Prova scritta di Logica Matematica 1
21 settembre 2010

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Se $F \models G$ e $H \models K$ allora $F \vee H \models G \vee K$. **V** | **F** 1pt

2. Se $\Gamma \rhd F$ la deduzione naturale $\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \triangledown\\ F\end{array}}{\forall x\, F}$ è sempre corretta. **V** | **F** 1pt

3. Una β-formula è logicamente equivalente alla congiunzione dei suoi ridotti. **V** | **F** 1pt

4. Se un tableau per F è chiuso allora F è valida. **V** | **F** 1pt

5. Sia $\mathcal{L} = \{a, f, g, p\}$ un linguaggio in cui a è un simbolo di costante, f è un simbolo di funzione unario, g è un simbolo di funzione binario e p è un simbolo di relazione unario.
Quante delle seguente stringhe sono termini di $\mathcal{L}$? $f(g(a, f(x)), p(a))$, $g(f(a), g(x, y))$, $g(f(a), g(a))$, $p(f(g(x, a)))$. **0** | **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

6. Se x è l'unica variabile libera in F e $I, \sigma \models \forall x\, F$ allora per ogni stato τ di I si ha $I, \tau \models F$. **V** | **F** 1pt

7. Siano I e J interpretazioni per un linguaggio $\mathcal{L}$.
Se esiste un omomorfismo forte e suriettivo di J in I, allora esiste un omomorfismo forte e suriettivo di I in J. **V** | **F** 1pt

8. Se F è una formula aperta allora $\forall x\, \exists y\, \forall z\, \neg F$ è in forma prenessa. **V** | **F** 1pt

9. Esiste un insieme di Hintikka cui appartengono $p \vee \neg r \to q$, $\neg(q \vee s)$ e $\neg r$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x\, \exists y\, \big(r(x, f(y)) \vee r(f(x), f(x))\big), \forall y\, \neg r(a, y) \models \exists z\, r(z, z).$$

11. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\exists x\, \exists y\, r(x, y) \wedge \forall x\, \forall y \big(r(x, y) \to \exists z (x \neq z \wedge y \neq z \wedge \neg r(z, x) \wedge r(y, z))\big)$$

è soddisfacibile nella logica con uguaglianza.

12. Sia $\mathcal{L} = \{b, s, sr, r, c\}$ un linguaggio dove b è un simbolo di costante, s e sr sono simboli relazionali unari e r e c sono simboli di relazione binari. Interpretando b come "Bruno", $s(x)$ come "x è uno scienziato", $sr(x)$ come "x è uno scrittore", $r(x, y)$ come "x è più rigoroso di y", $c(x, y)$ come "x conosce y" traducete le seguenti frasi:

(i) Bruno è uno scienziato che conosce qualche scrittore; 3pt

(ii) ogni scienziato conosce scrittori più rigorosi di lui. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$(p \vee q) \wedge (s \to \neg p \vee r) \to (s \to q \vee r)$$

è valida. Se la formula non è valida definite un'interpretazione che non la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\forall x (\exists y\, p(x, y) \to \forall y\, \neg p(y, x)) \rhd \forall x\, \neg p(x, x).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$(p \wedge \neg q) \vee r \to \neg(\neg s \to t \wedge \neg u).$$

Soluzioni

1. **V** se un'interpretazione soddisfa $F \vee H$ allora soddisfa una tra F e H. Nel primo caso deve soddisfare G, mentre nel secondo soddisferà K. In ogni caso soddisfa $G \vee K$.
2. **F** perché la deduzione naturale sia corretta è necessario che x non sia libera in Γ.
3. **F** una β-formula è logicamente equivalente alla **disgiunzione** dei suoi ridotti.
4. **F** se un tableau per F è chiuso allora F è **insoddisfacibile** (e $\neg F$ è valida).
5. **1** solo la seconda stringa è un termine, mentre la quarta è una formula atomica e le rimanenti non sono né termini né formule.
6. **V** dato che $I, \sigma \models \forall x\, F$ allora $I, \sigma[x/d] \models F$ per ogni $d \in D^I$. Se τ è uno stato arbitrario, $\sigma[x/\tau(x)]$ e τ coincidono su tutte le variabili libere di F. Per il Lemma 7.10 delle dispense si ha $I, \tau \models F$.
7. **F** si trovano controesempi ogniqualvolta esiste un omomorfismo forte e suriettivo di J in I e la cardinalità di D^J e più grande di quella di D^I.
8. **V** immediato dalla Definizione 7.59 delle dispense.
9. **F** se Γ è insieme di Hintikka, da $\neg(q \vee s) \in \Gamma$ segue che $\neg q \in \Gamma$ e $\neg s \in \Gamma$. Da $p \vee \neg r \to q \in \Gamma$ segue invece che $\neg(p \vee \neg r) \in \Gamma$ oppure $q \in \Gamma$. La seconda possibilità è impossibile (perché $\neg q \in \Gamma$), quindi deve valere la prima. Perciò $\neg p \in \Gamma$ e $\neg\neg r \in \Gamma$, che a sua volta implica $r \in \Gamma$ contraddicendo $\neg r \in \Gamma$.
10. Dobbiamo mostrare che se un'interpretazione soddisfa le prime due formule, che indichiamo con F e G, allora soddisfa anche la terza, indicata da H. Sia dunque I un'interpretazione che soddisfa F e G.

