Proyecto Compilando Conocimiento

Matemáticas Discretas

Teoría de Conjuntos

Una Pequeña Introducción

Autor:
Rosas Hernandez Oscar Andres

Índice general

Capítulo 1

Principios Básicos

1.1. Definición

¿Qué son?

Olvida todo lo que sabes sobre números. Olvídate de que sabes lo que es un número. Aquí es donde empiezan las matemáticas. En vez de matemáticas con números, vamos a hacer matemáticas con 'cosas'.

Se denomina conjunto a la agrupación de entes o elementos, que poseen una o varias características en común.

Un conjunto puede ser una agrupación de números, de vectores, de autos, de espacios vectoriales, de objectos, de funciones e incluso un conjunto puede ser una agrupación de otros conjuntos.

Ideas Importantes

Lo conjuntos generalmente son denotados por letras mayúsculas, como $A, B, C, \cdots$, mientras que las letras minusculas como $a, b, c, \cdots x, y, z$ se usan para representar elementos de un conjunto.

Quiza los conjuntos más importantes que verás a lo largo de estos apuntes son:

- $\mathbb{N}$: Representa al conjunto de todos los naturales, ya sabes números como $1, 2, 3, \cdots$
- $\mathbb{Z}$: Representa al conjunto de todos los enteros, ya sabes números como $\cdots, -1, 0, 1, \cdots$
- $\mathbb{Q}$: Representa al conjunto de todos los racionales, ya sabes números como $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{23}{72}, \cdots$
- $\mathbb{R}$: Representa al conjunto de todos los reales, ya sabes números como $\frac{3}{2}, -\pi, 3, \cdots$
- $\mathbb{C}$: Representa al conjunto de todos los complejos, ya sabes números como $3 + 2i, \pi i, 3, \cdots$

1.2. ¿Cómo Definirlo?

1.2.1. Pertencia

Creo que el símbolo más importante al hablar de conjuntos es este: $x \in A$. Esto quiere decir, el elemento x **pertenece** al Conjunto A.

Y de la misma manera puedes usar el símbolo $\notin$ que significa **no pertenece**.

1.2.2. Notación Básica

La notación más común para declarar o hablar de un conjunto es colocar los elementos de esta manera : $A = \{$ Elementos de A$\}$.

Puedes entonces hacer algo como:

- Enumerar TODOS los elementos o entes que forman el conjunto :
  $A = \{a, e, i, o, u\}$
- Enumerar un patrón de los elementos o entes que forman el conjunto :
  $A = \{+2, -4, +8, -16, \cdots\}$

Recuerda también:

- Los elementos repetidos no cuentan, si ya esta un elemento dentro del conjunto, da lo mismo que lo vuelvas a enumerar.
  $A = \{a, e, i, o, u\} = \{a, a, e, i, o, u\}$
- No importa el orden en el me muestres los elementos, solo importa que esten dentro.
  $A = \{a, e, i, o, u\} = \{u, a, i, e, o\}$

1.2.3. Notación Formal

Esta notación tiene un nombre genial en inglés, se le conoce como **Set Builder Notation**, esta notación es la que sueles encontrar en los libros.

Se ve fea al principio pero te da toda la información que necesitas.

Veamos como formarla poco a poco:

Lo primero que hacemos es elegir una letra minúscula (de forma normal, no es ninguna regla) que representará a cualquier elemento al azar del conjunto, por ejemplo usemos la x.

También solemos usar la línea vertical, de esta forma: $P_1|P_2$ que se lee como: P_1 tal que P_2.

Formas Básica

Ahora si, veamos como se ve esta notación:

$$A = \{x \ \mid \ x \dots\} \tag{1.1}$$

Esto es la base y esto es lo que nos quiere decir:

Definimos cierto conjunto, al que llamaremos A como la agrupación de todas las x (es decir cada x es un elemento, un ente) tal que cumplen ciertas características (eso es lo que significa esos puntitos, ahí deberías poner las reglas que tenga tu conjunto).

