Prova scritta di Logica Matematica
12 febbraio 2016

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $(\neg r \to p) \land (q \lor r) \equiv \neg(p \to \neg q) \lor r$. **V** | **F** 1pt

2. Se $F \land G \models H$ allora $F \models H$ oppure $G \models H$. **V** | **F** 1pt

3. Quante delle seguenti formule sono in forma normale disgiuntiva?
$(p \land q) \lor \neg\neg r$, $(p \to q) \lor r$, $(p \land \neg q \land \neg r) \lor \neg s$. **0** | **1** | **2** | **3** 1pt

4. L'algoritmo di Fitting per la forma normale congiuntiva gode della proprietà della terminazione forte. **V** | **F** 1pt

5. Sia I un'interpretazione con $D^I = \{0, 1, 2\}$, $f^I(0) = f^I(2) = 2$, $f^I(1) = 0$, $p^I = \{0, 1\}$ e $r^I = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$.
Allora $I \models \forall x(p(x) \to \exists y(\neg p(f(y)) \land r(y, f(x))))$. **V** | **F** 1pt

6. $\exists x\, \neg p(x) \lor \forall y\, r(y, x) \equiv \exists x(p(x) \to \forall y\, r(y, x))$. **V** | **F** 1pt

7. Se I e J sono elementarmente equivalenti allora esiste un omomorfismo forte di I in J oppure di J in I. **V** | **F** 1pt

8. Se un insieme di Hintikka contiene gli enunciati $\exists x\, \neg p(x)$ e $\forall x(p(x) \lor \neg r(a, x))$ allora non contiene $r(a, a)$. **V** | **F** 1pt

9. Se $T \rhd F$ allora $T \models F$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\exists x(p(x) \land \neg r(x, f(x))), \forall x\, \forall y(r(x, y) \lor p(y)) \models \exists z(p(z) \land p(f(z))).$$

11. Sul retro del foglio dimostrate che l'insieme di enunciati 4pt

$$\{\forall x\, r(f(x), x), \forall x\, \forall y(r(y, x) \to \neg r(x, y) \land (p(x) \to \neg p(y))), \exists x\, p(x)\}$$

è soddisfacibile.

12. Sia $\mathcal{L} = \{b, p, r, c, a\}$ un linguaggio in cui b è un simbolo di costante, p è un simbolo di funzione unario, r e c sono simboli di relazione unari e a è un simbolo di relazione binario. Interpretando b come "Barbara", $p(x)$ come "il primo film di x", $r(x)$ come "x è un regista", $c(x)$ come "x è un cinefilo" e $a(x, y)$ come "x ama y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) C'è un regista di cui Barbara non ama il primo film; 3pt

(ii) Ogni cinefilo ama il primo film di qualche regista, ma non di tutti i registi. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilite se l'insieme di formule 3pt

$$\{\neg(\neg p \wedge q \to \neg r), (q \to s) \wedge (r \to \neg t \vee p), \neg s \vee t\}$$

è soddisfacibile. Se l'insieme è soddisfacibile definite un'interpretazione che la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\forall x(p(x) \to r(x, f(x))), \forall y(\exists v\, r(y, v) \to \neg p(y)) \rhd \forall z\, \neg p(g(z)).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Utilizzando lo spazio qui sotto mettete in forma prenessa la formula 2pt

$$\forall x(\neg\exists y\, \neg r(y, x) \to \neg\forall y\, p(f(y, x))) \wedge \exists x\, \neg\exists y\, p(f(x, y)).$$

[Se si usa il minimo numero di quantificatori possibili, 1pt in più.]

Soluzioni

1. **V** come si verifica per esempio con le tavole di verità.

2. **F** ad esempio $p \wedge \neg p \models q$ (una formula insoddisfacibile ha qualunque formula come conseguenza logica) ma $p \not\models q$ e $\neg p \not\models q$.

3. **1** solo la terza formula è in forma normale disgiuntiva.

4. **V** è il Lemma 3.30 delle dispense.

