МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЁТ
по лабораторной работе № 2
по дисциплине
”Линейные системы автоматического управления”

Вариант №7

по теме:
СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ, УСТОЙЧИВОСТЬ

Выполнил: Васильев В.С.

Проверил: Пашенко А.В.

Группа: R3335

Санкт-Петербург
2024

СОДЕРЖАНИЕ

1 СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Рассмотрим систему 2-го порядка, заданную дифференциальным уравнением:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u$$

Перепишем уравнение в операторной форме:

$$p^2y + a_1py + a_0y = u$$

$$y = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}(u - a_0y) - a_1y\right)$$

Создадим Simulink модель по полученному уравнению:

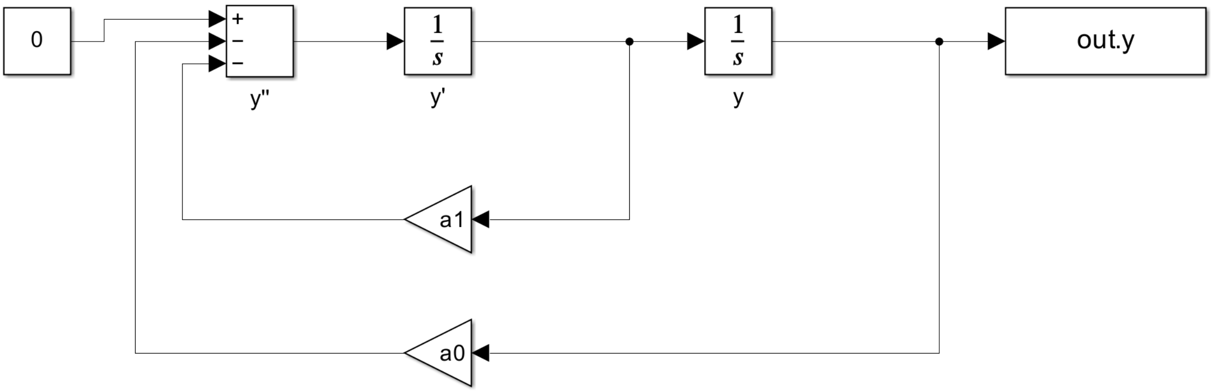

Рисунок 1 — Схема Simulink

Теперь для каждого из 6 экспериментов найдем коэффициенты a_0, a_1 и аналитическое выражение свободной составляющей движения $y_{\text{св}}(t)$.

1.1 Эксперимент 1

$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0 \quad \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1$$

По характеристическим корням построим исходное уравнение:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda + 3)(\lambda + 1) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

Отсюда $a_0 = 3$, $a_1 = 4$. Теперь по характеристическим корням найдем выражение свободной составляющей движения в общем виде:

$$y_{\text{св}}(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$$

Найдем производную:

$$\dot{y}_{\text{св}}(t) = C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

Подставим начальные условия:

$$y_{\text{св}}(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$\dot{y}_{\text{св}}(0) = -3\,C_1 - 1\,C_2 = 0$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}, C_2 = \frac{3}{2}$$

$$y_{\text{св}}(t) = -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t}$$

Сравним результаты моделирования и аналитического решения:

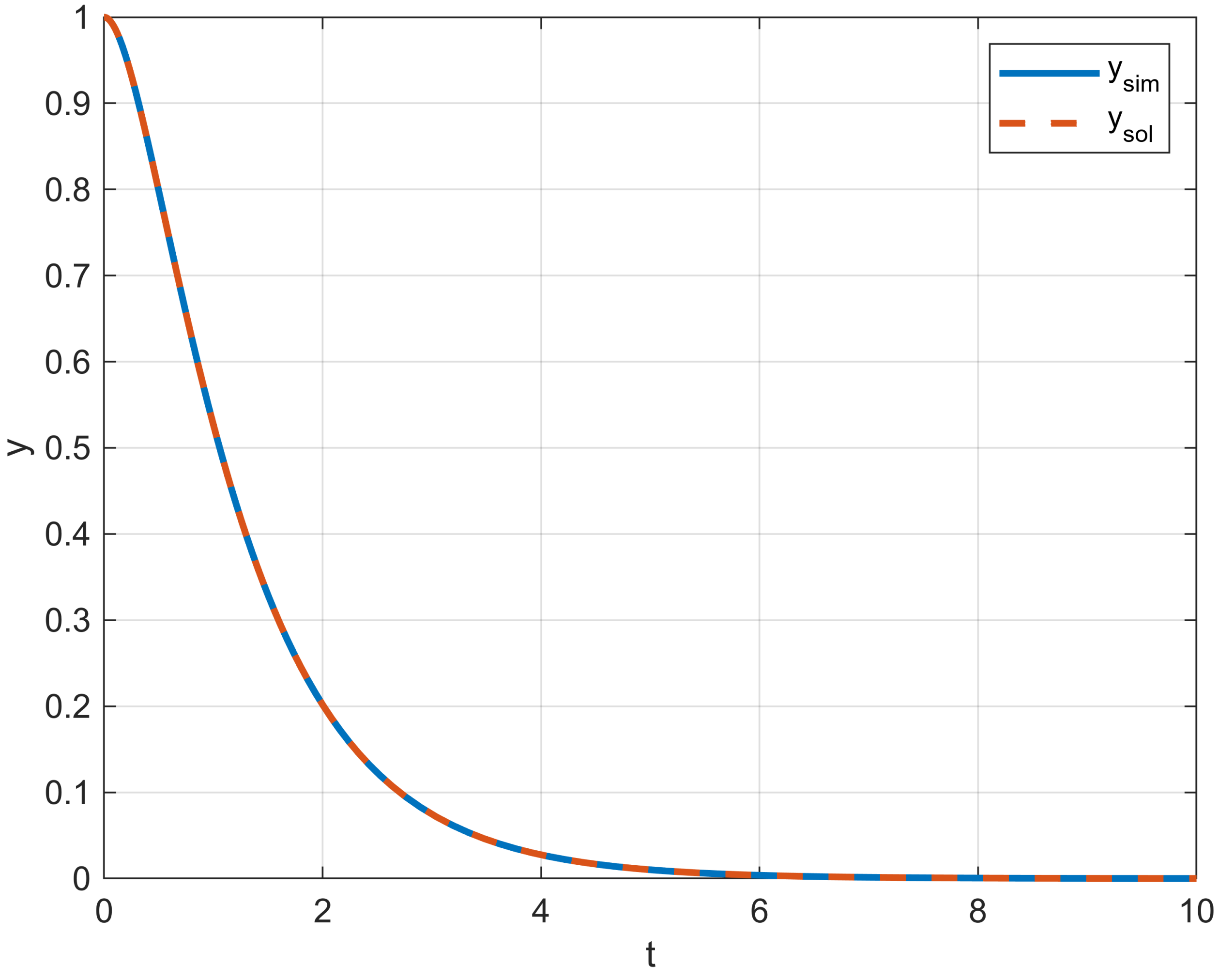

Рисунок 2 — Эксперимент 1

Графики совпадают. Значит, аналитическое решение верно. Также можно заметить, что система асимптотически устойчива, так как все корни имеют отрицательные вещественные части.