Por ejemplo podemos poner algo como:

$B = \{x \ \mid \ x \in \mathbb{N}, \ x < 4\}$

B es el conjunto de todas las x tal que x pertenece a los Naturales y x es menor que 4.

Formas Alternas

También es común ver la característica que pertenece a cierto conjunto mayor antes de la línea vertical.

Entonces el ejemplo anterior se vería como:

$B = \{x \in \mathbb{N} \ \mid \ x < 4\} = \{x \ \mid \ x \in \mathbb{N}, \ x < 4\}$

1.2.4. Ejemplos

Ejemplo 1:

Veamos por ejemplo como definir el Conjunto C_2 como aquel que contenga a TODOS las vocales:

$$C_2 = \{Vocales\}$$
$$C_2 = \{a, e, i, o, u\}$$

Si te das cuenta, podemos definirlos de muchas maneras.

Ejemplo 2:

Veamos por ejemplo como definir el Conjunto C *(lo sé me muero con mi creatividad para los nombres)* como aquel que contenga a TODOS los números reales negativos:

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid \quad x < 0\}$$

En Lenguaje normal:
Esto lo podemos leer como C es el conjunto *(es decir todo lo que esta entre parentesís)* de todas las x que pertenezcan al los números reales *(eso quiere decir el $x \in \mathbb{R}$)* tal que (eso lo representamos como: $|$) x es menor que 0 *(esa es nuestra condición para encontrar si alguna x pertenece a nuestro conjunto)*.

1.3. Clasificación

Podemos clasificar de muchas maneras a los conjuntos, veamos las más comunes:

Tamaño

- **Finito**: Si tiene una colección que se pueda contar, aunque sea difícil.

  Por ejemplo, el conjunto de juguetes incluye todos los tipos de juguetes que hay en el mundo. Aunque sea difícil, se podrían contar todos los tipos de juguetes del mundo, por lo que es finito.

- **Infinito**: Si tiene una colección que no se pueda terminar de contar nunca.

  Por ejemplo, el conjunto de todos los números pares, que son infinitos, es un conjunto infinito.

1.4. Conjunto Vacío

Ok, ya sabemos que un conjunto es un grupo de elementos, pero ... ¿Cómo represento a un conjunto en el que no hay nada?

Como una caja vacía.

De hecho, me gusta, hablemos de el Conjunto vacío como un caja vacía.

Definición

Llamemos ϕ como aquel conjunto tal que $\phi = \{\}$ es decir el conjunto que no tiene elementos.

Solemos usar este simbolo por su parecido con un cero, pero recuerda no es un cero, simplemente es una forma de denotar al conjunto vacío.

Ideas Importantes

Listo, eso es casí todo, además te gustará que te recuerde las siguientes proposiciones:

- $|\phi| = 0$: Esto quiere decir que la cardinalidad *(es decir la cantidad de elementos)* del conjunto vacío es la misma que la cantidad de galletas en una caja vacía de galletas, osea 0.
- $\phi \neq \{\phi\}$: Esto quiere decir que no es lo mismo hablar del conjunto vacío que de hablar de un conjunto cualquiera que contiene al conjunto vacío.

  Es decir simplemente no es lo mismo tener una caja vacía que una caja con una caja vacía dentro *(si lo piensas la segunda caja ya no esta completamente vacía)*

1.5. Conjunto Universo

Como podemos imaginarnos, tenía que existir un término inverso, digamos que estamos analizando y agrupando animales por su habitad, entonces tenemos muchos conjuntos cool como animales del bosque o marinos, pero también tenemos a un mega conjunto que llamamos universo donde tenemos a todos los animales.

Muchas veces a la hora de hablar sobre conjuntos solemos definirlos sobre un universo.

