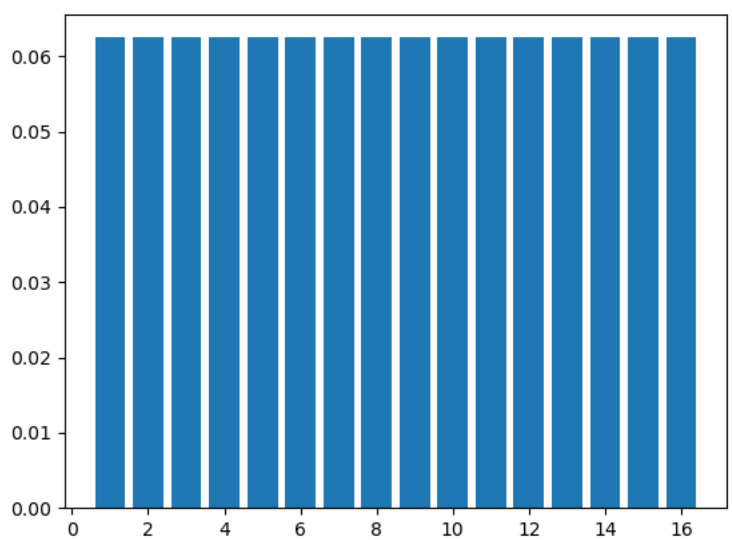
B)

Im folgenden werden die nicht-normalisierten Vektoren der Einfachheit halber ausgelassen.

Initialisierung

Initialisiere alle Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Felder mit einer gleichverteilten Wahrscheinlichkeit von 1/16:

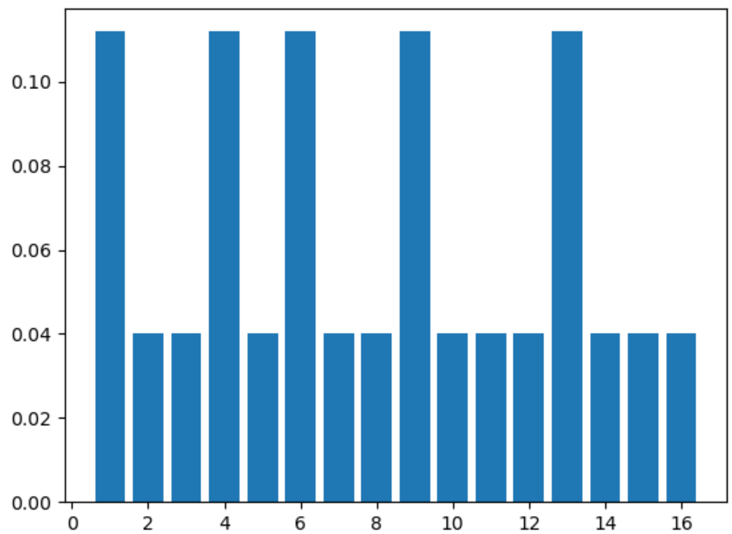
$$V_{t0} = [0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625]^T$$



Schritt 1 - Eine Landmarke

Multipliziere jeden Eintrag, auf welchem eine Landmarke steht mit 0.7 und jeden Eintrag auf welchem keine Landmarke steht mit 0.25. Danach wird der Vektor normalisiert, sodass alle Wahrscheinlichkeiten addiert 1 ergeben:

$$\overline{V_{t1}} = M_L \cdot V_{t0}$$
$$\eta = 1 / \left|\overline{V_{t1}}\right| = 2.56$$
$$V_{t1} = \eta \cdot \overline{V_{t1}} = [0.112, 0.04, 0.04, 0.112, 0.04, 0.112, 0.04, 0.04, 0.112, 0.04, 0.04, 0.04, 0.112, 0.04, 0.04, 0.04]^T$$



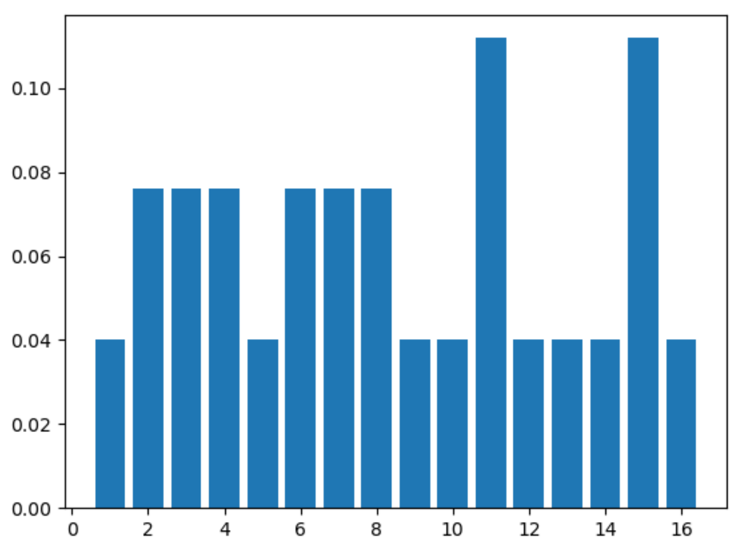
Schritt 2 - 2 Schritte in zufällige Richtung

