

PROYECTO COMPILANDO CONOCIMIENTO

MATEMÁTICAS DISCRETAS

Lógica Matemática

Una Pequeña Introducción

AUTOR:

Rosas Hernandez Oscar Andres

Índice general

1. Propositiones y Conectores	2
1.1. Propositiones	3
1.1.1. Teoremas, Colorario y Tautolías	5
1.2. Conectores Lógicos	6
1.2.1. Negación	7
1.2.2. Conjunción	7
1.2.3. Disyunción	7
1.2.4. Implicación	8

Capítulo 1

Proposiciones y Conectores

1.1. Proposiciones

La lógica es una forma sistemática de pensar que nos permite deducir nueva información desde la información que ya conocemos.

Recuerda que la lógica es un proceso de deducir la información correctamente, no sólo deducir la información correcta.

La lógica trabaja con algo llamado proposiciones, son como las funciones para cálculo, o los lenguajes de programación para informática o los libros para la literatura.

Así que empecemos por ahí ... ¿Qué son?

Definición

Son proposiciones las frases que pueden adquirir un valor de verdadero o falso.

O dicho de manera formal:

Es una oración aseverativa de la que tiene sentido decir que es verdadera o falsa.

Y cuando digo frase, me refiero a:

- Secuencia finita de signos con significado y sentido de ser calificado como verdadero o falso. (es decir una simple expresión matemática).
- Expresión lingüística susceptible de ser calificada de verdadera o falsa. (es decir una frase aseverativa).

Sentencias Abiertas

Existen cosas que son parecidas a las proposiciones, pero no lo son exactamente, son cosas como:

$P(x)$: x es un número par.

Puesto que la validez de $P(x)$ depende que número sea x , $P(x)$ no es no totalmente cierta ni totalmente falsa, por lo tanto no es una proposición.

Una oración como esta, cuya verdad depende del valor de una o más variables, se llama sentencias abierta.

Ejemplo

Por ejemplo son proposiciones frases como:

- $2 + 3 = 4$
- Hay solamente 325 personas en Marte
- $\forall x, y \in \mathbb{N}$ se tiene que $x + y \in \mathbb{R}$
- Hoy es lunes
- $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- Si $x = 2$ entonces $2x = 4$

Pero no son cosas como:

- ¡Ojalá no llueva hoy!
- Haz la tarea
- Este enunciado es falso
- Tomar una siesta

1.1.1. Teoremas, Corolario y Tautologías

Clasificación de Propiedades

- **Tautología:** Cuando para todos los valores posibles de un conjunto de proposiciones siempre será verdadero el conjunto.
- **Contradicción:** Cuando para todos los valores posibles de un conjunto de proposiciones esta será siempre falso.
- **Contingencia:** Una proposición “común” son básicamente todas las que no son ni tautologías ni contradicciones.

Notación

Además a los matemáticos les encanta demostrar todo y cuando digo todo, es TODO, así que aquí te dejo las diferencias entre varias palabras que se parecen:

- **Proposición:** Enunciado que encierra un valor de verdad.
- **Axioma:** Principio tan claro y evidente que no necesita demostración.
- **Corolario:** Proposición demostrado que provoca una afirmación.
- **Demostración:** Razonamiento por el cuál se da prueba de la exactitud de una proposición.
- **Lema:** Proposición que es necesaria demostrar antes de establecer un teorema.

1.2. Conectores Lógicos

Los conectores nos permiten 'concatenar' proposiciones o crear proposiciones mas avanzadas. Veamos primero como solemos mostrarlos:

Conector	Nombres	Símbolos
y	$p \wedge q$	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Conjunción de p y de q
o	$p \vee q$	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Disyunción de p y de q
no	$\neg q$	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Negación de P
implica	$p \rightarrow q$	<ul style="list-style-type: none"> ▪ p implica q ▪ Si p, entonces q ▪ q si p ▪ Sólo si q entonces p ▪ p sólo si q ▪ Cuando p, q ▪ Siempre que q, p ▪ q siempre que p ▪ p es una condición suficiente para q ▪ q es una condición necesaria para p ▪ Es necesario que q para p ▪ Es suficiente que p para que q
si y solo si	$p \leftrightarrow q$	<ul style="list-style-type: none"> ▪ p ssi q ▪ p es equivalente a q

1.2.1. Negación

Es un operador que opera sobre dos valores de verdad. Devuelve el inverso del valor de verdad de la proposición que le pases.

La conjunción es una de las compuertas más basicas.

Nombre	p	$\neg p$
Negación	F	V
	V	F

1.2.2. Conjunción

Es un operador que opera sobre dos valores de verdad. Devuelve verdadero **solo** cuando ambas son verdaderas, y falso en cualquier otra combinación.

La conjunción es una de las compuertas más basicas.

Nombre	p	q	$p \wedge q$
Conjunción	F	F	F
	F	V	F
	V	F	F
	V	V	V

1.2.3. Disyunción

Es un operador que opera sobre dos valores de verdad. Devuelve falso **solo** cuando ambas son falsas, y verdadero en cualquier otra combinación.

La conjunción es una de las compuertas más basicas.

Nombre	p	q	$p \vee q$
Disyunción	F	F	F
	F	V	V
	V	F	V
	V	V	V

1.2.4. Implicación

Devuelve falso **solo** cuando la primera premisa es verdadera, pero la segunda es falsa, y verdadero en cualquier otra combinación.

Ve a $P \rightarrow Q$ como una promesa de que siempre que P es verdadera, Q será verdadera también. Sólo hay una manera de romper esta promesa y que es si P sea verdad y Q es falso.

Nombre	p	q	$p \rightarrow q$
Disyunción	F	F	V
	F	V	V
	V	F	F
	V	V	V

Ideas Importantes

La implicación es creo yo la más importante de todas, y no es porque sea básica, es más: $p \rightarrow q$ es totalmente equivalente a $\neg p \vee q$.

Usando la implicación hay algunas cosas famosas que deberías saber:

- **Contrapositiva del Condicional** Esta equivalencia es muy importante, pues es muy usada para las demostraciones (no te preocupes Timmy, ya entenderas después).

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

- **Implicaciones Famosas** No se a quién se le ocurrió ponerles nombres, pero creo que te conviene que las conozcas.

Nombre	Forma	Es equivalente con...
Condicional	$p \rightarrow q$	Contrapositiva
Contrapositiva	$\neg q \rightarrow \neg p$	Condicional
Recíproca	$q \rightarrow p$	Inversa
Inversa	$\neg p \rightarrow \neg q$	Recíproca