Compilando Conocimiento

Matemáticas Discretas

Matemáticas Discretas

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Julio 2018

Índice general

0.1. ¿Qué es lo que estoy leyendo?

Hola... ¡Hey! Seguramente te estarás preguntando ¿Qué demonios estoy leyendo?

Bueno, este pequeño texto intenta darle solución a esa pregunta, la respuesta mas inmediata es que este texto (o compilado como nos gusta decirle) es una recopilación de teoremas, ideas y conceptos importantes que aprendí a lo largo del tiempo sobre este tema.

De manera regular estarémos actualizando estos textos con todo aquello nuevo que aprenda intentando profundizar en todos estos temas y cerrar posibles dudas en estas páginas, así que siempre mantente alerta de tener la última versión, esta siempre esta en CompilandoConocimiento.com

Este Compilado intenta ser lo más estricto posible, aunque somos humanos y es posible (e incluso probable) que cometamos pequeños errores de vez en cuando.

Estos textos están creados como una base con la que tu puedas leer rápidamente todo lo que hemos aprendido a lo largo del tiempo, aprender los conceptos más importantes y que usándo esto tu puedas profundizar más en la maravilla que es aprender más sobre este maravilloso mundo.

Este texto esta publicado bajo la GPL, por lo tanto es software libre y tu tienes el control total sobre el, puedes descargar este texto, puedes ver su código fuente, puedes modificarlo y puedes distribuir este texto y sus versiones modificadas, puedes acceder a todo lo que necesitas en el Repositorio del Libro de Matemáticas Discretas.

Cualquier pregunta, comentario o si quieres contactar con nosotros no dudes en escribir al email del proyecto: CompilandoConocimiento@gmail.com

Espero que tomes estas páginas como un regalo, creado por seres imperfectos pero con muchos ánimos de hacer del mundo un lugar mejor, ahora si, abróchate los cinturones que esto acaba de empezar.

Compilar es Compartir

Parte I

Lógica Matemática

Capítulo 1

Proposiciones y Conectores

1.1. Proposiciones

La lógica es una forma sistemática de pensar que nos permite deducir nueva información desde la información que ya conocemos.

Recuerda que la lógica es un proceso de deducir la información correctamente, no sólo deducir la información correcta.

La lógica trabajo con algo llamado proposiciones, son como las funciones para cálculo, o los lenguajes de programación para informática o los libros para la literatura.

Así que empecemos por ahí ... ¿Qué son?

1.1.1. Definición

Son proposiciones las frases que pueden adquirir un valor de verdadero o falso.

O dicho de manera más formal:

Es una oración aseverativa de la que tiene sentido decir que es verdadera o falsa.

Y cuando digo frase, me refiero a:

- Secuencia finita de signos con significado y sentido de ser calificado como verdadero o falso. (es decir una simple expresión matemática).
- Expresión lingüística susceptible de ser calificada de verdadera o falsa. (es decir una frase aseverativa).

Ejemplo

Por ejemplo son proposiciones frases como:

- $2 + 3 = 4$
- Hay solamente 325 personas en Marte
- $\forall x, y \in \mathbb{N}$ se tiene que $x + y \in \mathbb{R}$
- Hoy es lunes
- Si x = 2 entonces 2x = 4

Pero no son cosas como:

- ¡Ojalá no llueva hoy!
- Haz la tarea
- Este enunciado es falso
- Tomar una siesta

1.1.2. Sentencias Abiertas

Existen cosas que son parecidas a las proposiciones, pero no lo son exactamente, son cosas como:

$p(x)$: "x es un número par"

Puesto que la validez de $p(x)$ depende que número sea x, $p(x)$no es no totalmente cierta ni totalmente falsa, por lo tanto no es una proposición.

Una oración como esta, cuya verdad depende del valor de una o más variables, se llama sentencias abierta.

1.1.3. Clasificación por Valor de Verdad

- **Tautología**: Cuando para todos los valores posibles de un conjunto de proposiciones siempre será verdadero el conjunto.
- **Contradicción**: Cuando para todos los valores posibles de un conjunto de proposiciones esta será siempre falso.
- **Contingencia**: Una proposición "común" son básicamente todas las que no son ni tautologías ni contradicciones.

1.1.4. Clasificación por Importancia

Además a los matemáticas les encanta demostrar todo y cuando digo todo, es TODO, así que aquí te dejo las diferencias entre varias palabras que se parecen:

- **Axioma**: Principio tan claro y evidente que no necesita demostración.
- **Teorema**: Proposición que consideramos muy importante
- **Corolario**: Proposición que de demuestra inmediato usando un Teorema
- **Lema**: Proposición que es necesaria demostrar antes de establecer un teorema.

1.2. Símbolos del Conectores Lógicos

Los conectores nos permiten 'concatenar' proposiciones o crear proposiciones mas avanzadas. Veamos primero como solemos mostrarlos:

Conector	Nombres	Símbolos
y	$p \wedge q$	▪ **Conjunción de** p **y de** q
o	$p \vee q$	▪ **Disyunción de** p **y de** q
no	$\neg\ q$	▪ **Negación de** P
implica	$p \rightarrow q$	▪ p **implica** q ▪ **Si** p**, entonces** q ▪ q **si** p ▪ **Sólo si** q **entonces** p ▪ p **sólo si** q ▪ **Cuando** p, q ▪ **Siempre que** q, p ▪ q **siempre que** p ▪ p **es una condición suficiente para** q ▪ q **es una condición necesaria para** p ▪ **Es necesario que** q **para** p ▪ **Es suficiente que** p **para que** q
si y solo si	$p \iff q$	▪ p **ssi** q ▪ p **es equivalente a** q ▪ p **es una condición necesaria y suficiente para** q ▪ **Para que** p **es necesario y suficiente que** q

1.3. Conectores Lógicos

1.3.1. Negación

Devuelve el inverso del valor de verdad de la proposición que le pases.

Nombre	p	$\neg p$
Negación	F	V
	V	F

1.3.2. Conjunción

Devuelve verdadero **solo** cuando ambas son verdaderas, y falso en cualquier otra combinación.

Nombre	p	q	$p \wedge q$
Conjunción	F	F	F
	F	V	F
	V	F	F
	V	V	V

1.3.3. Disyunción

Devuelve falso **solo** cuando ambas son falsas, y verdadero en cualquier otra combinación.

Nombre	p	q	$p \vee q$
Disyunción	F	F	F
	F	V	V
	V	F	V
	V	V	V

1.3.4. Dios aka la Implicación

Devuelve falso **solo** cuando la primera premisa es verdadera, pero la segunda es falsa, y verdadero en cualquier otra combinación.

Ve a $p \to q$ como una promesa de que siempre que p es verdadera, q será verdadera también. Sólo hay una manera de romper esta promesa y que es si P sea verdad y q es falso.

Nombre	p	q	$p \to q$
Disyunción	F	F	V
	F	V	V
	V	F	F
	V	V	V

1.3.5. Ideas Importantes de la Implicación

La implicación es creo yo la más importante de todas, y no es porque sea básica, es más: $p \to q$ es totalmente equivalente a $\neg p \vee q$.

Usando la implicación hay algunas cosas famosas que deberías saber:

- **Contrapositiva del Condicional**

  Esta equivalencia es muy importante, pues es muy usada para las demostraciones (no te preocupes Timmy, ya entenderas después).

  $$p \to q \;\Leftrightarrow\; \neg q \to \neg p$$

- **Implicaciones Famosas**

  No se a quién se le ocurrio ponerles nombres, pero creo que te convenir que las conozcas.

Nombre	Forma	Es equivalente con...
Condicional	$p \to q$	Contrapositiva
Contrapositiva	$\neg q \to \neg p$	Condicional
Recíproca	$q \to p$	Inversa
Inversa	$\neg p \to \neg q$	Recíproca

1.3.6. Bicondicional

En lógica la idea de $(p \to q) \wedge (q \to p)$ aparece tan seguido que decidimos darle su propio símbolo $p \Leftrightarrow q$.

Esta operación nos regresa verdadero **solo** cuando ambas premisas tengan el mismo valor de verdad. Ojo no dije que ambas sean verdad, simplemente que si una es falsa, obliga a la otra a ser falsa.

Recuerda que sabemos que $p \to q$ se lee como 'p si q' y $q \to p$ se lee como 'p solo si q'. Entonces nuestro nuevo operador recibe el original nombre de 'p si y solo si q' o de forma normal 'p ssi q'.

1.4. Equivalente Lógico

Llega a pasar en lógica que tenemos dos expresiones lógicas que al momento de ver su tabla de verdad vemos que son iguales en todos los valores de verdad de sus variables entonces podemos decir que son logicamente equivalentes. Y solemos denotar eso con este símbolo $p \Leftrightarrow q$.

Usamos este símbolo porque si p y q son logicamente equivalentes entonces $p \Leftrightarrow q$ será siempre verdad, una tautología.

Esta idea es importante pues nos permite ver ideas que ya tenemos expresadas en la lógica de una manera completamente nueva si es que a nosotros nos convienen más.

A continuación te muestro una tabla con las equivalencias lógicas mas comúnes.

1.5. Leyes de Lógica

Sean p, q, r sentencias lógicas y sea T una tautológía y sea F una contradicción.

- **Doble Complemento**
  $\neg(\neg p) \;\Leftrightarrow\; p$
- **Propiedad Conmutativa**
  - $p \wedge q \;\Leftrightarrow\; q \wedge p$
  - $p \vee q \;\Leftrightarrow\; q \vee p$
- **Propiedad Asociativa**
  - $p \wedge (q \wedge r) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \wedge C$
  - $p \vee (q \vee r) \;\Leftrightarrow\; (p \vee q) \vee C$
- **Propiedad Distributiva**
  - $p \wedge (q \vee r) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  - $p \vee (q \wedge r) \;\Leftrightarrow\; (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- **Leyes de Morgan**
  - $\neg(p \wedge q) \;\Leftrightarrow\; (\neg p) \vee (\neg q)$
  - $\neg(p \vee q) \;\Leftrightarrow\; (\neg p) \wedge (\neg q)$

- **Propiedad de los Neutros**
  - $p \wedge T \Leftrightarrow p$
  - $p \vee F \Leftrightarrow p$
- **Propiedad de los Inversos**
  - $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$
  - $p \vee \neg p \Leftrightarrow T$
- **Propiedad de Dominación**
  - $p \wedge F \Leftrightarrow F$
  - $p \vee T \Leftrightarrow T$
- **Propiedad de Inepotencia**
  - $p \wedge p \Leftrightarrow p$
  - $p \vee p \Leftrightarrow p$
- **Propiedad de Absorción**
  - $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
  - $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
- **Propiedad de Contrapositiva**
  - $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$
  - $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg p \Leftrightarrow \neg q$

Capítulo 2

Inferencias Lógicas

2.1. Inferencias Lógicas

La inferencia es la forma en la que obtenemos conclusiones en base a datos y declaraciones establecidas. Esto se va a poner intenso, pero creo que esta definición vale la pena:

Definición

Podemos entonces definir que una inferencia lógica es un proposición q que si le aplicamos el condicional con la disyunción de todas las premisas sería una tautología.

