МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЁТ
по лабораторной работе № 6
по дисциплине
”Линейные системы автоматического управления”

Вариант №7

по теме:
КРИТЕРИЙ НАЙКВИСТА И СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Выполнил: Васильев В.С.

Проверил: Пашенко А.В.

Группа: R3335

Санкт-Петербург
2024

СОДЕРЖАНИЕ

1 ГОДОГРАФ НАЙКВИСТА 3

1.1 Объект 1 3

1.2 Объект 2 6

1.3 Объект 3 8

2 КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ 12

2.1 Передаточная функция $W_1(s)$ 12

2.2 Передаточная функция $W_2(s)$ 15

3 ЗАПАЗДЫВАНИЕ 19

3.1 Передаточная функция $W_3(s)$ 19

3.2 Передаточная функция $W_4(s)$ 23

4 ВЫВОД 28

1 ГОДОГРАФ НАЙКВИСТА

В соответствии с вариантом задания, придумаем три объекта пятого порядка 1 полюс передаточных функций которых вещественный, а остальные 4 комплексно-сопряженные.

1.1 Объект 1

Первая передаточная функция должна иметь 4 неустойчивых полюса у разомкнутой системы и 4 неустойчивых полюса у замкнутой.

Если общий вид передаточной функции разомкнутой системы имеет вид:

$$W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}$$

То передаточная функция замкнутой системы имеет вид:

$$W_з(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{R(s)}{Q(s) + R(s)}$$

Обозначим $Q(s) + R(s)$ как $D(s)$, тогда передаточная функция замкнутой системы примет вид:

$$W(s) = \frac{R(s)}{D(s)}$$

Теперь мы можем составить выражения для $Q(s)$ и $D(s)$ исходя из условий задачи, а затем выразить R(s) и передаточную функцию разомкнутой системы:

$$Q(s) = (s+1)(s-1-i)(s-1+i)(s-2-i)(s-2+i)$$

$$D(s) = (s+2)(s-1-2i)(s-1+2i)(s-2-2i)(s-2+2i)$$

$$R(s) = D(s) - Q(s) = s^4 + 9s^2 - 24s + 70$$

$$W(s) = \frac{s^4 + 9s^2 - 24s + 70}{(s+1)(s-1-i)(s-1+i)(s-2-i)(s-2+i)}$$

Теперь построим карту полюсов и нулей передаточной функции разомкнутой и замкнутой системы:

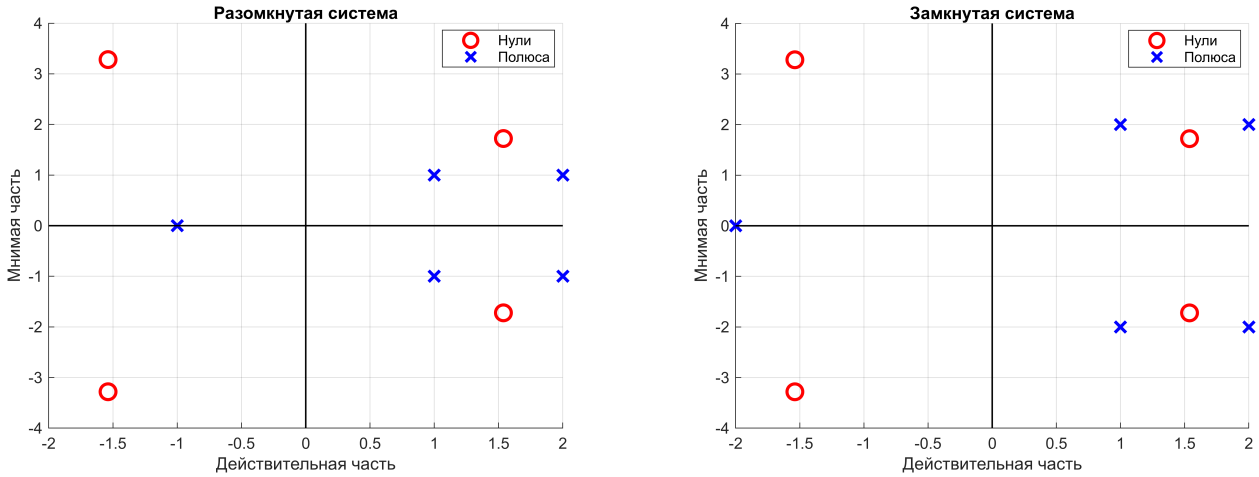

Рисунок 1 — Карта полюсов и нулей разомкнутой и замкнутой системы

Теперь построим переходные характеристики разомкнутой и замкнутой системы:

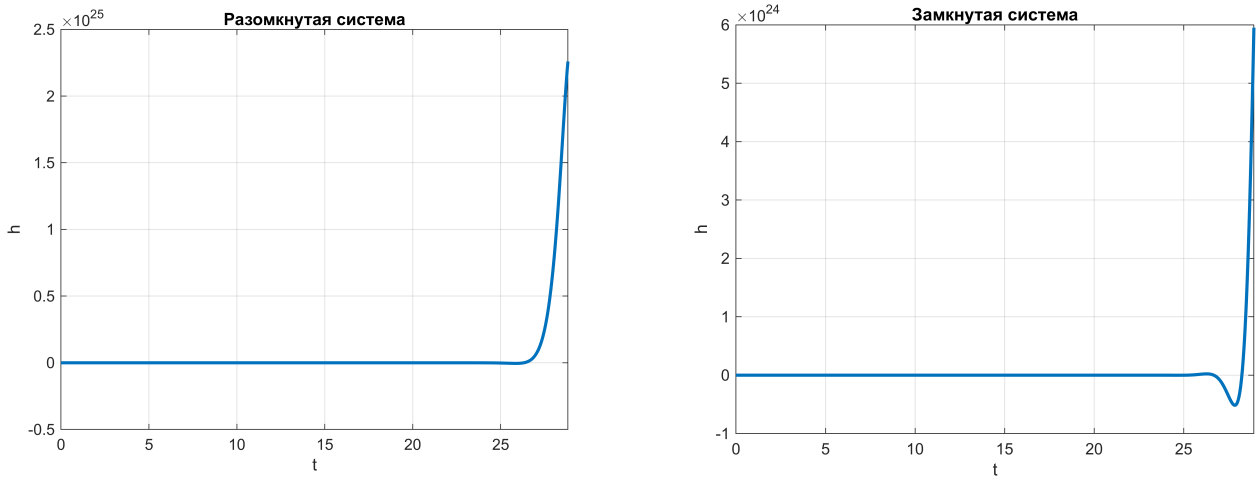

Рисунок 2 — Переходные характеристики разомкнутой и замкнутой системы

Годограф Найквиста для данной передаточной функции:

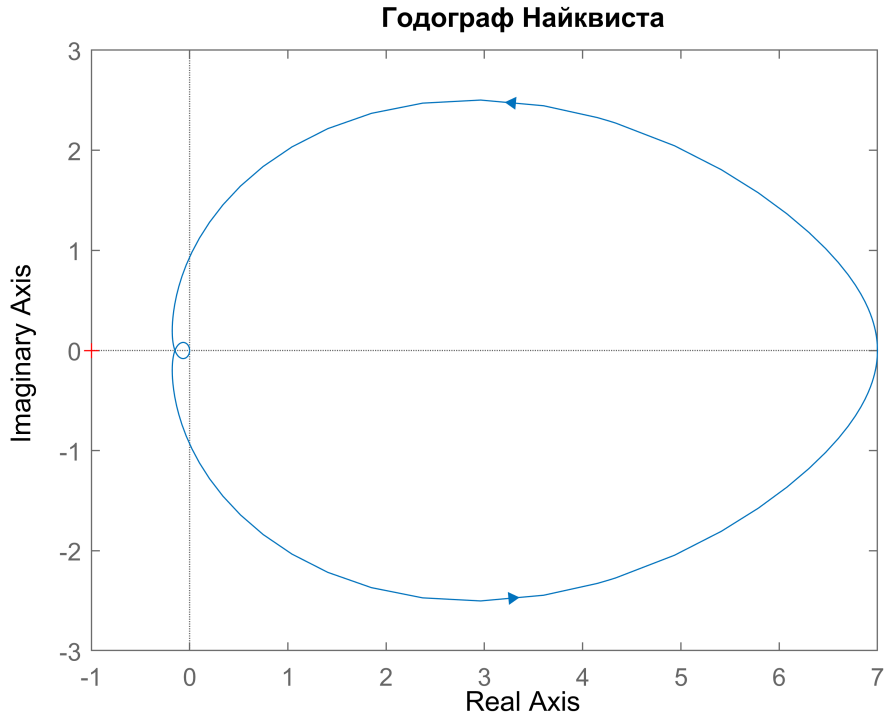

Рисунок 3 — Годограф Найквиста

Как видим, годограф не совершает оборотов вокруг точки (-1, 0). Это соотносится с критерием Найквиста, так как количество неустойчивых полюсов не изменилось при замыкании системы.

Рассмотрим ЛАФЧХ для данной передаточной функции:

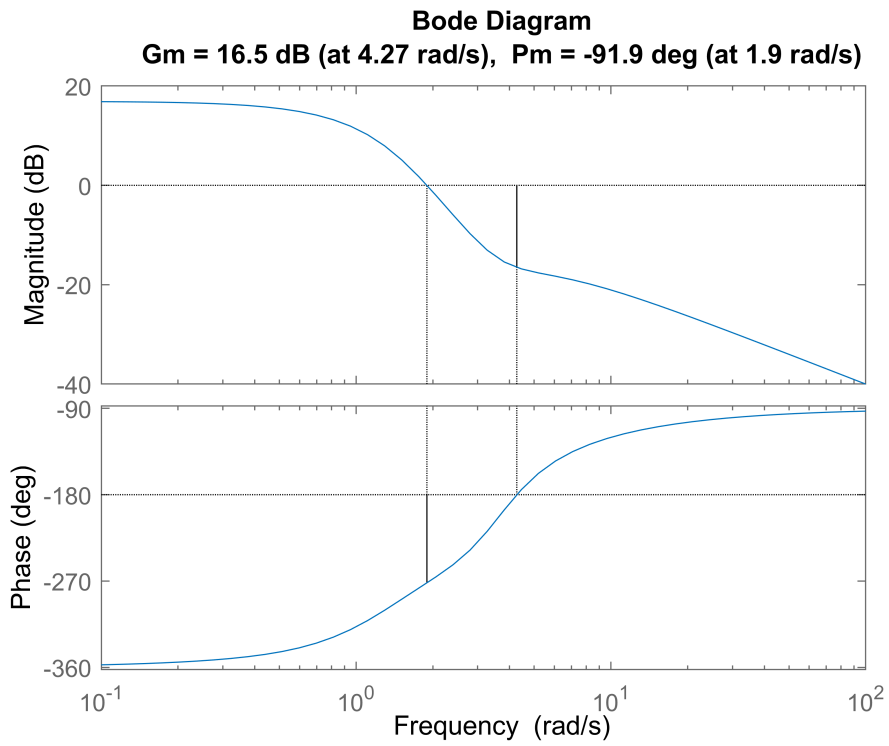

Рисунок 4 — ЛАФЧХ системы

ЛФЧХ не пересекает критические уровни при $L(\omega) > 0$. Согласно логарифмическому критерию Найквиста замкнутая система не устойчива.

