# Prova scritta di Logica Matematica
# 29 giugno 2021

Cognome Nome Matricola

Indicate su ogni foglio che consegnate cognome, nome e numero di matricola.

Nella prima parte ogni riposta corretta vale 1, ogni risposta sbagliata −1, ogni risposta non data 0. Il punteggio minimo per superare questa parte è 6. Il punteggio della prima parte viene sommato a quello della seconda per ottenere il voto dello scritto.

Nella seconda parte per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio.

## PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

**a.** $\neg((p \to q) \vee \neg(s \wedge \neg t)) \equiv p \wedge \neg t \wedge \neg(s \to q)$. **V** **F**

**b.** Se $F \models H$ e $G \models \neg H$ allora $F \wedge G$ è insoddisfacibile. **V** **F**

**c.** Esiste un insieme di Hintikka che contiene gli enunciati $\exists x\, p(x)$, $\forall x(\neg p(x) \vee q(x))$ e $\neg\exists x\, \neg(q(x) \to \neg p(x))$. **V** **F**

**d.** Sia $I$ l'interpretazione con $D^I = \{A, B, C, D, E\}$, $f^I(A) = E$, $f^I(B) = D$, $f^I(C) = B$, $f^I(D) = B$, $f^I(E) = C$, $p^I = \{A, B\}$ e $r^I = \{(A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, A), (C, B), (D, C), (D, E), (E, C)\}$. Allora $I \models \forall x\big(r(x, f(x)) \to \exists y(\neg p(y) \wedge r(f(x), y))\big)$. **V** **F**

**e.** $\exists z(p(z) \wedge r(z, f(z))) \equiv \exists x\, p(x) \wedge \exists y\, r(y, f(y))$. **V** **F**

**f.** Qual è il $p$-grado della formula $\exists x(p(x) \to \neg\forall y\, r(x, y)) \wedge \forall z\, r(z)$? (scrivere la risposta nella casella) $\square$

**g.** Se $F$ e $G$ sono enunciati di un linguaggio con uguaglianza tali che $F \models_= G$, e $I$ è un interpretazione (non necessariamente normale) tale che $I \models F$ allora $I \models G$. **V** **F**

**h.** Se $\varphi$ è un omomorfismo forte suriettivo di $I$ in $J$ e $I, \sigma \models G$ allora $J, \varphi \circ \sigma \models G$. **V** **F**

**i.** Se $F$ è un enunciato insoddisfacibile allora qualunque tableaux sistematico per $F$ è chiuso. **V** **F**

**j.** Questo albero rappresenta una deduzione naturale corretta: **V** **F**

$$
\dfrac{\exists y\, r(f(y), y) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[r(f(y), y)]^1}{\exists z\, r(f(y), z)} \qquad \dfrac{\forall u(\exists z\, r(u, z) \to \neg p(u))}{\exists z\, r(f(y), z) \to \neg p(f(y))}}{\neg p(f(y))}}{\exists y\, \neg p(y)}}{\exists y\, \neg p(y)}\,1
$$

**k.** Nel riquadro scrivete l'enunciato del risultato che lega un'interpretazione equipaggiata di una relazione di congruenza e la sua interpretazione quoziente.

| |
|---|
| |

## SECONDA PARTE

Usate il retro del foglio per svolgere tutti gli esercizi salvo il primo e l'ultimo, per cui c'è spazio sufficiente sotto l'esercizio stesso.

**1.** Sia $\mathcal{L} = \{m, a, s, =\}$ un linguaggio con uguaglianza dove $m$ è un simbolo di funzione unario e $a$ e $s$ sono simboli di relazione binari. Interpretando $m(x)$ come "il medico di $x$", $a(x, y)$ come "$x$ è amico di $y$" e $s(x, y)$ come "$x$ stima $y$", traducete la frase: 3pt

c'è chi stima il proprio medico
ma non stima il medico di tutti i suoi amici che hanno un medico diverso dal suo.

