ÁLGEBRA SUPERIOR I

GRUPO 4020

Tarea Exámen: Relaciones de Equivalencia

ALUMNO:
Rosas Hernandez Oscar Andres

PROFESOR:
Rodrígo Domínguez López

Tarea Exámen

Lunes 30 de Octubre

Índice

1. Ejercicio 5

Ya se demostro que la relación: $R : \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ que esta dada por la regla $(a, b)\ R\ (c, d)$ si y solo si $a + d = b + c$ es de equivalencia

Además es la forma en la que construimos a los enteros desde un punto de vista conjuntivista.

Demuestra que: Existe un representante de la forma $(n, 0)$ o $(0, n)$ o (n, n) en cada clase de equivalencia

Demostración:

Antes que nada recuerda que la resta en los naturales del estilo $m-n$ solo esta definida para $m \geq n$ y se define como el $m - n = k$ donde $k \in \mathbb{N}$ tal que $k + n = m$.

Considera la clase de equivalencia $[(a, b)]_R$ esta contiene por definición a (a, b).

Ahora veamos por casos, considera primero que el caso en que $a = b$, si esto pasa esta clase de equivalencia contienen al famoso $(0, 0)$ pues $a + 0 = b + 0$. En esta clase estará cualquier elemento del estilo (n, n) pues $a + n = b + n$ es equivalente a $a + n = a + n$ que es equivalente a $n = n$. A este algun día lo llamaremos el cero de los enteros.

Ahora considera el par (a, b) donde $a < b$, entonces podemos pensar en el natural $b - a$, considera entonces el par ordenado $(0, b - a)$, vemos que esta dentro de la misma clase de equivalencia pues $a + b - a = b + 0$ se puede reducir a $b = b$ lo cual es claramente siempre cierto, por lo tanto para la clase de equivalencia arbitraria $[(a, b)]_R$ con $a < b$ tenemos que existe el representante $(0, n)$ con n definida como el natural $b - a$. A este algún lo llamaremos el -n en los enteros.

Ahora considera el par (a, b) donde $a > b$, entonces podemos pensar en el natural $a - b$, considera entonces el par ordenado $(a - b, 0)$, vemos que esta dentro de la misma clase de equivalencia pues $a + 0 = b + a - b$ se puede reducir a $a = a$ lo cual es claramente siempre cierto, por lo tanto para la clase de equivalencia arbitraria $[(a, b)]_R$ con $a > b$ tenemos que existe el representante $(0, n)$ con n definida como el natural $a - b$. A este algún lo llamaremos el n en los enteros.

2. Ejercicio 7

Ya se demostro que la relación: $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que esta dada por la regla $a\ R\ b$ si y solo si $a - b \in \mathbb{Z}$ es una relación de equivalencia, además $[0, 1)$ es un conjunto de todos los represetantes de las clases de equivalencia

Demostración:

Es Reflexiva pues dado cualquier real a tenemos que $a - a = 0$ y $0 \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $\forall a \in \mathbb{R}\ (a, a) \in R$.

Es Simetrica pues si $(a, b) \in R$ entonces $a - b \in \mathbb{Z}$, pero sea $n = a - b$ entonces tanto $n \in \mathbb{Z}$ como $-n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $b - a \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $(b, a) \in R$, es decir de forma general $\forall (a, b) \in R\ (b, a) \in R$.

Finalmente podemos ver que para $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ tenemos por la definición de la misma relación $a - b \in \mathbb{Z}$ y $b - c \in \mathbb{Z}$ por lo tanto sea $n = a - b$ y $m = b - c$ entonces veamos al entero $n + m$ este se puede ver como $a - b + b - c$ es decir $m + n = a - c$ y para cualquiera dos enteros, su suma sigue en los enteros, por lo tanto $a - c \in \mathbb{Z}$, por lo tanto $(a, c) \in R$, es decir de forma general $\forall (a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ tenemos que $(a, c) \in R$.

