Proyecto Compilando Conocimiento

Matemáticas Discretas

Relaciones Binarias

Una Pequeña Introducción

Autor:
Rosas Hernandez Oscar Andres

Índice general

Capítulo 1

Relaciones

1.1. Definición

Una relación R entre dos conjuntos A y B es ante todo otro conjunto, una relación binaria es aquella que es en el fondo un conjunto de pares ordenados (x,y) donde x es un elemento de A, y así mismo y es un elemento de B.

Este nuevo conjunto R nos muestra como es que esta relacionados algunos (o todos) elementos de A con otros elementos de B.

Definiciones Formales

Una Relación $R : A \to B$ es un subconjunto de $A \times B$.

Solemos escribir la proposición $(x, y) \in R$ como xRy para que se vea más bonito.

Solemos escribir la proposición $(x, y) \notin R$ como $x \not R y$ para que se vea más bonito.

1.2. Dominio, Contradominio e Imagen

Dominio

El dominio D_R de una relación $R : A \to B$ es simplemente el subconjunto de A que contiene a todos los elementos que están relacionados hacia algun elemento de B.

$$D_R = \{a \in A \ \mid \ \exists b, \ aRb\} \tag{1.1}$$

Imagen

También le llama Rango, la Imagen I_R de una relación $R : A \to B$ es simplemente el subconjunto de B que contiene a todos los elementos que están relacionados mediante R.

$$I_R = \{b \in B \ \mid \ \exists a, \ aRb\} \tag{1.2}$$

1.3. Relación Inversa

Una relación inversa es bastante fácil de definir:

$$R^{-1} = \{(b, a) \in (B \times A) \ \mid \ (a, b) \in R\} \tag{1.3}$$

1.4. Reflexiva, Simétrica y Transitiva

Vamos a definir estas propiedades para una $R : A \to A$.

1.4.1. Reflexiva

Una relación reflexiva es aquella en la que cualquier a tiene que estar relacionada consigo misma.

$$\forall a \in A, \ \ aRa \tag{1.4}$$

Cerradura Reflexiva

Si te das cuenta la relación mas sencilla que es simétrica es bastante simple:

$$Id_A = \{(a, a) \ \ | \ \ a \in A\} \tag{1.5}$$

La cerradura reflexiva $Cl_R(R)$ de una relación R es una relación que cumple con:

- Es reflexiva: $Cl_R(R)$ es reflexiva.
- R esta contenida en ella: $R \subseteq Cl_R(R)$
- $Cl_R(R)$ es la relación mas pequeña posible: Si es que S es reflexiva y $R \subseteq S$ entonces $Cl_R(R) \subseteq S$

De hecho si te das cuenta es muy sencillo encontrarla, pues $Cl_R(R) = R \cup Id_A$.

1.4.2. Simétrica

Una relación simétrica es aquella en la que cualquier si existe aRb existe bRa.

$$\forall a, b \in A,\ (aRb) \to (bRa) \tag{1.6}$$

La cerradura simétrica $Cl_S(R)$ de una relación R es una relación que cumple con:

- Es simétrica: $Cl_S(R)$ es simétrica.
- R esta contenida en ella: $R \subseteq Cl_S(R)$
- $Cl_S(R)$ es la relación mas pequeña posible: Si es que S es simétrica y $R \subseteq S$ entonces $Cl_S(R) \subseteq S$

De hecho si te das cuenta es muy sencillo encontrarla, pues $Cl_S(R) = R \cup R^{-1}$.

1.4.3. Transitiva

Una relación transitiva es aquella en la que cualquier a tiene que estar relacionada consigo misma.

$$\forall a, b, c \in A, \ ((aRb) \wedge (bRa)) \ \Rightarrow \ (aRc) \tag{1.7}$$

La cerradura transitiva $Cl_T(R)$ de una relación R es una relación que cumple con:

- Es transitiva: $Cl_T(R)$ es transitiva.
- R esta contenida en ella: $R \subseteq Cl_T(R)$
- $Cl_T(R)$ es la relación mas pequeña posible: Si es que S es transitiva y $R \subseteq S$ entonces $Cl_T(R) \subseteq S$

1.4.4. Relación de Equivalencia

Decimos que R es una relación de equivalencia si es que se cumplen las 3 propiedades antes vistas

Capítulo 2

Funciones

2.1. Definición

Las funciones son más que meras descripciones de relaciones numéricas. En un sentido más general, las funciones pueden comparar y relacionar diferentes tipos de estructuras matemáticas.

Es probable que vea una función como un tipo de fórmula que describe una relación entre dos (o más) cantidades.

Podemos definirlas de una manera informal como aquellas relaciones donde cada elemento de A esta involucrado solo una vez en la relación.

