Доверителни интервали, Хипотези

Закон за големите числа,

Law of Large Numbers

Ако имаме разпределения X1,…Xn, които са независими и еднакворазпределени (т.е. с еднакво разпределение) (i.i.d) случайни величини със средно μ и стандартно отклонение σ, то разпределението

$$\overline{Xn} = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Колкото повече расте n, толкова повече $\overline{X_n} - > \mu$ (т.е. се приближава до мю). Формално:
или

$$\lim_{n \to \infty} P(|\overline{Xn} - \mu| < \alpha) = 1$$

Централна гранична теорема

Central Limit Theorem

Ако имаме разпределения X1,…Xn, които са независими и еднакворазпределени (т.е. с еднакво разпределение) (i.i.d) случайни величини със средно μ и стандартно отклонение σ, то разпределението

$\overline{Xn} = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} X_i$
е нормално разпределено $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$
е нормално разпределено $N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$

От друга страна $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ се нарича стандартна грешка.

Да проверим дали идва от нормално разпределение:

```
qqnorm, qqline
```

Доверителен интервал за средно

- Ако n е голямо, n > 30, и знаем σ, д.и.:
  от $\overline{Xn} \sim N(\mu, \sigma)$ (от ЦГТ)
  $\mu \in (\overline{Xn} - Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{Xn} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

```
z.test
```

- Ако n е голямо, n > 30, и не знаем σ, σ може да заместим с s (извадкова дисперсия)
  $\mu \in (\overline{Xn} - Z_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{Xn} - Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}})$

```
z.test
```

- Ако n < 30, знаем σ и знаем, че $X_i \sim N(\mu, \sigma)$, отново:
  $\mu \in (\overline{Xn} - Z_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{Xn} - Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}})$

```
z.test
```

- Ако n < 30 и не знаем σ, но знаем, че $X_i \sim N(\mu, \sigma)$ използваме, че $\overline{Xn} \sim T(n-1)$
  $\mu \in (\overline{Xn} - T_{1-\alpha/2,n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{Xn} - T_{\alpha/2,n-1} \frac{s}{\sqrt{n}})$

```
t.test
```

- Ако n < 30, не знаем σ, не можем да допуснем, че са нормално разпределени, тогава правим тест за *медиана*, а не за средно.

```
wilcox.test(x,conf.int= TRUE)
```

```
simple.z.test =  function (x,sigma,conf.level= 0.95) {
  n = length(x);
  xbar = mean(x);
  alpha =  1 - conf.level;
  zstar = qnorm( 1-alpha/ 2);
  SE = sigma/sqrt(n);
  xbar + c(-zstar*SE,zstar*SE);
}
simple.z.test(x, 1.5)
```

Доверителен интервал за пропорции

Ако $\overline{p}$ е емпирично получената пропорция (примерно 20/100 души гласували за…)
Знаем, че $\overline{p} \sim N(p, \overline{p}(1-\overline{p})/n)$

$\overline{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})/n)/n}$

Доверителен интервал за дисперсия:

От $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ следва, че:

$\sigma^2 \in (\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2,n-1}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2,n-1}})$

```
prop.test
```

Хипотези

На - множество от алтернативни хипотези
Н1 - конкретна алтернативна хипотеза

-	Н0 е вярна	Н0 е грешна (Н1 е вярна)
Отхвърля се Н0	грешка от тип I (α)	ok
Не се отхвърля Н0	ok	грешка от тип II (β)

- α - грешка от тип I - вероятност хипотезата да е вярна и да я отхвърлим (ДА-ДА :D)
- β - грешка от тип II - вероятност хипотезата да не е вярна и да не я отхвърлим (НЕ-НЕ)

- α е ниво на съгласие
- $1 - \beta$ е мощност на критерия

$\alpha = P(\text{отхвърляме}H_0 | H_0 e\text{вярно})$
$\beta = P(\text{неотхвърляме}H_0 | H_0\text{не}e\text{вярно}, H_1\text{евярно})$

Видове тестове

Двустранен тест	Едностранен тест	Едностранен тест
$H_0 : \mu = m$	$H_0 : \mu <= m$	$H_0 : \mu >= m$
$H_a : \mu \neq m$	$H_a : \mu > m$	$H_a : \mu < m$

Критична област, rejection region

p value

Сега 2 начина да проверим хипотезата:
1. С критична област
да се запитаме: Къде на графиката отива параметъра, който тестваме?
Примерно: Къде на графиката отива μ от хипотезата?

“Къде на графиката” е тестовата статистика.

Тестовите статистики, с които ще работим, са:

$z* = \frac{\overline{Xn}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, ако хипотезата е за μ_0

$t* = \frac{\overline{Xn}-\mu_0}{s}\sqrt{n}$, ако хипотезата е за μ_0

$z* = \frac{\overline{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$, ако хипотезата е за p_0

$chiq* = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$, ако хипотезата е за σ_0

(Последното идва от $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{\sum(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$)

- Ако попада в К.О., отхвърляме хипотезата.
- Ако не попада в К.О., не отхвърляме хипотезата.

2 . Да сметнем p value
p value е вероятността да наблюдаваме нашите данни и такива данни, които още по-силно подкрепят алтернативната хипотеза, при условие, че H_0 е вярна.
Ако наблюдаваните данни са $X_{observed}$, то:

p_value = P($X_{observed}$ >= X) ако К.О. е надясно
p_value = P(X <= $X_{observed}$) ако К.О. е наляво
p_value = 2*P($X_{observed}$ >= X) ако К.О. е от двете страни

Ако p_value < alpha, отхвърляме хипотезата!!!

Ако в задачата са дадени $\overline{X}$, и (σ или s) или \overline p… или изобщо ако в задачата са дадени емпирично някакви измерени параметри, можем да процедираме с К.О. - допускаме хипотезата за вярна, виждаме къде е тестовата статистика и отхвърляме / не отхвърляме хипотезата.
Ама е ако е дадено наблюдавано X и хипотезата, приемаме хипотезата за вярна, смятаме p_value.