Finalmente para ver que $[0, 1)$ es un conjunto de todos los represetantes de las clases de equivalencia basta con ver que para un entero arbitrario a existe un elemento en $b \in [0, 1)$ tal que $a\ R\ b$

Esto lo podemos demostrar por casos, sea $a \in \mathbb{R}$:

- Si $a \in \mathbb{Z}$ entonces $a\ R\ 0$ pues $a - 0 \in \mathbb{Z}$, y ya que $0 \in [0, 1)$ logramos encontrar un representante dentro del conjunto.
- Si a no esta en los enteros, podemos describirla como $a = b + k$ con $b \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{R}$ donde b es el entero inmediatamente anterior, ya que la separacióne entre enteros es de un real, $0 < k < 1$. Finalmente podemos ver que $a\ R\ k$ pues $a = b + k - k \in \mathbb{Z}$ por lo tanto encotramos una k tal que $0 < k < 1$ y que esta en la misma clase de equivalencia, por lo tanto es un representante de la misma

Entonces sin importar si a es un entero o no, podemos encontrar un elemento dentro de $[0, 1)$ para cada clase de equivalencia, por lo tanto ese conjunto es un conjunto de representantes.

3. Ejercicio 8

Sea X y Y conjuntos ajenos. Si $\{\ X_i\ \}_{i\in I}$ es una partición de X y $\{\ Y_j\ \}_{j\in J}$ es una partición de Y, entonces $\{\ X_i\ \}_{i\in I} \cup \{\ Y_j\ \}_{j\in J}$ es una partición de $X \cup Y$.

Demostración:

Ya que son con conjuntos disconjuntos $X \cap Y = \emptyset$.

Sea $Z_k \in \{\ X_i\ \}_{i\in I} \cup \{\ Y_j\ \}_{j\in J}$

Ahora para podemos decir que $\{\ X_i\ \}_{i\in I} \cup \{\ Y_j\ \}_{j\in J}$ es una partición de $X \cup Y$ si y solo si:

- $\forall k \in I \cup J\ Z_k \subseteq \{\ X_i\ \}_{i\in I} \cup \{\ Y_j\ \}_{j\in J}$

  Este sale directo, pues sea $Z_k \in \{\ X_i\ \}_{i\in I} \cup \{\ Y_j\ \}_{j\in J}$ entonces o bien $Z_k \subseteq X$ o $Z_k \subseteq Y$, vayamos por casos:

  Si $Z_k \in \{\ X_i\ \}_{i\in I}$ entonces por definición de partición sobre X $Z_k \subseteq X \subseteq X \cup Y$ por lo tanto $Z_k \in X \cup Y$

  Si $Z_k \in \{\ Y_j\ \}_{j\in J}$ entonces por definición de partición sobre Y $Z_k \subseteq Y \subseteq Y \cup X = X \cup Y$ por lo tanto $Z_k \in X \cup Y$

- $\forall k \in I \cup J\ Z_k \neq \emptyset$

  Si $Z_k \in \{\ X_i\ \}_{i\in I}$ por definición de partición niguna de las X_i puede ser vacia, por lo tanto Z_k no será vacía.

  O bien $Z_k \in \{\ Y_j\ \}_{j\in J}$ por definición de partición niguna de las Y_i puede ser vacia, por lo tanto Z_k no será vacía.

- Si $z \in Z_k$ entonces z no pertenece a $Z_{k'}$ $\forall k' \in I \cup J$ donde $k' \neq k$

  Esta proposición nos dice que no existen elementos que pertenzcan a más de una partición.

  Sea $z \in Z_k$ un elemento cualquiera dentro de $X \cup Y$.

  Si $Z_k \in \{\ X_i\ \}_{i\in I}$ entonces por definición de partición sobre X si $i \neq j$ entonces $X_i \cap X_j = \emptyset$, por lo tanto z no esta en nigun otro subconjunto de X además de Z_k y ya que X y Y son ajenos no existe elementos de X en Y, por lo tanto si $z \in Z_k$, z no pertenecerá a ninguna $Z_{k'}$ con $k' \neq k$.

  Si $Z_k \in \{\ X_j\ \}_{j\in J}$ entonces por definición de partición sobre Y si $i \neq j$ entonces $Y_i \cap Y_j = \emptyset$, por lo tanto z no esta en nigun otro subconjunto de Y además de Z_k y ya que X y Y son ajenos no existe elementos de Y en X, por lo tanto si $z \in Z_k$, z no pertenecerá a ninguna $Z_{k'}$ con $k' \neq k$.

- $\cup_{k\in I\cup J} Z_k = X \cup Y$

  Sea $Z_k \in \{\ X_i\ \}_{i\in I} \cup \{\ Y_j\ \}_{j\in J}$

  $$\begin{aligned} \cup_{k\in I\cup J} Z_k &= \cup_{i\in I}\{\ X_i\ \}\ \cup\ \cup_{j\in J}\{\ Y_i\ \} \\ &= X \cup Y \end{aligned}$$