Um zu modellieren, dass der Roboter in beide Richtungen gefahren sein könnte, werden zuerst die Wahrscheinlichkeiten aus dem Ausgangsverktor um zwei Stellen nach rechts verschoben. Ebenfalls werden die Wahrscheinlichkeiten aus dem Ausgangsvektor um zwei Stellen nach links verschoben. Dadurch erhält man folgende Vektoren:

$$V_{t2U} = M_{2U} \cdot V_{t1} = [0.04, 0.04, 0.112, 0.04, 0.04, 0.112, 0.04, 0.112, 0.04, 0.04, 0.112, 0.04, 0.04, 0.04, 0.112, 0.04]^T$$
$$V_{t2G} = M_{2G} \cdot V_{t1} = [0.04, 0.112, 0.04, 0.112, 0.04, 0.04, 0.112, 0.04, 0.04, 0.04, 0.112, 0.04, 0.04, 0.04, 0.112, 0.04]^T$$

Es wird angenommen, dass es gleich wahrscheinlich ist, dass sich nach rechts oder nach links bewegt wird, daher werden beide Vektoren gleich 'gewichtet':

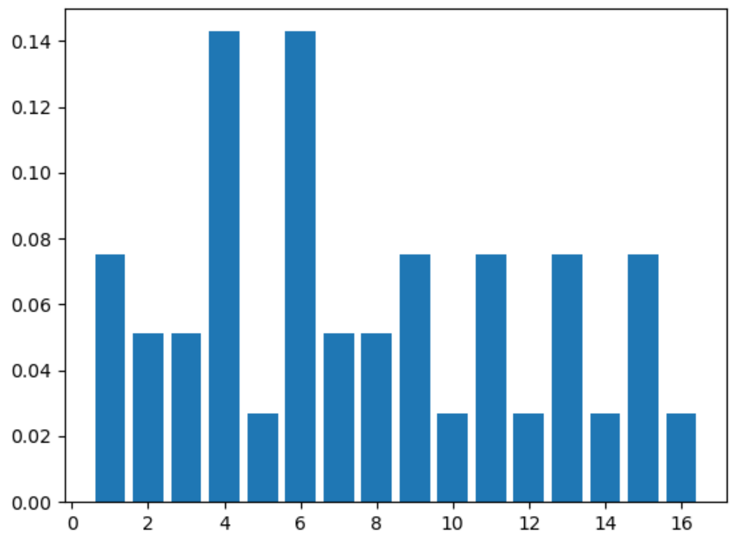
$$V_{t2} = 0.5 \cdot V_{t2U} + 0.5 \cdot V_{t2G} = [0.04, 0.076, 0.076, 0.076, 0.04, 0.076, 0.076, 0.076, 0.04, 0.04, 0.112, 0.04, 0.04, 0.04, 0.112, 0.04]^T$$



Schritt 3 - Eine Landmarke

Multipliziere jeden Eintrag, auf welchem eine Landmarke steht mit 0.7 und jeden Eintrag auf welchem keine Landmarke steht mit 0.25. Danach wird der Vektor normalisiert, sodass alle Wahrscheinlichkeiten addiert 1 ergeben:

$$\overline{V_{t3}} = M_L \cdot V_{t2}$$
$$\eta = 1/\left|\overline{V_{t3}}\right| = 2.69$$
$$V_{t3} = \eta \cdot \overline{V_{t3}} = [0.0752, 0.051, 0.051, 0.1429, 0.0269, 0.1429, 0.051, 0.051, 0.0752, 0.0269, 0.0752, 0.0269, 0.0752, 0.0269, 0.0752, 0.0269]^T$$



