Proyecto Compilando Conocimiento

Matemáticas Discretas

Teoría de Números

Una Pequeña Introducción

Autor:
Rosas Hernandez Oscar Andres

Índice general

Capítulo 1

Enteros y Naturales

1.1. Divisibilidad

Definición Formal

Dados dos números cualquiera $a, b \in \mathbb{Z}$. Decimos que la proposición **"b" divide a "a"** $b|a$ es verdad si y solo si $\exists q \in \mathbb{Z},\ \ a = bq$.

Definición Alterna

Veamos que lo que de verdad nos estan preguntando si es que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$.

Ya que de ser así eso quiere decir que podemos escribir a a como $a = bq$. Y con esto logramos ver que $\frac{bq}{b} = q$ y habiamos dicho que $q \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto podemos resumir esto en que: "a divide a b si y solo si es que $\frac{a}{b}$ continua estando en los enteros"

$$b|a \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$$

Ideas Imporantes

- Si $b|a$ y $b \neq 0$ entonces q es único.
- Si $b|a$ y $a \neq 0$ entonces $|b| \leq |a|$.

  Demostración:

  Supongamos entonces que b divide a a y que $a \neq 0$, por lo tanto la frase $a = bq$ nos da mucha información, pues obliga a que b y q no sean ninguno 0, entonces tenemos que $a = bq$ donde $b \neq 0$ y $q \neq 0$.

  Luego ya que no son 0, tenemos que $|q| \geq 1$ y $|b| \geq 1$, ya que sabemos como funcionan los números enteros tenemos que sin importar cuanto valgan q y b se cumple que $|b||q| \geq |b|$ esto es lo mismo que $|bq| \geq |b|$ y sabemos que $a = bq$, por lo tanto tenemos que $|a| \geq |b|$.

  Esto es lo mismo que $|b| \leq |a|$

Propiedades de Divisilibidad

- $b|b$

  Demostración:

  Basta con ver que si $a = b$ entonces $b = bq$, por lo tanto $q = 1$. Y listo, $1 \in \mathbb{Z}$.

- $b|0$

  Demostración:

  Basta con ver que si $a = 0$ entonces $0 = bq$, por lo tanto $q = 0$. Y listo, $0 \in \mathbb{Z}$.

- $1|a$ y también $-1|a$

  Demostración:

  Basta con ver que si $b = \pm 1$ entonces $a = \pm q$, por lo tanto $q = \pm a$. Y listo, $\pm a \in \mathbb{Z}$.

- $0|a$ si y solo $a = 0$

  Demostración:

  Basta con ver que tenemos $a = 0q$, esto es lo mismo que $a = 0$.

- $b|1$ si y solo si $b = 1$ ó $b = -1$

  Demostración:

  Sabemos que $a = 1 = bq$, esto nos obliga a que $b = \frac{1}{q}$, ahora tenemos que recordar que $b, q \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $q = 1$ o bien $q = -1$ que es lo mismo que decir que $b = 1$ ó $b = -1$.

- $b|a$ y $a|b$ si y solo si $a = \pm b$

  Demostración:

  Sabemos que $a = bq_1$, y $b = aq_2$ por lo tanto podemos sustituir, $a = (aq_2)q_1$ por lo tanto $1 = (q_1)(q_2)$, que es lo mismo que $\frac{1}{q_2} = q_1$ ahora que para q_1 siga en los $\mathbb{Z}$, $q_2 = \pm 1$ por lo tanto $q_1 = \pm \frac{1}{1} = \pm 1$ por lo tanto tenemos que $a = bq_1$ que es lo mismo que decir que $a = \pm b$.

- Si $b|a$ y $a|c$ entonces $b|c$

  Demostración:

  Sabemos que $a = bq_1$, y $c = aq_2$ por lo tanto podemos sustituir, $c = (bq_1)q_2$ que es lo mismo que $c = bq_3$, donde $q_3 = q_1 q_2$ donde $q_3 \in \mathbb{Z}$. Y ya que $c = bq_3$ podemos decir que $b|c$.

- Si $b|a$ y $b|c$ entonces $b|a + c$ y $b|a - c$

  Demostración:

  Sabemos que $a = bq_1$, y $c = bq_2$ por lo tanto podemos decir que sumar o restar ambas ecuaciones, lo que nos daría $a \pm c = bq_1 \pm bq_2$ que es lo mismo que $a \pm c = b(q_1 \pm q_2)$ por lo que podemos decir que $b|a \pm c$.

- Si $b|a$ entonces $b|ak$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Demostración:

Sabemos que $a = bq$ por lo mismo podemos decir que $ak = b(qk)$ por lo tanto $b|ak$.

- $b|a$ si y solo si $b|-a$ si y solo si $-b|a$ si y solo si $-b|-a$

  Demostración:

  Sabemos que existe q_1 tal que $a = bq_1$ para nuestro primer ssi basta con decir que $-a = b(-q_1) = bq_2$ y listo, encontre a q_2 con lo que puedo afirmar que $b|-a$.

  Para el segundo basta con ver que $a = -bq_3$ donde $q_3 = q_2$, con lo que puedo afirmar que $-b|a$.

  Para el último ssi basta con con ver que $-a = -bq_4$ donde $q_4 = q_1$ así que puedo afirmar que $-b|-a$.

Capítulo 2

Combinatoria

2.1. Definición

Una relación R entre dos conjuntos A y B es ante todo otro conjunto, una relación binaria es aquella que es en el fondo un conjunto de pares ordenados (x,y) donde x es un elemento de A, y así mismo y es un elemento de B.

Este nuevo conjunto R nos muestra como es que esta relacionados algunos (o todos) elementos de A con otros elementos de B.

Definiciones Formales

Una Relación $R : A \to B$ es un subconjunto de $A \times B$.

Solemos escribir la proposición $(x, y) \in R$ como xRy para que se vea más bonito.

Solemos escribir la proposición $(x, y) \notin R$ como $x \not R y$ para que se vea más bonito.