Podemos ver muchaS analogías, veamos a ver cual te gusta más:

- Es como si el universo fuera el padre, entonces las hijas son nuestros conjuntos
- Es como si el universo una caja de cereal, entonces nuestros conjuntos son grupos de cereales que estaban dentro de la caja.

Definición

Un conjunto universo es aquel conjunto que contiene a cualquier conjunto del que estemos hablando.

Ideas Importantes

Creo que resulta bastante obvio pero aquí hay algunas cosas que quizá te interesen.

- $\phi^C = U$
- $U^C = \phi$

Capítulo 2

Álgebra y Operaciones

2.1. Relaciones

Es muy importante que ademas de hablar de los conjuntos hablemos de las relaciones que existen entre los dos conjuntos.

2.1.1. Equivalencia

Creo que esta relación es más que obvia, tanto que ya la he usado sin darme cuenta porque considero que es de lo más obvio.

Que dos conjuntos sea iguales quiere decir que ambos conjuntos contiene **exactamente** los mismos elementos.

Ve entonces que ahora tiene mucho sentido las ideas que puse antes:

- Los elementos repetidos no cuentan, si ya esta un elemento dentro del conjunto, da lo mismo que lo vuelvas a enumerar.
  $A = \{a, e, i, o, u\} = \{a, a, e, i, o, u\}$
- No importa el orden en el me muestres los elementos, solo importa que esten dentro.
  $A = \{a, e, i, o, u\} = \{u, a, i, e, o\}$

2.1.2. Subconjuntos

Esta es la relación mas importante siento yo, porque será la que mas ocupemos a lo largo del tiempo.

Que el A sea un subconjunto de B quiere decir que **todos** los elementos de A también son elementos de B.

Definición

Una forma más formal de definirlo es que $x \in A \to x \in B$

Esta idea es muy inteligente, pues nos dice que un el hecho de que un elemento pertenezca a A infiere o nos obliga a que ese mismo elemento pertenezca a B.

Proposiciones

Algunas proposiciones muy obvias son que:

- $A \subseteq A$
- Si $A = B$, entonces $A \subseteq B$
- Todos los conjuntos son subconjuntos de conjunto universo U
- $\emptyset$ es un subconjunto de cualquier conjunto

SubConjuntos Propios

Solemos usar la idea de un subconjunto propio $A \subset B$ si es que sabemos ya que: $A \subseteq B$ y $A \neq B$

2.2. Operaciones

Podemos hacer operaciones con los conjuntos de una manera muy similiar a como hacemos operaciones con los números normales, tu defines una operación, y la haces entre dos conjuntos y esta te dará un nuevo conjunto, pero aquí siento que son incluso más divertidas.

Te presentaré estas operaciones una a una y te mostraré con mas detalle cada una, así que vamos, empecemos:

2.2.1. Intersección

Lo mejor de dos mundos, veamos como seleccionar a los elementos en común con operaciones de conjuntos.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y también } x \in B\} \tag{2.1}$$

Esta operación basicamente nos da un conjunto en el que estan **solo** los elementos que bien pertenezcan a A y bien que pertenezcan a B.

2.2.2. Unión

La unión representa la fuerza, así que veamos que representa la unión cuando estemos hablando de conjuntos.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó bien } x \in B\} \tag{2.2}$$

Esta operación basicamente nos da un conjunto en el que estan **todos** los elementos que bien pertenezcan a A o bien que pertenezcan a B.

2.2.3. Complemento

Todo lo que no seas tu, así que veamos que representa el complemento cuando estemos hablando de conjuntos.

$$A^C = \overline{A} = \{x \in U \ \mid \ x \notin A\} \tag{2.3}$$

Esta operación basicamente nos da un conjunto en el que estan **todos** los elementos que no pertenezcen a A.

También hay otra forma de definirlo como $A^C = U - A$

Conjunto Universo

Si lo piensas detenidamente, aquí hay un problema y es que no te dije que es U, este representa el conjunto universo, es decir, es aquel conjunto que del que todos los demás son subconjuntos.