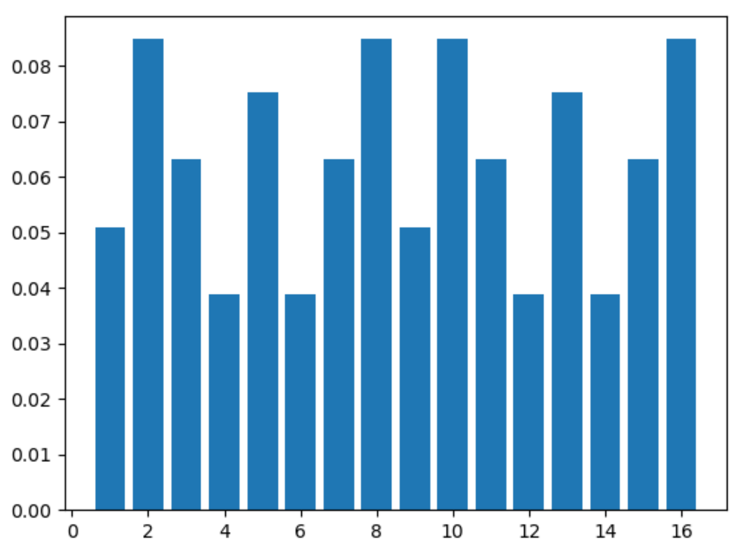
Schritt 4 - 4 Schritte in zufällige Richtung

Um zu modellieren, dass der Roboter in beide Richtungen gefahren sein könnte, werden zuerst die Wahrscheinlichkeiten aus dem Ausgangsverktor um vier Stellen nach rechts verschoben. Ebenfalls werden die Wahrscheinlichkeiten aus dem Ausgangsvektor um vier Stellen nach links verschoben. Dadurch erhält man folgende Vektoren:

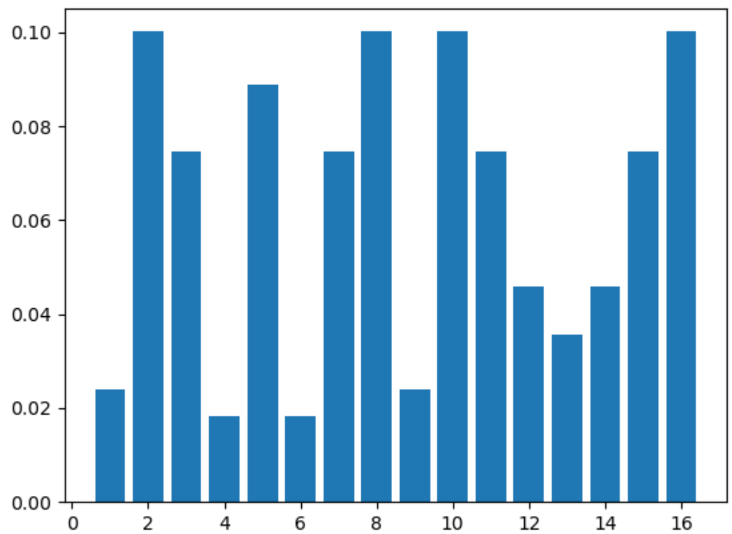
$$V_{t4U} = M_{4U} \cdot V_{t3} = [0.0752, 0.0269, 0.0752, 0.0269, 0.0752, 0.051, 0.051, 0.1429, 0.0269, 0.1429, 0.051, 0.051, 0.0752, 0.0269, 0.0752, 0.0269]^T$$
$$V_{t4G} = M_{4G} \cdot V_{t3} = [0.0269, 0.1429, 0.051, 0.051, 0.0752, 0.0269, 0.0752, 0.0269, 0.0752, 0.0269, 0.0752, 0.0269, 0.0752, 0.051, 0.051, 0.1429]^T$$

Es wird angenommen, dass es gleich wahrscheinlich ist, dass sich nach rechts oder nach links bewegt wird, daher werden beide Vektoren gleich 'gewichtet':

$$V_{t4} = 0.5 \cdot V_{t4U} + 0.5 \cdot V_{t4G} =$$
$$[0.051, 0.0849, 0.0631, 0.0389, 0.0752, 0.0389, 0.0631, 0.0849, 0.051, 0.0849, 0.0631, 0.0389, 0.0752, 0.0389, 0.0631, 0.0849]^T$$



Schritt 5 - Keine Landmarke



Multipliziere jeden Eintrag, auf welchem eine Landmarke steht mit 0.3 und jeden Eintrag auf welchem keine Landmarke steht mit 0.75. Danach wird der Vektor normalisiert, sodass alle Wahrscheinlichkeiten addiert 1 ergeben:

$$\overline{V_{t5}} = M_{KL} \cdot V_{t4}$$
$$\eta = 1/\left|\overline{V_{t5}}\right| = 1.57$$
$$V_{t5} = \eta \cdot \overline{V_{t5}} = [0.0241, 0.1002, 0.0745, 0.0184, 0.0888, 0.0184, 0.0745, 0.1002, 0.0241, 0.1002, 0.0745, 0.046, 0.0355, 0.046, 0.0745, 0.1002]^T$$

Der Roboter steht mit je der Wahrscheinlichkeit 0.1002 auf einem der Felder: [2, 8, 10, 16]