Es decir:

$$[p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \cdots \to q] \;\; \Leftrightarrow \;\; T$$

En español esto quiere decir que el hecho de que todas las premisas sean verdaderas obliga a que q sea verdadera, o en otra manera podemos decir que la inferencia lógica como: Dadas dos afirmaciones verdaderas podemos inferir que una tercera afirmación es verdadera.

2.1.1. Ejemplo para Entender esto

Supongamos que sabemos que una afirmación de la forma $p \to q$ es verdadera. Esto nos dice que siempre que p es verdadera, q también será verdadera.

Por sí mismo, $p \to q$ siendo verdadero no nos dice que p o q es verdadero (ambos podrían ser falsos, o p podría ser falso y q verdadero).

Sin embargo, si además sabemos que p es verdadera entonces debe ser que q es verdadera. Esto se llama una inferencia lógica: dadas dos afirmaciones verdaderas podemos inferir que una tercera afirmación es verdadera.

2.1.2. Inferencias Básicas

Hay unas inferencias my importantes, sobretodo a la hora de demostrar algo, por eso les deje su propia sección:

- **Contrapositiva de la Inferencia**
  $p \Rightarrow q$ si y solo si $\neg q \Rightarrow \neg p$
- **Por Contradicción**
  $p \Rightarrow q$ si y solo si $p \wedge \neg q \Rightarrow F$
- **Por Corriento del Condicional**
  $p \Rightarrow q \to r$ si y solo si $p \wedge q \Rightarrow s$
- **Disyunción**
  Si ya sabemos que $p \Rightarrow q$ entonces sabremos que $p \wedge r \Rightarrow q \wedge r$
- **Conjunción**
  Si ya sabemos que $p \Rightarrow q$ entonces sabremos que $p \vee r \Rightarrow q \vee r$
- **Condicional**
  Si ya sabemos que $p \Rightarrow q$ entonces sabremos que $r \to p \Rightarrow r \to q$
- **Transitiva**
  Si ya sabemos que $p \Rightarrow q$ y que $q \Rightarrow r$ entonces sabremos que $p \Rightarrow r$

2.2. Reglas de Inferencias

Hay unas inferencias my importantes, casi casi reglas, se las mostraré a continuación:

Modus Poness (PP)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad} \\ \therefore q \end{array}$$

Modus Tollens (TT)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q \qquad} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

Silogismo Hipotético

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r \quad} \\ \therefore p \to r \end{array}$$

Silogismo Disyuntivo

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg p \quad} \\ \therefore q \end{array}$$

Amplificación Disyuntiva

$$\begin{array}{l} \underline{p \qquad\quad} \\ \therefore p \vee q \end{array}$$

Simplificación Conjuntiva

$$\begin{array}{l} \underline{p \wedge q} \\ \therefore p \end{array}$$

Regla de Conjunción

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{q \qquad\quad} \\ \therefore p \land q \end{array}$$

Ley del Dilema Constructivo

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \underline{p \land r \qquad} \\ \therefore q \land r \end{array}$$

Ley del Dilema Constructivo

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \underline{p \lor r \qquad} \\ \therefore q \lor s \end{array}$$

Ley del Dilema Destructivo

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \underline{\neg q \land \neg s \quad} \\ \therefore \neg p \land \neg r \end{array}$$

Ley del Dilema Destructivo

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \underline{\neg q \lor \neg s \quad} \\ \therefore \neg p \lor \neg r \end{array}$$

Capítulo 3

Cuantificadores Lógicos

3.1. Cuantificadores

Usar los conectores lógicos nos permiten traducir un teorema matemático en ideas lógicas, pero añadiré unos nuevos símbolos que nos permitirán traducir aún más ideas.

3.1.1. Sentencias Abiertas y Cuantificadores

Los cuantificadores trabajan con sentencias abiertas (o también llamadas funciones lógicas), son cosas que son parecidas a las proposiciones, pero no lo son exactamente, son cosas como:

$p(x)$: "x es un número par"

Puesto que la validez de $p(x)$ depende que número sea x, $p(x)$no es no totalmente cierta ni totalmente falsa, por lo tanto no es una proposición.

Los cuantificadores permiten la construcción de proposiciones a partir de oraciones abiertas, bien sea particularizando o generalizando. Así, un cuantificador transforma una oración abierta, en una proposición a la cual se le asigna un valor de verdad.

Es decir, los cuantificadores trabajan con sentencias abiertas, ya que al aplicarles un cuantificador se vuelven una proposición normal.

3.1.2. Cuantificadores Ocultos

Ahora llegamos al punto muy importante. En matemáticas, la expresión $p(x) \Rightarrow q(x)$ se entiende que en realidad hablamos de la oración $\forall x \in A,\ p(x) \Rightarrow q(x)$.

Si, lo se, matemáticos que les da flojera ser formales, aunque entiendelos, es tal común esta clase de enunciados que se notaría tan repetetitivo.

3.2. Cuantificador Universal

Se utiliza para afirmar que **todos** los elementos de un conjunto A cumplen con una propiedad determinada $p(x)$.

$$\forall x \in A, \; p(x)$$

Es normal en matemáticas básicas escuchar frases como $p(a)$ para una a arbitraria, esto es simplemente otra forma de decir $\forall x, \; p(x)$.

Otra forma de escribir el cuantificador universal $\forall x \in A, \; p(x)$ es escribir $(x \in A) \;\Rightarrow\; p(x)$

3.3. Cuantificador Existencial

Se utiliza para afirmar que **existe al menos un** elemento de un conjunto A que cumple con una propiedad determinada $p(x)$.

$$\exists x \in A, \; p(x)$$

Es normal en matemáticas básicas escuchar frases como $p(a)$ para una a específica, esto es simplemente otra forma de decir $\exists x, \; p(x)$

3.4. Leyes de Cuantificadores

Sean $p(x)$ sentencias abierta lógica, A un conjunto que opera sobre $p(x)$ donde x son elementos de A y sea T una tautología y sea F una contradicción. Entonces tenemos que:

- **Negación del Universal**
  $\neg(\forall x \in A,\ p(x)) \ \Leftrightarrow\ \exists x \in A,\ \neg p(x)$
- **Negación del Existencial**
  $\neg(\exists x \in A,\ p(x)) \ \Leftrightarrow\ \forall x \in A,\ \neg p(x)$
- **Cambio de Variables**
  $p(a) \ \Leftrightarrow\ (p(x) \wedge (x = a))$
- **Cuantificadores sobre Proposiciones**
  $\exists x, p \ \Leftrightarrow\ \forall x, p \ \Leftrightarrow\ p$
- **Leyes Conmutativas para Cuantificador Existencial**
  - $\exists x, [p(x) \vee q(x)] \ \Leftrightarrow\ \exists x, p(x) \vee \exists x, q(x)$
  - $\exists x, [p(x) \wedge q(x)] \ \Rightarrow\ \exists x, p(x) \wedge \exists x, q(x)$
- **Leyes Conmutativas para Cuantificador Universal**
  - $\forall x, [p(x) \wedge q(x)] \ \Leftrightarrow\ \forall x, p(x) \wedge \forall x, q(x)$
  - $\forall x, p(x) \vee \forall x, q(x) \ \Rightarrow\ \forall x, [p(x) \vee q(x)]$

Parte II

Conjuntos

Capítulo 4

Principios Básicos

4.1. Definición

4.1.1. ¿Qué son?

Olvida todo lo que sabes sobre números. Olvídate de que sabes lo que es un número. Aquí es donde empiezan las matemáticas. En vez de matemáticas con números, vamos a hacer matemáticas con 'cosas'.

Se denomina conjunto a la agrupación de entes o elementos, que poseen una o varias características en común.

Un conjunto puede ser una agrupación de números, de vectores, de autos, de espacios vectoriales, de objectos, de funciones e incluso un conjunto puede ser una agrupación de otros conjuntos.

Ideas Importantes

Lo conjuntos generalmente son denotados por letras mayúsculas, como $A, B, C, \dots$, mientras que las letras minusculas como $a, b, c, \dots x, y, z$ se usan para representar elementos de un conjunto.

Quiza los conjuntos más importantes que verás a lo largo de estos apuntes son:

- $\mathbb{N}$: Representa al conjunto de todos los naturales, ya sabes números como $1, 2, 3, \dots$
- $\mathbb{Z}$: Representa al conjunto de todos los enteros, ya sabes números como $\dots, -1, 0, 1, \dots$
- $\mathbb{Q}$: Representa al conjunto de todos los racionales, ya sabes números como $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{23}{72}, \dots$
- $\mathbb{R}$: Representa al conjunto de todos los reales, ya sabes números como $\frac{3}{2}, -\pi, 3, \dots$
- $\mathbb{C}$: Representa al conjunto de todos los complejos, ya sabes números como $3 + 2i, \pi i, 3, \dots$

4.2. ¿Cómo Definirlo?

4.2.1. Pertencia

Creo que el símbolo más importante al hablar de conjuntos es este: $x \in A$. Esto quiere decir, el elemento x **pertenece** al Conjunto A.

Y de la misma manera puedes usar el símbolo $\notin$ que significa **no pertenece**.

4.2.2. Notación Básica

La notación más común para declarar o hablar de un conjunto es colocar los elementos de esta manera: $A = \{$ Elementos de A $\}$

Puedes entonces hacer algo como:

- Enumerar TODOS los elementos o entes que forman el conjunto:
  $A = \{\ a, e, i, o, u\ \}$
- Enumerar un patrón de los elementos que forman el conjunto:
  $A = \{\ +2, -4, +8, -16, \dots\ \}$

Recuerda también:

- Los elementos repetidos no cuentan, si ya esta un elemento dentro del conjunto, da lo mismo que lo vuelvas a enumerar.
  $A = \{\ a, e, i, o, u\ \} = \{\ a, a, e, i, o, u\ \}$
- No importa el orden en el me muestres los elementos, solo importa que esten dentro.
  $A = \{\ a, e, i, o, u\ \} = \{\ u, a, i, e, o\ \}$

4.2.3. Notación Formal

Esta notación tiene un nombre genial en inglés, se le conoce como **Set Builder Notation**, esta notación es la que sueles encontrar en los libros.