1.2 Эксперимент 2

$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0 \quad \lambda_1 = -1.1 + j9, \lambda_2 = -1.1 - j9$$

Также как и в прошлом эксперименте по характеристическим корням построим исходное уравнение:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda + 1.1 - j9)(\lambda + 1.1 + j9) = \lambda^2 + 2.2\lambda + 82.21 = 0$$

Отсюда $a_0 = 82.21$, $a_1 = 2.2$. Теперь по характеристическим корням найдем выражение свободной составляющей движения в общем виде:

$$y_{\text{св}}(t) = C_1 e^{-1.1t} sin(9t) + C_2 e^{-1.1t} cos(9t)$$

Найдем производную:

$$\dot{y}_{\text{св}}(t) = -1.1C_1 e^{-1.1t} sin(9t) + 9C_1 e^{-1.1t} cos(9t) - 1.1C_2 e^{-1.1t} cos(9t) - 9C_2 e^{-1.1t} sin(9t)$$

Подставим начальные условия:

$$y_{\text{св}}(0) = C_2 = 1$$

$$\dot{y}_{\text{св}}(0) = 9C_1 - 1.1C_2 = 0$$

$$C_1 = \frac{1.1}{9}$$

$$y_{\text{св}}(t) = \frac{1.1}{9} e^{-1.1t} sin(9t) + e^{-1.1t} cos(9t)$$

Сравним результаты моделирования и аналитического решения:

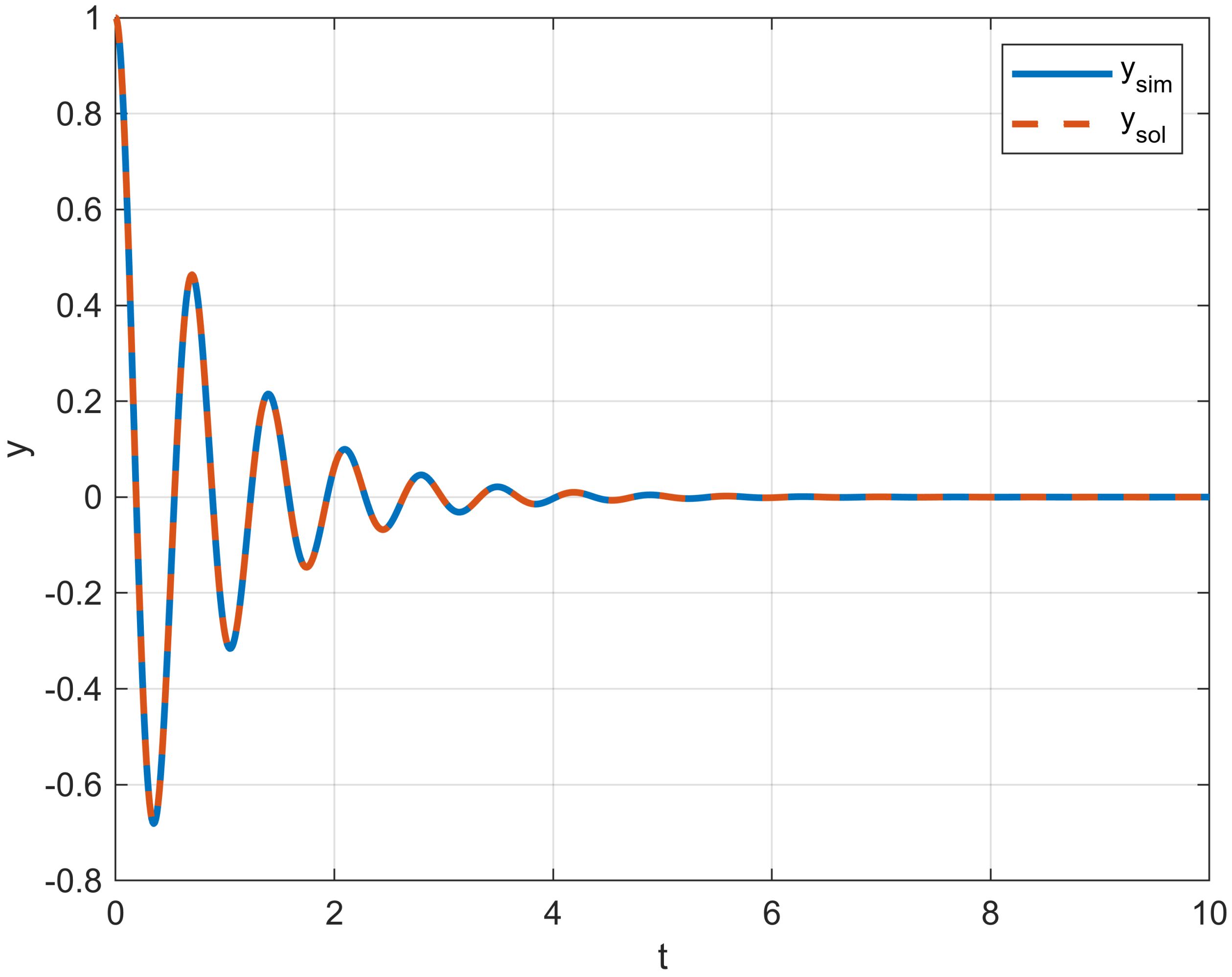

Рисунок 3 — Эксперимент 2

Графики снова совпадают. Также можно заметить, что система асимптотически устойчива, так как все корни имеют отрицательные вещественные части.

1.3 Эксперимент 3

$$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0 \quad \lambda_1 = j9, \lambda_2 = -j9$$

Также как и в прошлых экспериментах по характеристическим корням построим исходное уравнение:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda - j9)(\lambda + j9) = \lambda^2 + 81 = 0$$

Отсюда $a_0 = 81$, $a_1 = 0$. Теперь по характеристическим корням найдем выражение свободной составляющей движения в общем виде:

$$y_{\text{св}}(t) = C_1 sin(9t) + C_2 cos(9t)$$

Найдем производную:

$$\dot{y}_{св}(t) = 9C_1 cos(9t) - 9C_2 sin(9t)$$

Подставим начальные условия:

$$y_{св}(0) = C_2 = 1$$

$$\dot{y}_{св}(0) = 9C_1 = 0$$

$$C_1 = 0$$

$$y_{св}(t) = cos(9t)$$

Сравним результаты моделирования и аналитического решения:

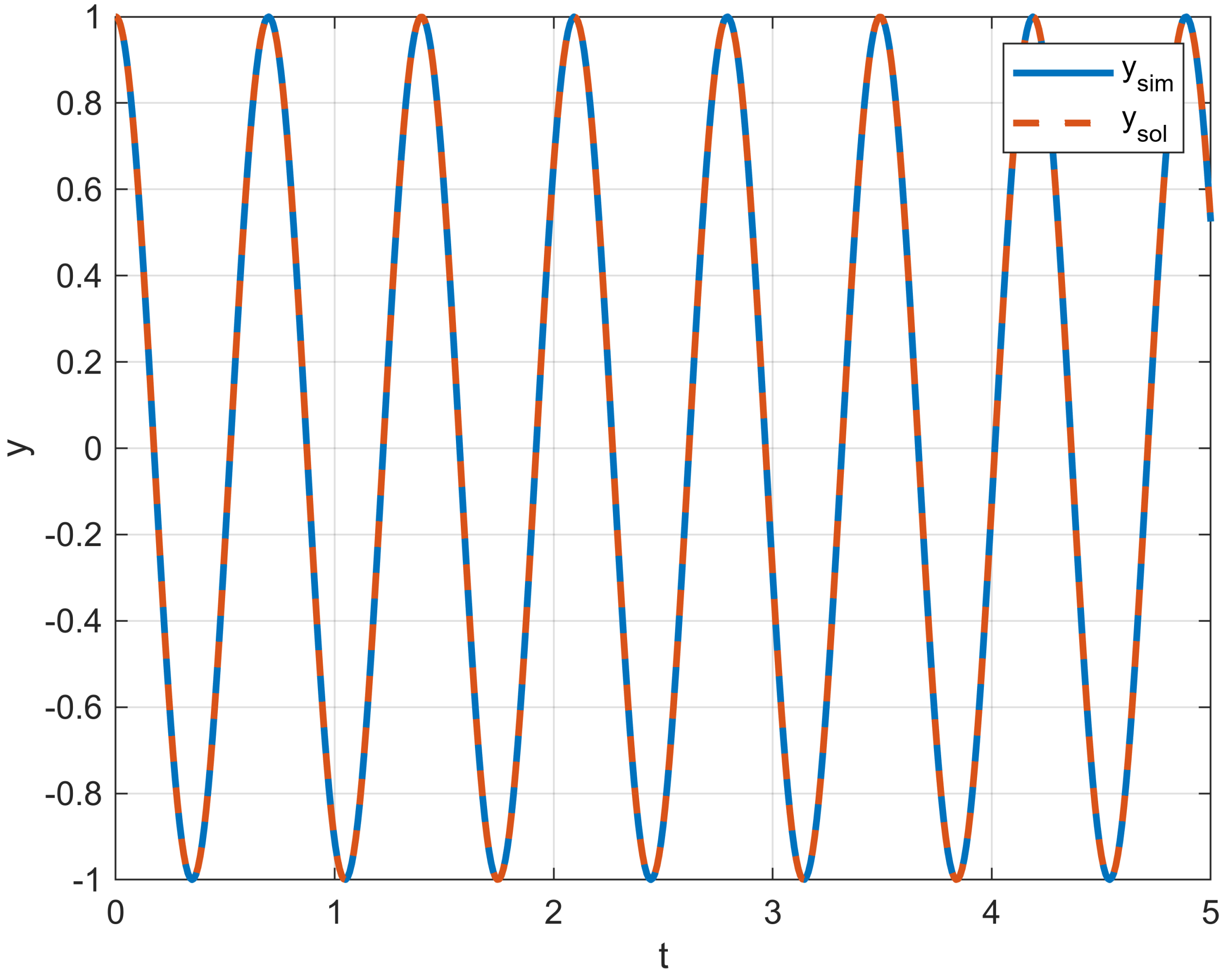

Рисунок 4 — Эксперимент 3

Графики снова совпадают. В этот раз система находится на границе устойчивости, так как корни имеют нулевую вещественную часть.

1.4 Эксперимент 4

$$y(0) = 0.05, \dot{y}(0) = 0 \quad \lambda_1 = 1.1 + j9, \lambda_2 = 1.1 - j9$$

Также как и в прошлых экспериментах по характеристическим корням построим исходное уравнение:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda - 1.1 - j9)(\lambda - 1.1 + j9) = \lambda^2 - 2.2\lambda + 82.21 = 0$$

Отсюда $a_0 = 82.21$, $a_1 = -2.2$. Теперь по характеристическим корням найдем выражение свободной составляющей движения в общем виде:

$$y_{\text{св}}(t) = C_1 e^{1.1t} sin(9t) + C_2 e^{1.1t} cos(9t)$$

Найдем производную:

$$\dot{y}_{\text{св}}(t) = 1.1C_1 e^{1.1t} sin(9t) + 9C_1 e^{1.1t} cos(9t) + 1.1C_2 e^{1.1t} cos(9t) - 9C_2 e^{1.1t} sin(9t)$$

Подставим начальные условия:

$$y_{\text{св}}(0) = C_2 = 0.05$$

$$\dot{y}_{\text{св}}(0) = 9C_1 + 1.1C_2 = 0$$

$$C_1 = -\frac{1.1}{9} \cdot 0.05$$

$$y_{\text{св}}(t) = -\frac{1.1}{9} \cdot 0.05 e^{1.1t} sin(9t) + 0.05 e^{1.1t} cos(9t)$$

Сравним результаты моделирования и аналитического решения:

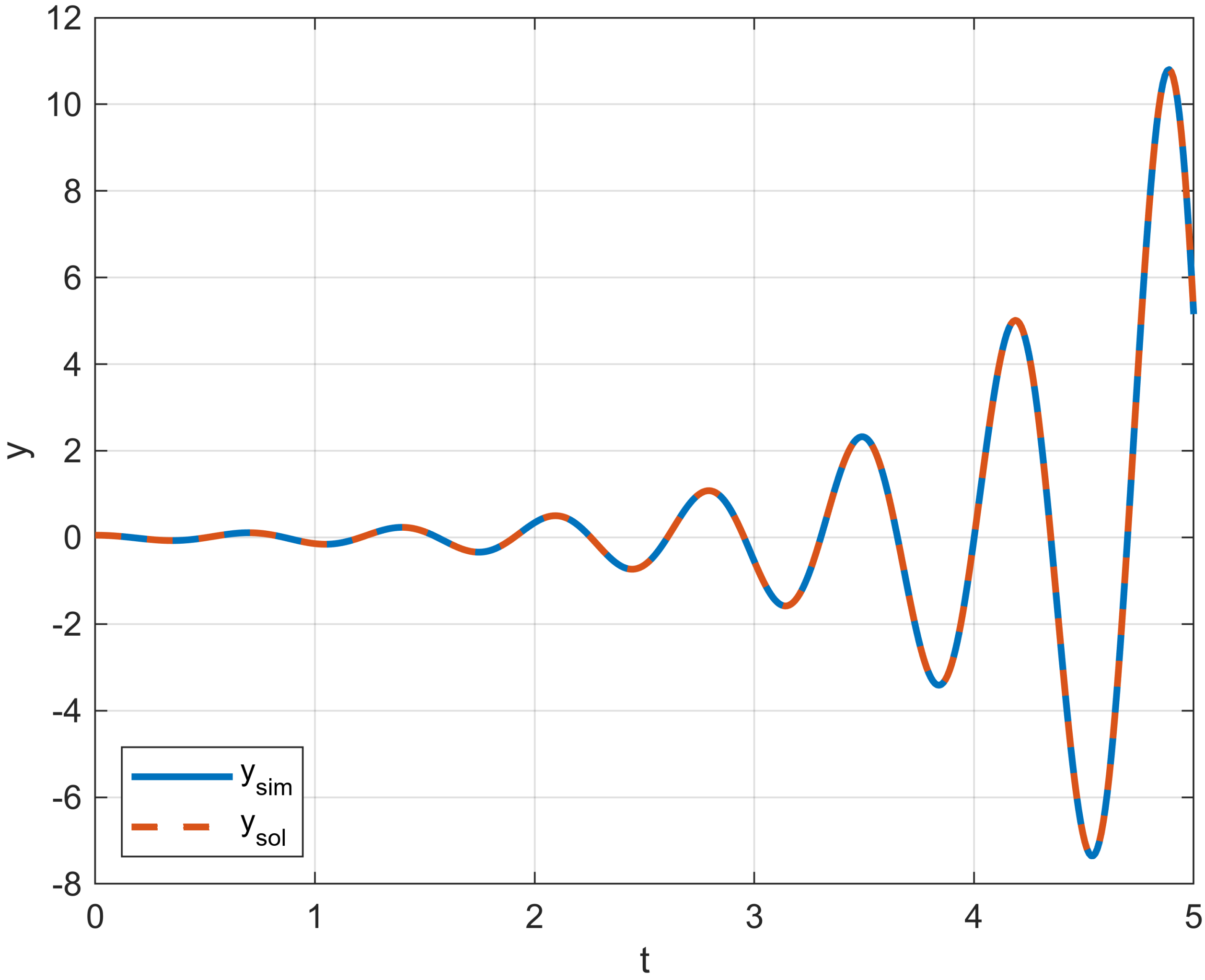

Рисунок 5 — Эксперимент 4

Графики снова совпадают. Также можно заметить, что система не устойчива, так как корни имеют положительную вещественную часть.