**2.** Dimostrate che l'insieme di enunciati 5pt

$$\{p(a), \forall x((p(x) \to q(x)) \wedge (q(x) \to r(x))), \exists x(q(x) \wedge \neg p(x)), \neg\forall x(r(x) \to q(x))\}$$

è soddisfacibile.

**3.** Dimostrate che l'insieme di enunciati 5pt

$$\{\forall x(p(x) \to \exists y\, r(x, f(y))), \forall z(p(z) \to \forall u \neg r(f(u), z)), \forall v\, p(f(v))\}$$

è insoddisfacibile

**4.** Usando il metodo dei tableaux dimostrate che 4pt

$$\forall x(\exists y\, r(x, y) \to \neg p(x)), \forall x(p(x) \vee \forall y\, \neg r(y, x)) \vDash \forall x(\exists y\, r(x, y) \to \forall z\, \neg r(z, x)).$$

**5.** Dimostrate, usando solo le regole della deduzione naturale predicativa (comprese le sei regole derivate) che 5pt

$$\forall x(r(x, f(x)) \to p(x)), \exists y\, \neg p(g(y)) \vee \neg r(g(b), a) \rhd \exists u\, \exists v\, \neg r(g(u), v).$$

**6.** Mettete in forma prenessa l'enunciato 2pt

$$\exists x\, \forall y\, r(x, y) \wedge \forall z\, p(z) \to \neg\exists y\, \forall v\, \neg(\exists w\, r(f(v, w), y) \vee \neg\forall x\, r(f(y, v), f(x, y))).$$

Se riuscite, usate il minimo numero di quantificatori possibili. 1pt

## Soluzioni

**a.** **V** come si verifica per esempio con le tavole di verità.

**b.** **V** se $v(F \wedge G) = \mathbf{V}$ allora $v(F) = \mathbf{V}$ e $v(G) = \mathbf{V}$; ma il primo implica che $v(H) = \mathbf{V}$ e il secondo che $v(\neg H) = \mathbf{V}$, cioè $v(H) = \mathbf{F}$, impossibile.

**c.** **F** Se $\mathcal{H}$ è un insieme di Hintikka che contiene i tre enunciati esiste un'istanza $p(a)$ del primo che appartiene a $\mathcal{H}$; ma allora $\neg p(a) \vee q(a) \in \mathcal{H}$ e, dato che $\neg p(a) \notin \mathcal{H}$, deve essere $q(a) \in \mathcal{H}$; sfruttando ora $\neg\exists x\, \neg(q(x) \to \neg p(x)) \in \mathcal{H}$ si ottiene $\neg\neg(q(a) \to \neg p(a)) \in \mathcal{H}$, da cui $q(a) \to \neg p(a) \in \mathcal{H}$ che conduce a $\neg q(a) \in \mathcal{H}$ oppure $\neg p(a) \in \mathcal{H}$, contraddicendo la condizione (1) nella definizione di insieme di Hintikka.

**d.** **F** perché $I, \sigma[x/E] \vDash r(x, f(x))$ ma per nessun $d_0 \in D^I$ si ha $I, \sigma[x/E, y/d_0] \vDash \neg p(y) \wedge r(f(x), y)$: infatti i $d_0$ tali che $d_0 \notin p^I$ sono $C$, $D$ e $E$ e per questi $d_0$ non vale $(f^I(E), d_0) = (C, d_0) \in r^I$.

**e.** **F** è facile costruire un'interpretazione che soddisfa l'enunciato a destra del simbolo di equivalenza logica, ma non quello a sinistra.

**f.** **5** come si vede applicando la definizione; notiamo che $\mathfrak{p}(\exists x(p(x) \to \neg\forall y\, r(x,y))) = \mathfrak{p}(p(x) \to \neg\forall y\, r(x,y)) = 2$, $\mathfrak{p}(\forall z\, r(z)) = 0$ e che il nostro enunciato contiene 3 quantificatori.