5. **V** come si verifica considerando stati che assegnino ad x ognuno dei tre elementi di D^I.

6. **F** l'equivalenza logica sussisterebbe se x non fosse libera in $\forall y\, r(y,x)$. Ponendo ad esempio $D^I = \{0,1\}$, $p^I = \{0,1\}$, $r^I = \{(0,1),(1,1)\}$, $\sigma(x) = 0$ si ha $I, \sigma \not\models \exists x\, \neg p(x) \vee \forall y\, r(y,x)$ e $I, \sigma \models \exists x(p(x) \to \forall y\, r(y,x))$.

7. **F** come ribadito nella Nota 9.15 delle dispense.

8. **F** $\{\exists x\, \neg p(x), \neg p(b), \forall x(p(x) \vee \neg r(a,x)), p(a) \vee \neg r(a,a), p(b) \vee \neg r(a,b), p(a), \neg r(a,b), r(a,a)\}$ è un insieme di Hintikka.

9. **V** è il teorema di correttezza per la deduzione naturale: Teoremi 5.17 e 11.10 delle dispense.

10. Supponiamo che un'interpretazione I soddisfi i due enunciati (che indichiamo con F e G) a sinistra del simbolo di conseguenza logica. L'obiettivo è mostrare che I soddisfa anche l'enunciato sulla destra.

Dato che $I \models F$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $d_0 \in p^I$ e $(d_0, f^I(d_0)) \notin r^I$. Visto che $I \models G$ segue in particolare $I, \sigma[x/d_0, y/f^I(d_0)] \models r(x,y) \vee p(y)$. Perciò $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$ oppure $f^I(d_0) \in p^I$. La prima possibilità non si può realizzare e quindi siamo certi che $f^I(d_0) \in p^I$.

Abbiamo ottenuto $d_0 \in p^I$ e $f^I(d_0) \in p^I$, cioè $I, \sigma[z/d_0] \models p(z) \wedge p(f(z))$ e perciò $I \models \exists z(p(z) \wedge p(f(z)))$, come volevamo.

11. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati dell'insieme. Forniamo due esempi di interpretazioni con queste caratteristiche:

$$D^I = \{0,1,2\}, \quad f^I(0) = 1, f^I(1) = 2, f^I(2) = 1, \quad p^I = \{0\},$$
$$r^I = \{(1,0),(2,1),(0,2)\};$$
$$D^J = \mathbb{N}, \quad f^J(n) = n+1, \quad p^J = \{0\}, \quad r^J = \{\, (m,n) \,:\, n < m \,\}.$$

12. (i) $\exists x(r(x) \wedge \neg a(b, p(x)))$;
(ii) $\forall x\big(c(x) \to \exists y(r(y) \wedge a(x,p(y))) \wedge \neg\forall y(r(y) \to a(x,p(y)))\big)$.

13. Per stabilire se l'insieme di formule è soddisfacibile utilizziamo l'Algoritmo 4.38 delle dispense e costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.30 e 4.31) un tableau con la radice etichettata dall'insieme di formule. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

- $\neg(\neg p \wedge q \to \neg r), \underline{(q \to s) \wedge (r \to \neg t \vee p)}, \neg s \vee t$
  - $\underline{\neg(\neg p \wedge q \to \neg r)}, q \to s, r \to \neg t \vee p, \neg s \vee t$
    - $\underline{\neg p \wedge q}, r, q \to s, r \to \neg t \vee p, \neg s \vee t$
      - $\neg p, q, r, \underline{q \to s}, r \to \neg t \vee p, \neg s \vee t$
        - $\neg p, q, r, \neg q, r \to \neg t \vee p, \neg s \vee t$ $\otimes$
        - $\neg p, q, r, s, \underline{r \to \neg t \vee p}, \neg s \vee t$
          - $\neg p, q, r, s, \neg r, \neg s \vee t$ $\otimes$
          - $\neg p, q, r, s, \underline{\neg t \vee p}, \neg s \vee t$
            - $\neg p, q, r, s, \neg t, \underline{\neg s \vee t}$
              - $\neg p, q, r, s, \neg t, \neg s$ $\otimes$
              - $\neg p, q, r, s, \neg t, t$ $\otimes$
            - $\neg p, q, r, s, p, \neg s \vee t$ $\otimes$

