Prova scritta di Logica Matematica
14 febbraio 2022

Cognome Nome Matricola

Indicate su ogni foglio che consegnate cognome, nome e numero di matricola.
Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio.

1. Usando l'algoritmo di Fitting mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$(p \wedge u \rightarrow \neg(q \vee \neg w)) \rightarrow r \wedge \neg(s \wedge \neg t).$$

2. Sia $\mathcal{L} = \{a, b, p, m, i, c, =\}$ un linguaggio con uguaglianza dove a e b sono simboli di costante, p, m sono simboli di funzione unari, i è un simbolo di relazione unario e c è un simbolo di relazione binario. Interpretando a come "Anna", b come "Barbara", $p(x)$ come "il padre di x", $m(x)$ come "la madre di x", $i(x)$ come "x è un informatico" e $c(x, y)$ come "x conosce y", traducete la frase: 3pt

il padre di Anna conosce un solo informatico: la madre di Barbara

3. Usando il metodo dei tableaux stabilite se l'insieme 3pt

$$\{(p \wedge \neg q) \vee (r \wedge q), \neg r \vee (s \wedge \neg q), p \rightarrow \neg s \vee q\}$$

è soddisfacibile. Se l'insieme è soddisfacibile definite una valutazione che lo testimoni.

4. Usando l'algoritmo presentato nel corso mettete in forma prenessa l'enunciato 2pt

$$\neg \exists y\, r(y, f(y)) \wedge \forall z\, q(f(z)) \rightarrow \forall x(\exists y\, r(y, x) \vee \neg \exists y\, \forall z\, \neg r(x, g(z, y))).$$

Se riuscite, usate il minimo numero di quantificatori possibili. 1pt

5. Dimostrate che 4pt

$$\forall x\, \forall y(r(x, y) \rightarrow p(x) \wedge \neg p(y)) \vDash \exists z\, \neg r(z, f(z))$$

6. Dimostrate la soddisfacibilità dell'insieme di enunciati 4pt

$$\{\forall x(q(x, g(x)) \wedge \neg q(x, x)), \exists x\, \neg p(x), \forall y(\exists u\, q(u, y) \rightarrow p(y))\}.$$

7. Sia $\mathcal{L} = \{f, p, r\}$ un linguaggio in cui f è un simbolo di funzione unario e p e q sono simboli di relazione, il primo unario e il secondo binario. Sia I l'interpretazione per $\mathcal{L}$ definita da 3pt

$$D^I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}; \qquad p^I = \{0, 5, 7\}; \qquad r^I = \{(0, 2), (5, 2), (7, 2)\};$$
$$f^I(0) = 5; \quad f^I(1) = 6; \quad f^I(2) = 5; \quad f^I(3) = 6;$$
$$f^I(4) = 1; \quad f^I(5) = 4; \quad f^I(6) = 6; \quad f^I(7) = 5.$$

Definite una relazione di congruenza $\sim$ su I che abbia quattro classi d'equivalenza, giustificando la vostra risposta.
Descrivete l'interpretazione quoziente $I/\sim$.

8. Usando il metodo dei tableaux dimostrate che 4pt

$$\forall x\, \exists y\, r(x, y), \forall x(\exists y\, r(y, x) \rightarrow \forall z\, r(x, z)) \vDash \forall u\, \exists v(r(u, v) \wedge r(v, u)).$$

9. Dimostrate, usando solo le regole della deduzione naturale predicativa (comprese le sei regole derivate) che 5pt

$$\forall x\, r(x, f(x)), \forall u(\neg p(u) \vee \forall v(r(u, v) \rightarrow r(v, u))) \rhd \forall x(p(x) \rightarrow \exists y\, r(y, x)).$$

Soluzioni

1. Utilizziamo l'Algoritmo 3.18 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.30:

$$\langle[(p \wedge u \to \neg(q \vee \neg w)) \to r \wedge \neg(s \wedge \neg t)]\rangle$$
$$\langle[\neg(p \wedge u \to \neg(q \vee \neg w)), r \wedge \neg(s \wedge \neg t)]\rangle$$
$$\langle[p \wedge u, r \wedge \neg(s \wedge \neg t)], [q \vee \neg w, r \wedge \neg(s \wedge \neg t)]\rangle$$
$$\langle[p, r \wedge \neg(s \wedge \neg t)], [u, r \wedge \neg(s \wedge \neg t)], [q, \neg w, r \wedge \neg(s \wedge \neg t)]\rangle$$
$$\langle[p, r], [p, \neg(s \wedge \neg t)], [u, r], [u, \neg(s \wedge \neg t)], [q, \neg w, r], [q, \neg w, \neg(s \wedge \neg t)]\rangle$$
$$\langle[p, r], [p, \neg s, t], [u, r], [u, \neg s, t], [q, \neg w, r], [q, \neg w, \neg s, t]\rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(p \vee r) \wedge (p \vee \neg s \vee t) \wedge (u \vee r) \wedge (u \vee \neg s \vee t) \wedge (q \vee \neg w \vee r) \wedge (q \vee \neg w \vee \neg s \vee t).$$

2. $c(p(a), m(b)) \wedge i(m(b)) \wedge \forall x(c(p(a), x) \wedge i(x) \to x = m(b))$.