Es importantes especificar cual es tu conjunto universo.

2.2.4. Resta

No quiero nada que ver contigo, así que veamos que representa la resta cuando estemos hablando de conjuntos.

$$A - B = A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ y también } x \notin B\} \tag{2.4}$$

Esta operación basicamente nos da un conjunto en el que estan **todos** los elementos de A que no pertenezcen a B.

A esta operación también se la conoce como complemento relativo.

También hay otra forma de definirlo como $A - B = A \cap B^C$

2.2.5. Diferencia Simétrica

El XOR de los conjuntos, así que veamos que representa la diferencia simétrica cuando estemos hablando de conjuntos.

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \cup B \text{ y también } x \notin A \cap B\} \tag{2.5}$$

Esta operación basicamente nos da un conjunto en el que estan **todos** los elementos que pertenezcen a A y a B, pero no a ambos.

Ve que de la definición se tiene que:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$
$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

De hecho de la útima proposición sale su nombre, es una diferencia simétrica.

2.2.6. Producto Cartesiano

Esta es la base de lo que se conoce como es plano cartesiano, y es quizá la operación mas útil que vas a conocer a lo largo de estos textos, veamos específicamente porque:

N-Tuplas

El resultado de un producto cartesiano es un conjunto formado de n-tuplas, cada n-tuplas es una agrupación ordenada de elementos. Por ejemplo (a, b) ó (x, y, z).

Al ser un ente ordenado $(a, b) \neq (b, a)$

La n en su nombre solo nos dice la cantidad de elementos que tiene cada tupla.

Definición

Esta operación basicamente nos da un conjunto en el que estan **todas** las n-tuplas donde su primer elemento pertenece a A y su segundo elemento pertenece a B.

$$A \times B = \{(a, b) \ \mid \ a \in A \text{ y también } b \in B\} \tag{2.6}$$

Ideas Importantes

- Ve que de la definición se tiene que $A \times B \neq B \times A$
- También de manera común solemos simplificar $A \times A$ como A^2
- Un elemento de $A \times B \times C$ es $((a, b), c) = (a, (b, c)) = (a, b, c)$

Ejemplo

Podemos hacer uso de una tabla para encontrar todos los elementos del producto cartesiano.

Veamos por ejemplo $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{x, y, z\}$

$A \times B$	x	y	z
a	(a, x)	(a, y)	(a, z)
b	(b, x)	(b, y)	(b, z)
c	(c, x)	(c, y)	(c, z)

Entonces :

$$A \times B = \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z), (c, x), (c, y), (c, z)\}$$

2.2.7. Conjunto Potencia

El conjunto que contiene a todos los subconjuntos posibles.

Esta operación es diferente en el sentido de que no toma sus elementos del conjunto que toma como entrada, sino que usa esos elementos para combinarlos y crear subconjuntos que son los elementos de esta nueva operación.

Ok, ok, quizá me puse muy intenso con el párrafo de arriba, veamos un poco más calmado como es que funciona.

Definición

Esta operación basicamente nos da un conjunto en el que estan **todos** los conjuntos que son subconjuntos de tu conjunto original.

$$P(A) = \{A' \ \mid \ A' \subseteq A\} \tag{2.7}$$

Ideas Importantes

- Si tu conjunto tiene n elementos, tu conjunto potencia tendrá 2^n elementos.
- Si $r < |A|$ entonces existen $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ subconjuntos de A de cardinalidad r

Ejemplo

Podemos hacer uso de una tabla y el binario para encontrar todos los elementos del conjunto potencia.

Si quieres crear un conjunto potencia, escribe la sucesión de números binarios de n cifras, y con cada número haz un subconjunto: Cuando haya un $'1'$, añade el elemento que corresponde.