Se ve fea al principio pero te da toda la información que necesitas.

Veamos como formarla poco a poco:

Lo primero que hacemos es elegir una letra minúscula (de forma normal, no es ninguna regla) que representará a cualquier elemento al azar del conjunto, por ejemplo usemos la x.

También solemos usar la línea vertical, de esta forma: $P_1 \mid P_2$ que se lee como: P_1 tal que P_2.

Formas Básica de esta Notación

Ahora si, veamos como se ve esta notación:

$$A = \{ \ x \ \mid \ x \dots \}$$

Esto es la base y esto es lo que nos quiere decir:

Definimos cierto conjunto, al que llamaremos A como la agrupación de todas las x (es decir cada x es un elemento, un ente) tal que cumplen ciertas características (eso es lo que significa esos puntitos, ahí deberías poner las reglas que tenga tu conjunto).

4.2.4. Formas Alterna

También es común ver la característica que pertenece a cierto conjunto mayor antes de la línea vertical.

Entonces el en notación normal tenemos algo como $B = \{ \ x \in \mathbb{N} \ \mid \ x < 4 \ \}$.

Y en notación alterna $\{ \ x \ \mid \ x \in \mathbb{N}, \ x < 4 \ \}$

4.2.5. Ejemplos

Ejemplo 1:

Veamos por ejemplo como definir el Conjunto C *(lo sé me muero con mi creatividad para los nombres)* como aquel que contenga a TODOS los números reales negativos:

$$C = \{ \; x \in \mathbb{R} \mid \quad x < 0 \; \}$$

Esto lo podemos leer como C es el conjunto *(es decir todo lo que esta entre parentesís)* de todas las x que pertenezcan al los números reales *(eso quiere decir el $x \in \mathbb{R}$)* tal que (eso lo representamos como: $|$) x es menor que 0 *(esa es nuestra condición para encontrar si alguna x pertenece a nuestro conjunto).*

Ejemplo 2:

Veamos por ejemplo como definir el Conjunto C_2 como aquel que contenga a TODOS las vocales:

$$C_2 = \{ \; Vocales \; \}$$
$$C_2 = \{ \; a, e, i, o, u \; \}$$

Si te das cuenta, podemos definirlos de muchas maneras.

4.3. Clasificación

Podemos clasificar de muchas maneras a los conjuntos, veamos las más comunes:

4.3.1. Tamaño

- **Finito**: Si tiene una colección que se pueda contar, aunque sea difícil.

  Por ejemplo, el conjunto de juguetes incluye todos los tipos de juguetes que hay en el mundo. Aunque sea difícil, se podrían contar todos los tipos de juguetes del mundo, por lo que es finito.

- **Infinito**: Si tiene una colección que no se pueda terminar de contar nunca.

  Por ejemplo, el conjunto de todos los números pares, que son infinitos, es un conjunto infinito.

4.4. Conjunto Vacío

Ok, ya sabemos que un conjunto es un grupo de elementos, pero ... ¿Cómo represento a un conjunto en el que no hay nada?

Como una caja vacía.

De hecho, me gusta, hablemos de el Conjunto vacío como un caja vacía.

4.4.1. Definición

Llamemos $\emptyset$ como aquel conjunto tal que $\emptyset = \{\}$ es decir el conjunto que no tiene elementos.

Solemos usar este símbolo por su parecido con un cero, pero recuerda no es un cero, simplemente es una forma de denotar al conjunto vacío.

4.4.2. Ideas Importantes

Listo, eso es casí todo, además te gustará que te recuerde las siguientes proposiciones:

- $|\emptyset| = 0$

  Esto quiere decir que la cardinalidad *(es decir la cantidad de elementos)* del conjunto vacío es la misma que la cantidad de galletas en una caja vacía de galletas, osea 0.

- $\emptyset \neq \{\emptyset\}$

  Esto quiere decir que no es lo mismo hablar del conjunto vacío que de hablar de un conjunto cualquiera que contiene al conjunto vacío.

  Es decir simplemente no es lo mismo tener una caja vacía que una caja con una caja vacía dentro *(si lo piensas la segunda caja ya no esta completamente vacía)*

4.4.3. Demostrar que un Conjunto es el vacío

Para demostrar que un conjunto esta vacío basta con tomar un elemento arbitrario del conjunto y llegas a una contradicción.

Por lo tanto concluyes que no puede existir ningún elemento.

Esto se conoce como demostración por vacuidad.

4.5. Conjunto Universo

Como podemos imaginarnos, tenía que existir un término inverso, digamos que estamos analizando y agrupando animales por su habitad, entonces tenemos muchos conjuntos cool como animales del bosque o marinos, pero también tenemos a un mega conjunto que llamamos universo donde tenemos a todos los animales.

Muchas veces a la hora de hablar sobre conjuntos solemos definirlos sobre un universo.

Podemos ver muchas analogías, veamos a ver cual te gusta más:

- Es como si el universo fuera el padre, entonces las hijas son nuestros conjuntos
- Es como si el universo una caja de cereal, entonces nuestros conjuntos son grupos de cerealesque estaban dentro de la caja.

4.5.1. Definición

Un conjunto universo es aquel conjunto que contiene a cualquier conjunto del que estemos hablando.

4.5.2. Ideas Importantes

Creo que resulta bastante obvio pero aquí hay algunas cosas que quizá te interesen.

- $\phi^C = U$
- $U^C = \phi$

Capítulo 5

Álgebra y Operaciones

5.1. Equivalencia

Creo que esta relación es más que obvia, tanto que ya la he usado sin darme cuenta porque considero que es de lo más obvio.

Que dos conjuntos sea iguales quiere decir que ambos conjuntos contiene **exactamente** los mismos elementos.

$$\text{Decimos que } A = B \text{ si y solo si } (\forall a \in A, a \in B) \text{ y } (\forall b \in B, b \in A)$$

Ve entonces que ahora tiene mucho sentido las ideas que puse antes:

- Los elementos repetidos no cuentan, si ya esta un elemento dentro del conjunto, da lo mismo que lo vuelvas a enumerar.
  $A = \{a, e, i, o, u\} = \{a, a, e, i, o, u\}$
- No importa el orden en el me muestres los elementos, solo importa que esten dentro.
  $A = \{a, e, i, o, u\} = \{u, a, i, e, o\}$

5.2. Subconjuntos

Esta es la relación mas importante siento yo, porque será la que mas ocupemos a lo largo del tiempo.

Que el A sea un subconjunto de B quiere decir que **todos** los elementos de A también son elementos de B.

5.2.1. Definición

Podemos definir de la siguiente manera:

Decimos que $A \subseteq B$ si y solo si $\forall a \in A \to a \in B$

Esta idea es muy inteligente, pues nos dice que un el hecho de que un elemento pertenezca a A infiere o nos obliga a que ese mismo elemento pertenezca a B.

5.2.2. SubConjuntos Propios

Solemos usar la idea de un subconjunto propio $A \subset B$ si es que sabemos ya que: $A \subseteq B$ y $A \neq B$

5.2.3. Demostrar la Equivalencia de 2 Conjuntos

Para demostrar que dos conjuntos son iguales podemos usar la idea de demostrar que $(A \subseteq B)$ y $(B \subseteq A)$.

Conocido como doble contención entre los matemáticos.

5.2.4. Ideas Imporantes

Algunas proposiciones muy obvias son que:

- $A \subseteq A$
- Si $A = B$, entonces $A \subseteq B$
- Todos los conjuntos son subconjuntos de conjunto universo U
- $\emptyset \subseteq A$
- Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$
- $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$
- $(A \cup C) \subseteq (B \cup C)$
- Si $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$ entonces $A \subseteq (B \cap C)$
- Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$ entonces $(A \cup B) \subseteq C$
- Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$ entonces $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$

5.3. Intersección

Lo mejor de dos mundos, veamos como seleccionar a los elementos en común con operaciones de conjuntos.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Esta operación basicamente nos da un conjunto en el que estan **solo** los elementos que bien pertenezcan a A **y también** que pertenezcan a B.

5.3.1. Ideas Importantes

- $A \cap A = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap B \subseteq A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5.4. Unión

La unión representa la fuerza, así que veamos que representa la unión cuando estemos hablando de conjuntos.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó bien } x \in B\}$$

Esta operación basicamente nos da un conjunto en el que estan **todos** los elementos que bien pertenezcan a A **o bien** que pertenezcan a B.

5.4.1. Ideas Importantes

- $A \subseteq A \cup B$
- $A \cup B = A$ si y solo si $B \subseteq A$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5.5. Resta o Diferencia

No quiero nada que ver contigo, así que veamos que representa la resta cuando estemos hablando de conjuntos.

Esta operación basicamente nos da un conjunto en el que estan **todos** los elementos de A que no pertenezcen a B.

A esta operación también se la conoce como complemento relativo.

5.5.1. Ideas Importantes

- $A - B = A \cap B^C$
- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

5.6. Diferencia Simétrica

El XOR de los conjuntos, así que veamos que representa la diferencia simétrica cuando estemos hablando de conjuntos.

$$A\Delta B = \{x \ \mid \ x \in A \cup B \ \text{ y } \ x \notin A \cap B\}$$

Esta operación basicamente nos da un conjunto en el que estan **todos** los elementos que pertenezcen a A y a B, pero no a ambos.

5.6.1. Ideas Importantes

- $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
- $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
- $A\Delta\emptyset = A$
- $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$
- $A\Delta A = \emptyset$
- $A\Delta B = B\Delta A$

De hecho de la idea que: $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ sale su nombre, es una diferencia simétrica.

5.7. Complemento

Todo lo que no seas tu, así que veamos que representa el complemento cuando estemos hablando de conjuntos.

$$A^C = \overline{A} = \{x \in U \ \mid \ x \notin A\}$$

Esta operación basicamente nos da un conjunto en el que estan **todos** los elementos que no pertenezcen a A.

También hay otra forma de definirlo como $A^C = U - A$

5.7.1. Conjunto Universo

Si lo piensas detenidamente, aquí hay un problema y es que no te dije que es U, este representa el conjunto universo, es decir, es aquel conjunto que del que todos los demás son subconjuntos.

Es importantes especificar cual es tu conjunto universo.

5.7.2. Ideas Importantes

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
- $(A^C)^C$
- $A \cap A^C = \emptyset$
- $(A - B) \cap B = \emptyset$

5.8. Producto Potencia

El conjunto que contiene a todos los subconjuntos posibles.

Esta operación es diferente en el sentido de que no toma sus elementos del conjunto que toma como entrada, sino que usa esos elementos para combinarlos y crear subconjuntos que son los elementos de esta nueva operación.