1.2 Объект 2

Вторая передаточная функция должна иметь 0 неустойчивых полюсов у разомкнутой системы и 4 неустойчивых полюса у замкнутой. Также как и в предыдущем пункте, составим выражение для передаточной функции разомкнутой системы:

$$Q(s) = (s+1)(s+1-i)(s+1+i)(s+2-i)(s+2+i)$$

$$D(s) = (s+2)(s-1-2i)(s-1+2i)(s-2-2i)(s-2+2i)$$

$$R(s) = D(s) - Q(s) = -11s^4 - 12^3 - 27^2 - 60s + 70$$

$$W(s) = \frac{-11s^4 - 12^3 - 27^2 - 60s + 70}{(s+1)(s+1-i)(s+1+i)(s+2-i)(s+2+i)}$$

Теперь построим карту полюсов и нулей передаточной функции разомкнутой и замкнутой системы:

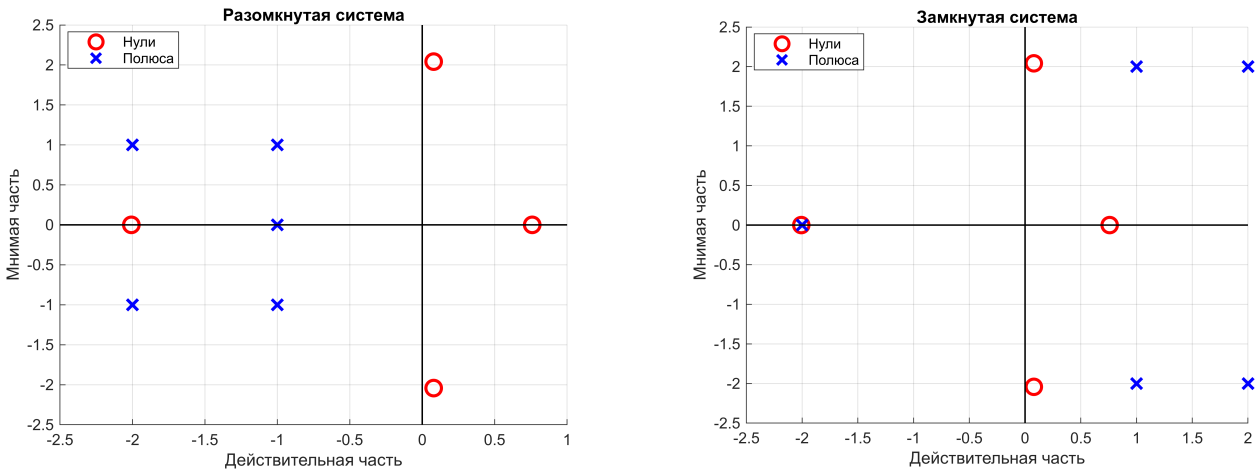

Рисунок 5 — Карта полюсов и нулей разомкнутой и замкнутой системы

Построим переходные характеристики разомкнутой и замкнутой системы:

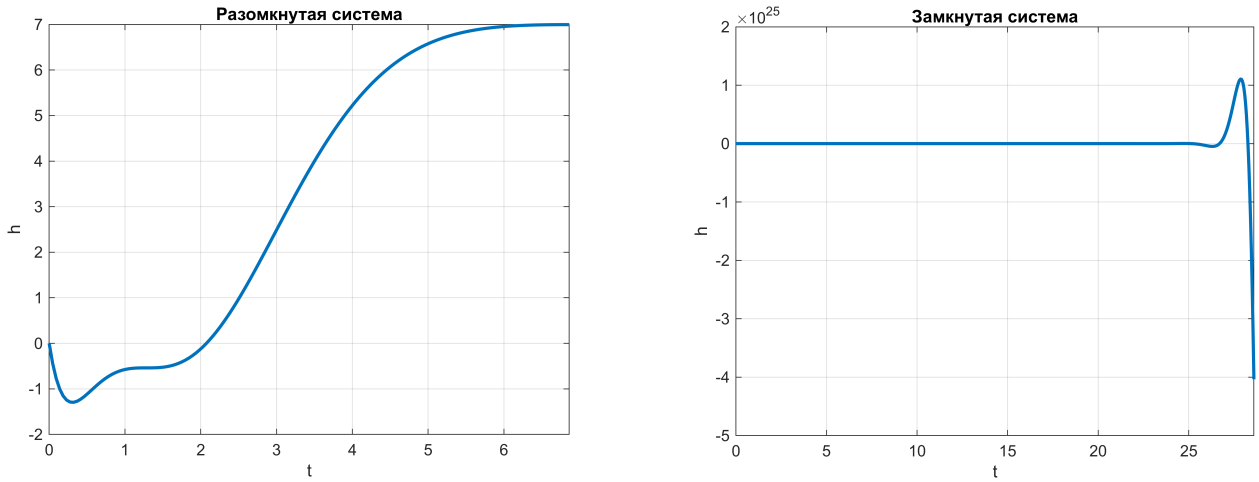

Рисунок 6 — Переходные характеристики разомкнутой и замкнутой системы

Годограф Найквиста для данной передаточной функции:

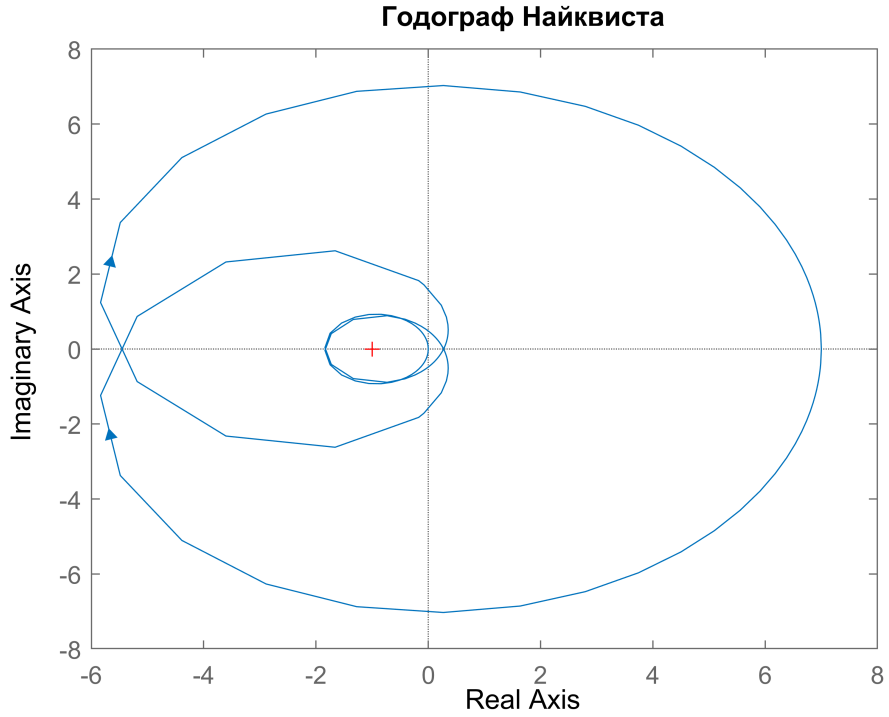

Рисунок 7 — Годограф Найквиста

Как видим, годограф совершил 4 оборота по часовой стрелке вокруг точки (-1, 0). Это соотносится с критерием Найквиста, так как количество неустойчивых полюсов увеличилось на количество оборотов годографа при замыкании системы.

Рассмотрим ЛАФЧХ для данной передаточной функции:

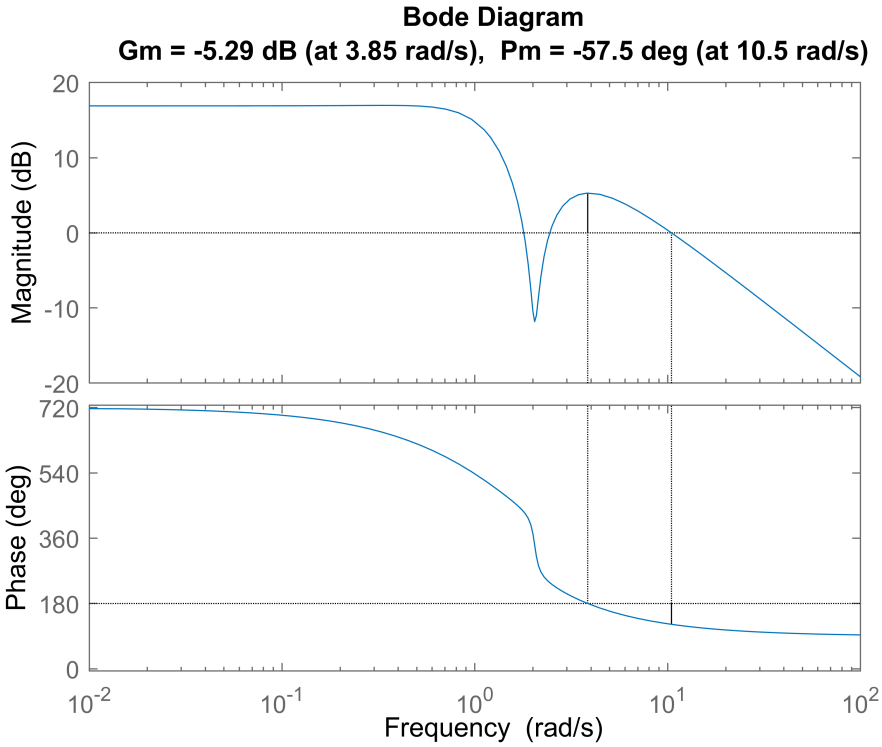

Рисунок 8 — ЛАФЧХ системы

Видно, что частота среза находится больше критической частоты, что соответствует неустойчивости системы.

