PROYECTO COMPILANDO CONOCIMIENTO

MATEMÁTICAS DISCRETAS

Lógica Matemática

Una Pequeña Introducción

AUTOR:
Rosas Hernandez Oscar Andres

Índice general

Capítulo 1

Proposiciones y Conectores

1.1. Proposiciones

La lógica es una forma sistemática de pensar que nos permite deducir nueva información desde la información que ya conocemos.

Recuerda que la lógica es un proceso de deducir la información correctamente, no sólo deducir la información correcta.

La lógica trabajo con algo llamado proposiciones, son como las funciones para cálculo, o los lenguajes de programación para informática o los libros para la literatura.

Así que empecemos por ahí ... ¿Qué son?

Definición

Son proposiciones las frases que pueden adquirir un valor de verdadero o falso.

O dicho de manera formal:

Es una oración aseverativa de la que tiene sentido decir que es verdadera o falsa.

Y cuando digo frase, me refiero a:

- Secuencia finita de signos con significado y sentido de ser calificado como verdadero o falso. (es decir una simple expresión matemática).
- Expresión lingüística susceptible de ser calificada de verdadera o falsa. (es decir una frase aseverativa).

Sentencias Abiertas

Existen cosas que son parecidas a las proposiciones, pero no lo son exactamente, son cosas como:

$p(x)$: x es un número par.

Puesto que la validez de $p(x)$ depende que número sea x, $p(x)$no es no totalmente cierta ni totalmente falsa, por lo tanto no es una proposición.

Una oración como esta, cuya verdad depende del valor de una o más variables, se llama sentencias abierta.

Ejemplo

Por ejemplo son proposiciones frases como:

- $2 + 3 = 4$
- Hay solamente 325 personas en Marte
- $\forall x, y \in \mathbb{N}$ se tiene que $x + y \in \mathbb{R}$
- Hoy es lunes
- $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- Si x = 2 entonces 2x = 4

Pero no son cosas como:

- ¡Ojalá no llueva hoy!
- Haz la tarea
- Este enunciado es falso
- Tomar una siesta

1.1.1. Teoremas, Colorario y Tautológias

Clasificación de Propiedades

- **Tautología**: Cuando para todos los valores posibles de un conjunto de proposiciones siempre será verdadero el conjunto.
- **Contradicción**: Cuando para todos los valores posibles de un conjunto de proposiciones esta será siempre falso.
- **Contingencia**: Una proposición "común" son básicamente todas las que no son ni tautologías ni contradicciones.

Notación

Además a los matemáticas les encanta demostrar todo y cuando digo todo, es TODO, así que aquí te dejo las diferencias entre varias palabras que se parecen:

- **Proposición**: Enunciado que encierra un valor de verdad.
- **Axioma**: Principio tan claro y evidente que no necesita demostración.
- **Corolario**: Proposición demostrado que provoca una afirmación.
- **Demostración**: Razonamiento por el cuál se da prueba de la exactitud de una proposición.
- **Lema**: Proposición que es necesaria demostrar antes de establecer un teorema.

1.2. Conectores Lógicos

Los conectores nos permiten 'concatenar' proposiciones o crear proposiciones mas avanzadas. Veamos primero como solemos mostrarlos:

Conector	**Nombres**	**Símbolos**
y	$p \wedge q$	▪ **Conjunción de** p **y de** q
o	$p \vee q$	▪ **Disyunción de** p **y de** q
no	$\neg q$	▪ **Negación de** P
implica	$p \to q$	▪ p **implica** q ▪ **Si** p**, entonces** q ▪ q **si** p ▪ **Sólo si** q **entonces** p ▪ p **sólo si** q ▪ **Cuando** p**,** q ▪ **Siempre que** q**,** p ▪ q **siempre que** p ▪ p **es una condición suficiente para** q ▪ q **es una condición necesaria para** p ▪ **Es necesario que** q **para** p ▪ **Es suficiente que** p **para que** q
si y solo si	$p \leftrightarrow q$	▪ p **ssi** q ▪ p **es equivalente a** q ▪ p **es una condición necesaria y suficiente para** q ▪ **Para que** p **es necesario y suficiente que** q

Las que siguen a continuación son lo que yo denomino más operaciones mas básicas en lógica.