Il tableau è chiuso e quindi l'insieme di formule è insoddisfacibile.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p(g(z))]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[p(g(z))]^1 \qquad \dfrac{\forall x(p(x) \to r(x, f(x)))}{p(g(z)) \to r(g(z), f(g(z)))}}{\dfrac{r(g(z), f(g(z)))}{\exists v\, r(g(z), v)}} \qquad \dfrac{\forall y(\exists v\, r(y, v) \to \neg p(y))}{\exists v\, r(g(z), v) \to \neg p(g(z))}}{\neg p(g(z))}}{\bot}}{\neg p(g(z))}\,1}{\forall z\, \neg p(g(z))}
$$

15. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\forall x(\neg\exists y\,\neg r(y,x) \to \neg\forall y\, p(f(y,x))) \land \exists x\,\neg\exists y\, p(f(x,y))$$

$$\forall x(\forall y\, r(y,x) \to \exists y\,\neg p(f(y,x))) \land \exists x\,\forall y\,\neg p(f(x,y))$$

$$\exists x\big(\forall x(\forall y\, r(y,x) \to \exists y\,\neg p(f(y,x))) \land \forall y\,\neg p(f(x,y))\big)$$

$$\exists x\,\forall z\big((\forall y\, r(y,z) \to \exists y\,\neg p(f(y,z))) \land \neg p(f(x,z))\big)$$

$$\exists x\,\forall z\big(\exists y(r(y,z) \to \neg p(f(y,z))) \land \neg p(f(x,z))\big)$$

$$\exists x\,\forall z\,\exists y\big((r(y,z) \to \neg p(f(y,z))) \land \neg p(f(x,z))\big)$$

Prova scritta di Logica Matematica
12 febbraio 2016

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Quante delle seguenti formule sono in forma normale disgiuntiva?
$(p \land q) \lor \neg\neg r$, $(p \land \neg q \land u) \lor r$, $(p \to \neg q \land r) \lor \neg s$. **0 | 1 | 2 | 3** 1pt

2. Se $F \models G \lor H$ allora $F \models G$ oppure $F \models H$. **V | F** 1pt

3. $\neg(p \to q) \lor \neg r \equiv (r \to p) \land (\neg q \lor \neg r)$. **V | F** 1pt

4. L'algoritmo di Fitting per la forma normale congiuntiva non gode della proprietà della terminazione forte. **V | F** 1pt

5. Esiste un insieme di Hintikka che contiene gli enunciati $\exists x\, \neg p(x)$, $\forall x(p(x) \lor \neg r(a, x))$ e $r(a, a)$. **V | F** 1pt

6. $\forall x\, \neg p(x) \lor \exists y\, q(x, y) \equiv \forall x(p(x) \to \exists y\, q(x, y))$. **V | F** 1pt

7. Sia I un'interpretazione con $D^I = \{0, 1, 2\}$, $f^I(0) = f^I(2) = 0$, $f^I(1) = 2$, $p^I = \{1, 2\}$ e $r^I = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$.
Allora $I \models \forall x(p(x) \to \exists y(\neg p(f(y)) \land r(y, f(x))))$. **V | F** 1pt

8. Se I e J sono elementarmente equivalenti allora esiste un omomorfismo forte di I in J oppure di J in I. **V | F** 1pt

9. Se $T \rhd F$ allora $T \models F$. **V | F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\exists x(r(x, f(x)) \land p(x)), \forall x\, \forall y(p(y) \lor \neg r(x, y)) \models \exists z(p(z) \land p(f(z))).$$

11. Sul retro del foglio dimostrate che l'insieme di enunciati 4pt

$$\{\forall x\, r(x, f(x)), \forall x\, \forall y(r(x, y) \to \neg r(y, x) \land (p(x) \to \neg p(y))), \exists x\, p(x)\}$$

è soddisfacibile.