Veamos por ejemplo $A = \{a, b, c\}$

abc	SubConjuntos
000	$\{\}$
001	$\{c\}$
010	$\{b\}$
011	$\{b, c\}$
100	$\{a\}$
101	$\{a, c\}$
110	$\{a, b\}$
111	$\{a, b, c\}$

Entonces :

$$P(A) = \{\{\}, \{c\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

2.3. Leyes de los Conjuntos

Sean A, B, C conjuntos de un universo U, entonces tenemos las siguientes propiedades:

- **Doble Complemento**
  $(A^C)^C = A$
- **Propiedad Conmutativa**
  - $A \cap B = B \cap A$
  - $A \cup B = B \cup A$
- **Propiedad Asociativa**
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **Propiedad Distributiva**
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **Leyes de Morgan**
  - $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
  - $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

- **Propiedad de los Neutros**
  - $A \cap U = A$
  - $A \cup \emptyset = A$
- **Propiedad de los Inversos**
  - $A \cap A^C = \emptyset$
  - $A \cup A^C = U$
- **Propiedad de Dominación**
  - $A \cap \emptyset = \emptyset$
  - $A \cup U = U$
- **Propiedad de Inepotencia**
  - $A \cap A = A$
  - $A \cup A = A$
- **Propiedad de Absorción**
  - $A \cap (A \cup B) = A$
  - $A \cup (A \cap B) = A$

2.4. Identidades y Propiedades

Ya conocemos su definición formal, incluso me dedique a poner algunas cosas super obvias en la pagina de definción de cada uno de ellos, pero es que hay tantas propiedades super interesantes que tenia que ponerles una sección propia para las mejores:

2.4.1. Propiedades usando SubConjuntos

Proposición

Sea A, B, C conjuntos cualesquiera tal que $A \subseteq B$. Entonces tenemos que:

$$(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$$
$$(A \cup C) \subseteq (B \cup C)$$

Proposición

Sea A, B, C conjuntos cualesquiera. Si $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$. Entonces tenemos que:

$$A \subseteq (B \cap C)$$

Proposición

Sea A, B, C conjuntos cualesquiera. Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$. Entonces tenemos que:

$$(A \cup B) \subseteq C$$

2.4.2. Propiedades usando Conjunto Potencia

Proposición

$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

Proposición

$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

2.5. Cardinalidad y sus Propiedades

Ok, vamos avanzando, ahora es la hora de ver una característica de los conjuntos. La Cardinalidad, que no es mas que una forma *fancy* de decir el número de elementos ó entes que contiene cierto conjunto.

Puedes verlo como una función que recibe un conjunto cualquiera y te regresa un número *(Bueno, tecnicamente también sta el caso en el que la cardinalidad es infinita)*.

Esta es la forma en que solemos expresar la cardinalidad de un conjunto cualquiera:

$$|A| = \#A = Card(A) \tag{2.8}$$

2.5.1. Propiedades usando Complemento

Proposición

Sea A un conjunto cualquiera de un universo U, entonces tenemos que:

$$|A^C| = |U| - |A|$$

2.5.2. Propiedades usando Subconjuntos

Proposición

Sea A, B conjuntos cualesquiera. Si $A \subseteq B$, entonces tenemos que:

$$|A| \leq |B|$$

2.5.3. Propiedades usando Unión e Intersección

Proposición

Sea A, B conjuntos cualesquiera, entonces tenemos que:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$$

2.5.4. Propiedades usando Resta

Proposición

Sea A, B conjuntos cualesquiera, entonces tenemos que:

$$|A - B| = |A| - |A \cap B|$$

2.5.5. Propiedades usando Diferencia Simetrica

Proposición

Sea A, B conjuntos cualesquiera, entonces tenemos que:

$$|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

2.5.6. Propiedades usando Producto Cartesiano

Proposición

Sea A, B conjuntos cualesquiera, entonces tenemos que:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

2.5.7. Propiedades usando Conjunto Potencia

Proposición

Sea A conjunto cualquiera, tal que $|A| = n$ entonces tenemos que:

$$|P(A)| = 2^n$$