    Dato che $I \models F$ e $a^I \in D^I$ esiste $d_0 \in D^I$ tali che $(a^I, f^I(d_0)) \in r^I$ oppure $(f^I(a^I), f^I(a^I)) \in r^I$. Dato che $I \models G$ (e quindi $I, \sigma[y/f^I(d_0)] \models \neg r(a, y)$) la prima possibilità non può valere. Perciò $(f^I(a^I), f^I(a^I)) \in r^I$, che significa che $I, \sigma[z/f^I(a^I)] \models r(z, z)$. Quindi $I \models H$.
11. Dobbiamo definire un'interpretazione normale che soddisfi l'enunciato. L'interpretazione normale I definita da
    $$D^I = \{0, 1, 2, 3\}, \quad r^I = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0)\}$$
    ha queste caratteristiche. Anche l'interpretazione J definita da
    $$D^J = \mathbb{N}, \quad r^J = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}^2 \,:\, x < y \right\}$$
    andrebbe bene.
12. (i) $s(b) \wedge \exists x(sr(x) \wedge c(b, y))$;

    (ii) $\forall x(s(x) \to \exists y(sr(y) \wedge c(x, y) \wedge r(y, x)))$.

13. Per stabilire se la formula è valida costruiamo un tableau per la sua negazione. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. Utilizziamo ripetutamente la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.

$$
\begin{array}{c}
\underline{\neg((p \vee q) \wedge (s \to \neg p \vee r) \to (s \to q \vee r))} \\
| \\
\underline{(p \vee q) \wedge (s \to \neg p \vee r)}, \neg(s \to q \vee r) \\
| \\
p \vee q, s \to \neg p \vee r, \underline{\neg(s \to q \vee r)} \\
| \\
p \vee q, s \to \neg p \vee r, s, \underline{\neg(q \vee r)} \\
| \\
\underline{p \vee q}, s \to \neg p \vee r, s, \neg q, \neg r
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
p, \underline{s \to \neg p \vee r}, s, \neg q, \neg r & q, s \to \neg p \vee r, s, \neg q, \neg r \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} p, \neg s, s, \neg q, \neg r \\ \otimes \end{array} &
\begin{array}{c} p, \underline{\neg p \vee r}, s, \neg q, \neg r \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} p, \neg p, s, \neg q, \neg r \\ \otimes \end{array} & \begin{array}{c} p, r, s, \neg q, \neg r \\ \otimes \end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array} & \otimes
\end{array}
$$

Il tableau è chiuso e quindi la formula di partenza è valida.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p(x,x)]^1}{\exists y\, p(x,y)} \qquad \dfrac{\forall x(\exists y\, p(x,y) \to \forall y\, \neg p(y,x))}{\exists y\, p(x,y) \to \forall y\, \neg p(y,x)}}{\forall y\, \neg p(y,x)}}{\neg p(x,x)} \qquad [p(x,x)]^1}{\bot}}{\neg p(x,x)}\,1}{\forall x\, \neg p(x,x)}
$$

15.

$$\langle [(p \wedge \neg q) \vee r \to \neg(\neg s \to t \wedge \neg u)] \rangle$$
$$\langle [\neg((p \wedge \neg q) \vee r), \neg(\neg s \to t \wedge \neg u)] \rangle$$
$$\langle [\neg(p \wedge \neg q), \neg(\neg s \to t \wedge \neg u)], [\neg r, \neg(\neg s \to t \wedge \neg u)] \rangle$$
$$\langle [\neg p, q, \neg(\neg s \to t \wedge \neg u)], [\neg r, \neg s], [\neg r, \neg(t \wedge \neg u)] \rangle$$
$$\langle [\neg p, q, \neg s], [\neg p, q, \neg(t \wedge \neg u)], [\neg r, \neg s], [\neg r, \neg t, u)] \rangle$$
$$\langle [\neg p, q, \neg s], [\neg p, q, \neg t, u], [\neg r, \neg s], [\neg r, \neg t, u] \rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg t \vee u) \wedge (\neg r \vee \neg s) \wedge (\neg r \vee \neg t \vee u).$$