1.5 Эксперимент 5

$$y(0) = 0.05, \dot{y}(0) = 0 \quad \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$$

Также как и в прошлых экспериментах по характеристическим корням построим исходное уравнение:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

Отсюда $a_0 = 3, a_1 = -4$. Теперь по характеристическим корням найдем выражение свободной составляющей движения в общем виде:

$$y_{\text{св}}(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^t$$

Найдем производную:

$$\dot{y}_{\text{св}}(t) = 3C_1e^{3t} + C_2e^t$$

Подставим начальные условия:

$$y_{\text{св}}(0) = C_1 + C_2 = 0.05$$

$$\dot{y}_{\text{св}}(0) = 3C_1 - C_2 = 0$$

$$C_1 = -\frac{1}{40}, C_2 = \frac{3}{40}$$

Сравним результаты моделирования и аналитического решения:

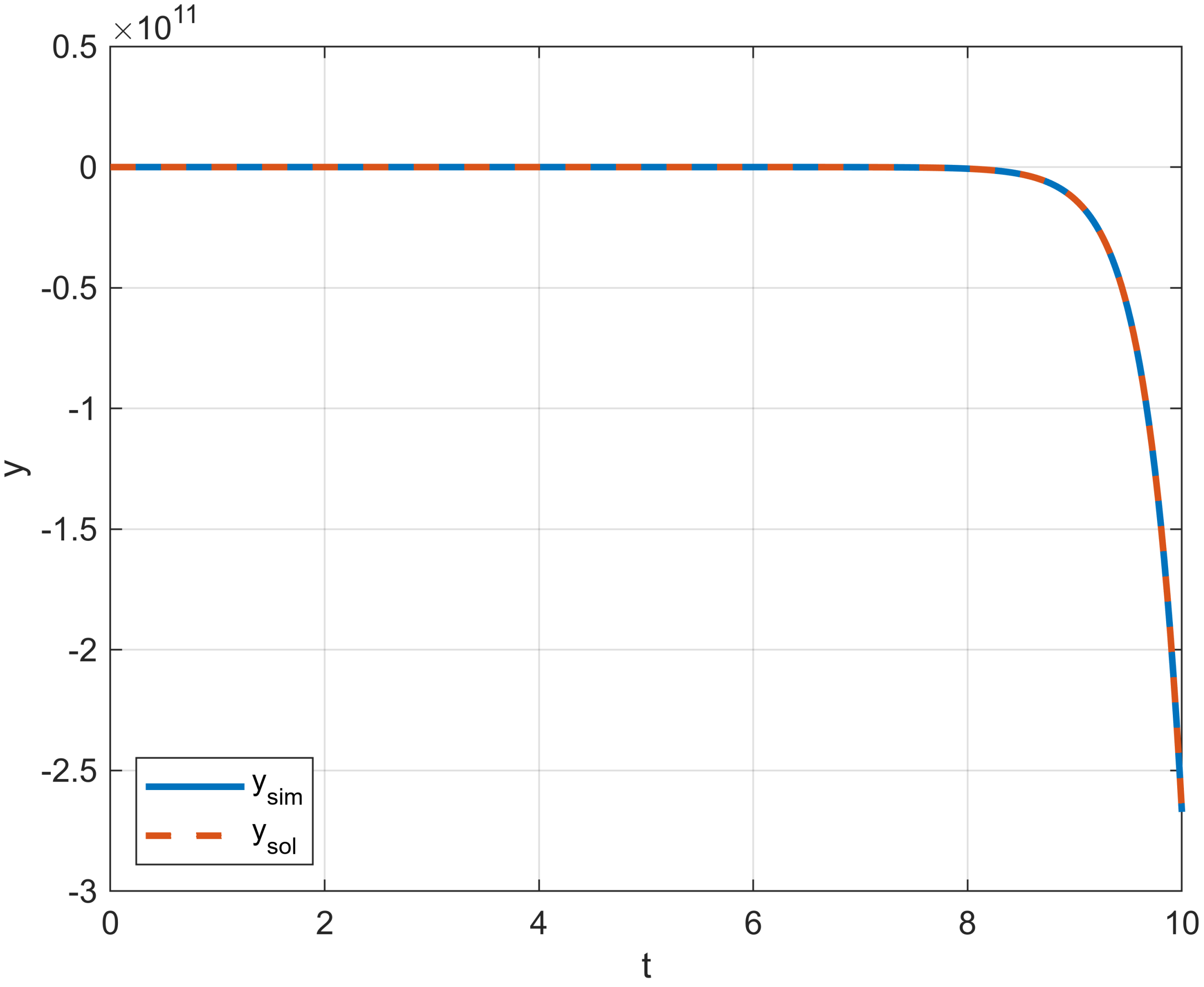

Рисунок 6 — Эксперимент 5

Графики снова совпадают. Также можно заметить, что система не устойчива, так как корни имеют положительную вещественную часть.

1.6 Эксперимент 6

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.1 \quad \lambda_1 = -0.7, \lambda_2 = 0.7$$

Также как и в прошлых экспериментах по характеристическим корням построим исходное уравнение:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda + 0.7)(\lambda - 0.7) = \lambda^2 - 0.49 = 0$$

Отсюда $a_0 = -0.49$, $a_1 = 0$. Теперь по характеристическим корням найдем выражение свободной составляющей движения в общем виде:

$$y_{\text{св}}(t) = C_1 e^{-0.7t} + C_2 e^{0.7t}$$

Найдем производную:

$$\dot{y}_{\text{св}}(t) = -0.7C_1 e^{-0.7t} + 0.7C_2 e^{0.7t}$$

Подставим начальные условия:

$$y_{\text{св}}(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$\dot{y}_{\text{св}}(0) = -0.7C_1 + 0.7C_2 = 0.1$$

$$C_1 = -\frac{1}{14}, C_2 = \frac{1}{14}$$

$$y_{\text{св}}(t) = -\frac{1}{14}e^{-0.7t} + \frac{1}{14}e^{0.7t}$$

Сравним результаты моделирования и аналитического решения:

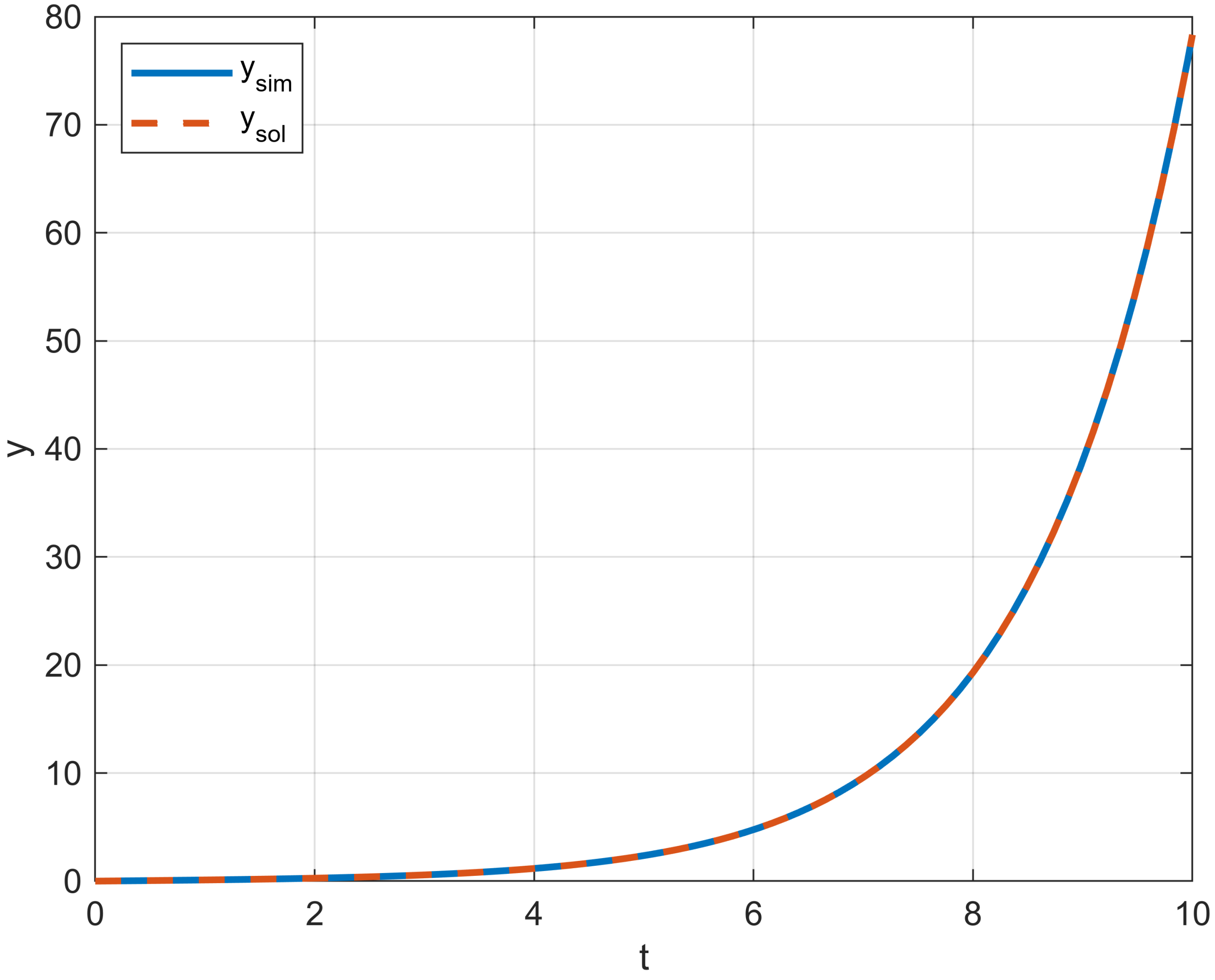

Рисунок 7 — Эксперимент 6

Графики снова совпадают. Также можно заметить, что система не устойчива, так как один корень имеет положительную вещественную часть.

2 ОБЛАСТЬ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим систему 3-го порядка, заданную структурной схемой, представленной на рисунке 8. Определим, при каких значениях постоянных времени T_1 и T_2 полюса соответствующих передаточных функций совпадут с набором корней $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1$ из Задания 1.

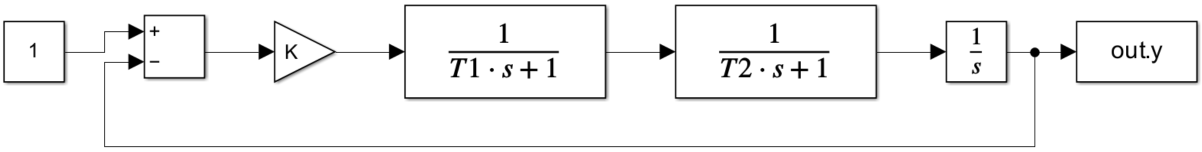

Рисунок 8 — Simulink схема системы для задания 2

Найдем T_1 при котором полюса передаточной функции системы совпадают с $\lambda_1 = -3$. Для этого приравняем ее знаменатель к нулю:

$$T_1 s + 1 = 0$$

$$T_1 \lambda_1 + 1 = 0$$

$$T_1 = \frac{-1}{\lambda_1} = \frac{1}{3}$$

Аналогично найдем T_2:

$$T_2 s + 1 = 0$$

$$T_2 \lambda_2 + 1 = 0$$

$$T_2 = \frac{-1}{\lambda_2} = 1$$

Зафиксируем значение $T_2 = 1$ и определим границу устойчивости в пространстве параметров K и T_1, используя критерий Гурвица. Запишем дифференциальное уравнение, соответствующее структурной схеме:

$$y = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{T_1 p + 1}\left(K(g-y)\right)\right)\right)$$

$$T_1 \dddot{y} + (1 + T_1)\ddot{y} + \dot{y} + Ky = Kg$$

$$\dddot{y} + \frac{(1 + T_1)\ddot{y}}{T_1} + \frac{\dot{y}}{T_1} + \frac{Ky}{T_1} = \frac{Kg}{T_1}$$

Так как движение свободное:

$$\dddot{y} + \frac{(1+T_1)\ddot{y}}{T_1} + \frac{\dot{y}}{T_1} + \frac{Ky}{T_1} = 0$$

Рассмотрим критерий Гурвица при $K > 0$ и $T_1 > 0$:

$$a_0 = \frac{K}{T_1},\ a_1 = \frac{1}{T_1},\ a_2 = \frac{1+T_1}{T_1}$$

$$\Delta_1 = |a_2| = \frac{1+T_1}{T_1} > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = \frac{1+T_1}{T_1} \cdot \frac{1}{T_1} - \frac{K}{T_1} = \frac{1+T_1}{T_1^2} - \frac{K}{T_1} > 0 \Rightarrow K < \frac{1+T_1}{T_1}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \frac{1+T_1}{T_1} \cdot \frac{1}{T_1} \cdot \frac{K}{T_1} - \frac{K}{T_1} \cdot \frac{K}{T_1} = \frac{(1+T_1)K - K^2 T_1}{T_1^3} > 0$$

Так как $T_1 > 0$, то Δ_1 всегда положительно. Так как $K > 0$ и $T_1 > 0$:

$$\Delta_3 = \frac{(1+T_1)K - K^2 T_1}{T_1^3} > 0$$

$$(1+T_1)K - K^2 T_1 > 0$$

$$K < \frac{1+T_1}{T_1}$$

Что эквиваленто условию для Δ_2. Соответственно можно оставить только:

$$K > 0$$

$$T_1 > 0$$

$$K < \frac{1+T_1}{T_1}$$

В Матлабе построим область устойчивости:

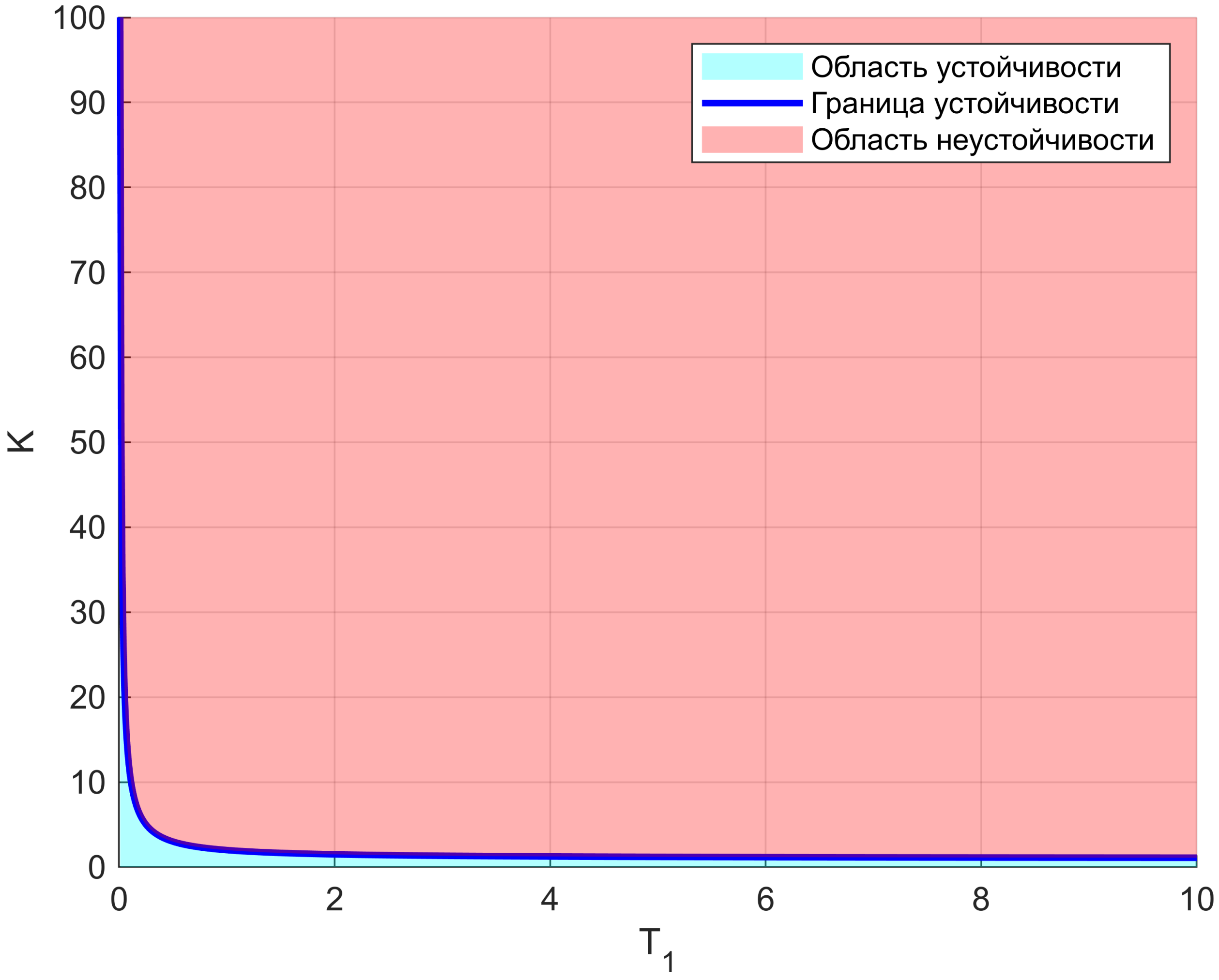

Рисунок 9 — Область устойчивости при $T_2 = const = 1$

При значениях K и T_1 вне области устойчивости система будет неустойчива, внутри - асимптотически устойчива.

Теперь найдем границу устойчивости в пространстве параметров K и T_2. дифференциальное уравнение, соответствующее структурной схеме:

$$y = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{T_2 p+1}\left(\frac{1}{\frac{1}{3}p+1}\left(K(g-y)\right)\right)\right)$$

$$\dddot{y} + \frac{(1+3T_2)\ddot{y}}{T_2} + \frac{3\dot{y}}{T_2} + \frac{3Ky}{T_2} = \frac{3Kg}{T_2}$$

Так как движение свободное:

$$\dddot{y} + \frac{(1+3T_2)\ddot{y}}{T_2} + \frac{3\dot{y}}{T_2} + \frac{3Ky}{T_2} = 0$$

Рассмотрим критерий Гурвица при $K > 0$ и $T_2 > 0$:

$$a_0 = \frac{3K}{T_2},\ a_1 = \frac{3}{T_2},\ a_2 = \frac{1+3T_2}{T_2}$$

$$\Delta_1 = |a_2| = \frac{1+3T_2}{T_2} > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = \frac{1+3T_2}{T_2} \cdot \frac{3}{T_2} - \frac{3K}{T_2} = \frac{3(1+3T_2)}{T_2^2} - \frac{3K}{T_2} > 0 \Rightarrow K < \frac{1+3T_2}{T_2}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \frac{1+3T_2}{T_2} \cdot \frac{3}{T_2} \cdot \frac{3K}{T_2} - \frac{3K}{T_2} \cdot \frac{3K}{T_2} = \frac{9(1+3T_2)K - 9K^2T_2}{T_2^3} > 0$$

Так как $T_2 > 0$, то Δ_1 всегда положительно. Так как $K > 0$ и $T_2 > 0$:

$$\Delta_3 = \frac{9(1+3T_2)K - 9K^2T_2}{T_2^3} > 0$$

$$9(1+3T_2)K - 9K^2T_2 > 0$$

$$K < \frac{1+3T_2}{T_2}$$

Что эквиваленто условию для Δ_2. Соответственно можно оставить только:

$$K > 0$$

$$T_2 > 0$$

$$K < \frac{1+3T_2}{T_2}$$

В Матлабе построим область устойчивости:

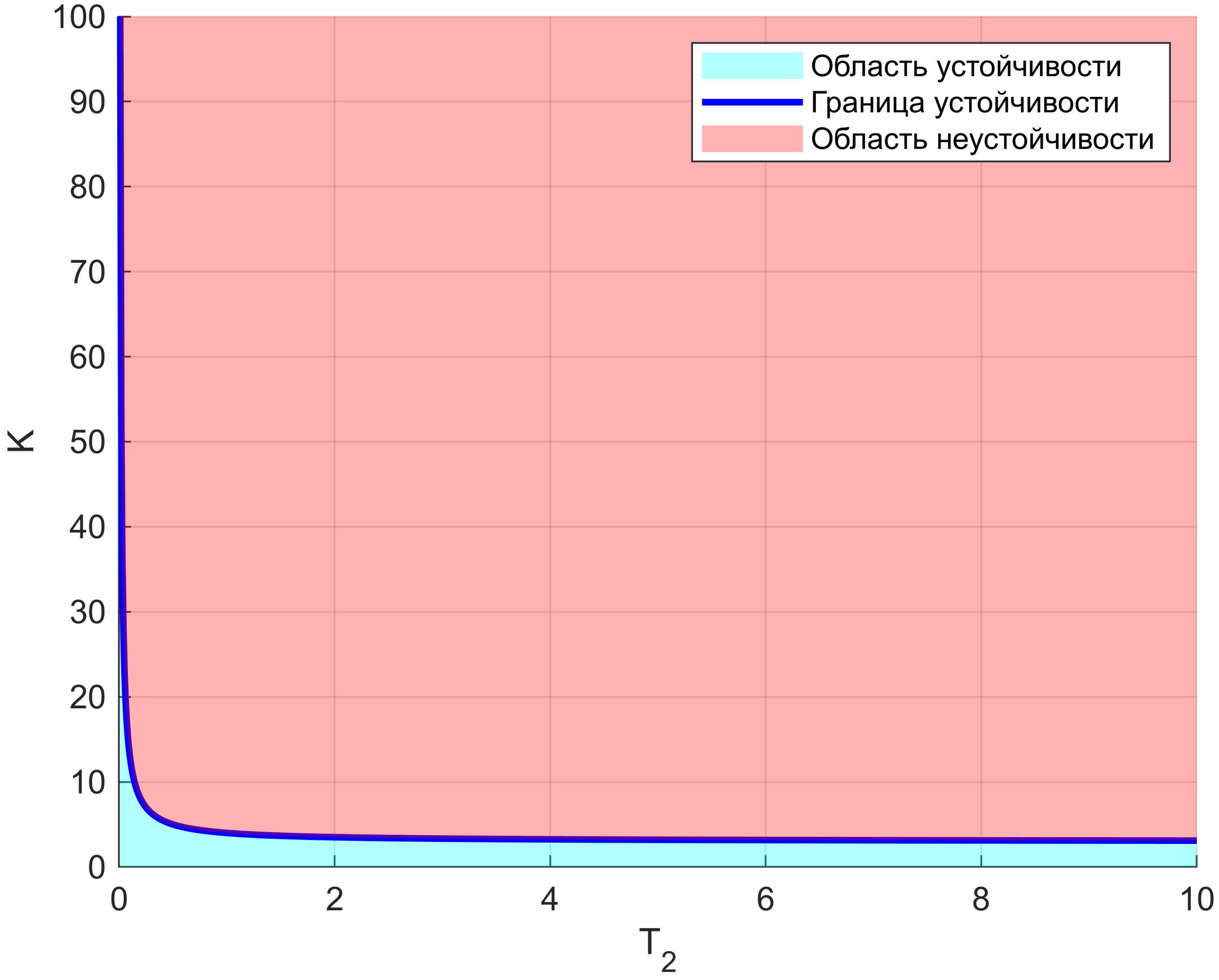

Рисунок 10 — Область устойчивости при $T_1 = const = 1/3$

Исходя из полученных графиков зададим 3 набора параметров K, T_1, T_2:

1) Устойчивая система $K = 1, T_1 = 1, T_2 = 1$:

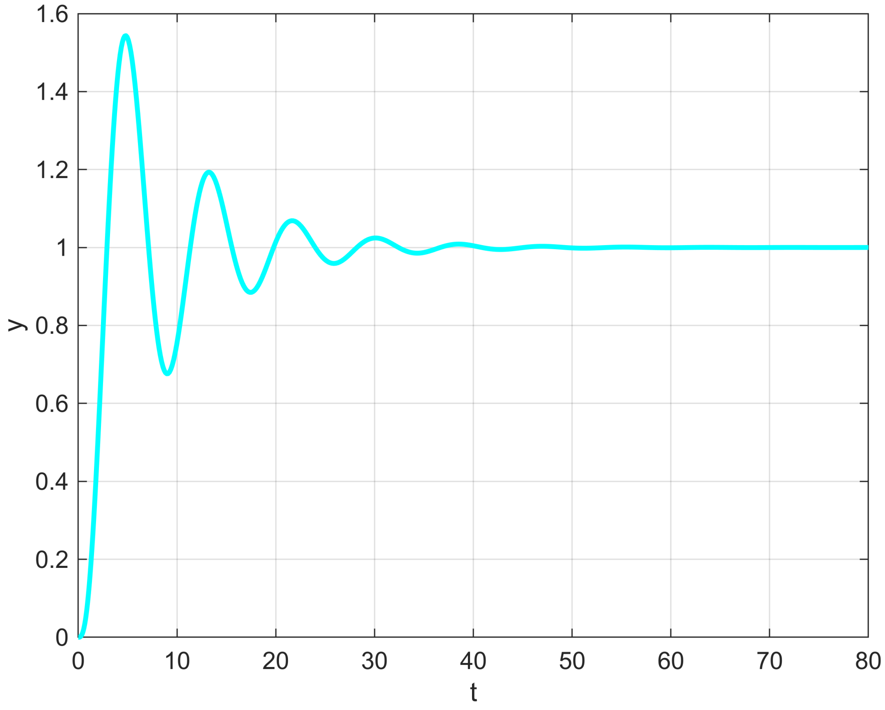

Рисунок 11 — Устойчивая система

2) Неустойчивая система $K = 2, T_1 = 2, T_2 = 2$:

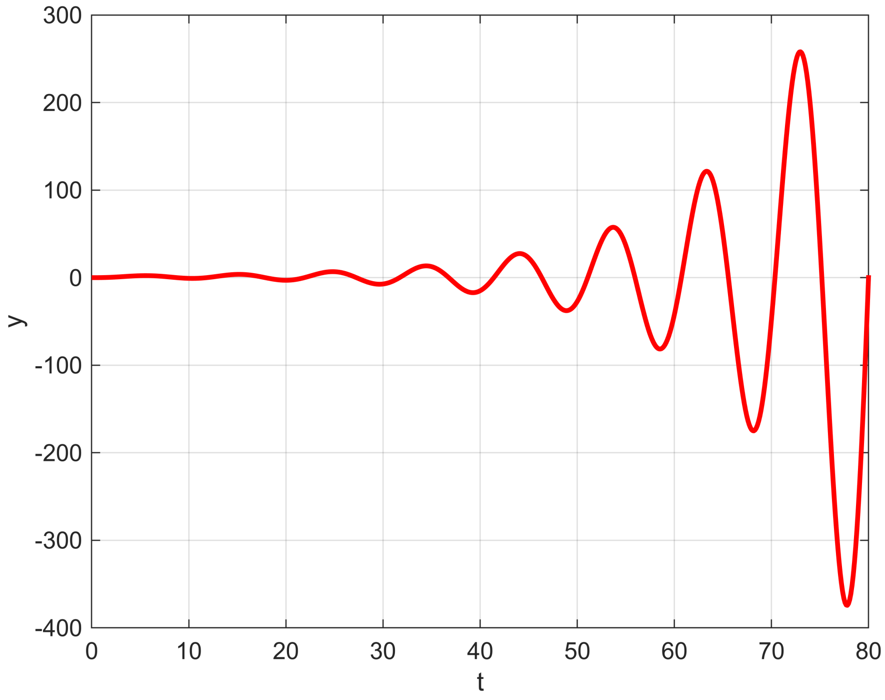

Рисунок 12 — Неустойчивая система

3) Система на границе устойчивости $K = 1, T_1 = 1, T_2 = 2$:

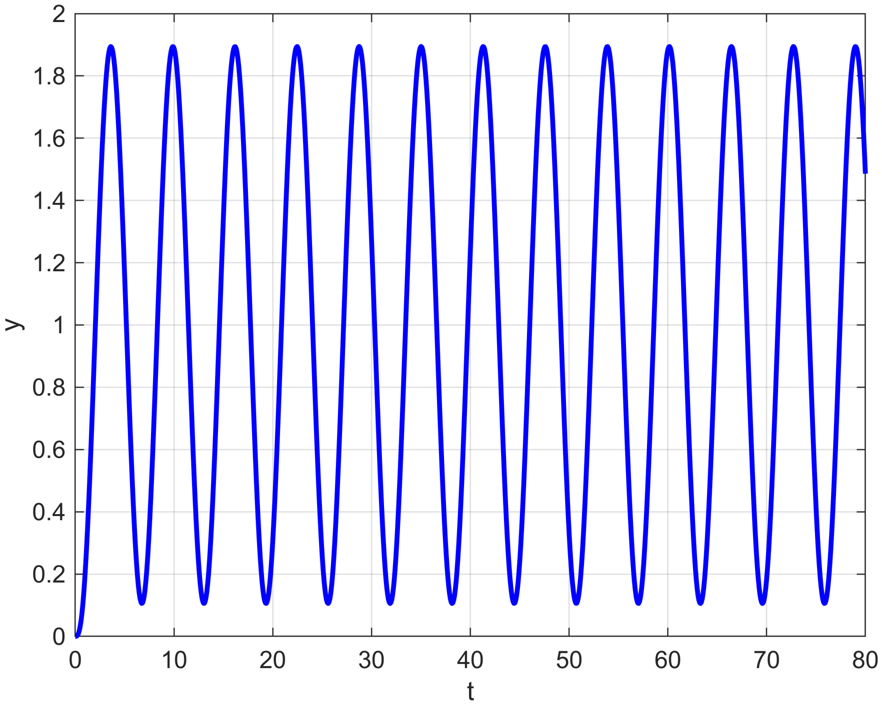

Рисунок 13 — Система на границе устойчивости

3 АВТОНОМНЫЙ ГЕНЕРАТОР

Дана система вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ g = Cx \end{cases} \qquad x(0)$$

Необходимо задать такие параметры A, C и $x(0)$, чтобы выход системы при свободном движении совпадал с желаемым сигналом $g_{\text{ж}}(t) = \sin(-5t) + e^{5t}cos(-5t)$

Необходимо построить $g_{\text{св}}(t)$ как:

$$g_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0)$$

Из желаемого сигнала находим нужные собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = \pm 5i, \quad \lambda_{3,4} = 5 \pm 5i$$

Составим Жорданову матрицу A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

Матричная экспонента от A:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(5t) & \sin(5t) & 0 & 0 \\ -\sin(5t) & \cos(5t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t}\cos(5t) & e^{5t}\sin(5t) \\ 0 & 0 & -e^{5t}\sin(5t) & e^{5t}\cos(5t) \end{bmatrix}$$