**g.** **F** se l'interpretazione non è normale la conseguenza logica nella logica con uguaglianza non ci dà alcuna informazione utile; ad esempio è facile costruire interpretazioni non normali in cui vale $a = b$ ma non $b = a$, mentre ovviamente $a = b \vDash_= b = a$.

**h.** **V** per il Teorema 10.13 delle dispense.

**i.** **V** per il Teorema 11.37 delle dispense.

**j.** **V** perché le applicazioni delle varie regole sono tutte corrette.

**k.** è il Corollario 10.31 delle dispense, che asserisce che se $I$ è un'interpretazione per $\mathcal{L}$, $\sim$ una relazione di congruenza su $I$ con omomorfismo canonico $\pi$, e $\sigma$ uno stato di $I$ allora per ogni formula $F$ di $\mathcal{L}$, $I, \sigma \vDash F$ se e solo se $I/\!\sim, \pi \circ \sigma \vDash F$, così che in particolare $I \equiv_{\mathcal{L}} I/\!\sim$.

**1.** $\exists x(s(x, m(x)) \wedge \forall y(a(x,y) \wedge m(y) \neq m(x) \to \neg s(x, m(y))))$.

**2.** Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfi tutti gli enunciati dell'insieme. Due interpretazioni con queste caratteristiche sono definite da

$$D^I = \{0,1,2\}, \quad a^I = 0, \quad p^I = \{0\}, \quad q^I = \{0,1\}, \quad r^I = \{0,1,2\};$$
$$D^J = \mathbb{N}, \quad a^J = 0, \quad p^J = \{\, n : n \text{ è multiplo di } 4 \,\},$$
$$q^J = \{\, n : n \text{ è multiplo di } 2 \,\}, \quad r^J = \mathbb{N}.$$

**3.** Supponiamo che $I$ sia un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati, che indichiamo con $F$, $G$ e $H$. Il nostro obiettivo è dedurre una contraddizione.

Fissiamo $d_0 \in D^I$ (esiste perché $D^I \neq \emptyset$). Dato che $I \vDash H$ abbiamo $f^I(d_0) \in p^I$. Dato che $I \vDash F$ si ha in particolare $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \vDash p(x) \to \exists y\, r(x, f(y))$ da cui, dato che $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \vDash p(x)$ per quanto ottenuto in precedenza, segue che $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \vDash \exists y\, r(x, f(y))$. Sia dunque $d_1 \in D^I$ tale che $(f^I(d_0), f^I(d_1)) \in r^I$.

Dato che $I \vDash G$ si ha in particolare $I, \sigma[z/f^I(d_1)] \vDash p(z) \to \forall u \neg r(f(u), z)$. Dato che da $I \vDash H$ segue anche $f^I(d_1) \in p^I$ si arriva a $I, \sigma[z/f^I(d_1)] \vDash \forall u \neg r(f(u), z)$. In particolare $I, \sigma[z/f^I(d_1), u/d_0] \vDash \neg r(f(u), z)$, cioè $(f^I(d_0), f^I(d_1)) \notin r^I$, che contraddice quanto ottenuto in precedenza.

**4.** Per mostrare la conseguenza logica dobbiamo costruire (utilizzando l'Algoritmo 11.51 e le Convenzioni 11.19 e 11.21 delle dispense) un tableau chiuso con la radice etichettata dai due enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica (che indichiamo con $F$ e $G$) e dalla negazione dell'enunciato sulla destra.

