

讨论 2

刘可唯

February 2025

1 问题概述

1.

$$\text{设 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{3}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

(1) $F(x)$ 是某随机变量 X 的分布函数吗?

(2) 如果是, X 的所有可能取值是什么?

(3) 如果是, X 是什么类型的随机变量? 离散型、连续型? 还是其它类型?

2.

$$\text{下面 } F(x) \text{ 为分布函数吗? } F(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2}, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}, & x \geq 1. \end{cases}$$

如果是, 这个随机变量是什么类型, 随机变量的取值范围是什么?

2 问题解决

1.(1) 是。因为 $F(x)$ 满足

①

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

② $F(x)$ 单调不减。

③ $F(x)$ 是右连续函数。

(2) X 的所有可能取值是 $[0, 1]$ 内的一切实数。

(3) 其他类型。

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \frac{1}{3}, F(1) = 1,$$

而

$$P(X = 1) = F(1) - F(1 - 0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

因此可以认为 X 在 $[0, 1)$ 上是一个连续型随机变量, 而在 $X = 1$ 具有离散的行为。

2. 是。因为 $F(x)$ 满足

①

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

② $F(x)$ 单调不减。

③ $F(x)$ 是右连续函数。

并且

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \frac{1}{2} = F(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \frac{1}{2} = F(1)$$

因此 $F(x)$ 也左连续, 即 $F(x)$ 是个连续函数, X 是连续型随机变量。容易知道取值范围是 \mathbb{R} 。