Ok, ok, quizá me puse muy intenso con el párrafo de arriba, veamos un poco más calmado como es que funciona.

Esta operación basicamente nos da un conjunto en el que estan **todos** los conjuntos que son subconjuntos de tu conjunto original.

$$P(A) = \{ \ A' \ \mid \ A' \subseteq A \ \}$$

5.8.1. Ideas Importantes

- Si tu conjunto tiene n elementos, tu conjunto potencia tendrá 2^n elementos.
- Si $n < |A|$ entonces existen $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ subconjuntos de A de cardinalidad r
- $\emptyset \in P(A)$
- $A \in P(A)$
- $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- Solo si $A = \{\emptyset\}$ entonces $A \subseteq P(A)$, en cualquier otro caso $A \nsubseteq P(A)$
- $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$
- $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$
- $A \subseteq B$ si y solo si $P(A) \subseteq P(B)$
- Si $A \subseteq P(X)$ y $B \subseteq P(X)$ entonces $A \cup B, A \cap B, A - B, A \Delta B \in P(X)$

5.8.2. Truco para Crear Conjunto Potencia

Podemos hacer uso de una tabla y el binario para encontrar todos los elementos del conjunto potencia.

Si quieres crear un conjunto potencia, escribe la sucesión de números binarios de n cifras, y con cada número haz un subconjunto: Cuando haya un $'1'$, añade el elemento que corresponde.

Veamos por ejemplo $A = \{a, b, c\}$

abc	SubConjuntos
000	$\{\}$
001	$\{c\}$
010	$\{b\}$
011	$\{b, c\}$
100	$\{a\}$
101	$\{a, c\}$
110	$\{a, b\}$
111	$\{a, b, c\}$

Entonces :

$$P(A) = \{\{\}, \{c\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

5.9. Producto Cartesiano

Esta es la base de lo que se conoce como es plano cartesiano, y es quizá la operación mas útil que vas a conocer a lo largo de estos textos, veamos específicamente porque:

5.9.1. N-Tuplas y Pares Ordenados

El resultado de un producto cartesiano es un conjunto formado de n-tuplas, cada n-tuplas es una agrupación ordenada de elementos. Por ejemplo (a, b) ó (x, y, z).

Al ser un ente ordenado $(a, b) \neq (b, a)$ a menos que $a = b$

La n en su nombre solo nos dice la cantidad de elementos que tiene cada tupla.

Definición como Conjuntos

Ya que estamos hablando de que todo en matemáticas se puede expresar como conjunto, entonces podemos expresar esta definición como:

$$(a, b) := \{ \{ a \}, \{ a, b \} \}$$

Antes que nada, es importante notar que esta definición es arbitraria esta hecha a la medida por un hombre que se llamaba Kuratowski pero no es la única definición que existe, pero si una con propiedades muy bonitas y de algún modo es la más minimalista.

Recuerda que para que podamos considerar que ese conjunto de arriba es un par ordenado tendrá que cumplir con que:

$(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $c = d$

Demostración:

Empecemos por la primera implicación: Supongamos que $(a, b) = (c, d)$

Supongamos primero que $a = b$ entonces tendremos que:

$$(a, b) == \{ \{ a \}, \{ a, b \} \} = \{ \{ a \}, \{ a, a \} \} = \{ \{ a \}, \{ a \} \} = \{ \{ a \} \}$$

Por lo tanto nuestra demostración se reduce a $\{\{a\}\} = \{\{c\}\}$ y esto solo pasa si $a = c$ y $b = d$.

Por otro lado si $a \neq b$ tenemos que: $\{ \{ a \}, \{ a, b \} \} = \{ \{ c \}, \{ c, d \} \}$ es decir tendremos que $\{ a \} = \{ c \}$ y $\{ a, b \} = \{ c, d \}$.

De esto tenemos que $a = c$ y $b = d$.

Ahora por el otro lado, si $a = c$ y $b = d$ tenemos que el par ordenado que generan es exactamente el mismo

Propiedades

- La idea a es la primera coordenada de (a, b) se puede proponer como: $\forall C \in (a, b), \ \ a \in C$
- La idea b es la segunda coordenada de (a, b) se puede proponer como: $\exists C \in (a, b), \ \ a \notin C$
- $(a, b) \subseteq P(\{a, b\})$

  Demostración:

  Basta con ver explicitamente que: $P(a, b) = \{ \emptyset, a, b, \{a, b\} \}$
- $\forall a \in A$ y $b \in B, \ (a, b) \in P(P(A \cup B))$

  Demostración:

  Ya sabemos que $(a, b) \subseteq P(a, b)$.

  Ahora ve que $a, b \subseteq A \cup B$, por lo tanto $P(a, b) \subseteq P(A \cup B)$

  Por lo tanto, usando la propiedad transitiva tenemos que $(a, b) \subset P(A \cup B)$, que es lo mismo que decir que $(a, b) \in P(P(A \cup B))$

  Y gracias a como definimos el producto catesiano $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A$ y también $b \in B\}$ tenemos que $A \times B \subseteq P(P(A \cup B))$

Definición

Esta operación basicamente nos da un conjunto en el que estan **todas** las n-tuplas donde su primer elemento pertenece a A y su segundo elemento pertenece a B.

$$A \times B = \{ \ (a, b) \ \mid \ a \in A \text{ y también } b \in B \ \}$$

5.9.2. Ideas Importantes

- Ve que de la definición se tiene que mientras sean conjuntos distintos $A \times B \neq B \times A$
- $A \times \emptyset = \emptyset$
- También de manera común solemos simplificar $A \times A$ como A^2
- Un elemento de $A \times B \times C$ es $((a, b), c) = (a, (b, c)) = (a, b, c)$
- Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$ entonces $A \times C \subseteq B \times D$
- Si $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- Si $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- Si $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
- Sea A, B, C, D con C, D diferentes de $\emptyset$ entonces $C \times D \subseteq A \times B$ si y solo si $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$
- Sea $X \subset A \times B$ entonces X no necesariamente se puede expresar como $X = A' \times B'$.

5.9.3. Como Obtenerlo

Podemos hacer uso de una tabla para encontrar todos los elementos del producto cartesiano.

Veamos por ejemplo $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{x, y, z\}$

$A \times B$	x	y	z
a	(a, x)	(a, y)	(a, z)
b	(b, x)	(b, y)	(b, z)
c	(c, x)	(c, y)	(c, z)

Entonces :

$$A \times B = \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z), (c, x), (c, y), (c, z)\}$$

5.10. Leyes de los Conjuntos

Sean A, B, C conjuntos de un universo U, entonces tenemos las siguientes propiedades:

- **Doble Complemento**
  $(A^C)^C = A$
- **Propiedad Conmutativa**
  - $A \cap B = B \cap A$
  - $A \cup B = B \cup A$
- **Propiedad Asociativa**
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **Propiedad Distributiva**
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **Leyes de Morgan**
  - $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
  - $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

- **Propiedad de los Neutros**
  - $A \cap U = A$
  - $A \cup \emptyset = A$
- **Propiedad de los Inversos**
  - $A \cap A^C = \emptyset$
  - $A \cup A^C = U$
- **Propiedad de Dominación**
  - $A \cap \emptyset = \emptyset$
  - $A \cup U = U$
- **Propiedad de Inepotencia**
  - $A \cap A = A$
  - $A \cup A = A$
- **Propiedad de Absorción**
  - $A \cap (A \cup B) = A$
  - $A \cup (A \cap B) = A$

5.11. Cardinalidad y sus Propiedades

Ok, vamos avanzando, ahora es la hora de ver una característica de los conjuntos. La Cardinalidad, que no es mas que una forma *fancy* de decir el número de elementos ó entes que contiene cierto conjunto.

Puedes verlo como una función que recibe un conjunto cualquiera y te regresa un número *(Bueno, tecnicamente también sta el caso en el que la cardinalidad es infinita)*.

Esta es la forma en que solemos expresar la cardinalidad de un conjunto cualquiera:

$$|A| = \#A = Card(A) \tag{5.1}$$

PD: Como te imaginas las propiedades no sirven de nada si es que alguno de tus conjuntos tiene una cardinalidad infinita, así que voy a suponer por obviedad que todos los siguientes conjuntos son finitos, que sino tendría que especificarlo a cada 4 palabras.

5.11.1. Ideas Importantes

- $|A^C| = |U| - |A|$
- $|A| \leq |B|$
- $|A \cup B| = |A| + \ |B| - |A \cap B|$
- $|A \cap B| = |A| + \ |B| - |A \cup B|$
- $|A - B| = |A| - |A \cap B|$
- $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- $|P(A)| = 2^{|A|}$

Parte III

Relaciones y Funciones

Capítulo 6

Relaciones

6.1. Definición

Una relación R entre dos conjuntos A y B es ante todo otro conjunto, una relación binaria es aquella que es en el fondo un conjunto de pares ordenados (x,y) donde x es un elemento de A, y así mismo y es un elemento de B.

Este nuevo conjunto R nos muestra como es que esta relacionados algunos (o todos) elementos de A con otros elementos de B.

Una Relación $R : A \to B$ es un subconjunto de $A \times B$.

Solemos escribir la proposición $(x, y) \in R$ como xRy para que se vea más bonito.

Solemos escribir la proposición $(x, y) \notin R$ como $x \not R\ y$ para que se vea más bonito.

6.2. Dominio, Contradominio e Imagen

Dominio

El dominio D_R de una relación $R : A \to B$ es simplemente el subconjunto de A que contiene a todos los elementos que están relacionados hacia algun elemento de B mediante R

$$D_R = \{ \ a \in A \ \mid \ \exists b, \ aRb \ \}$$

Imagen

También le llama Rango, la Imagen I_R de una relación $R : A \to B$ es simplemente el subconjunto de B que contiene a todos los elementos para los cuales algún elemento de A los relaciona mediante R.

$$I_R = \{ \ b \in B \ \mid \ \exists a, \ aRb \ \}$$

Codominio

El codominio de una relación $R : A \to B$ es... es B, simplemente eso :/

6.3. SubImagen e SubImagen Inversa

Dada una relación $R : A \to B$ y dado $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$ entonces podemos definir lo siguiente:

Subimágen de C bajo R

La Subimágen de C bajo R es simplemente el subconjunto de B que contiene a todos los elementos para los cuales algún elemento de C los relaciona mediante R.

$$I_R[C] = \{\ b \in B \ \mid\ \exists a \in C,\ \ aRbS\ \}$$

Subimágen Inversa de C bajo R

Esta la definimos como:

$$I_R^{-1}[C] = \{\ a \in A \ \mid\ \exists b \in D,\ \ aRb\ \}$$

6.4. Relación Inversa

Una relación inversa es bastante fácil de definir:

$$R^{-1} = \{ \ (b, a) \in (B \times A) \ \mid \ (a, b) \in R \ \}$$

6.5. Relación Compuesta

Sea A, B, C conjuntos cualesquiera, si $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$ entonces podemos definir a la relación compuesta como:

$$S \circ R = \{ \ (a, c) \in A \times C \ \mid \ \exists b \in R \text{ tal que } (a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in S \ \}$$

Podemos también decir que si la intesección entre $Imagen(R)$ y $Dominio(S)$ es $\emptyset$ implica que $S \circ R = \emptyset$

6.6. Relación Identidad

Una relación identidad es bastante fácil de definir donde tenemos que $\Delta_A \subseteq A \times A$:

$$\Delta_A = \{ \ (a, a) \ \mid \ a \in A \ \}$$

Esta identidad tiene unas propiedades muy locas:

- $R \circ \Delta_A = R$
- $\Delta_B \circ R = R$

6.7. Reflexiva, Simétrica y Transitiva

Vamos a definir estas propiedades para una $R : A \to A$.