3. Per stabilire se l'insieme è soddisfacibile utilizziamo l'Algoritmo 4.39 delle dispense, etichettando la radice con l'insieme. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

- $\underline{(p \wedge \neg q) \vee (r \wedge q)}, \neg r \vee (s \wedge \neg q), p \to \neg s \vee q$
  - $\underline{p \wedge \neg q}, \neg r \vee (s \wedge \neg q), p \to \neg s \vee q$
    - $p, \neg q, \neg r \vee (s \wedge \neg q), \underline{p \to \neg s \vee q}$
      - $p, \neg q, \neg r \vee (s \wedge \neg q), \neg p$ $\otimes$
      - $p, \neg q, \neg r \vee (s \wedge \neg q), \underline{\neg s \vee q}$
        - $p, \neg q, \underline{\neg r \vee (s \wedge \neg q)}, \neg s$
          - $p, \neg q, \neg r, \neg s$ $\bigcirc$
          - $p, \neg q, \underline{s \wedge \neg q}, \neg s$
            - $p, \neg q, s, \neg q, \neg s$ $\otimes$
        - $p, \neg q, \neg r \vee (s \wedge \neg q), q$ $\otimes$
  - $\underline{r \wedge q}, \neg r \vee (s \wedge \neg q), p \to \neg s \vee q$
    - $r, q, \underline{\neg r \vee (s \wedge \neg q)}, p \to \neg s \vee q$
      - $r, q, \neg r, p \to \neg s \vee q$ $\otimes$
      - $r, q, \underline{s \wedge \neg q}, p \to \neg s \vee q$
        - $r, q, s, \neg q, p \to \neg s \vee q$ $\otimes$

Il tableau è aperto e quindi l'insieme è soddisfacibile. Una valutazione che lo testimonia è data da $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{F}$, $v(r) = \mathbf{F}$, $v(s) = \mathbf{F}$.

4. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\neg\exists y\, r(y, f(y)) \land \forall z\, q(f(z)) \to \forall x(\exists y\, r(y, x) \lor \neg\exists y\, \forall z\, \neg r(x, g(z, y)))$$
$$\forall y\, \neg r(y, f(y)) \land \forall z\, q(f(z)) \to \forall x(\exists y\, r(y, x) \lor \forall y\, \exists z\, r(x, g(z, y)))$$
$$\forall z(\neg r(z, f(z)) \land q(f(z))) \to \forall x\, \forall y(\exists y\, r(y, x) \lor \exists z\, r(x, g(z, y)))$$
$$\forall z(\neg r(z, f(z)) \land q(f(z))) \to \forall x\, \forall y\, \exists z(r(z, x) \lor r(x, g(z, y)))$$
$$\forall x\, \forall y(\forall z(\neg r(z, f(z)) \land q(f(z))) \to \exists z(r(z, x) \lor r(x, g(z, y))))$$
$$\forall x\, \forall y\, \exists z(\neg r(z, f(z)) \land q(f(z)) \to r(z, x) \lor r(x, g(z, y)))$$

5. Dobbiamo dimostrare che ogni interpretazione che soddisfa l'enunciato di sinistra, che indichiamo con F, soddisfa anche quello di destra, che indichiamo con G. Supponiamo che I sia un'interpretazione che soddisfa F ma non G. Il nostro obiettivo è raggiungere una contraddizione.

Fissiamo $d \in D^I$. Dato che $I \not\models G$, $I, \sigma[x/d] \not\models \neg r(z, f(z))$, cioè $(d, f^I(d)) \in r^I$. Dato che $I \models F$ si ha in particolare $I, \sigma[x/d, y/f^I(d)] \models r(x, y) \to p(x) \land \neg p(y)$ e quindi, per quanto ottenuto in precedenza $d \in p^I$ e $f^I(d) \notin p^I$.

D'altra parte $I \not\models G$ ha come conseguenza anche $I, \sigma[x/f^I(d)] \not\models \neg r(z, f(z))$, cioè $(f^I(d), f^I(f^I(d))) \in r^I$. Sfruttando nuovamente $I \models F$ e in particolare $I, \sigma[x/f^I(d), y/f^I(f^I(d))] \models r(x, y) \to p(x) \land \neg p(y)$ si ottiene $f^I(d) \in p^I$.