1.2.1. Negación

Devuelve el inverso del valor de verdad de la proposición que le pases.

Nombre	p	$\neg p$
Negación	F	V
	V	F

1.2.2. Conjunción

Devuelve verdadero **solo** cuando ambas son verdaderas, y falso en cualquier otra combinación.

Nombre	p	q	$p \wedge q$
Conjunción	F	F	F
	F	V	F
	V	F	F
	V	V	V

1.2.3. Disyunción

Devuelve falso **solo** cuando ambas son falsas, y verdadero en cualquier otra combinación.

Nombre	p	q	$p \vee q$
Disyunción	F	F	F
	F	V	V
	V	F	V
	V	V	V

1.2.4. Implicación

Devuelve falso **solo** cuando la primera premisa es verdadera, pero la segunda es falsa, y verdadero en cualquier otra combinación.

Ve a $p \to q$ como una promesa de que siempre que p es verdadera, q será verdadera también. Sólo hay una manera de romper esta promesa y que es si P sea verdad y q es falso.

Nombre	p	q	$p \to q$
Disyunción	F	F	V
	F	V	V
	V	F	F
	V	V	V

Ideas Importantes

La implicación es creo yo la más importante de todas, y no es porque sea básica, es más: $p \to q$ es totalmente equivalente a $\neg p \vee q$.

Usando la implicación hay algunas cosas famosas que deberías saber:

- **Contrapositiva del Condicional** Esta equivalencia es muy importante, pues es muy usada para las demostraciones (no te preocupes Timmy, ya entenderas después).

  $$p \to q \iff \neg q \to \neg p$$

- **Implicaciones Famosas** No se a quién se le ocurrio ponerles nombres, pero creo que te combiene que las conozcas.

Nombre	Forma	Es equivalente con...
Condicional	$p \to q$	Contrapositiva
Contrapositiva	$\neg q \to \neg p$	Condicional
Recíproca	$q \to p$	Inversa
Inversa	$\neg p \to \neg q$	Recíproca

1.2.5. Bicondicional

En lógica la idea de $(p \to q) \land (q \to p)$ aparece tan seguido que decidimos darle su propio símbolo $p \leftrightarrow q$.

Esta operación nos regresa verdadero **solo** cuando ambas premisas tengan el mismo valor de verdad. Ojo no dije que ambas sean verdad, simplemente que si una es falsa, obliga a la otra a ser falsa.

Recuerda que sabemos que $p \to q$ se lee como 'p si q' y $q \to p$ se lee como 'p solo si q'. Entonces nuestro nuevo operador recibe el original nombre de 'p si y solo si q' o de forma normal 'p ssi q'.

1.3. Equivalente Lógico

Llega a pasar en lógica que tenemos dos expresiones lógicas que al momento de ver su tabla de verdad vemos que son iguales en todos los valores de verdad de sus variables entonces podemos decir que son logicamente equivalentes. Y solemos denotar eso con este símbolo $p \iff q$.

Usamos este símbolo porque si p y q son logicamente equivalentes entonces $p \leftrightarrow q$ será siempre verdad, una tautología.

Esta idea es importante pues nos permite ver ideas que ya tenemos expresadas en la lógica de una manera completamente nueva si es que a nosotros nos convienen más.

A continuación te muestro una tabla con las equivalencias lógicas mas comúnes.

1.4. Leyes de Lógica

Sean p, q, r sentencias lógicas y sea T una tautológía y sea F una contradicción.

- **Doble Complemento**
  $\neg(\neg p) \;\Leftrightarrow\; p$
- **Propiedad Conmutativa**
  - $p \wedge q \;\Leftrightarrow\; q \wedge p$
  - $p \vee q \;\Leftrightarrow\; q \vee p$
- **Propiedad Asociativa**
  - $p \wedge (q \wedge r) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \wedge C$
  - $p \vee (q \vee r) \;\Leftrightarrow\; (p \vee q) \vee C$
- **Propiedad Distributiva**
  - $p \wedge (q \vee r) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  - $p \vee (q \wedge r) \;\Leftrightarrow\; (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- **Leyes de Morgan**
  - $\neg(p \wedge q) \;\Leftrightarrow\; (\neg p) \vee (\neg q)$
  - $\neg(p \vee q) \;\Leftrightarrow\; (\neg p) \wedge (\neg q)$