6.7.1. Reflexiva

Una relación reflexiva es aquella en la que cualquier a tiene que estar relacionada consigo misma.

$$\forall a \in A, \;\; aRa$$

Cerradura Reflexiva

Si te das cuenta la relación mas sencilla que es simétrica es ovbia:

$$Id_A = \{(a, a) \;\mid\; a \in A\}$$

La cerradura reflexiva $Cl_R(R)$ de una relación R es una relación que cumple con:

- Es reflexiva: $Cl_R(R)$ es reflexiva.
- R esta contenida en ella: $R \subseteq Cl_R(R)$
- $Cl_R(R)$ es la relación mas pequeña posible: Si es que S es reflexiva y $R \subseteq S$ entonces $Cl_R(R) \subseteq S$

De hecho si te das cuenta es muy sencillo encontrarla, pues $Cl_R(R) = R \cup Id_A$.

6.7.2. Simétrica

Una relación simétrica es aquella en la que cualquier si existe aRb existe bRa.

$$\forall a, b \in A,\ (aRb) \to (bRa)$$

La cerradura simétrica $Cl_S(R)$ de una relación R es una relación que cumple con:

- Es simétrica: $Cl_S(R)$ es simétrica.
- R esta contenida en ella: $R \subseteq Cl_S(R)$
- $Cl_S(R)$ es la relación mas pequeña posible: Si es que S es simétrica y $R \subseteq S$ entonces $Cl_S(R) \subseteq S$

De hecho si te das cuenta es muy sencillo encontrarla, pues $Cl_S(R) = R \cup R^{-1}$.

6.7.3. Transitiva

Una relación transitiva es aquella que cumple con que: misma.

$$\forall a, b, c \in A, \; ((aRb) \wedge (bRa)) \;\; \Rightarrow \;\; (aRc)$$

La cerradura transitiva $Cl_T(R)$ de una relación R es una relación que cumple con:

- Es transitiva: $Cl_T(R)$ es transitiva.
- R esta contenida en ella: $R \subseteq Cl_T(R)$
- $Cl_T(R)$ es la relación mas pequeña posible: Si es que S es transitiva y $R \subseteq S$ entonces $Cl_T(R) \subseteq S$

6.8. Relación de Equivalencia

Decimos que R es una relación de equivalencia si es que se cumplen las 3 propiedades antes vistas: Simetrica, transitiva y reflexiva.

6.8.1. Clases de Equivalencia

Una relación de equivalencia R sobre un conjunto A produce una partición del conjunto en subconjuntos disjuntos, llamados **Clases de Equivalencia**, cada uno de ellos formados por elementos que están relacionados entre sí.

Esta partición se representa por $A \backslash R$ y se llama **Conjunto Cociente**.

Sea R una relación de equivalencia en A, entonces podemos escribir a una clase de equivalencia como:

$$[a]_R := \{ \ b \in A \ \mid \ aRb \ \}$$

Propiedades

Sea R una relación de equivalencia en A, entonces podemos decir que:

- $\forall a \in A, \quad [a]_R \neq \emptyset$
- $[a]_R = [b]_R$ si y solo si aRb
- $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ si y solo si aRb si y solo si $[a]_R \neq [b]_R$

6.8.2. Particiones

Sea P un conjunto $P = \{ A_0, A_1, A_2 \dots A_n \} = \{ A_i \}_{i \in I}$, cuyos elementos son subconjuntos de A es una partición de X si y solo si:

- $\forall i \in I \; A_i \subseteq A$
- $\forall i \in I \; A_i \neq \emptyset$
- Si $i \neq j$ entonces $A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\cup_{i \in I} A_i = A$

Algo también muy importante de recalcar es que toda Partición induce una Relación de Equivalencia, esta es tan sencilla como que $(x, y) \in R$ si y solo si $x, y \in A_i$

Capítulo 7

Funciones

7.1. Definición

Las funciones son más que meras descripciones de relaciones numéricas. En un sentido más general, las funciones pueden comparar y relacionar diferentes tipos de estructuras matemáticas.

Es probable que veas una función como un tipo de fórmula que describe una relación entre dos (o más) cantidades.

Podemos definirlas de una manera informal como aquellas relaciones donde cada elemento de A esta involucrado solo una vez en la relación.

Definición Formal

Digamos que tenemos una relación f entre dos conjuntos A y B. Decimos que esta relación es una función si y solo si cumple estas dos proposiciones:

- Todo los elementos del dominio tienen un valor asignado:

$$\forall a \in A,\ \exists b \in B,\ \ afb$$

- Si aRb_1 y aRb_2 entonces $b_1 = b_2$

Definición Formal: Pro

Pero no es la única forma de definirlo, otra forma es decir que una función es una relación que cumple con la propiedad de que para cada $a \in A$, la relación f contiene exactamente un par ordenado de la forma $(a, b) \in f$.

Es decir, con un lenguaje mas formal tenemos que:

$$\forall a \in A,\ \exists!\ b \in B \text{ tal que } (a, b) \in f$$

Ya que solo existe un par ordenado para cada $a \in A$, entonces solemos escribir aRb como $f(a) = b$.

7.2. Dominio e Imagen

Dominio

El dominio D_f de una función $f : A \to B$ es simplemente el conjunto de A.

Digo, esto se deduce de la definición, ya que es el conjunto de todas las posibles entradas.

Imagen

El Rango ó Imagen de una función $f : A \to B$ es el conjunto de todas las posibles salidas de la función.

$$\text{Rango}_f = \{\ b \in B \ \mid\ (a, b) \in f\ \} = \{\ f(a) \ \mid\ a \in A\ \} \tag{7.1}$$

7.3. SubImagen e SubImagen Inversa

Dada una relación $f : X \to Y$ y dado $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ entonces podemos definir lo siguiente:

Subimágen de A bajo f

Esta la definimos como:

$$f[A] = \{\ y \ \mid\ \exists x \in A,\ \ f(x) = y\ \}$$

Subimágen Inversa de C bajo R

Esta la definimos como:

$$f^{-1}[B] = \{x \ \mid\ \exists f(x) \in B\}$$

7.4. Igualdad de Funciones

Decimos que dos funciones $f : X \to Y$ y $g : X \to Y'$ son iguales si y solo si $f(x) = g(x)\ \forall x \in X$

7.5. Composición de Funciones

Recuerda que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

7.6. Inyectivas, Suprayectivas y Biyectivas

7.6.1. Biyectiva

Son funciones muy especiales, son aquellas en las tanto son inyectivas como suprayectivas. Pero veamos mas a fondo que es eso de que una función sea alguna de estas cosas.

7.6.2. Funciones Inyectivas

"Una función inyectiva es aquella en la que una línea horizontal NUNCA toca más de un punto de la función".

Una función es inyectiva si a cada valor del conjunto dominio le corresponde un valor distinto en el conjunto imágen, es decir en el que es imposible que la función mande dos valores al mismo valor en B.

Es decir si es que es imposible que $f(a_1) = b$ y que también $f(a_2) = b$.

$$\forall x, y \in A,\ (x \neq y) \ \Rightarrow \ (f(x) \neq f(y))$$

Demostraciones

Para lograr demostrar que una f es inyectiva tenemos que demostrar que para cualquiera combinación de elementos $x, y \in A$ se cumple que el hecho de que sean diferentes infiere a que $f(x) \neq f(y)$.

- **Demostración Directa**:

  Supón que $x, y \in A$ y que $x \neq y$ $\cdots$ Por lo tanto $f(x) \neq f(y)$

- **ContraPositiva**:

  Supón que $x, y \in A$ y que $f(x) = f(y)$ $\cdots$ Por lo tanto $x = y$

7.6.3. Suprayectivas

"Una función suprayectiva es aquella en la que una línea horizontal SIEMPRE toca mínimo punto de la función".

Son funciones en las que cada elemento del rango tiene un elemento en A. Una función es suprayectiva si está aplicada sobre todo B.

$$\forall b \in B, \exists a \in A, \; f(a) = b$$

7.7. Inversa por la Izquierda e Inyectivas

Dada una función $f : A \to B$ que es inyectiva siempre existirá una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = Id_A$.

Decimos que g es la inversa por la izquierda de f

Nota decimos que existe una g, ya que si $|A| \neq |B|$ entonces existen más.

7.8. Inversa por la Derecha e Suprayectivas

Dada una función $f : A \to B$ que es suprayectiva siempre existirá una función $h : B \to A$ tal que $f \circ h = Id_B$.

Decimos que h es la inversa por la derecha de f

Nota decimos que existe una h, ya que si $|A| \neq |B|$ entonces existen más.

7.9. Principio del Palomar

Aquí hay una gran historia de porque se llama así este principio.

Supón que A y B son conjuntos finitos y que existe una $f : A \to B$ que es una función.

Entonces tenemos que:

- Si $|A| > |B|$, entonces f no es inyectiva.
- Si $|A| < |B|$, entonces f no es suprayectiva.

7.10. Función Inversa

Aunque parecido, para que exista la relación inversa sea también una función, nuestra función original tendrá que ser biyectia.

Esta función inversa tiene una propiedad muy obvia:

$$\forall x \in A, \;\; f^{-1}(f(x)) = x$$

Y también otra obvia:

$$\forall y \in B, \;\; f(f^{-1}(y)) = y$$

Es decir que ya que f es inyectiva entonces existe una inversa por la izquierda g y como f es suprayectiva entonces existe una inversa por la derecha.