12. Sia $\mathcal{L} = \{b, p, r, c, a\}$ un linguaggio in cui b è un simbolo di costante, p è un simbolo di funzione unario, r e c sono simboli di relazione unari e a è un simbolo di relazione binario. Interpretando b come "Bruno", $p(x)$ come "il primo film di x", $r(x)$ come "x è un regista", $c(x)$ come "x è un cinefilo" e $a(x, y)$ come "x ama y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) C'è un regista di cui Bruno non ama il primo film; 3pt

(ii) Ogni cinefilo ama il primo film di qualche regista, ma non di tutti i registi. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilite se l'insieme di formule 3pt

$$\{\neg(p \wedge q \to \neg r), (q \to \neg s) \wedge (r \to t \vee \neg p), s \vee \neg t\}$$

è soddisfacibile. Se l'insieme è soddisfacibile definite un'interpretazione che la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\forall x(p(x) \to r(g(x), x)), \forall y(\exists u\, r(u, y) \to \neg p(y)) \rhd \forall z\, \neg p(f(z)).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Utilizzando lo spazio qui sotto mettete in forma prenessa la formula 2pt

$$\forall x(\neg\exists y\, r(x, y) \to \neg\forall y\, q(f(x, y))) \vee \forall x\, \neg\forall y\, \neg p(f(y, x)).$$

[Se si usa il minimo numero di quantificatori possibili, 1pt in più.]

Soluzioni

1. 1 solo la seconda formula è in forma normale disgiuntiva.
2. F ad esempio $q \models p \vee \neg p$ (una formula valida è conseguenza logica di qualunque formula) ma $q \not\models p$ e $q \not\models \neg p$.
3. V come si verifica per esempio con le tavole di verità.
4. F il Lemma 3.30 delle dispense asserisce il contrario.
5. V $\{\exists x\, \neg p(x), \neg p(b), \forall x(p(x) \vee \neg r(a,x)), p(a) \vee \neg r(a,a), p(b) \vee \neg r(a,b), p(a), \neg r(a,b), r(a,a)\}$ è un insieme di Hintikka.
6. F l'equivalenza logica sussisterebbe se x non fosse libera in $\exists y\, q(x,y)$. Ponendo ad esempio $D^I = \{0,1\}$, $p^I = \{0\}$, $q^I = \{(1,1)\}$, $\sigma(x) = 1$ si ha $I, \sigma \models \forall x\, \neg p(x) \vee \exists y\, q(x,y)$ e $I, \sigma \not\models \forall x(p(x) \to \exists y\, q(x,y))$.
7. V come si verifica considerando stati che assegnino ad x ognuno dei tre elementi di D^I.
8. F come ribadito nella Nota 9.15 delle dispense.
9. V è il teorema di correttezza per la deduzione naturale: Teoremi 5.17 e 11.10 delle dispense.
10. Supponiamo che un'interpretazione I soddisfi i due enunciati (che indichiamo con F e G) a sinistra del simbolo di conseguenza logica. L'obiettivo è mostrare che I soddisfa anche l'enunciato sulla destra.

Dato che $I \models F$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$ e $d_0 \in p^I$. Visto che $I \models G$ segue in particolare $I, \sigma[x/d_0, y/f^I(d_0)] \models p(y) \vee \neg r(x,y)$. Perciò $f^I(d_0) \in p^I$ oppure $(d_0, f^I(d_0)) \notin r^I$. La seconda possibilità non si può realizzare e quindi siamo certi che $f^I(d_0) \in p^I$.

Abbiamo ottenuto $d_0 \in p^I$ e $f^I(d_0) \in p^I$, cioè $I, \sigma[z/d_0] \models p(z) \wedge p(f(z))$ e perciò $I \models \exists z(p(z) \wedge p(f(z)))$, come volevamo.

11. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati dell'insieme. Forniamo due esempi di interpretazioni con queste caratteristiche:

$$D^I = \{0,1,2\}, \quad f^I(0) = 1, f^I(1) = 2, f^I(2) = 1, \quad p^I = \{0\},$$
$$r^I = \{(0,1), (1,2), (2,0)\};$$
$$D^J = \mathbb{N}, \quad f^J(n) = n+1, \quad p^J = \{0\}, \quad r^J = \{\, (n,m) \,:\, n < m \,\}.$$

12. (i) $\exists x(r(x) \wedge \neg a(b, p(x)))$;
(ii) $\forall x\big(c(x) \to \exists y(r(y) \wedge a(x, p(y))) \wedge \neg \forall y(r(y) \to a(x, p(y)))\big)$.

13. Per stabilire se l'insieme di formule è soddisfacibile utilizziamo l'Algoritmo 4.38 delle dispense e costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.30 e 4.31) un tableau con la radice etichettata dall'insieme di formule. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$
\begin{array}{c}
\neg(p \wedge q \to \neg r), \underline{(q \to \neg s) \wedge (r \to t \vee \neg p)}, s \vee \neg t \\
| \\
\underline{\neg(p \wedge q \to \neg r)}, q \to \neg s, r \to t \vee \neg p, s \vee \neg t \\
| \\
\underline{p \wedge q}, r, q \to \neg s, r \to t \vee \neg p, s \vee \neg t \\
| \\
p, q, r, \underline{q \to \neg s}, r \to t \vee \neg p, s \vee \neg t \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} p, q, r, \neg q, r \to t \vee \neg p, s \vee \neg t \\ \otimes \end{array}
&
\begin{array}{c}
p, q, r, \neg s, \underline{r \to t \vee \neg p}, s \vee \neg t \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} p, q, r, \neg s, \neg r, s \vee \neg t \\ \otimes \end{array}
&
\begin{array}{c}
p, q, r, \neg s, \underline{t \vee \neg p}, s \vee \neg t \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
p, q, r, \neg s, t, \underline{s \vee \neg t} \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} p, q, r, \neg s, t, s \\ \otimes \end{array}
&
\begin{array}{c} p, q, r, \neg s, t, \neg t \\ \otimes \end{array}
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c} p, q, r, \neg s, \neg p, s \vee \neg t \\ \otimes \end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Il tableau è chiuso e quindi l'insieme di formule è insoddisfacibile.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p(f(z))]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[p(f(z))]^1 \qquad \dfrac{\forall x(p(x) \to r(g(x),x))}{p(f(z)) \to r(g(f(z)),f(z))}}{r(g(f(z)),f(z))}}{\exists u\, r(u,f(z))} \qquad \dfrac{\forall y(\exists u\, r(u,y) \to \neg p(y))}{\exists u\, r(u,f(z)) \to \neg p(f(z))}}{\neg p(f(z))}}{\bot}}{\neg p(f(z))}\,{}^{1}}{\forall z\, \neg p(f(z))}
$$

15. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\forall x(\neg\exists y\, r(x,y) \to \neg\forall y\, q(f(x,y))) \vee \forall x\, \neg\forall y\, \neg p(f(y,x))$$

$$\forall x(\forall y\, \neg r(x,y) \to \exists y\, \neg q(f(x,y))) \vee \forall x\, \exists y\, p(f(y,x))$$

$$\forall x\, \exists y(\neg r(x,y) \to \neg q(f(x,y))) \vee \forall x\, \exists y\, p(f(y,x))$$

$$\forall x\big(\exists y(\neg r(x,y) \to \neg q(f(x,y))) \vee \forall x\, \exists y\, p(f(y,x))\big)$$

$$\forall x\, \forall z\big(\exists y(\neg r(x,y) \to \neg q(f(x,y))) \vee \exists y\, p(f(y,z))\big)$$

$$\forall x\, \forall z\, \exists y\big((\neg r(x,y) \to \neg q(f(x,y))) \vee p(f(y,z))\big)$$