- **Propiedad de los Neutros**
  - $p \wedge T \Leftrightarrow p$
  - $p \vee F \Leftrightarrow p$
- **Propiedad de los Inversos**
  - $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$
  - $p \vee \neg p \Leftrightarrow T$
- **Propiedad de Dominación**
  - $p \wedge F \Leftrightarrow F$
  - $p \vee T \Leftrightarrow T$
- **Propiedad de Inepotencia**
  - $p \wedge p \Leftrightarrow p$
  - $p \vee p \Leftrightarrow p$
- **Propiedad de Absorción**
  - $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
  - $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
- **Propiedad de Contrapositiva**
  - $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$
  - $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg p \leftrightarrow \neg q$

Capítulo 2

Inferencias Lógicas

2.1. Inferencias Lógicas

La inferencia es la forma en la que obtenemos conclusiones en base a datos y declaraciones establecidas. Esto se va a poner intenso, pero creo que esta definición vale la pena:

Definición

Podemos entonces definir que una inferencia lógica es un proposición q que si le aplicamos el condicional con la disyunción de todas las premisas sería una tautología.

Es decir:

$$[p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \cdots \to q] \;\; \Leftrightarrow \;\; T \tag{2.1}$$

En español esto quiere decir que el hecho de que todas las premisas sean verdaderas obliga a que q sea verdadera, o en otra manera podemos decir que la inferencia lógica como: Dadas dos afirmaciones verdaderas podemos inferir que una tercera afirmación es verdadera.

Ejemplo

Supongamos que sabemos que una afirmación de la forma $p \to q$ es verdadera. Esto nos dice que siempre que p es verdadera, q también será verdadera.

Por sí mismo, $p \to q$ siendo verdadero no nos dice que p o q es verdadero (ambos podrían ser falsos, o p podría ser falso y q verdadero).

Sin embargo, si además sabemos que p es verdadera entonces debe ser que q es verdadera. Esto se llama una inferencia lógica: dadas dos afirmaciones verdaderas podemos inferir que una tercera afirmación es verdadera.

2.1.1. Inferencias Básicas

Hay unas inferencias my importantes, sobretodo a la hora de demostrar algo, por eso les deje su propia sección:

- **Contrapositiva de la Inferencia**
  $p \Rightarrow q$ si y solo si $\neg q \Rightarrow \neg p$
- **Por Contradicción**
  $p \Rightarrow q$ si y solo si $p \wedge \neg q \Rightarrow F$
- **Por Corriento del Condicional**
  $p \Rightarrow q \to r$ si y solo si $p \wedge q \Rightarrow s$
- **Disyunción**
  Si ya sabemos que $p \Rightarrow q$ entonces sabremos que $p \wedge r \Rightarrow q \wedge r$
- **Conjunción**
  Si ya sabemos que $p \Rightarrow q$ entonces sabremos que $p \vee r \Rightarrow q \vee r$
- **Condicional**
  Si ya sabemos que $p \Rightarrow q$ entonces sabremos que $r \to p \Rightarrow r \to q$
- **Transitiva**
  Si ya sabemos que $p \Rightarrow q$ y que $q \Rightarrow r$ entonces sabremos que $p \Rightarrow r$

2.2. Reglas de Inferencias

Hay unas inferencias my importantes, casi casi reglas, se las mostraré a continuación:

Modus Poness (PP)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad} \\ \therefore q \end{array}$$

Modus Tollens (TT)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q \qquad} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

Silogismo Hipotético

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r \qquad} \\ \therefore p \to r \end{array}$$

Silogismo Disyuntivo

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg p \qquad} \\ \therefore q \end{array}$$

Amplificación Disyuntiva

$$\begin{array}{l} \underline{p \qquad\qquad} \\ \therefore p \vee q \end{array}$$

Simplificación Conjuntiva

$$\begin{array}{l} \underline{p \wedge q} \\ \therefore p \end{array}$$

Regla de Conjunción

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{q} \\ \therefore p \land q \end{array}$$

Ley del Dilema Constructivo

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \underline{p \land r} \\ \therefore q \land r \end{array}$$

Ley del Dilema Constructivo

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \underline{p \lor r} \\ \therefore q \lor s \end{array}$$

Ley del Dilema Destructivo

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \underline{\neg q \land \neg s} \\ \therefore \neg p \land \neg r \end{array}$$

Ley del Dilema Destructivo

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \underline{\neg q \lor \neg s} \\ \therefore \neg p \lor \neg r \end{array}$$

Capítulo 3

Cuantificadores Lógicos

3.1. Cuantificadores

Usar los conectores lógicos nos permiten traducir un teorema matemático en ideas lógicas, pero añadiré unos nuevos símbolos que nos permitirán traducir aún más ideas.