Mas aún, $g = h$ por lo tanto en vez de llamarlas inversas por la derecha o izquierda la llamamos f^{-1}

7.11. Conjuntos Equipotentes

Decimos que dos conjuntos A, B son equipotentes si y solo si existe una función biyectiva de A a B.

7.11.1. Ideas Importantes

- No existe una función biyectiva entre cualquier conjunto A y $P(A)$

7.12. Cardinalidad y Funciones

Podemos definir la cardinalidad de los conjuntos de una mejor manera usando la equipotencia:

Los conjuntos tienen la misma cardinalidad $|A| = |B|$ si y solo si es que existe una función biyectiva $f : A \to B$, es decir, dos conjuntos son equipotentes si y solo si son equipotentes.

Aquí hay algo muy obvio pero importante, podemos decir cosas como $|\{ a, b, c \}| = 3$ porque bajo las ideas conjuntivistas el 3 solo es una abreviación de $\{ 0, 1, 2 \} = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \}$ y es mas obvio ahora que podemos hacer una biyección entre dichos conjuntos.

Gracias a esto podemos decir que:

- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = \aleph_0$
- $P(|\mathbb{N}|) = |(0, 1)| = |\mathbb{R}| = \aleph_1$
- $P(|\mathbb{R}|) = \aleph_2$
- $\dots$

Parte IV

Cosas fuera de Lugar pero necesarias

Capítulo 8

Inducción

8.1. Primer Principio Inductivo

La inducción matemática es un método de demostración que se utiliza cuando se trata de establecer la veracidad de una lista infinita de proposiciones.

8.2. Pasos

- Caso Base: Toma tu proposición, y encuentra un caso base, es decir el natural más pequeño que cumple la proposición.

  Nota: Muchas, muchísimas veces es ese número es uno (ósea siempre se cumple), pero no siempre, así que no te confíes, encuentra ese caso base.

- Supone que se cumple para k: Este es el paso más simple, lo único que tienes que hacer es creer (tratar como un axioma, como tu quieras verlo) que se cumple para el caso k.

- Demuestra k+1: No todo en la vida podría ser tan fácil, este paso el el 95 % de la dificultad del problema, usando lo del paso anterior tienes que demostrar que si se cumple para k A FUERZAS se cumple para K+1.

8.3. Segundo Principio Inductivo

El segundo principio de la inducción, a veces llamado Principio Fuerte de Inducción, en contraposición a la habitual, que es también llamado a la versión débil. Esta distinción es sólo aparente a primera ya que ambos son equivalentes.

La diferencia básicamente es que en la versión anterior la hipótesis inductiva es sólo que la propiedad a demostrar que es verdadera para algún entero k, y, a continuación, que muestran que también vale para $n + 1$.

Mientras que la versión fuerte nos permite suponer que la propiedad se cumple para algun natural k y TODOS los anteriores.

8.4. Ejemplos

Ejemplo 1

Prueba que:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

- Por un lado tenemos que para n = 0 entonces tenemos que:

$$\sum_{i=0}^{0} (2n+1)^2 = 1 = \frac{3}{3} = \frac{(1)(1)(3)}{3} = \frac{(1)(1)(3)}{3} = \frac{(0+1)(2(0)+1)(2(0)+3)}{3}$$

  Por lo tanto el caso base se cumple.

- Supongamos entonces válido $\sum_{i=0}^{n} (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$ para alguna n. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} (2n+1)^2 &= \sum_{i=0}^{n} (2n+1)^2 + (2(n+1)+1)^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} + (2(n+1)+1)^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} + \frac{3(2n+3)(2n+3)}{3} \\
&= (2n+3)\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{3(2n+3)}{3}\right) \\
&= (2n+3)\left(\frac{(n+1)(2n+1)3(2n+3)}{3}\right) \\
&= (2n+3)\left(\frac{2n^2+9n+10}{3}\right) \\
&= \frac{(n+2)(2n+3)(2n+5)}{3} \\
&= \frac{((n+1)+1)(2(n+1)+1)(2(n+1)+3)}{3}
\end{aligned}$$

  Y esto es justo lo que la fórmula predijo, y ya que vimos que se cumple para 0 y que si se cumple para n entonces se cumple para $n+1$ entonces tenemos que dicha fórmula es válida para todos los naturales.

Ejemplo 2

Prueba que:

$$3 + 3 * 5 + 3 * 5^2 + \cdots + 3 * 5^n = \sum_{i=0}^{n} 3 * 5^i = 3\frac{5^{n+1} - 1}{4} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

- Por un lado tenemos que para n = 0 entonces tenemos que:

$$\sum_{i=0}^{0} 3 * 5^i = 3 = 3 * \frac{4}{4} = 3 * \frac{5-1}{4} = 3 * \frac{5^{0+1} - 1}{4}$$

  Por lo tanto el caso base se cumple.

- Supongamos entonces válido $\sum_{i=0}^{n} 3 * 5^i = 3\frac{5^{n+1} - 1}{4}$ para alguna n.

  Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} 3 * 5^i &= \sum_{i=0}^{n} 3 * 5^i + 3 * 5^{n+1} \\
&= 3\frac{5^{n+1} - 1}{4} + 3 * 5^{n+1} \\
&= 3\frac{5^{n+1} - 1}{4} + 3\frac{4 * 5^{n+1}}{4} \\
&= 3\frac{5^{n+1} - 1 + 4 * 5^{n+1}}{4} \\
&= 3\frac{5 * 5^{n+1} - 1}{4} \\
&= 3\frac{5^{n+2} - 1}{4} \\
&= 3\frac{5^{(n+1)+1} - 1}{4}
\end{aligned}$$

  Y esto es justo lo que la fórmula predijo, y ya que vimos que se cumple para 0 y que si se cumple para n entonces se cumple para $n + 1$ entonces tenemos que dicha fórmula es válida para todos los naturales.

Ejemplo 3

Prueba que:

$$2-2*7+2*7^2+\cdots+2*(-7)^n = \sum_{i=0}^{n} 2*(-7)^i = \frac{1-(-7)^{n+1}}{4} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

- Por un lado tenemos que para n = 0 entonces tenemos que:

  $$\sum_{i=0}^{0} 2*(-7)^i = 2 = \frac{8}{4} = \frac{1-(-7)}{4} = \frac{1-(-7)^{0+1}}{4}$$

  Por lo tanto el caso base se cumple.

- Supongamos entonces válido $\sum_{i=0}^{n} 2*(-7)^i = \dfrac{1-(-7)^{n+1}}{4}$ para alguna n.

  Entonces tenemos que:

  $$\begin{aligned}
  \sum_{i=0}^{n+1} 3*5^i &= \sum_{i=0}^{n+1} 2*(-7)^i \\
  &= \sum_{i=0}^{n} 2*(-7)^i + 2*(-7)^{n+1} \\
  &= \frac{1-(-7)^{n+1}}{4} + 2*(-7)^{n+1} \\
  &= \frac{1-(-7)^{n+1}}{4} + \frac{8*(-7)^{n+1}}{4} \\
  &= \frac{1-(-7)^{n+1}+8*(-7)^{n+1}}{4} \\
  &= \frac{1+7(-7)^{n+1}}{4} \\
  &= \frac{1-(-7)(-7)^{n+1}}{4} \\
  &= \frac{1-(-7)^{(n+1)+1}}{4}
  \end{aligned}$$

  Y esto es justo lo que la fórmula predijo, y ya que vimos que se cumple para 0 y que si se cumple para n entonces se cumple para $n+1$ entonces tenemos que dicha fórmula es válida para todos los naturales.

Ejemplo 4

Prueba que:

$$\sum_{k=1}^{n} k * 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

- Por un lado tenemos que para n = 1 entonces tenemos que:

  $$\sum_{k=1}^{1} k2^k = 1 * 2 = 2 = (0) + 2 = (0)2^1 + 2$$

  Por lo tanto el caso base se cumple.
- Supongamos entonces válido $\sum_{k=1}^{n} k * 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$ para alguna n.
  Entonces tenemos que:

  $$\begin{aligned}
  \sum_{k=1}^{n+1} k * 2^k &= \sum_{k=1}^{n} k * 2^k + (n+1) * 2^{n+1} \\
  &= (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1) * 2^{n+1} \\
  &= (n-1)2^{n+1} + 2 + (n-1) * 2^{n+1} + 2^{n+2} \\
  &= (n-1)2^{n+1} + (n-1) * 2^{n+1} + 2 + 2^{n+2} \\
  &= (n-1)(2^{n+1} + 2^{n+1}) + 2 + 2^{n+2} \\
  &= (n-1)(2 * 2^{n+1}) + 2 + 2^{n+2} \\
  &= (n-1)(2^{(n+1)+1}) + 2 + 2^{n+2} \\
  &= (n)(2^{(n+1)+1}) + 2 \\
  &= ((n+1)-1)(2^{(n+1)+1}) + 2
  \end{aligned}$$

  Y esto es justo lo que la fórmula predijo, y ya que vimos que se cumple para 1 y que si se cumple para n entonces se cumple para $n+1$ entonces tenemos que dicha fórmula es válida para todos los naturales.

Ejemplo 5

Prueba que:

$$2|n^2 + n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

- Por un lado tenemos que para n = 1 entonces tenemos que:

  $$2|1^2 + 1 = 2|2$$

  Por lo tanto el caso base se cumple.

- Supongamos entonces válido $2|n^2 + n$, es decir $n^2 + n = 2k$ para alguna n.
  Entonces tenemos que:

  $$\begin{aligned}(n+1)^2 + (n+1) &= n^2 + 2n + 1 + (n+1) \\ &= n^2 + 2n + 1 + (n+1) \\ &= n^2 + n + n + 1 + (n+1) \\ &= 2k + n + 1 + (n+1) \\ &= 2k + 2n + 2 \\ &= 2(k + n + 1)\end{aligned}$$

  Y esto es justo lo que queriamos ver, que $2|(n+1)^2 + (n+1)$, y ya que vimos que se cumple para 1 y que si se cumple para n entonces se cumple para $n+1$ entonces tenemos que dicha fórmula es válida para todos los naturales.

Ejemplo 6

Prueba que:

$$3|n^3 + 2n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

- Por un lado tenemos que para n = 1 entonces tenemos que:

  $$3|1^3 + 2(1) = 3|3$$

  Por lo tanto el caso base se cumple.