Составим выражение для $g_{\text{св}}(t)$:

$$g_{\text{св}}(t) = Ce^{At}x(0)$$

$$g_{\text{св}}(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(5t) & \sin(5t) & 0 & 0 \\ -\sin(5t) & \cos(5t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t}\cos(5t) & e^{5t}\sin(5t) \\ 0 & 0 & -e^{5t}\sin(5t) & e^{5t}\cos(5t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$g_{\text{св}}(t) = \cos(-5t)\left(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3e^{5t}x_3 + c_4e^{5t}x_4\right) +$$
$$+ \sin(-5t)\left(c_2x_1 - c_1x_2 - c_4e^{5t}x_3 + c_3e^{5t}x_4\right).$$

Для того чтобы выход системы совпадал с желаемым сигналом, необходимо:

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 = 0 \\ c_3x_3 + c_4x_4 = 1 \\ c_2x_1 - c_1x_2 = 1 \\ -c_4x_3 + c_3x_4 = 0 \end{cases}$$

Нам подойдут например следующие значения:

$$\begin{cases} c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ c_3 = 0,\ c_4 = 1 \\ x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Получили значения для A, C и $x(0)$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Создадим соответствующую систему в Simulink:

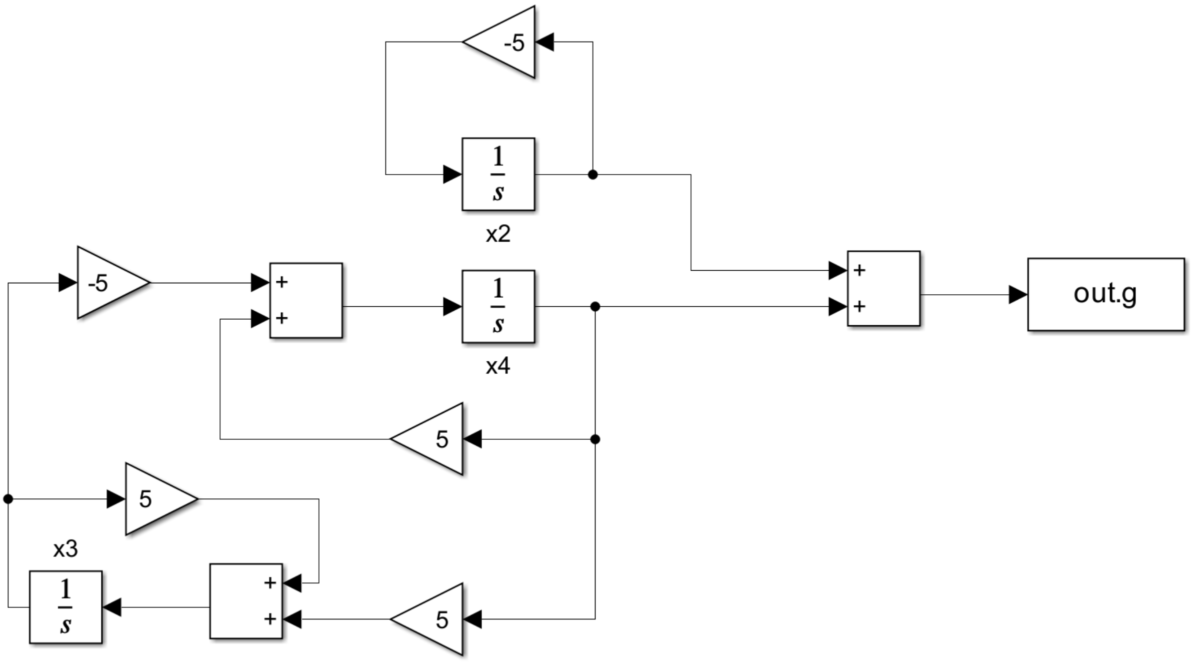

Рисунок 14 — Система в Simulink

Сравним выход системы с желаемым сигналом:

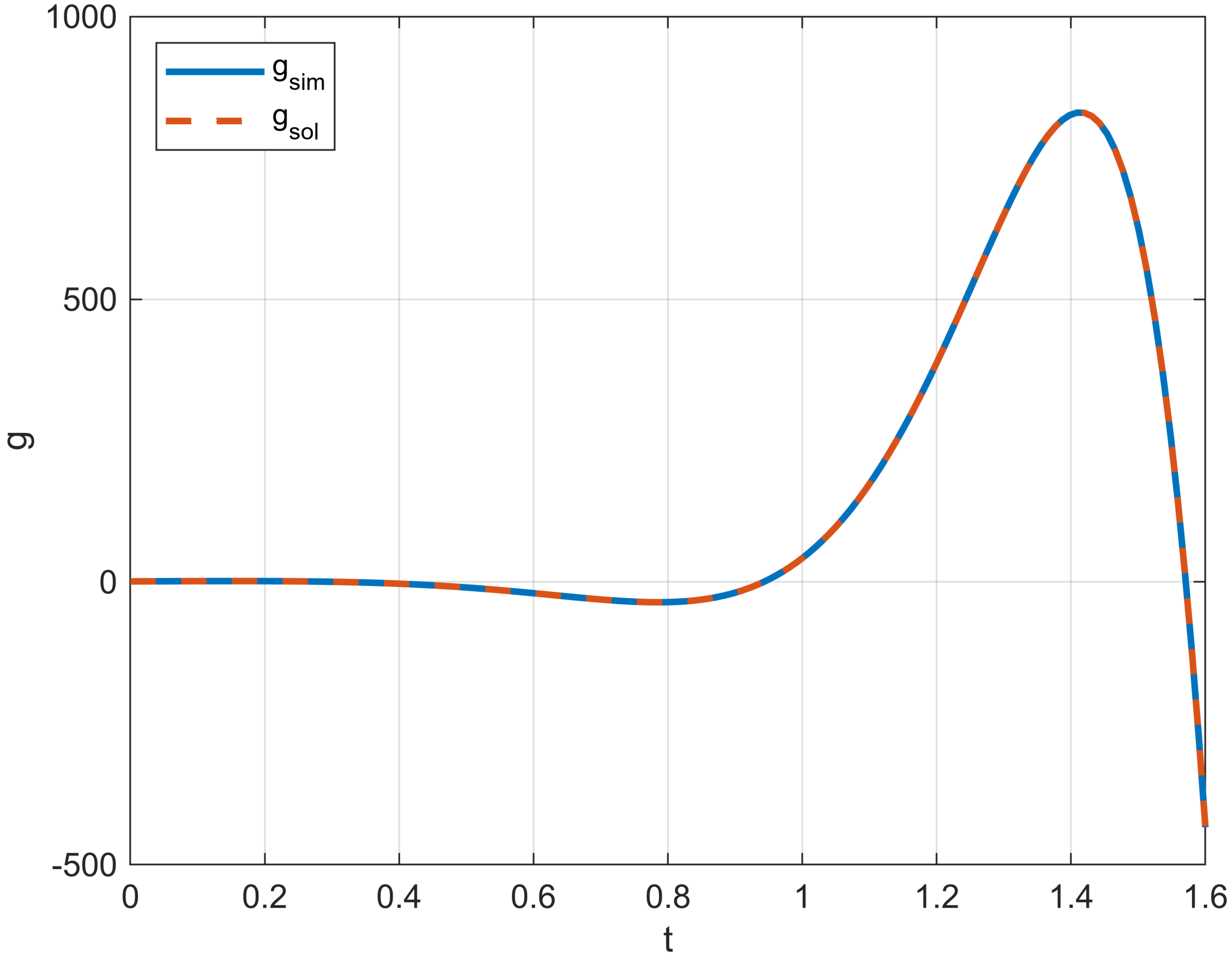

Рисунок 15 — Сравнение выхода генератора с желаемым сигналом

4 ВЫВОД

В ходе лабораторной работы были получены практические навыки работы со свободным движением линейных систем. Были рассмотрены виды устойчивости и области устойчивости. Также был выполнен расчет параметров системы, обеспечивающих совпадение выходного сигнала с желаемым. Полученные навыки позволят в дальнейшем решать задачи управления и анализа динамических систем.