Sentencias Abiertas y Cuantificadores

Los cuantificadores trabajan con sentencias abiertas (o también llamadas funciones lógicas), son cosas que son parecidas a las proposiciones, pero no lo son exactamente, son cosas como:

$p(x)$: x es un número par.

Puesto que la validez de $p(x)$ depende que número sea x, $p(x)$ no es no totalmente cierta ni totalmente falsa, por lo tanto no es una proposición.

Los cuantificadores permiten la construcción de proposiciones a partir de oraciones abiertas, bien sea particularizando o generalizando. Así, un cuantificador transforma una oración abierta, en una proposición a la cual se le asigna un valor de verdad.

Es decir, los cuantificadores trabajan con sentencias abiertas, ya que al aplicarles un cuantificador se vuelven una proposiciones normales.

Cuantificadores Ocultos

Ahora llegamos al punto muy importante. En matemáticas, la expresión $p(x) \Rightarrow q(x)$ se entiende que en realidad hablamos de la oración $\forall x \in A,\ p(x) \Rightarrow q(x)$.

Si, lo se, matemáticos que les da flojera ser formales, aunque entiendelos, es tal común esta clase de enunciados que se notaría tan repetetitivo.

3.1.1. Cuantificador Universal

Se utiliza para afirmar que **todos** los elementos de un conjunto A cumplen con una propiedad determinada $p(x)$.

$$\forall x \in A, \;\; p(x) \tag{3.1}$$

Es normal en matemáticas básicas escuchar frases como $p(a)$ para una a cualquiera, esto es simplemente otra forma de decir $\forall x, \;\; p(x)$.

Otra forma de escribir el cuantificador universal $\forall x \in A, \;\; p(x)$ es escribir $(x \in A) \;\; \Rightarrow \;\; p(x)$

3.1.2. Cuantificador Existencial

Se utiliza para afirmar que **existe al menos un** elemento de un conjunto A que cumple con una propiedad determinada $p(x)$.

$$\exists x \in A, \;\; p(x) \tag{3.2}$$

Es normal en matemáticas básicas escuchar frases como $p(a)$ para una a específica, esto es simplemente otra forma de decir $\exists x, \;\; p(x)$

3.2. Leyes de Cuantificadores

Sean $p_{(x)}$ sentencias abierta lógica, A un conjunto que opera sobre $p(x)$ donde x son elementos de A y sea T una tautología y sea F una contradicción.

- **Negación del Universal**
  $\neg(\forall x \in A,\ p(x)) \ \Leftrightarrow\ \exists x \in A,\ \neg p(x)$
- **Negación del Existencial**
  $\neg(\exists x \in A,\ p(x)) \ \Leftrightarrow\ \forall x \in A,\ \neg p(x)$
- **Cambio de Variables**
  $p(a) \ \Leftrightarrow\ (p(x) \wedge (x = a))$
- **Cuantificadores sobre Proposiciones**
  $\exists x, p \ \Leftrightarrow\ \forall x, p \ \Leftrightarrow\ p$
- **Leyes Conmutativas para Cuantificador Existencial**
  - $\exists x, [p(x) \vee q(x)] \ \Leftrightarrow\ \exists x, p(x) \vee \exists x, q(x)$
  - $\exists x, [p(x) \wedge q(x)] \ \Rightarrow\ \exists x, p(x) \wedge \exists x, q(x)$
- **Leyes Conmutativas para Cuantificador Universal**
  - $\forall x, [p(x) \wedge q(x)] \ \Leftrightarrow\ \forall x, p(x) \wedge \forall x, q(x)$
  - $\forall x, p(x) \vee \forall x, q(x) \ \Rightarrow\ \forall x, [p(x) \vee q(x)]$