- Supongamos entonces válido $3|n^3 + 2n$, es decir $n^3 + 2n = 3k$ para alguna n.
  Entonces tenemos que:

  $$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= (n+1)(n^2 + 2n + 1) + 2(n+1)\\ &= (n^3 + 2n^2 + n) + (n^2 + 2n + 1) + 2(n+1)\\ &= (n^3 + n) + 2n^2 + (n^2 + 2n + 1) + 2(n+1)\\ &= 3k + 3n^2 + (2n+1) + 2(n+1)\\ &= 3k + 3n^2 + (3n+3)\\ &= 3(k + n^2 + n + 1)\end{aligned}$$

  Y esto es justo lo que queriamos ver, que $3|(n+1)^3+2(n+1)$, y ya que vimos que se cumple para 1 y que si se cumple para n entonces se cumple para $n+1$ entonces tenemos que dicha fórmula es válida para todos los naturales.

Ejemplo 7

Prueba que:

$$5|n^5 - n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

- Por un lado tenemos que para n = 1 entonces tenemos que:

  $$5|1^5 - 1 = 5|0$$

  Y pues siempre se cumple que $x|0$. Por lo tanto el caso base se cumple.

- Supongamos entonces válido $5|n^5 - n$, es decir $n^5 - n = 5k$ para alguna n.
  Entonces tenemos que:

  $$\begin{aligned}(n+1)^5 - (n+1) &= (n+1)^5 - (n+1) \\ &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - (n+1) \\ &= (n^5 - n) + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n \\ &= 5k + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n \\ &= 5(k + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 1n)\end{aligned}$$

  Y esto es justo lo que queriamos ver, que $5|(n+1)^5 - (n+1)$, y ya que vimos que se cumple para 1 y que si se cumple para n entonces se cumple para $n+1$ entonces tenemos que dicha fórmula es válida para todos los naturales.

Ejemplo 8

Prueba que:

$$6|n^3 - n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

- Por un lado tenemos que para n = 1 entonces tenemos que:

  $$6|1^3 - 1 = 6|0$$

  Y pues siempre se cumple que $x|0$. Por lo tanto el caso base se cumple.

- Supongamos entonces válido $6|n^3 - n$, es decir $n^3 - n = 6k$ para alguna n.
  Entonces tenemos que:

  $$\begin{aligned}(n+1)^3 - (n+1) &= (n+1)^3 - (n+1)\\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - (n+1)\\ &= n^3 - n + 3n^2 + 3n\\ &= 6k + 3n^2 + 3n\\ &= 6k + 3(n^2 + n)\\ &= 6k + 3(2k')\\ &= 6(k + k')\end{aligned}$$

  Y esto es justo lo que queriamos ver, que $6|(n+1)^3 - (n+1)$, y ya que vimos que se cumple para 1 y que si se cumple para n entonces se cumple para $n+1$ entonces tenemos que dicha fórmula es válida para todos los naturales.

Capítulo 9

Estructuras Algebraicas

9.1. Grupo

9.1.1. Definición Formal

Un Grupo es una un tupla $(G, \diamond)$ donde:

- **Conjunto Base:** G
  Un Conjunto llamado G que no este vacío (daaaaa!)
- **Relación Maestra:** $\diamond : (G \times G) \to G$
  Una relación $\diamond : (G \times G) \to G$, es decir, es una relación que recibe dos elementos de G (o más específico un par ordenado) y te regresa un nuevo elemento de G.

Donde esta tupla $(G, \diamond)$ cumple que:

- **Ley Asociativa:** $\forall a, b, c \in G,\ (a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$
- **Existe un Elemento Indentidad:** $\exists 0 \in G,\ \forall a \in G,\ 0 \diamond a = a \diamond 0 = a$
- **Existen Inversos:** $\forall a \in G,\ \exists b \in G,\ a \diamond b = b \diamond a = 0$

9.1.2. Ideas

- ¿El elemento identidad es único?

  Nunca se dijo en la definición que esto tendría porque ser así, aunque una vez que lo piensas es muy obvio que es único pues si 1 y $1'$ quieren ser la indentidad tendremos que:

  $1 = 1 \diamond 1' = 1'$

- ¿El elemento inverso es único?

  Nunca se dijo en la definición que esto tendría porque ser así, aunque una vez que lo piensas es muy obvio que es único pues si b y b' quieren ser inversos tendremos que:

  $b = b \diamond 1 = b(a \diamond b') = (b \diamond a)b' = 1 \diamond b' = b'$

9.1.3. Grupo Abeliano

Un Grupo Abeliano es aquel Grupo $(G, \diamond)$ donde tenemos que:

$\forall a, b \in G, \;\; a \diamond b = b \diamond a$

9.1.4. Ejemplo de un Grupo

Considera $(\mathbb{Z}, +)$ podemos ver que:

- **Ley Asociativa:** $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \;\; (a + b) + c = a + (b + c)$
- **Existe un Elemento Indentidad:** $\exists 0 \in \mathbb{Z}, \;\; \forall a \in \mathbb{Z}, \;\; 0 + a = a + 0 = a$
- **Existen Inversos:** $\forall a \in \mathbb{Z}, \;\; \exists b \in \mathbb{Z}, \;\; a + b = b + a = 0$

9.2. Anillos

9.2.1. Definición Formal

Un Anillo es un Grupo Abeliano con una segunda operación binaria que es Asociativa, Distributiva sobre el Grupo Abeliano y que contiene una Identidad.

Un Anillo es una un tupla $(G, \diamond, \star)$ donde:

- **Conjunto Base:** G

  Un Conjunto llamado G que no este vacío (daaaaa!)
- **Relación 1:** $\diamond : (G \times G) \to G$

  Una relación $\diamond : (G \times G) \to G$, es decir, es una relación que recibe dos elementos de G (o más específico un par ordenado) y te regresa un nuevo elemento de G.
- **Relación 2:** $\star : (G \times G) \to G$

  Una relación $\star : (G \times G) \to G$, es decir, es una relación que recibe dos elementos de G (o más específico un par ordenado) y te regresa un nuevo elemento de G.

Donde esta tupla $(G, \diamond, \star)$ cumple que:

- **Ley Aditiva Asociativa:** $\forall a, b, c \in G,\ (a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$
- **Ley Aditiva Conmutativa:** $\forall a, b \in G,\ a \diamond b = b \diamond a$
- **Elemento Indentidad Aditivo:** $\exists 0 \in G,\ \forall a \in G,\ 0 \diamond a = a \diamond 0 = a$
- **Existen Inversos Aditivos:** $\forall a \in G,\ \exists b \in G,\ a \diamond b = b \diamond a = 0$
- **Ley Distributiva:** $\forall a, b, c \in G,\ a \star (b \diamond c) = (a \star b) \diamond (a \star c)$ y $(b \diamond c) \star a = (b \star a) \diamond (c \star a)$
- **Ley Multiplicativa Asociativa:** $\forall a, b, c \in G,\ (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$
- **Elemento Indentidad Multiplicativo:** $\exists 1 \in G,\ \forall a \in G,\ 1 \star a = a \star 1 = a$

9.2.2. Ideas

- ¿La segunda operación $\star$ tiene que tener una identidad?

  Existe algo de debate en la comunidad científica sobre si un Anillo debería tener o no una indetidad multiplicativa, así que las siguientes hojas clasificamos a los anillos en dos dependiendo de esta propiedad, ahora la verdad es que los anillos que si que tienen una identidad multiplicativa son mucho más interesantes.

- ¿Es cierto que $a \star c = b \star c \to a = b$?

  Esto no es cierto, al menos no siempre, de hecho hay muchos casos donde esto no se cumple por ejemplo:

  $2 * 6 \equiv 6 * 6 \pmod{8}$ pero $2 \not\equiv 6 \pmod{8}$

  La razón por la que ocurre esto es que hay muchos anillos (como este) en el que no todos sus elementos tienen inversos multiplicativos.

9.2.3. Rng ó Pseudo Anillo vs Anillo Unitario

- Si tu Anillo tiene una indentidad multiplicativa entonces se llama un **Anillo Unitario**.
- Si tu Anillo NO tiene una indentidad multiplicativa entonces se llama un **Pseudo Anillo ó Rng**.

9.2.4. Anillo Conmutativo

Un Anillo Conmutativo es aquel Anillo $(G, \diamond, \star)$ donde tenemos que:

$\forall a, b \in G, \;\; a \star b = b \star a$

9.3. Campo

9.3.1. Definición Formal

Un Campo es un Anillo Conmutativo con dos indentidades con respecto a cada operación binaria, donde cualquier elemento que no sea la identidad multiplicativa tiene un inverso multiplicativo.

Un Campo es una un tupla $(G, \diamond, \star)$ donde:

- **Conjunto Base:** G

  Un Conjunto llamado G que no este vacío (daaaaa!)

- **Relación 1:** $\diamond : (G \times G) \to G$

  Una relación $\diamond : (G \times G) \to G$, es decir, es una relación que recibe dos elementos de G (o más específico un par ordenado) y te regresa un nuevo elemento de G.

- **Relación 2:** $\star : (G \times G) \to G$

  Una relación $\star : (G \times G) \to G$, es decir, es una relación que recibe dos elementos de G (o más específico un par ordenado) y te regresa un nuevo elemento de G.

Donde esta tupla $(G, \diamond, \star)$ cumple que:

- **Ley Aditiva Asociativa:** $\forall a, b, c \in G,\ (a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$
- **Ley Aditiva Conmutativa:** $\forall a, b \in G,\ \ a \diamond b = b \diamond a$
- **Elemento Indentidad Aditivo:** $\exists 0 \in G,\ \forall a \in G,\ 0 \diamond a = a \diamond 0 = a$
- **Existen Inversos Aditivos:** $\forall a \in G,\ \exists b \in G,\ a \diamond b = b \diamond a = 0$
- **Ley Distributiva:** $\forall a, b, c \in G,\ \ a \star (b \diamond c) = (a \star b) \diamond (a \star c)$ y $(b \diamond c) \star a = (b \star a) \diamond (c \star a)$
- **Ley Multiplicativa Asociativa:** $\forall a, b, c \in G,\ \ a \star b = b \star a$
- **Ley Multiplicativa Distributiva:** $\forall a, b, c \in G,\ (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$
- **Elemento Indentidad Multiplicativo:** $\exists 1 \in G,\ \forall a \in G,\ 1 \star a = a \star 1 = a$
- **Existen Inversos Multiplicativos:** $\forall a \in G - 0,\ \exists b \in G,\ \ a \diamond b = b \diamond a = 1$

Capítulo 10

Grafos

10.1. Grafos Simples

10.1.1. Definición Formal

Un grafo es una pareja ordenada (V, A) de conjuntos discretos finitos, donde llamamos a V el conjunto de vértices y $V \neq \emptyset$ y A es un conjunto de pares no ordenados $A = \left\{ \{ x, y \} \text{ tal que } x \neq y,\ x, y \in V \right\}$

Cosas de notación:

- Decimos que $\{ x, y \}$ de manera mas compatacta se escribe xy y por ser parejas no ordenadas decimos que yx.