Definición Formal

Digamos que tenemos una relación f entre dos conjuntos A y B. Decimos que esta relación es una función si y solo si:

- Todo los elementos del dominio tienen un valor asignado:

$$\forall a \in A, \exists b \in B, \;\; afb \tag{2.1}$$

- Si aRb_1 y aRb_2 entonces $b_1 = b_2$

Pero no es la única forma de definirlo, otra forma que una función es una relación que cumple con la propiedad de que para cada $a \in A$, la relación f contiene exactamente un par ordenado de la forma $(a, b) \in f$.

Ya que solo existe un par ordenado para cada $a \in A$, entonces solemos escribir aRb como $f(a) = b$.

2.2. Dominio e Imagen

Dominio

El dominio D_f de una función $f : A \to B$ es simplemente el conjunto de A.

Digo, esto se deduce de la definición, ya que es el conjunto de todas las posibles entradas.

Imagen

El Rango ó Imagen de una función $f : A \to B$ es el conjunto de todas las posibles salidas de la función.

$$\text{Rango}_f = \{b \in B \ \mid \ (a, b) \in f\} == \{f(a) \ \mid \ a \in A\} \tag{2.2}$$

2.3. Inyectivas, Suprayectivas y Biyectivas

2.3.1. Biyectiva

Son funciones muy especiales, son aquellas en las tanto son inyectivas como suprayectivas. Pero veamos mas a fondo que es eso de que una función sea alguna de estas cosas.

2.3.2. Funciones Inyectivas

"Una función es aquella en la que una línea horizontal NUNCA toca más de un punto de la función".

Una función es inyectiva si a cada valor del conjunto dominio le corresponde un valor distinto en el conjunto imágen, es decir en el que es imposible que la función mande dos valores al mismo valor en B.

Es decir si es que es imposible que $f(a_1) = b$ y que también $f(a_2) = b$.

$$\forall x, y \in A,\ (x \neq y) \ \Rightarrow \ (f(x) \neq f(y)) \tag{2.3}$$

Demostraciones

Para lograr demostrar que una f es inyectiva tenemos que demostrar que para cualquiera combinación de elementos $x, y \in A$ se cumple que el hecho de que sean diferentes infiere a que $f(x) \neq f(y)$.

- **Demostración Directa**:

  Supón que $x, y \in A$ y que $x \neq y$

  ...

  Por lo tanto $f(x) \neq f(y)$

- **ContraPositiva**:

  Supón que $x, y \in A$ y que $f(x) = f(y)$

  ...

  Por lo tanto $x = y$

2.3.3. Suprayectivas

"Una función es aquella en la que una línea horizontal SIEMPRE toca mínimo punto de la función".

Son funciones en las que cada elemento del rango tiene un element o en A. Una función es suprayectiva si está aplicada sobre todo B.

$$\forall b \in B, \exists a \in A, \;\; f(a) = b \tag{2.4}$$

2.3.4. Principio del Palomar

Aquí hay una gran historia de porque se llama así este principio.

Supón que A y B son conjuntos finitos y que existe una $f : A \to B$ que es una función. Entonces tenemos que:

- Si $|A| > |B|$, entonces f no es inyectiva.
- Si $|A| < |B|$, entonces f no es suprayectiva.

2.4. Función Inversa

Aunque parecido, para que exista la relación inversa sea también una función, nuestra función original tendrá que ser biyectia.

Esta función inversa tiene una propiedad muy obvia:

$$\forall x \in A, \;\; f^{-1}(f(x)) = x \tag{2.5}$$

Y también otra obvia:

$$\forall y \in B, \;\; f(f^{-1}(y)) = y \tag{2.6}$$

2.5. Imagén y Preimagen

Sea una función $f : A \to B$ y además $X \subseteq A$ y $Y \subseteq B$.

Imagén

La imágen es a fin de cuentas un conjunto, de manera fomral:

$$f(X) = \{f(x) \ \mid \ x \in X\} \tag{2.7}$$

Y es bastante obvio que $f(X) \subseteq B$.

PreImagen

La preimagen es a fin de cuentas un conjunto, y esta definido, incluso aunque la función no sea invertible, esta esta definida de manera fomral:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \ \mid \ f(x) \in Y\} \tag{2.8}$$

Y es bastante obvio que $f^{-1}(Y) \subseteq A$.

2.6. Cardinalidad y Funciones

Podemos definir la cardinalidad de los conjuntos de una mejor manera usando la cardinalidad:

Los conjuntos tienen la misma cardinalidad $|A| = |B|$ si y solo si es que existe una función biyectiva $f : A \to B$.

Gracias a esto podemos decir que:

- $|\,\mathbb{N}\,| = |\,\mathbb{Z}\,| = |\,\mathbb{Q}\,| = \aleph_0$
- $P(|\,\mathbb{N}\,|) = |\,\mathbb{R}\,| = \aleph_1$
- $P(|\,\mathbb{R}\,|) = \aleph_2$