Álgebra Superior I

Grupo 4020

Tarea Exámen: Relaciones de Equivalencia

Alumno:
Rosas Hernandez Oscar Andres

Profesor:
Rodrígo Domínguez López

Tarea Exámen

Lunes 30 de Octubre

Índice

1. Ejercicio 6

Sea X un conjunto de $F : P(X) \to P(X)$ definida por $F(A) = X - A$

Demuestre que $F \circ F = Id_{P(X)}$

Demostración:

Veamos que $F(F(A)) = X - (X - A)$

Por lo tanto a cualquier elemento $A \in P(X)$ lo va a mapear a $X - (X - A)$

Veamos que dichos conjuntos son iguales por doble contención:

- Por un lado tenemos que: Sea a un elemento arbitrario de A con $A \subseteq X$, entonces tenemos que $a \in (X \wedge A)$ podemos decir entonces que: $a \in (\emptyset \vee (X \wedge A))$ por lo tanto podemos decir que $a \in \emptyset$ ó $a \in (X \wedge A)$, es decir ($a \in X$ y $a \notin X$) ó ($a \in X$ y $a \wedge A$), es decir $a \in X$ y ($a \notin X$ ó $a \in A$), por lo tanto $a \in X$ y $a \notin (X - A)$ y por definición de diferencia $a \in (X - (X - A))$
- Por otro lado tenemos que: Sea a un elemento arbitrario de $(X - (X - A))$, por definición de diferencia $a \in X$ y $a \notin (X - A)$, es decir $a \in X$ y ($a \notin X$ ó $a \in A$).

  Es decir ($a \in X$ y $a \notin X$) ó ($a \in X$ y $a \in A$) y ya que la primera proposición entre parentesis es el vacío tenemos que: $a \in X$ y $a \in A$.

Ahora ya que sabemos que son ambos conjuntos iguales la regla de correspondencia nos dice que $(F \circ F)(A) = A$.

Podemos probar que:

- F es inyectiva:

  Supón que $A, B \in P(X)$ y que $f(A) = f(B)$, entonces gracias a la regla de correspondencia tenemos que $X - A = X - B$. Ahora si $X - A = X - B$ podemos por las propiedades que ya demostramos de la diferencia de conjuntos podemos decir que $A = B$.
- F es suprayectiva:

  Sea B un elemento arbitrario de $P(X)$, y sea $A = X - B \in P(X)$ entonces tenemos que $\forall b \in P(x)$, $\exists A \in P(X)$ tal que $f(A) = f(X - B) = X - (X - B) = B$

Ahora ya que probamos que la composición de funciones suprayectivas es suprayectiva y que la composición de funciones inyectivas es inyectiva tenemos que $f \circ f$ es una biyección cuya regla de correspondencia es $f(A) = A$. Por lo tanto $f \circ f$ es la identidad de $P(X)$.

2. Ejercicio 7

Sea $X = \{\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\ \}$, de una función $f : X \to X$ tal que:

- $f^{-1}[\{\ 1, 2, 3\ \}] = \emptyset$
- $f^{-1}[\{\ 4, 5\ \}] = \{\ 1, 3, 7\ \}$
- $f^{-1}[\{\ 8, 10\ \}] = \{\ 8, 10\ \}$

Solución:

Sea $f = \{\ (1,4),(2,9),(3,4),(4,9),(5,9),(6,9),(7,5),(8,8),(9,9),(10,10)\ \}$

3. Ejercicio 9

Sea $\mathbb{R}^+ = \{\ x \in \mathbb{R} \ \mid\ x > 0\ \}$ y $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. dada por $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Demuestre que f es inyectiva

Demostración:

Supón que $x, y \in \mathbb{R}^+$ y que $f(x) = f(y)$

Por lo tanto por la regla de correspondencia $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+y^2}$, por lo tanto $1 + x^2 = 1 + y^2$, por lo tanto $x^2 = y^2$ y al aplicar raíz cuadrada a ambos lados $+\sqrt{x^2} = +\sqrt{y^2}$ y ya que estamos en los reales positivos $x = y$

Encuentre dos funciones $g, h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que $g \circ f = h \circ f = Id_{\mathbb{R}^+}$

Solución:

Sea $g(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x} - 1}$, entonces

$$\begin{aligned}
f(g(x)) &= (f \circ g)(x) \\
&= \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1}{x} - 1}^2} \\
&= \frac{1}{1 + (\frac{1}{x} - 1)} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{x}} \\
&= x
\end{aligned}$$

Sea $h(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} - 1}{\sqrt{\dfrac{1}{x} - 1}}$, entonces

$$\begin{aligned}
h(f(x)) &= (h \circ f)(x) \\
&= \frac{\dfrac{1}{\frac{1}{1+x^2}} - 1}{\sqrt{\dfrac{1}{\frac{1}{1+x^2}} - 1}} \\
&= \frac{(1+x^2) - 1}{\sqrt{\dfrac{1}{\frac{1}{1+x^2}} - 1}} \\
&= \frac{x^2}{\sqrt{\dfrac{1}{\frac{1}{1+x^2}} - 1}} \\
&= \frac{x^2}{x} \\
&= x
\end{aligned}$$