1.3 Объект 3

Третья передаточная функция должна иметь 4 устойчивых полюса у разомкнутой системы и 0 устойчивых полюсов у замкнутой. Также как и в предыдущих пунктах, составим выражение для передаточной функции разомкнутой системы:

$$Q(s) = (s+1)(s-1-i)(s-1+i)(s-2-i)(s-2+i)$$

$$D(s) = (s+2)(s+1-2i)(s+1+2i)(s+2-2i)(s+2+2i)$$

$$R(s) = D(s) - Q(s) = 13s^4 + 18s^3 + 51s^2 - 54s + 10$$

$$W(s) = \frac{13s^4 + 18s^3 + 51s^2 - 54s + 10}{(s+1)(s-1-i)(s-1+i)(s-2-i)(s-2+i)}$$

Теперь построим карту полюсов и нулей передаточной функции разомкнутой и замкнутой системы:

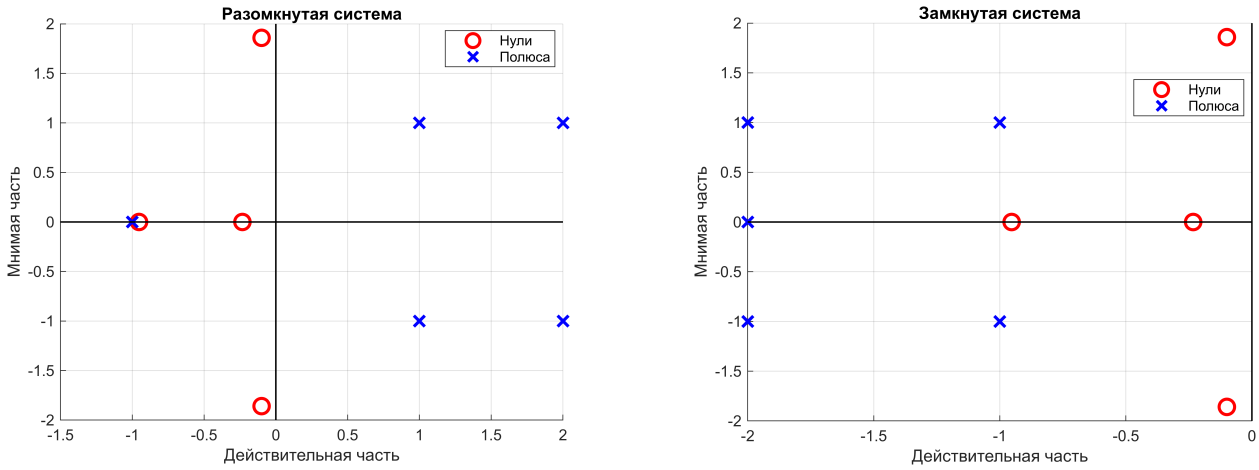

Рисунок 9 — Карта полюсов и нулей разомкнутой и замкнутой системы

Построим переходные характеристики разомкнутой и замкнутой системы:

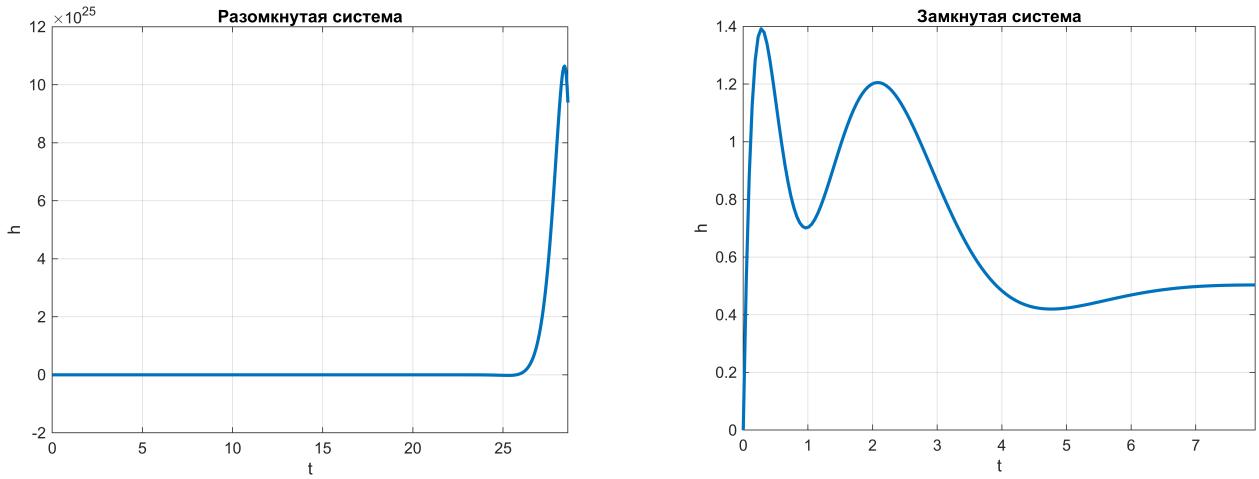

Рисунок 10 — Переходные характеристики разомкнутой и замкнутой системы

Годограф Найквиста для данной передаточной функции:

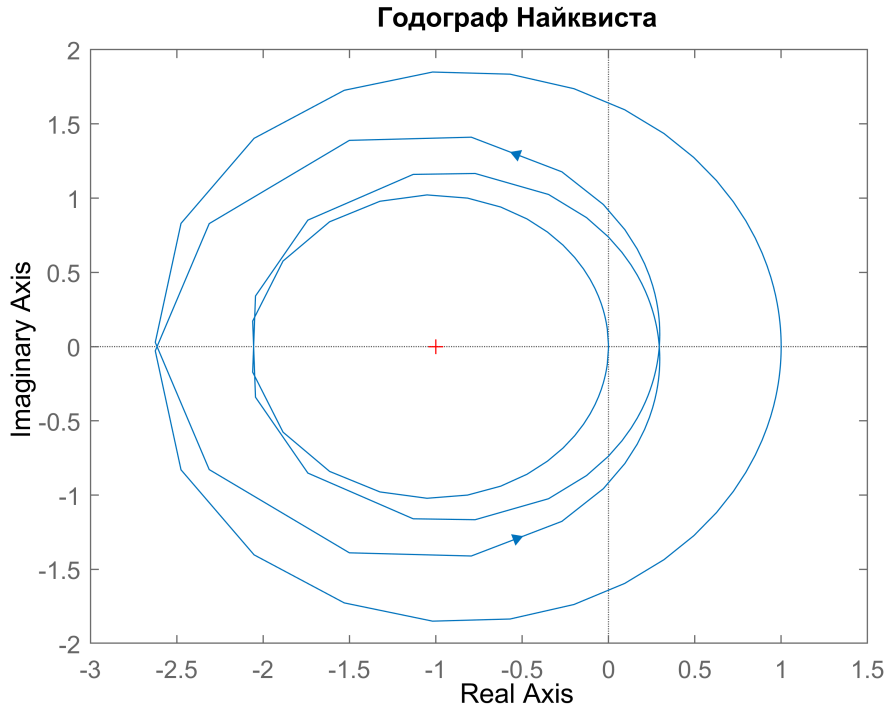

Рисунок 11 — Годограф Найквиста

Как видим, годограф совершил 4 оборота против часовой стрелки вокруг точки (-1, 0). Это соотносится с критерием Найквиста, так как количество устойчивых полюсов уменьшилось на количество оборотов годографа при замыкании системы.

Рассмотрим ЛАФЧХ для данной передаточной функции:

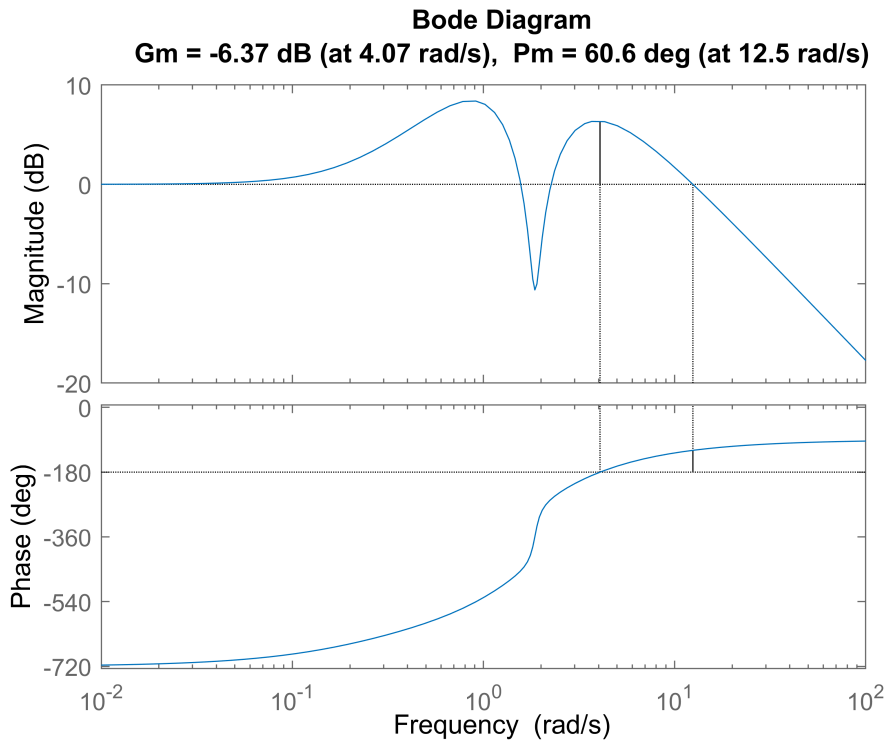

Рисунок 12 — ЛАФЧХ системы

ЛФЧХ имеет два положительных перехода (540 и 180 градусов), что соответствует устойчивости системы , для которой нужна разность $\frac{r}{2} = 2$.

2 КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ

Даны 2 передаточные функции:

$$W_1(s) = \frac{s-1}{s^2+6s+7}$$

$$W_2(s) = \frac{10s^3+15s^2+18s+6}{10s^3-10s^2}$$

Добавим к передаточным функциям коэффициент усиления k:

$$W_1(s) = \frac{k(s-1)}{s^2+6s+7}$$

$$W_2(s) = \frac{k(10s^3+15s^2+18s+6)}{10s^3-10s^2}$$

2.1 Передаточная функция $W_1(s)$

Построим годограф Найквиста для передаточных функций с различными значениями коэффициента усиления k:

1. $k = 1$:
2. $k = 2$:
3. $k = 5$:
4. $k = 10$:

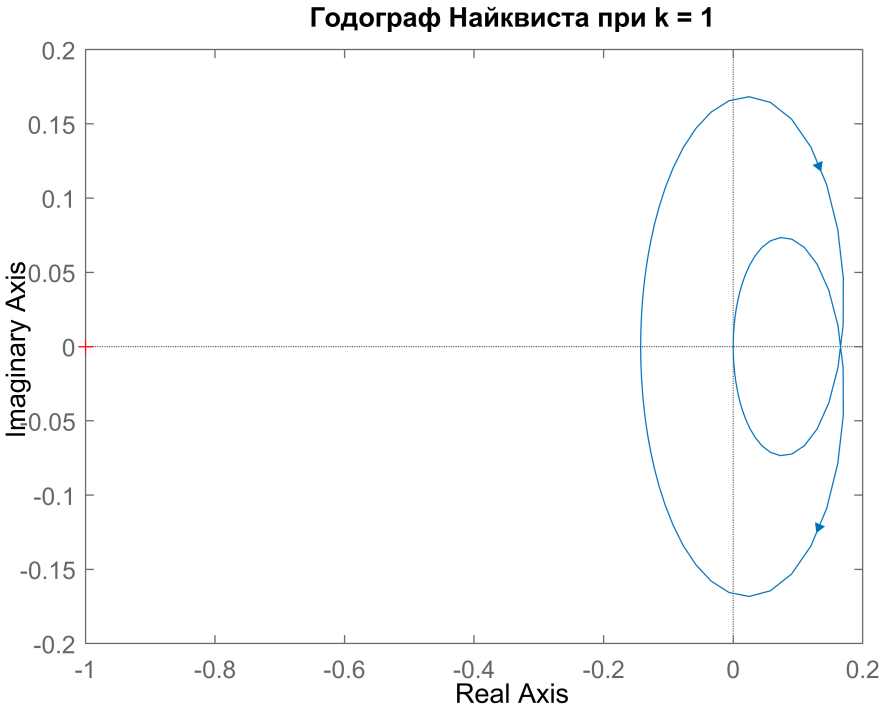

Рисунок 13 — Годограф Найквиста для $k = 1$

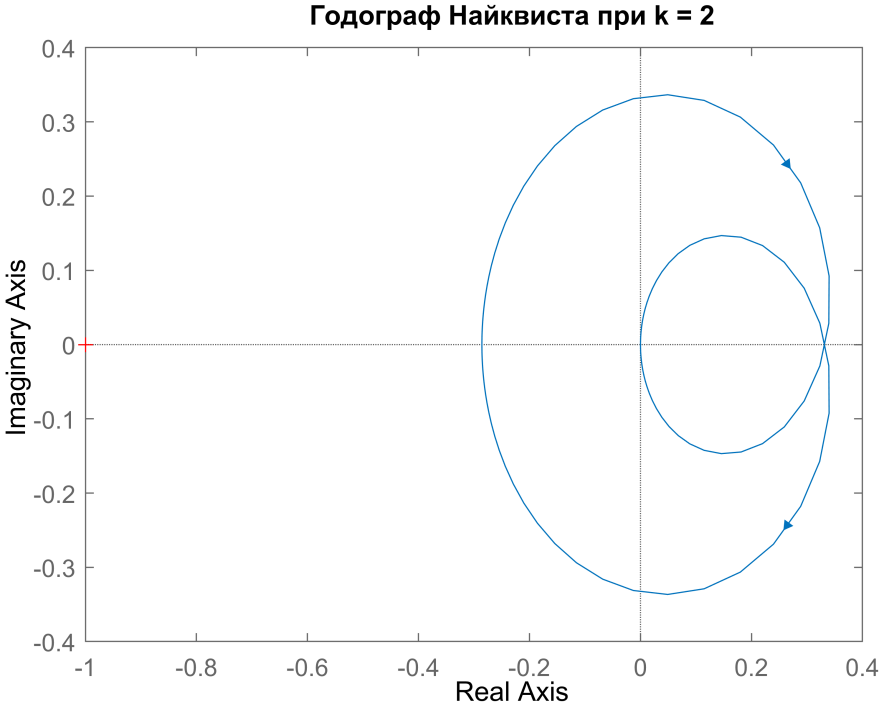

Рисунок 14 — Годограф Найквиста для $k = 2$

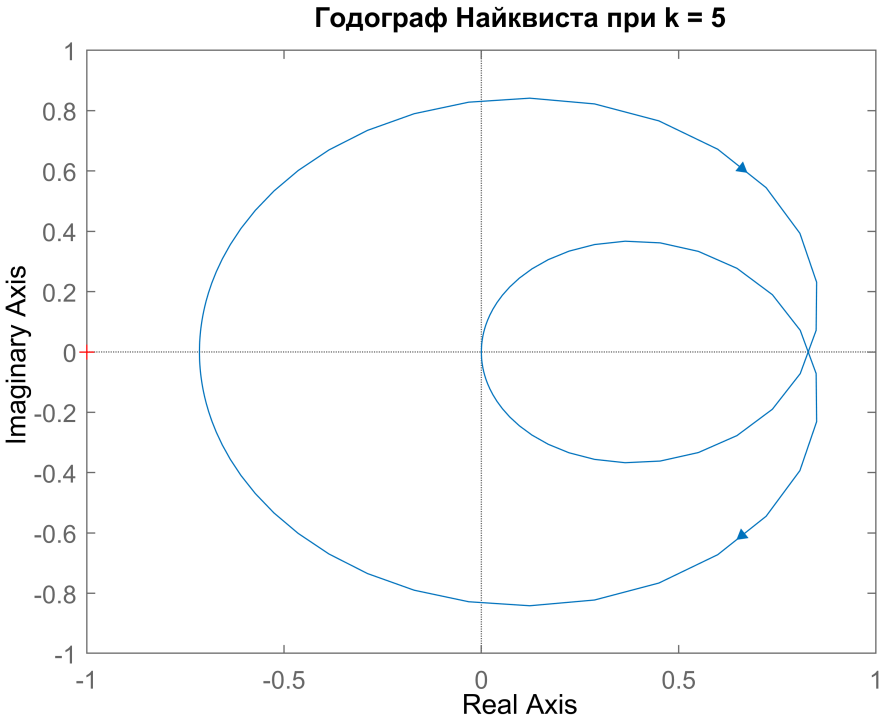

Рисунок 15 — Годограф Найквиста для $k = 5$

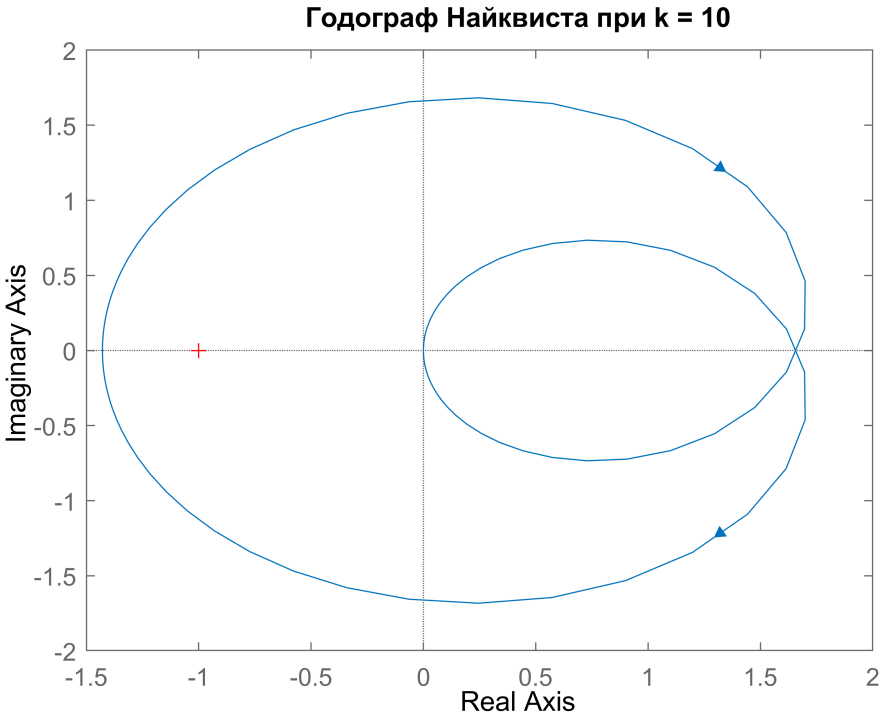

Рисунок 16 — Годограф Найквиста для $k = 10$

Как видим, при увеличении коэффициента усиления k годограф увеличивается, в том числе в левой полуплоскости. С увеличением k годограф начинает охватывать и точку $(-1, 0)$. Чтобы определить максимальное значение коэффициента усиления, при котором система остается устойчивой,

найдем аналитические выражения для частотных характеристик системы:

$$W_1(j\omega) = \frac{k(j\omega - 1)}{-\omega^2 + 6j\omega + 7} = \frac{-\omega^3 i + 7\omega^2 + 13\omega i - 7}{\omega^4 + 22\omega^2 + 49}$$

$$A_1(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\sqrt{\omega^4 + 22\omega^2 + 49}}$$

$$\varphi_1(\omega) = atan2\left(\frac{-\omega^3 + 13\omega}{\omega^4 + 22\omega^2 + 49}, \frac{7\omega^2 - 7}{\omega^4 + 22\omega^2 + 49}\right)$$

Теперь найдем значение критической частоты и с помощью нее найдем максимальное значение коэффициента усиления:

$$\varphi_1(\omega_{\text{кр}}) = -\pi \Rightarrow \omega_{\text{кр}} = 0$$

$$k_{\text{макс}} = \frac{1}{A_1(\omega_{\text{кр}})} = 7$$

Продемонстрируем переходные характеристики системы при коэффициентах k, соответствующих устойчивости и неустойчивости:

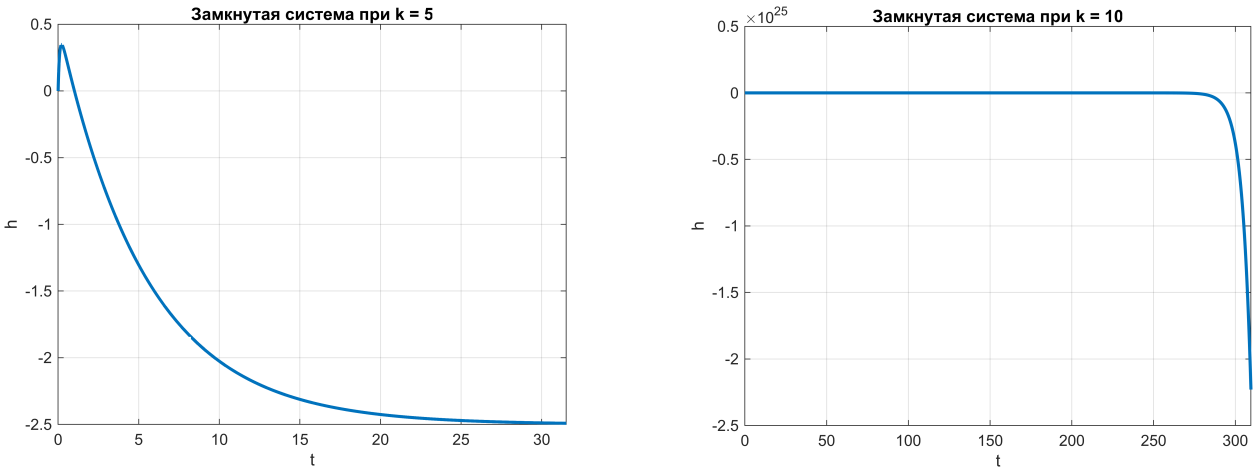

Рисунок 17 — Переходные характеристики системы при $k = 5$ и $k = 10$

2.2 Передаточная функция $W_2(s)$

Построим годограф Найквиста для передаточных функций с различными значениями коэффициента усиления k:

1. $k = 1$:
2. $k = 0.3$:
3. $k = 2$:
4. $k = 5$:

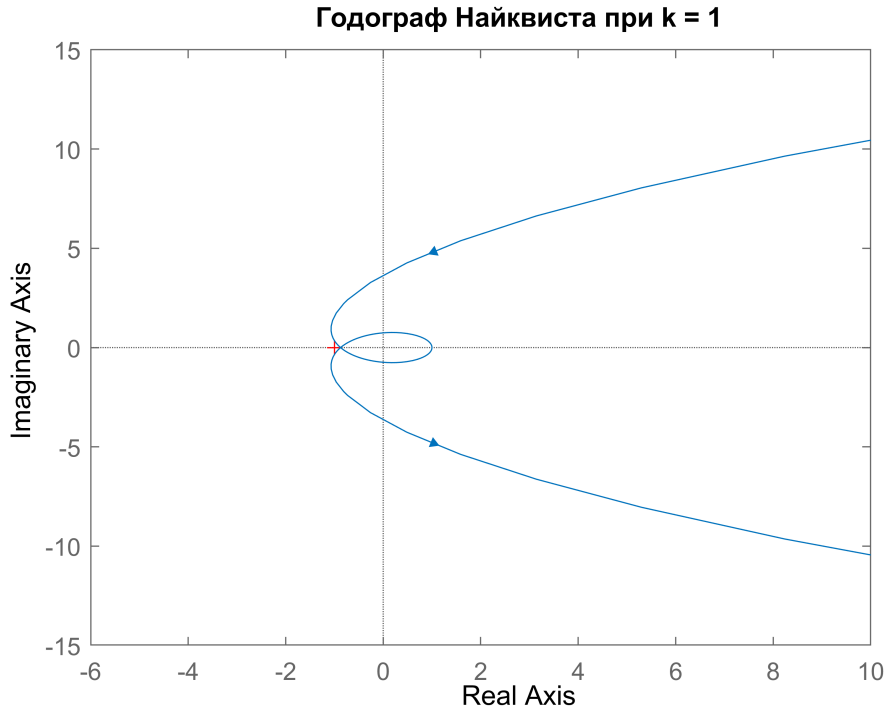

Рисунок 18 — Годограф Найквиста для $k = 1$

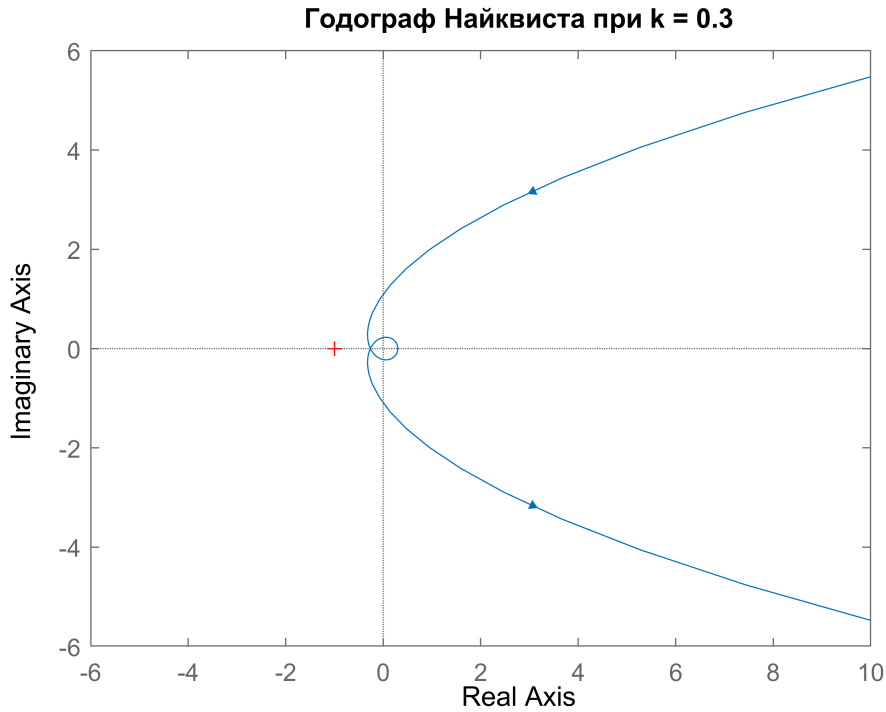

Рисунок 19 — Годограф Найквиста для $k = 0.3$

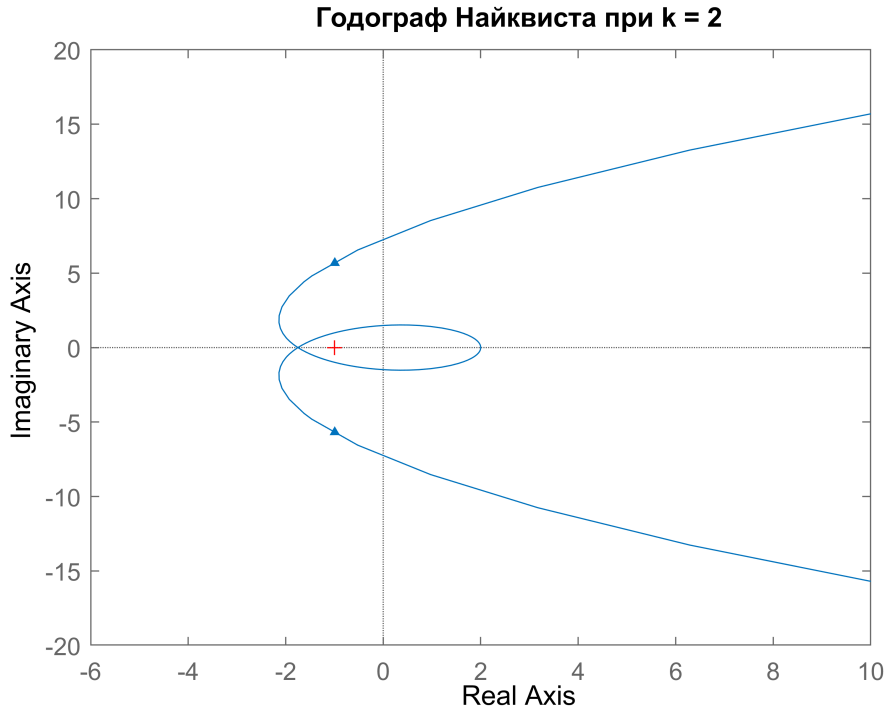

Рисунок 20 — Годограф Найквиста для $k = 2$

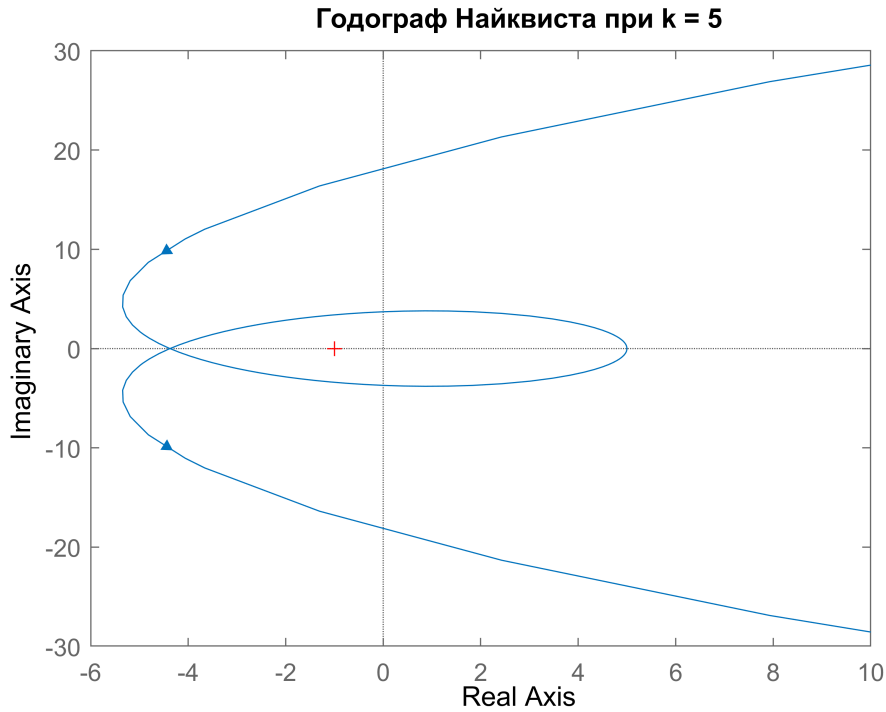

Рисунок 21 — Годограф Найквиста для $k = 5$

Как видим, годограф не замкнут, но имеет ”петлю”в левой полуплоскости. При увеличении коэффициента усиления k петля увеличивается и петля охватывает точку $(-1, 0)$. Система устойчива только если петля охватывает

точку $(-1, 0)$. Найдем миниальное значение коэффициента усиления, при котором система остается устойчивой:

$$W_2(j\omega) = \frac{-\omega^3 10j - 15\omega^2 + \omega 18j + 6}{10\omega^2 - \omega^3 10j} =$$

$$= \frac{100\omega^6 - \omega^5 250j - 330\omega^4 + \omega^3 240j + 60\omega^2}{100\omega^6 + 100\omega^4}$$

$$A_2(\omega) = \frac{\sqrt{100\omega^6 - 135\omega^4 + 144\omega^2 + 36}}{10\omega^2\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$\varphi_2(\omega) = \text{atan2}\left(\frac{240\omega^3 - 250\omega^5}{100\omega^6 + 100\omega^4}, \frac{100\omega^6 - 330\omega^4 + 60\omega^2}{100\omega^6 + 100\omega^4}\right)$$

$$\varphi_1(\omega_{\text{кр}}) = -\pi \Rightarrow \omega_{\text{кр}} = \frac{-2\sqrt{6}}{5}$$

$$k_{\text{мин}} = \frac{1}{A_1(\omega_{\text{кр}})} = \frac{8}{7}$$

Продемонстрируем переходные характеристики системы при коэффициентах k, соответствующих устойчивости и неустойчивости:

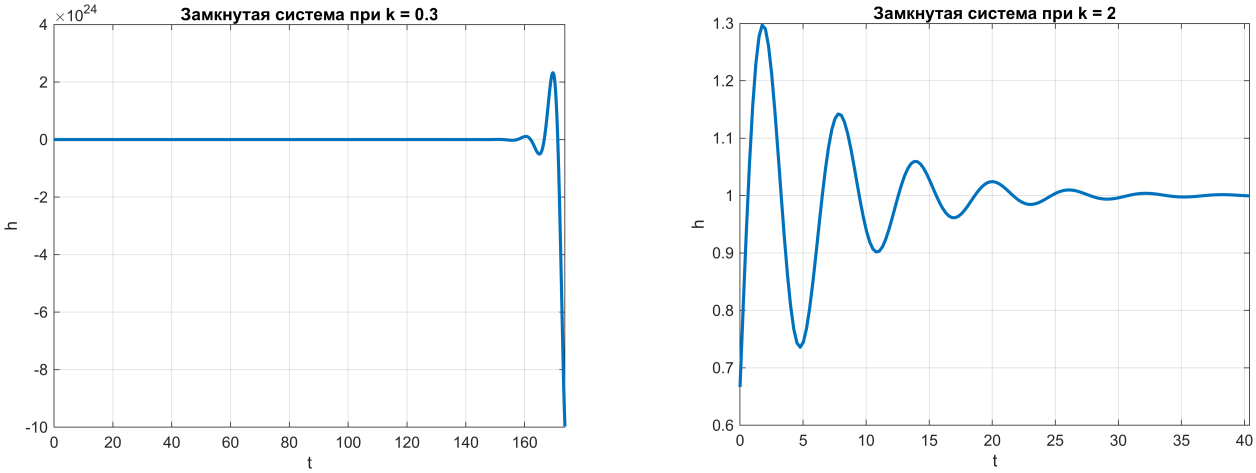

Рисунок 22 — Переходные характеристики системы при $k = 0.3$ и $k = 2$

3 ЗАПАЗДЫВАНИЕ

Даны 2 передаточные функции:

$$W_3(s) = \frac{s+7}{s^2+2s+10}$$

$$W_4(s) = \frac{10s^2-5s-15}{10s^3+5s^2+10s+38}$$

Добавим к передаточным функциям звено чистого запаздывания $e^{-\tau s}$:

$$W_3(s) = \frac{s+7}{s^2+2s+10}e^{-\tau s}$$

$$W_4(s) = \frac{10s^2-5s-15}{10s^3+5s^2+10s+38}e^{-\tau s}$$

3.1 Передаточная функция $W_3(s)$

Построим годограф Найквиста для передаточных функций с различными значениями запаздывания τ:

1. $\tau = 0$:
2. $\tau = 0.5$:
3. $\tau = 0.05$:
4. $\tau = 1$:
5. $\tau = 5$:

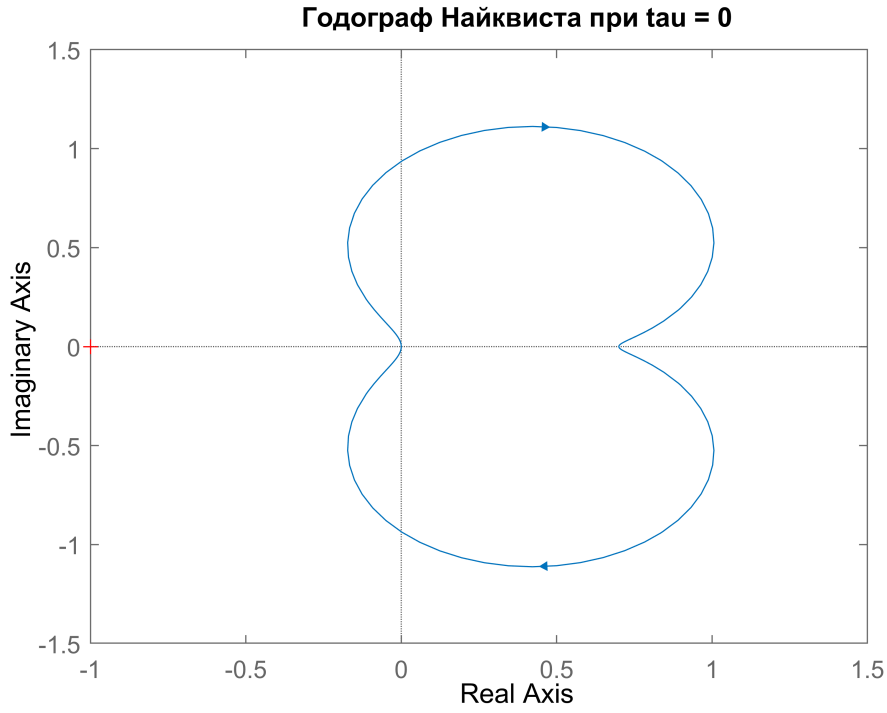

Рисунок 23 — Годограф Найквиста для $\tau = 0$

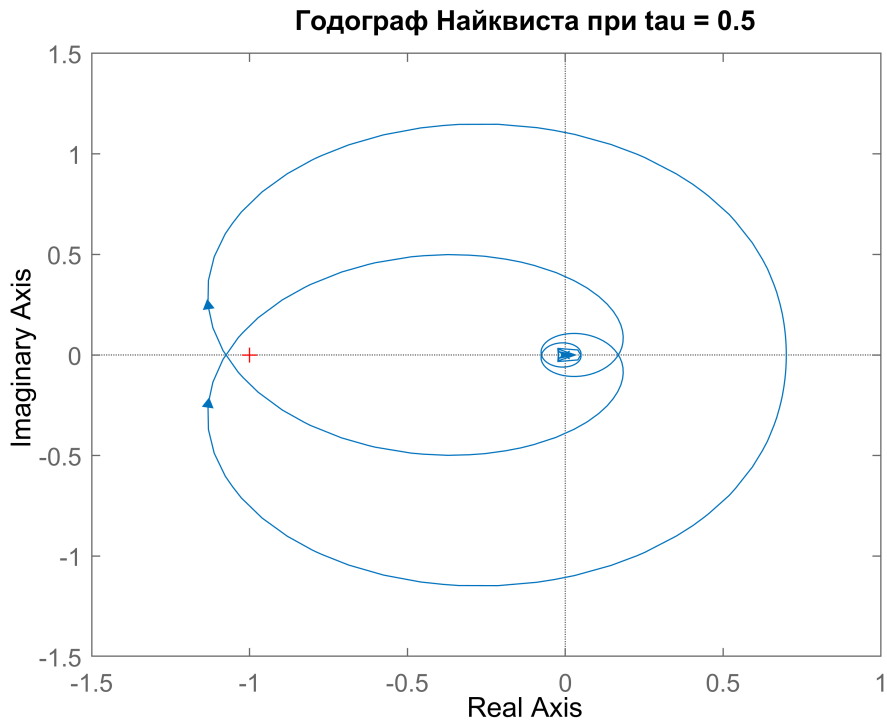

Рисунок 24 — Годограф Найквиста для $\tau = 0.5$

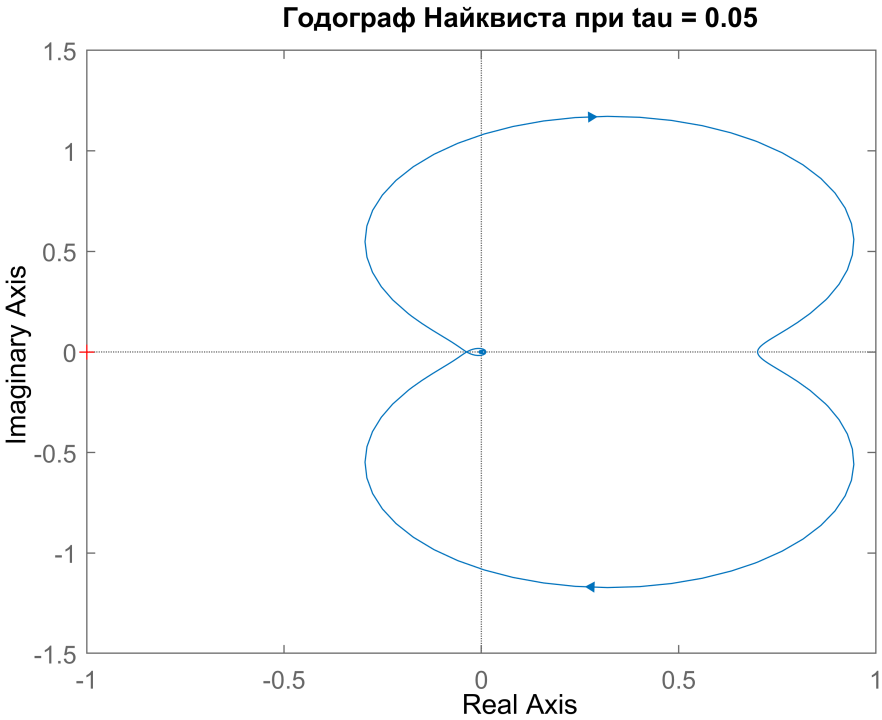

Рисунок 25 — Годограф Найквиста для $\tau = 0.05$

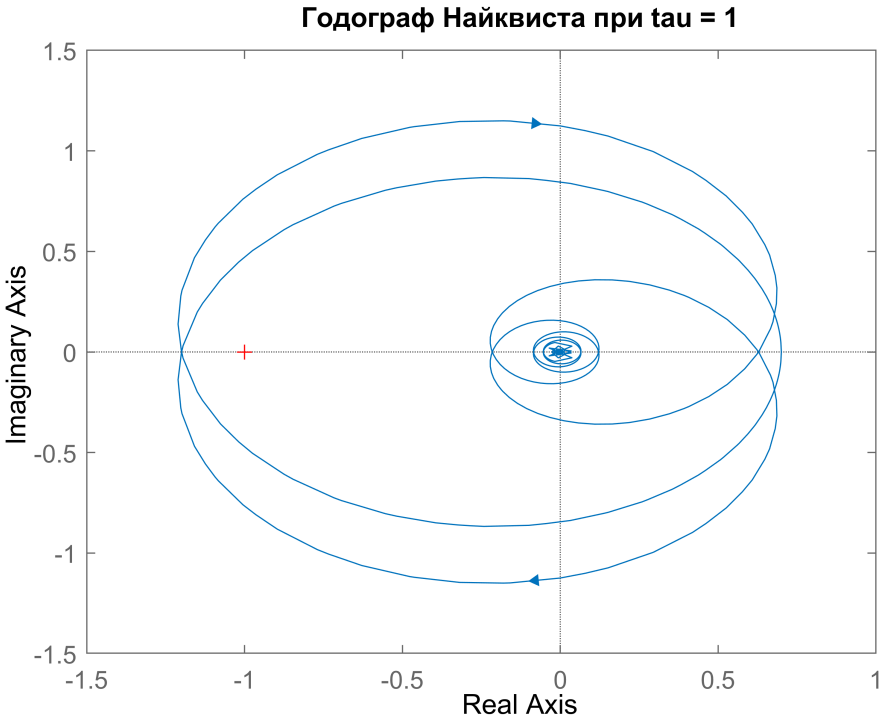

Рисунок 26 — Годограф Найквиста для $\tau = 1$

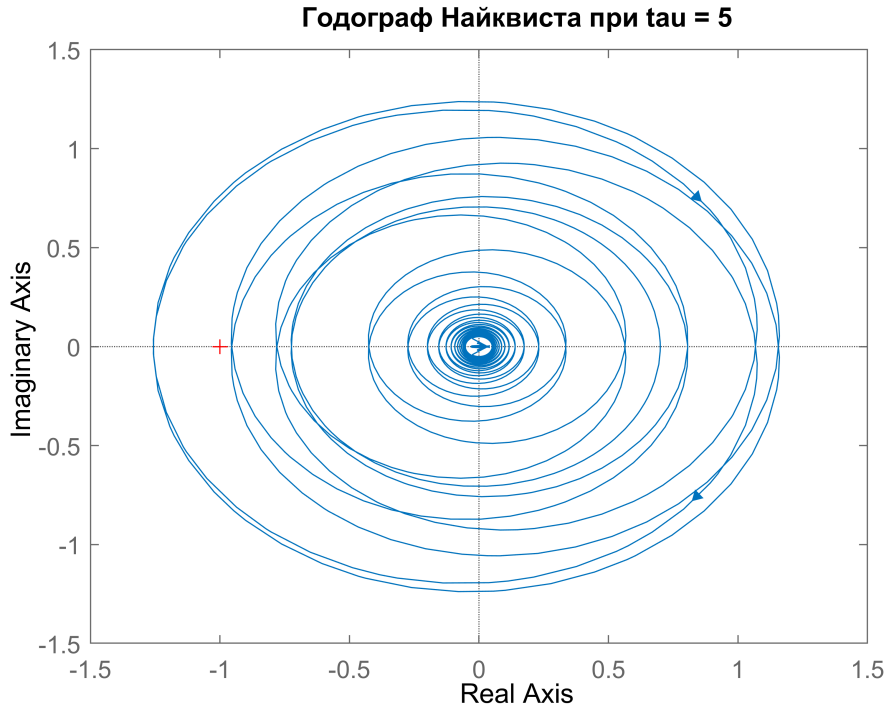

Рисунок 27 — Годограф Найквиста для $\tau = 5$

Как видим при увеличении запаздывания τ годограф все больше закручивается. Для того чтобы найти граничные значения при которых система остается устойчивой, найдем сначала частотные характеристики системы:

$$W_3(j\omega) = \frac{-5w^2 - 70 + (-w^3 + 4w)j}{w^4 - 16w^2 + 100}$$

$$A(w) = \frac{\sqrt{w^2 + 49}}{\sqrt{w^4 - 16w^2 + 100}}$$

$$\varphi(w) = \text{atan2}\left(\frac{-w^3 + 4w}{w^4 - 16w^2 + 100}, \frac{-5w^2 - 70}{w^4 - 16w^2 + 100}\right)$$

