Proyecto Compilando Conocimiento

Matemáticas Discretas

Teoría de Conjuntos

Una Pequeña Introducción

Autor:
Rosas Hernandez Oscar Andres

Índice general

Capítulo 1

Principios Básicos

1.1. Definición

1.1.1. ¿Qué son?

Olvida todo lo que sabes sobre números. Olvídate de que sabes lo que es un número. Aquí es donde empiezan las matemáticas. En vez de matemáticas con números, vamos a hacer matemáticas con 'cosas'.

Se denomina conjunto a la agrupación de entes o elementos, que poseen una o varias características en común.

Ideas Importantes

Un conjunto puede ser una agrupación de números, de vectores, de autos, de espacios vectoriales, de objectos, de funciones e incluso un conjunto puede ser una agrupación de otros conjuntos.

Lo conjuntos generalmente son denotados por letras mayúsculas, como $A, B, C, \cdots$

Quiza los conjuntos más importantes que verás a lo largo de estos apuntes son:

- $\mathbb{N}$: Representa al conjunto de todos los naturales, ya sabes números como $1, 2, 3, \cdots$
- $\mathbb{Z}$: Representa al conjunto de todos los enteros, ya sabes números como $\cdots, -1, 0, 1, \cdots$
- $\mathbb{Q}$: Representa al conjunto de todos los racionales, ya sabes números como $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{23}{72}, \cdots$
- $\mathbb{R}$: Representa al conjunto de todos los reales, ya sabes números como $\frac{3}{2}, -\pi, 3, \cdots$
- $\mathbb{C}$: Representa al conjunto de todos los complejos, ya sabes números como $3 + 2i, \pi i, 3 \cdots$

1.1.2. ¿Cómo Definirlo?

Definimos cierto conjunto, al que llamaremos A como la agrupación de todas las x (es decir cada x es un elemento, un ente) que cumplen ciertas características (eso es lo que significa esos puntitos, ahí deberías poner las reglas que tenga tu conjunto).

$$A = \{x| \quad x \dots\} \tag{1.1}$$

Recuerda que basicamente hay dos formas de 'declarar' un conjunto:

- **Explícitamente**: Es decir, enumerando TODOS los elementos o entes que forman el conjunto ($A = \{a, e, i, o, u\}$)
- **Implícitamente**: Es decir, enumerando las características de los elementos o entes que forman el conjunto ($B = \{x \in \mathbb{N} | \quad |\sqrt{x}| \in \mathbb{N}\}$)

Recuerda también:

- Los elementos repetidos no cuentan, si ya esta un elemento dentro del conjunto, da lo mismo que lo vuelvas a enumerar.
($A = \{a, e, i, o, u\} = \{a, a, e, i, o, u\}$)
- No importa el orden en el me muestres los elementos, solo importa que esten dentro. ($A = \{a, e, i, o, u\} = \{u, a, i, e, o\}$)

Ejemplo 1:

Veamos por ejemplo como definir el Conjunto C_1 *(lo sé me muero con mi creatividad para los nombres)* como aquel que contenga a TODOS los números reales negativos:

$$C_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid \quad x < 0\}$$

En Lenguaje normal:
Esto lo podemos leer como C_1 es el conjunto *(es decir todo lo que esta entre parentesís)* de todas las x que pertenezcan al los números reales *(eso quiere decir el $x \in \mathbb{R}$)* tal que (eso lo representamos como: | , no porque :/) x es menor que 0 *(esa es nuestra condición para encontrar si alguna x pertenece a nuestro conjunto).*

Ejemplo 2:

Veamos por ejemplo como definir el Conjunto C_2 como aquel que contenga a TODOS las vocales:

$$C_2 = \{Vocales\}$$
$$C_2 = \{a, e, i, o, u\}$$

Si te das cuenta, podemos definirlos de muchas maneras.

1.2. Clasificación

Podemos clasificar de muchas maneras a los conjuntos, veamos las más comunes:

Tamaño

- **Finito**: Si tiene una colección que se pueda contar, aunque sea difícil.