Indichiamo con $H$ e $K$ le $\gamma$-formule $\neg\exists y\, r(a,y)$ e $\forall y\, \neg r(y,a)$.

$$F, G, \underline{\neg(\forall x(\exists y\, r(x,y) \to \forall z\, \neg r(z,x)))}$$
$$|$$
$$F, G, \underline{\neg(\exists y\, r(a,y) \to \forall z\, \neg r(z,a))}$$
$$|$$
$$F, G, \underline{\exists y\, r(a,y)}, \neg\forall z\, \neg r(z,a)$$
$$|$$
$$F, G, r(a,b), \underline{\neg\forall z\, \neg r(z,a)}$$
$$|$$
$$\underline{F}, G, r(a,b), r(c,a)$$
$$|$$
$$F, \underline{\exists y\, r(a,y) \to \neg p(a)}, G, r(a,b), r(c,a)$$

$$\begin{array}{cc}
F, H, \underline{G}, r(a,b), r(c,a) & F, \neg p(a), \underline{G}, r(a,b), r(c,a) \\
| & | \\
F, H, G, \neg r(a,b), r(a,b), r(c,a) & F, \neg p(a), G, \underline{p(a) \lor K}, r(a,b), r(c,a) \\
\otimes &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
F, \neg p(a), G, p(a), r(a,b), r(c,a) & F, \neg p(a), G, \underline{K}, r(a,b), r(c,a) \\
\otimes & | \\
 & F, \neg p(a), G, K, \neg r(c,a), r(a,b), r(c,a) \\
 & \otimes
\end{array}$$

Si noti l'importanza di scegliere in modo opportuno le istanze delle $\gamma$-formule. Con altre scelte il tableau cresce rapidamente di dimensione.

**5.** Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\exists y\, \neg p(g(y)) \lor \neg r(g(b),a) \qquad \dfrac{[\exists y\, \neg p(g(y))]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg p(g(y))]^1 \qquad \dfrac{\forall x(r(x,f(x)) \to p(x))}{r(g(y),f(g(y))) \to p(g(y))}}{\neg r(g(y),f(g(y)))}}{\exists v\, \neg r(g(y),v)}}{\exists u\, \exists v\, \neg r(g(u),v)}}{\exists u\, \exists v\, \neg r(g(u),v)}\,1 \qquad \dfrac{\dfrac{\neg r(g(b),a)}{\exists v\, \neg r(g(b),v)}}{\exists u\, \exists v\, \neg r(g(u),v)}}{\exists u\, \exists v\, \neg r(g(u),v)}\,2$$

Si noti l'utilizzo di $(MT)$ per ottenere $\neg r(g(y), f(g(y)))$.

**6.** Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\exists x\,\forall y\, r(x,y) \wedge \forall z\, p(z) \to \neg\exists y\,\forall v\,\neg(\exists w\, r(f(v,w),y) \vee \neg\forall x\, r(f(y,v),f(x,y)))$$
$$\exists x(\forall y\, r(x,y) \wedge \forall z\, p(z)) \to \forall y\,\exists v\,(\exists w\, r(f(v,w),y) \vee \exists x\,\neg r(f(y,v),f(x,y)))$$
$$\exists x\,\forall y(r(x,y) \wedge p(y)) \to \forall y\,\exists v\,\exists w(r(f(v,w),y) \vee \neg r(f(y,v),f(w,y)))$$
$$\forall x\big(\forall y(r(x,y) \wedge p(y)) \to \forall y\,\exists v\,\exists w(r(f(v,w),y) \vee \neg r(f(y,v),f(w,y)))\big)$$
$$\forall x\,\forall y\big(\forall y(r(x,y) \wedge p(y)) \to \exists v\,\exists w(r(f(v,w),y) \vee \neg r(f(y,v),f(w,y)))\big)$$
$$\forall x\,\forall y\,\exists v\big(r(x,v) \wedge p(v) \to \exists w(r(f(v,w),y) \vee \neg r(f(y,v),f(w,y)))\big)$$
$$\forall x\,\forall y\,\exists v\,\exists w\big(r(x,v) \wedge p(v) \to r(f(v,w),y) \vee \neg r(f(y,v),f(w,y))\big)$$