10.1.2. Adjacencia

Si $xy \in A$ decimos que x es adyacente a y, denotado como $x\ adj_G\ y$.

Decimos que dos aristas en una grafica son adjacentes si es que comparten al menos un vertice.

10.1.3. Orden o tamaño

Si tenemso una grafica (V, A) decimos que el orden es $|V| = n$ ó $|V| = p$ y el tamaño de G como a $|A| = m$ ó $|A| = q$

10.1.4. Maximo o minimo espacio

- $\delta(G)$ es el minimo de todos los grafos de G
- $\Delta(G)$ es el maximo de todos los grafos de G

10.1.5. Inducida

Sea $S \in V(G)$ no vacio entonces decimos que la grafica inducida $G[S]$ esta definida por:

- $V(G[S]) := S$
- $A(G[S]) := \{ xy \in A(G) \ \mid\ x, y \in S \}$

Se puede hacer algo equivalente con $R \in A(G)$.

10.1.6. Generadora

Dada una H que es una subgrafica de G, decimos que H es generadora si $V(H) = V(G)$

10.1.7. Subgrafos

Sean G y H grafos, tales que $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$, entonces decimos que H es una subgrafica de G. Denotado como $H \leq G$.

10.1.8. Vecinos

Sea G un grafo y $v \in V(G)$, entonces definimos al conjunto de los vecinos del vertice como:

$$N_G(v) = \{ \ y \in V(G) \ \ | \ \ vy \in A(G) \ \}$$

Nota que por la misma definición $|N_G(v)| = grado(v)$

Y definimos a la vecindad cerrada como: $N_G[v] = N_G(v) \cup \{ \ v \ \}$

10.1.9. Caminos

Sea G un grafo y $u, v \in V(G)$, entonces definimos a un camino en G como la sucesión de vertices y aristas.

$$C = (u_1, u_1u_2, u_2, \ldots, u_{n-1}u_n, u_n)$$

Decimos que la longitud de un camino (C_l) es la cantidad de verticces en el camino, contando repeticiones.

También decimos que el camino es cerrado si sus vertices extremos son iguales y abierto en otro caso.

Si un camino no repite aristas es un paseo.

A los paseos cerrados les llamo circuitos.

Un circuito en el que solo el primero y el ultimo son iguales se les llama ciclo.

Y si un camino no repite vertices es llamado trayectoria.

Observaciones

- Toda trayectoria es un paseo
- Todo ciclo es un circuito
- Para toda graficca no conexa existen subgraficas que si los son, a estas las llamamos componentes conexas, que son las subgraficas mas grandes (por numero de vertices) que si son conexas.

10.1.10. Conexa

Decimos que una grafica es conexa si puedes tomar dos vertices cuales quiera y puedes crear un camino entre ellos.

10.1.11. Completa

Decimos que una grafica es completa si para cualquiera dos vertices diferentes v, u existe una arista entre ellas.

En ese caso $grado(v_x) = n - 1$ y el numero de aristas es $\frac{n(n-1)}{2}$

10.1.12. Regular

Decimos que una grafica es regular si es que todos sus vertices tienen el mismo grado.

10.1.13. Bipartito

Decimos que una grafica G es bipartita si podemos crear otras dos graficas W, U tal que $\forall vw \in A(G) \leftrightarrow u \in U$ y $w \in W$.

Nota que:

- Toda grafica bipartita no tiene ciclos impares
- El tamaño de una grafica bipartita de orden n es a lo mas $\frac{n^2}{2}$

Entonces:

- $n_G = n_U + n_W$
- $m_{G+H} = m_G + m_H + n_G n_H$

10.1.14. Complemento

Dada una grafica G definimos a $\overline{G}$ como:

- $V(\overline{G}) = V(G)$
- $A(\overline{G}) = \{\ xy \leftrightarrow x, y \notin A(G)\ \}$

10.1.15. Isomorfismo

Dada una grafica G definimos que H es isomorfa si y solo si:

- $|V(G)| = |V(H)|$
- Existe una funcion biyectiva entre los verticces de una y de otra tal que $xy \in A(G) \leftrightarrow f(x)f(y) \in H(G)$.

10.1.16. Lineas

Una grafica de lineas es como convertir aristas en vertices. Dada una grafica G definimos que $L(G)$ como:

- $V(L(G)) = A(G)$
- $ab \in A(L(G)) \leftrightarrow a$ es adjacente a b en G.

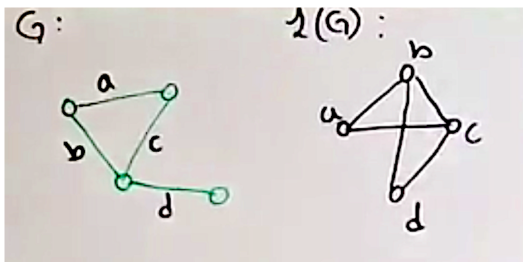

Figura 10.1: Ejemplo

10.1.17. Operaciones

- Si tenemos dos graficas G, H ajenas en vertices entonces definimos a $G \cup H$ como:
  - $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$
  - $A(G \cup H) = A(G) \cup A(H)$
- Si tenemos dos graficas G, H ajenas en vertices entonces definimos a $G + H$ como:
  - $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$
  - $A(G \cup H) = A(G) \cup A(H) \cup \{ \ xy \ \mid \ x \in G \text{ y } y \in H \ \}$

  Entonces:

  - $n_{G+H} = n_G + n_H$
  - $m_{G+H} = m_G + m_H + n_G n_H$

- Si tenemos dos graficas G, H ajenas en vertices entonces definimos a $G \times H$ como:
  - $V(G \times H) = \{\ x, y\ \mid\ x \in G \text{ y } y\ inH\ \} = V(G) \times V(H)$
  - $A(G \times H) = \{\ (uv)(xy)\ \mid\ x \in G \text{ y } v = y \text{ y } ux \in A(G) \text{ o } u = x \text{ y } vy \in A(H)\ \}$

  Entonces:

  - $n_{G+H} = n_G + n_H$
  - $m_{G+H} = m_G + m_H + n_G n_H$
- Si tenemos una grafica G y un vertice $v \notin V(H)$ entonces definimos a $G + v$ como:
  - $V(G + v) = V(G) \cup \{\ v\ \}$
  - $A(G + v) = A(G) \cup \{\ xy\ \mid\ y \in V(G)\ \}$
- Si tenemos una grafica G y un vertice $v \in V(H)$ entonces definimos a $G - v$ como:
  - $V(G - v) = V(G) - \{\ v\ \}$
  - $A(G - v) = A(G) - \{\ xv\ \mid\ xv[[]] \in A(G)\ \}$

[ ] Si tenemos una grafica G y una arista $xy \in A(H)$ entonces definimos a $G + xy$ como:

  - $V(G - v) = V(G) \cup \{\ x, y\ \}$
  - $A(G - v) = A(G) \cup \{\ xy\ \}$

10.1.18. De Corte

Decimos que un vertice v es de corte, si $G - v$ tiene mas componentes de G.

Decimos que una arista xy es de corte / un puente si $G - xy$ tiene mas componentes de G.

Nota que una arista de corte puede aumentar el numero de componentes en solo 1, pero un vertice de corte puede hacerlo en mucho mas de uno.

10.1.19. Distancia

La longitud de la trayectoria mas corta entre v, y es llamada la distancia, en dado caso de no existir (si no estan en la misma componente conexa) entonces por definicion decimos que es infinita.

10.1.20. Arbol

Una grafica G es un arbol si es conexa y ademas no tiene ciclos. Decimos que una union de arboles como bosques.

Otra definicion alterna es que toda arista es un puente.

10.2. Teoremas

10.2.1. Teorema de Suma

Sea G un grafo de orden n y tamaño m, entonces tenemos que:

$$2m = \sum_{v \in V} grado(v)$$

Idea de la demostración:

Dado que cada arista xy incide en x y y por lo que al sumar todos los grados obtenemos cada conexión 2 veces.

Nota que por lo tanto la suma de los grados de los vertices de la grafica siempre es par. Esto nos llega a algo muy importante, en un grafo el numero de vertices de grado impar es par.

10.2.2. Siempre hay dos vertices con grado igual

Sea G una gráfica y $V(G)$ sus vertices, entonces existen 2 vertices v, u tal que $grado(v) = grado(u)$. (Suponiendo que no se valen vertices a ti mismo y no mas de una arista entre dos vertices iguales).

Demostración:

Va, supongamos que todos son diferentes, entonces crea una sucesión de dichos grados de los vertices.

- $grado(u_1) = 0$
- $grado(u_2) = 1$
- $\dots$
- $grado(u_n) = n - 1$

Entonces el primero lo mas pequeño que puede empezar es en cero, el siguiente no puede ser cero porque entonces ya valio, asi que si queremos minimizar tiene que ser uno, y asi, entonces en una grafica con n vertices tenemos que el vertices con grado mayor es $n - 1$, pero piensa que significa que un vertice tenga $n - 1$ aristas, pues que esta conectado a todos los demas.

Pero eso no puede ser porque dijimos que $grado(u_1) = 1$, y es mas el grado no puede ser mayor a $n - 1$ porque no hay mas vertices para hacer conexión.

Como comentario, podemos ver el teorema como que siempre hay dos vertices con el mismo grafo con el mismo grado.

10.2.3. Máximo tamaño

Sea G una gráfica simple entonces pasa que:

$$num_{aristas} = \binom{num_{vertices}}{2}$$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
2m &= \sum_{v \in V} grado(v) && \text{Recuerda que el grado maximo de un vertice es } n-1 \\
&\leq n(n-1) && \text{por ser el universo} \\
m &\leq \frac{n(n-1)}{2} \\
m &\leq \binom{n}{2}
\end{aligned}
$$

10.2.4. Camino implica trayectoria

Para todo uv-camino hay una uv-trayectoria.

10.2.5. Camino y ciclos

Si tenemos un camino cerrado de longitud impar entonces existe un ciclo de longitud impar.

10.2.6. Ciclos y trayectorias

Todo ciclo tiene exactamente dos trayectorias independientes entre cualquiera dos verticesbu.

Toda graficca bipartita no tiene ciclos impares.

10.2.7. Conexas

- Sea G una grafica conexa de orden n y tamano m, si $n \geq 2$ entonces $m \geq n - 1$

10.2.8. Arboles

- Para un arbol de orden n hay $m = n - 1$
- Una grafica es un arbol si y solo si existe un unico camino entre cuales quiera dos vertices
- Tienen al menos dos vertices de grado 1.