Частоты среза имеют значения:

$$w_{cp1} = 1.97, \quad w_{cp2} = 3.62$$

Запас по фазе:

$$\varphi_{p1} = \pi + \varphi(w_{cp1}) = \pi - 0.3 = 2.84$$

$$\tau_1 = \frac{\varphi_{p1}}{w_{cp1}} = 1.44$$

$$\varphi_{p2} = \pi + \varphi(w_{cp2}) = \pi - 1.5 = 1.64$$

$$\tau_2 = \frac{\varphi_{p2}}{w_{cp2}} = 0.45$$

Таким образом, система остается устойчивой при $\tau < 0.45$ и $\tau > 1.44$. Продемонстрируем переходные характеристики системы при коэффициентах τ, соответствующих устойчивости и неустойчивости для каждой из областей:

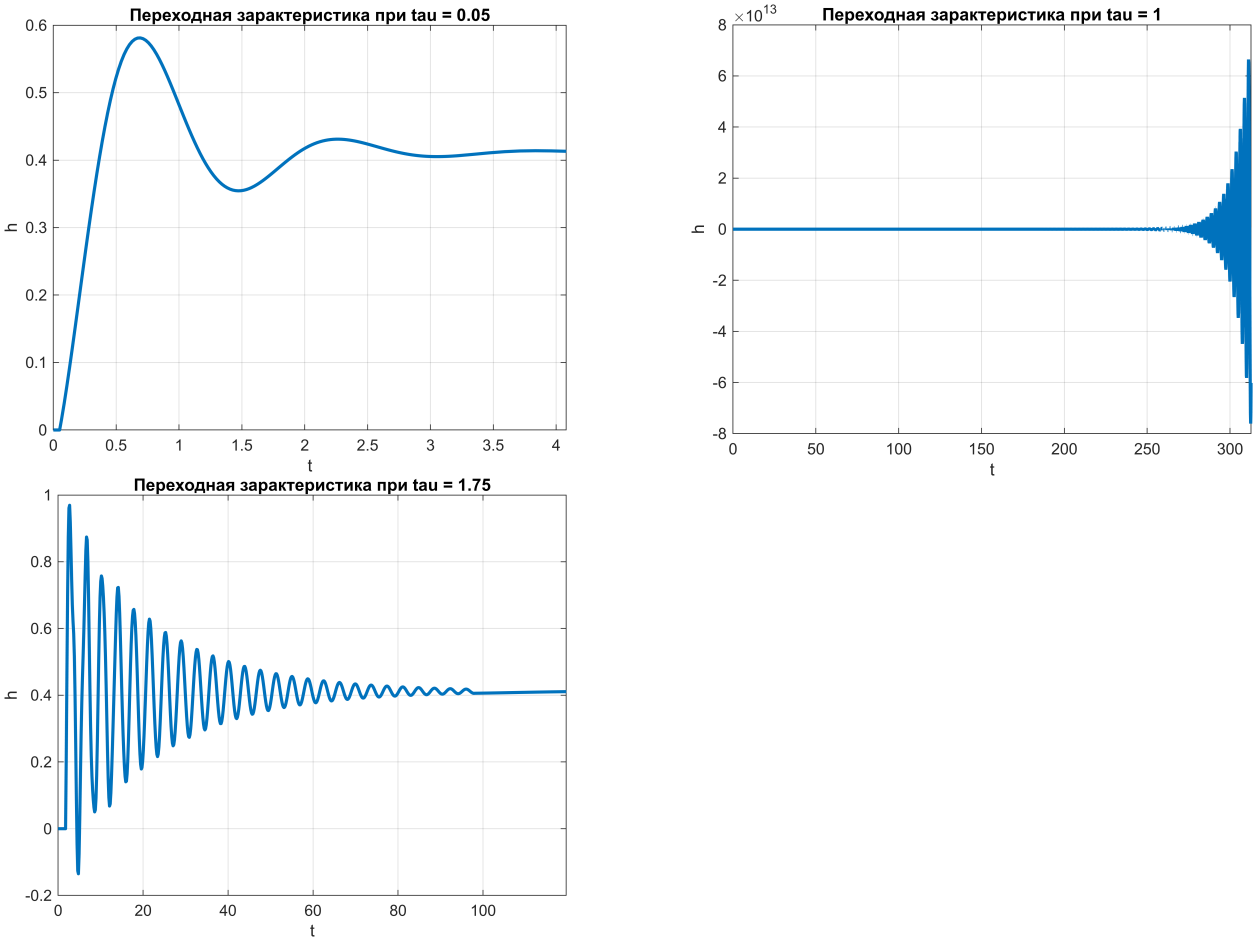

Рисунок 28 — Переходные характеристики системы для $\tau = 0.05$, $\tau = 1$, $\tau = 5$

3.2 Передаточная функция $W_4(s)$

Построим годограф Найквиста для передаточных функций с различными значениями запаздывания τ:

1. $\tau = 0$:
2. $\tau = 0.5$:
3. $\tau = 0.05$:
4. $\tau = 1$:
5. $\tau = 5$:

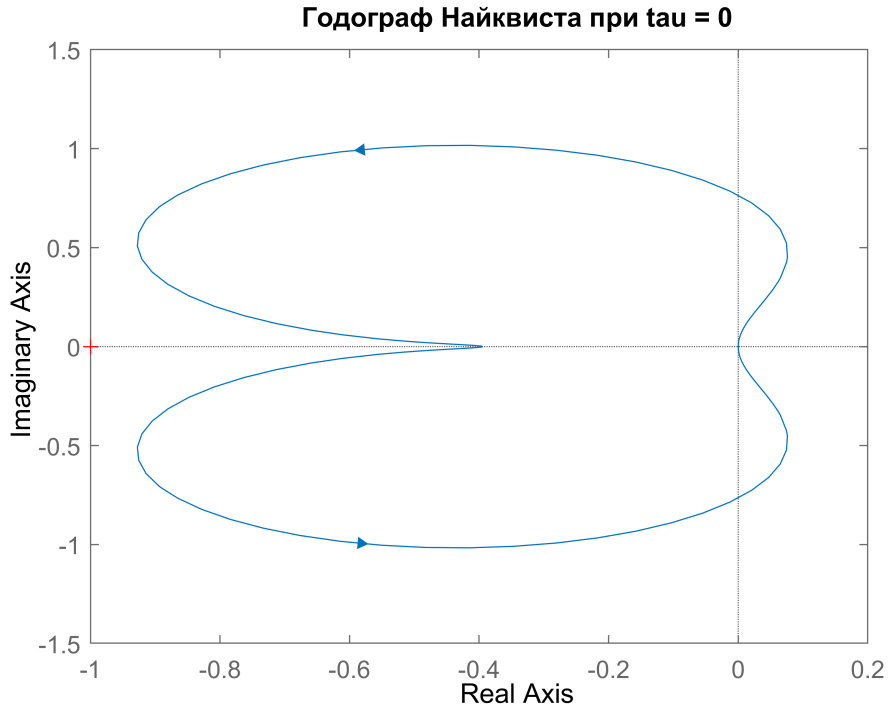

Рисунок 29 — Годограф Найквиста для $\tau = 0$

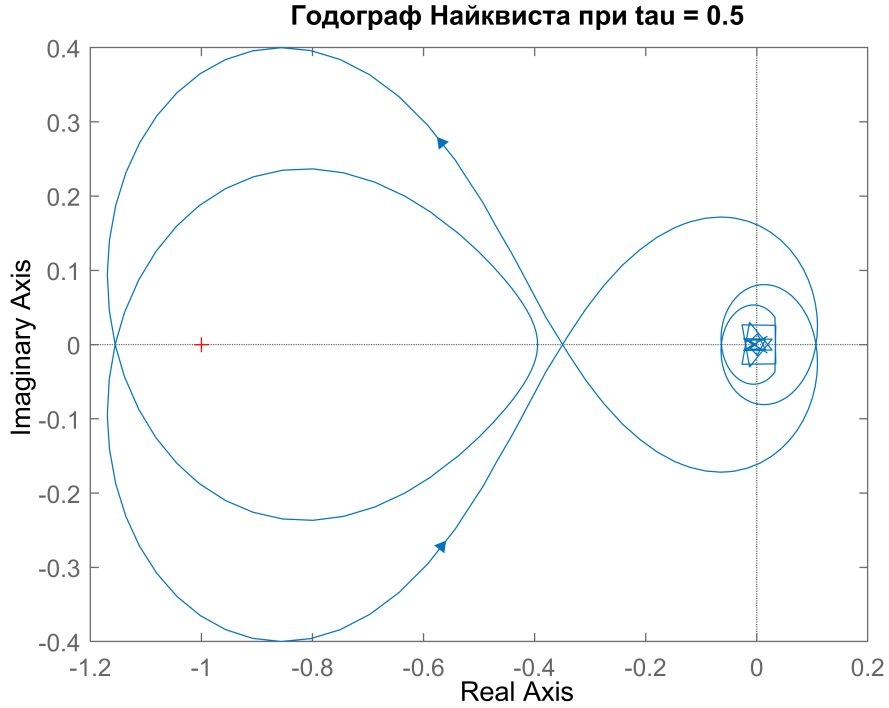

Рисунок 30 — Годограф Найквиста для $\tau = 0.5$

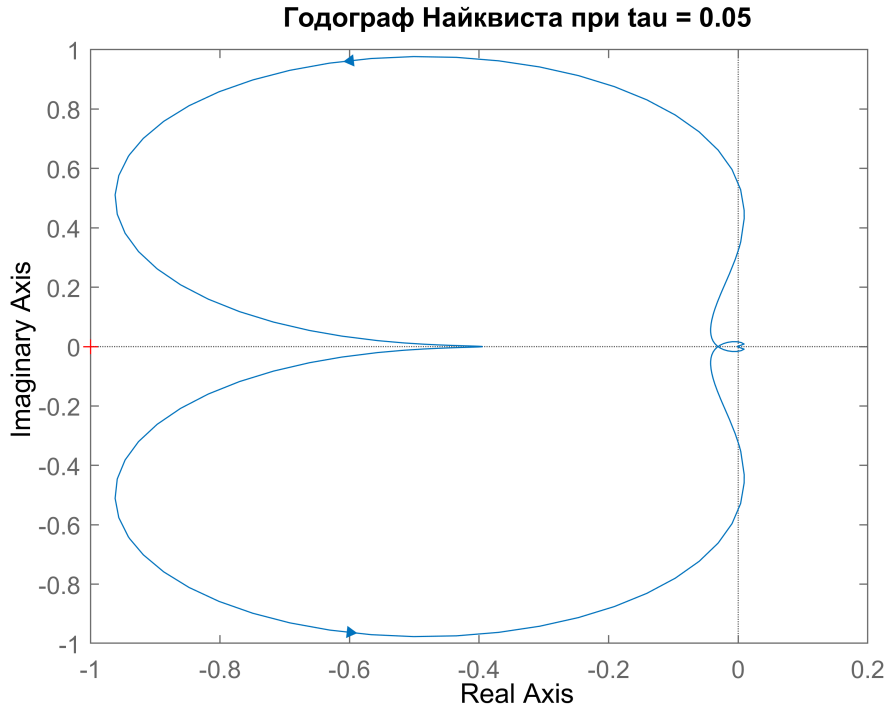

Рисунок 31 — Годограф Найквиста для $\tau = 0.05$

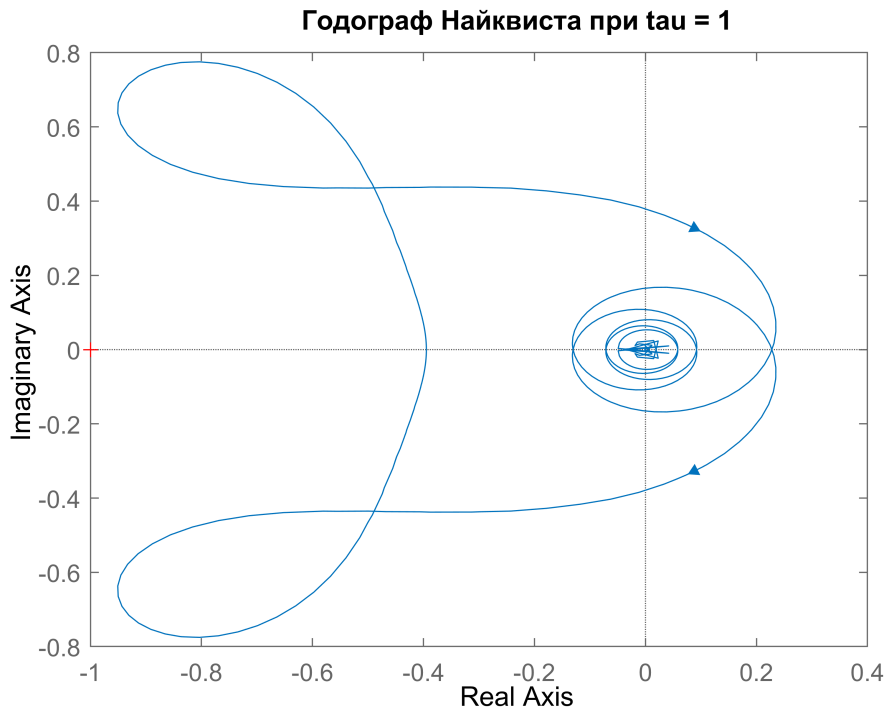

Рисунок 32 — Годограф Найквиста для $\tau = 1$

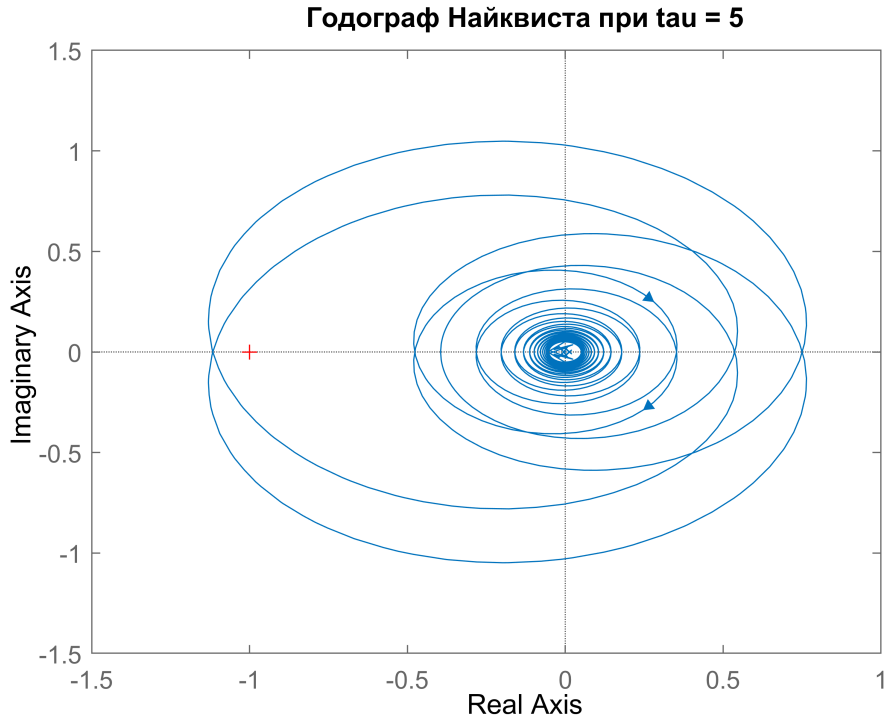

Рисунок 33 — Годограф Найквиста для $\tau = 5$

Как видим эта передаточная функция ведет себя похожим образом, что и предыдущая. При увеличении запаздывания τ годограф все больше закручивается. У этой системы расположение корней совпадает с предыдущей, поэтому граничные значения запаздывания найдем аналогично:

$$w_{cp1} = 1.86$$

$$\varphi_{p1} = \pi + \varphi(w_{cp1}) = \pi - 1.81 = 1.33$$

$$\tau_1 = \frac{\varphi_{p1}}{w_{cp1}} = 0.72$$

$$w_{cp2} = 1.24$$

$$\varphi_{p2} = \pi + \varphi(w_{cp2}) = \pi - 2.62 = 0.52$$

$$\tau_2 = \frac{\varphi_{p2}}{w_{cp2}} = 0.42$$

Таким образом, система остается устойчивой при $0.42 > \tau > 0.72$. Продемонстрируем переходные характеристики системы при коэффициентах τ, соответствующих устойчивости и неустойчивости для каждой из областей:

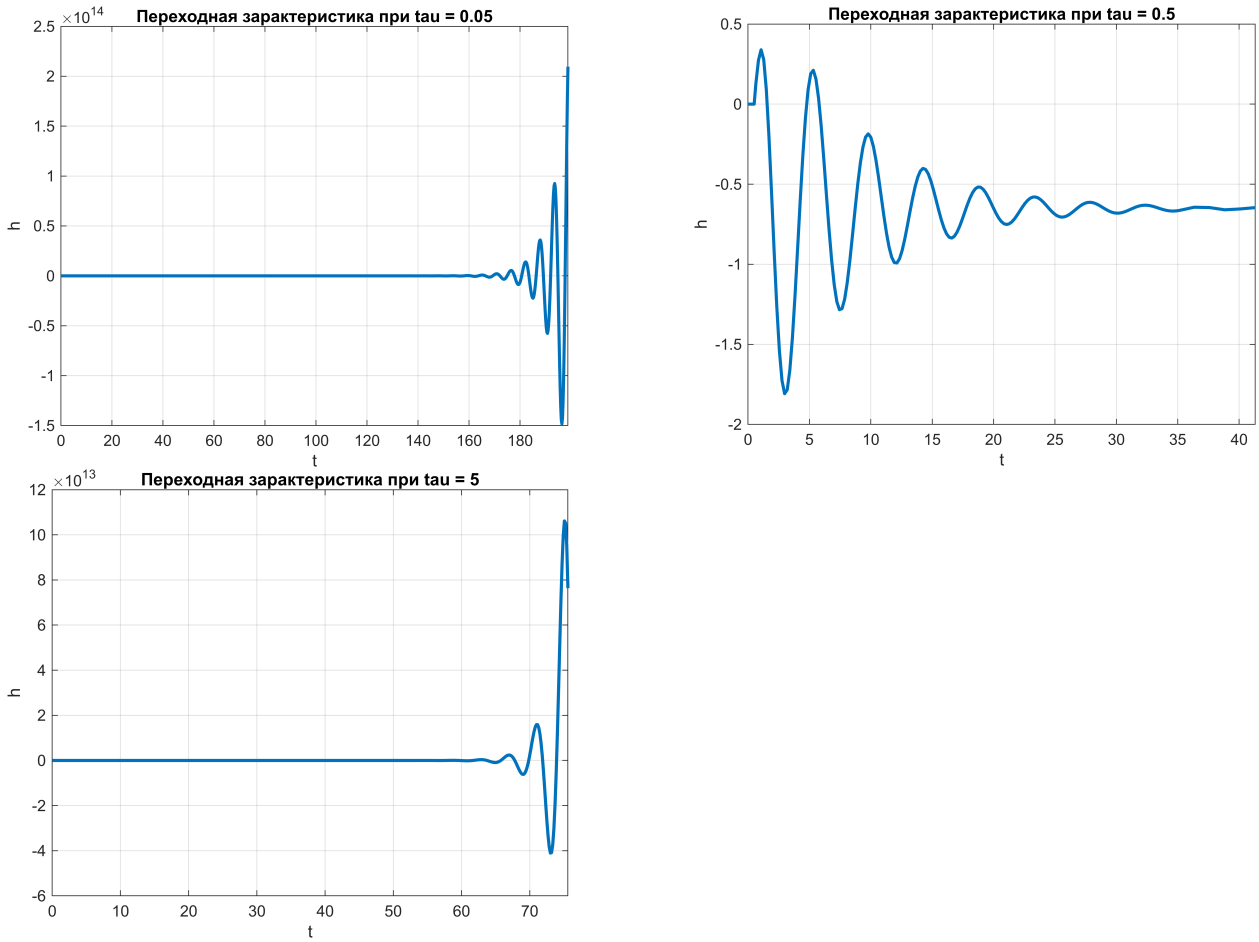

Рисунок 34 — Переходные характеристики системы для $\tau = 0.05$, $\tau = 1$, $\tau = 5$

4 ВЫВОД

В данной лабораторной работе были изучены годограф Найквиста, критерий Найквиста и логарифмический критерий Найквиста. Мы подтверждаи ожидания относительно устойчивости системы, а также определили максимальное значение коэффициента усиления, при котором система остается устойчивой. Также мы определили значения запаздывания, при которых система остается устойчивой.