Abbiamo dunque ottenuto la contraddizione cercata.

6. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfi i tre enunciati. Due interpretazioni con queste caratteristiche sono definite da

$$D^I = \{0, 1, 2\}, \quad g^I(0) = 1, \quad g^I(1) = 2, \quad g^I(2) = 1, \quad p^I = \{1, 2\}, \quad q^I = \{(0, 1), (1, 2), (2, 1)\};$$
$$D^J = \mathbb{N}, \quad g^J(n) = n + 1, \quad p^J = \{\, n : n > 0 \,\}, \quad q^J = \{\, (n, m) : n < m \,\}.$$

7. Dobbiamo partizionare D^I in quattro insiemi in modo da rispettare la Definizione 10.22 delle dispense.

Notiamo che 2 è l'unico elemento di D^I che compare al secondo posto di un elemento in r^I: non può quindi essere congruente con nessun altro elemento di D^I.

Osserviamo che applicando f^I agli elementi di p^I (che certamente non sono congruenti agli elementi che non appartengono a p^I) nel caso di 0 e 7 si ottiene un elemento di p^I, mentre ciò non accade con 5. Questo significa che 5 non è congruente né a 0 né a 7.

Queste osservazioni ci portano a concludere che le quattro classi di congruenza non possono che essere $\{0, 7\}$, $\{1, 3, 4, 6\}$, $\{2\}$ e $\{5\}$. Inoltre $\sim$ così definita verificano le condizioni che riguardano f (perché $f^I(0) \sim f^I(7)$ e $f^I(1) \sim f^I(3) \sim f^I(4) \sim f^I(6)$) e r (perché sia $(0, 2)$ che $(7, 2)$ sono in r^I).

Si ha allora

$$D^I/{\sim} = \{[0], [1], [2], [5]\};$$
$$f^{I/\sim}([0]) = [5], \quad f^{I/\sim}([1]) = [1], \quad f^{I/\sim}([2]) = [5], \quad f^{I/\sim}([5]) = [1];$$
$$p^{I/\sim} = \{[0], [5]\}, \qquad r^{I/\sim} = \{([0], [2]), ([5], [2])\}.$$

8. Per mostrare la conseguenza logica dobbiamo costruire (utilizzando l'Algoritmo 11.52 e le Convenzioni 11.19 e 11.21 delle dispense) un tableau chiuso con la radice etichettata dagli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica (che indichiamo con F e G) e la negazione dell'enunciato a destra.

Indichiamo con H, K e L le γ-formule $\neg\exists v(r(a,v) \wedge r(v,a))$, $\forall z\, r(b,z)$ e $\neg\exists y\, r(y,b)$. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$F, G, \underline{\neg\forall u\, \exists v(r(u,v) \wedge r(v,u))}$$
$$\Big|$$
$$\underline{F}, G, H$$
$$\Big|$$
$$F, \underline{\exists y\, r(a,y)}, G, H$$
$$\Big|$$
$$F, r(a,b), G, \underline{H}$$
$$\Big|$$
$$F, r(a,b), G, H, \underline{\neg(r(a,b) \wedge r(b,a))}$$
$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$
$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} F, r(a,b), G, H, \neg r(a,b) \\ \otimes \end{array}
&
\begin{array}{c}
F, r(a,b), \underline{G}, H, \neg r(b,a) \\
| \\
F, r(a,b), G, H, \exists y\, r(y,b) \to K, \neg r(b,a) \\
\swarrow \qquad\qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} F, r(a,b), G, H, \underline{L}, \neg r(b,a) \\ | \\ F, r(a,b), G, H, L, \neg r(a,b), \neg r(b,a) \\ \otimes \end{array}
&
\begin{array}{c} F, r(a,b), G, H, \underline{K}, \neg r(b,a) \\ | \\ F, r(a,b), G, H, K, r(b,a), \neg r(b,a) \\ \otimes \end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Si noti l'importanza di scegliere in modo opportuno le istanze delle γ-formule. Con altre scelte il tableau cresce rapidamente di dimensione.

9. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall u(\neg p(u) \vee \forall v(r(u,v) \to r(v,u)))}{\neg p(x) \vee \forall v(r(x,v) \to r(v,x))} \qquad \dfrac{\dfrac{[p(x)]^2 \qquad [\neg p(x)]^1}{\bot}}{\exists y\, r(y,x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\, r(x,f(x))}{r(x,f(x))} \qquad \dfrac{[\forall v(r(x,v) \to r(v,x))]^1}{r(x,f(x)) \to r(f(x),x)}}{r(f(x),x)}}{\exists y\, r(y,x)}}{\exists y\, r(y,x)}\,{}^{1}}{p(x) \to \exists y\, r(y,x)}\,{}^{2}}{\forall x(p(x) \to \exists y\, r(y,x))}$$