  Por ejemplo, el conjunto de juguetes incluye todos los tipos de juguetes que hay en el mundo. Aunque sea difícil, se podrían contar todos los tipos de juguetes del mundo, por lo que es finito.

- **Infinito**: Si tiene una colección que no se pueda terminar de contar nunca.

  Por ejemplo, el conjunto de todos los números pares, que son infinitos, es un conjunto infinito.

1.3. Conjunto Vacío

Ok, ya sabemos que un conjunto es un grupo de elementos, pero ... ¿Cómo represento a un conjunto en el que no hay nada?

Como una caja vacía.

De hecho, me gusta, hablemos de el Conjunto vacío como un caja vacía.

$$\phi = \{\} \tag{1.2}$$

Solemos usar este simbolo por su parecido con un cero, pero recuerda no es un cero, simplemente es una forma de denotar al conjunto vacío.

Listo, eso es casí todo, además te gustará que te recuerde las siguientes proposiciones:

- $|\phi| = 0$: Esto quiere decir que la cardinalidad *(es decir la cantidad de elementos)* del conjunto vacío es la misma que la cantidad de galletas en una caja vacía de galletas, osea 0.
- $\phi \neq \{\phi\}$: Esto quiere decir que no es lo mismo hablar del conjunto vacío que de hablar de un conjunto cualquiera que contiene al conjunto vacío.

  Es decir simplemente no es lo mismo tener una caja vacía que una caja con una caja vacía dentro *(si lo piensas la segunda caja ya no esta completamente vacía)*

1.4. Conjunto Universo

Como podemos imaginarnos, tenía que existir un término inverso, digamos que estamos analizando y agrupando animales por su habitad, entonces tenemos muchos conjuntos cool como animales del bosque o marinos, pero también tenemos a un mega conjunto que llamamos universo donde tenemos a todos los animales.

Muchas veces a la hora de hablar sobre conjuntos solemos definirlos sobre un universo.

Podemos ver muchasc analogías, veamos a ver cual te gusta más:

- Es como si el universo fuera el padre, entonces las hijas son nuestros conjuntos
- Es como si el universo una caja de cereal, entonces nuestros conjuntos son grupos de cereales que estaban dentro de la caja, ya que es imposible sacar mas cereales más que los que estaban en la caja.

Creo que resulta bastante obvio pero aquí hay algunas cosas que quizá te interesen.

- $\phi^c = u$
- $u^c = \phi$

Capítulo 2

Álgebra y Operaciones

2.1. Operaciones

Podemos hacer operaciones con los conjuntos de una manera muy similiar a como hacemos operaciones con los números normales, tu defines una operación, y la haces entre dos conjuntos y esta te dará un nuevo conjunto, pero aquí siento que son incluso más divertidas.

Te presentaré estas operaciones una a una y te mostraré con mas detalle cada una, así que vamos, empecemos:

2.1.1. Unión

La unión representa la fuerza, así que veamos que representa la unión cuando estemos hablando de conjuntos.

$$A \cup B = \{x \quad | x \in A \text{ ó bien } x \in B\} \tag{2.1}$$

Esta operación basicamente nos da un conjunto en el que estan **todos** los elementos que bien pertenezcan a A o bien que pertenezcan a B.

2.2. Cardinalidad

Ok, vamos avanzando, ahora es la hora de ver una característica de los conjuntos. La Cardinalidad, que no es mas que una forma *fancy* de decir el número de elementos ó entes que contiene cierto conjunto.

Puedes verlo como una función que recibe un conjunto cualquiera y te regresa un número *(Bueno, tecnicamente también esta el caso en el que la cardinalidad es infinita)*.

Esta es la forma en que solemos expresar la cardinalidad de un conjunto cualquiera:

$$|A| = \#A = Card(A) \tag{2.2}$$

Ahora si, veamos algunas proposiciones super geniales:

Bibliografía

[1] ProbRob
`Youtube.com`