Prova scritta di Logica Matematica
24 giugno 2013

Cognome   Nome
                                               Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Se F è valida allora $\neg F \models G$ per ogni formula G. **V** | **F** 1pt

2. Ogni formula proposizionale è logicamente equivalente ad una disgiunzione di congiunzioni di letterali. **V** | **F** 1pt

3. Se Γ è un insieme di Hintikka di formule proposizionali tale che $\neg(p \vee q \to r) \in \Gamma$ e $\neg q \in \Gamma$, allora $\neg p \in \Gamma$. **V** | **F** 1pt

4. Se $\Gamma \rhd F \vee G$ e $\Gamma, F \rhd H$ allora $\Gamma \rhd H$. **V** | **F** 1pt

5. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{0,1,2,3\}$, $f^I(0) = 1$, $f^I(1) = 1$, $f^I(2) = 0$, $f^I(3) = 2$, $p^I = \{0,2\}$, e $r^I = \{(0,0),(0,2),(0,3),(1,1),(2,1),(2,3),(3,2)\}$. Allora $I \models \forall x(\neg p(x) \vee p(f(x)) \vee \exists y(p(f(y)) \wedge r(f(x), y)))$. **V** | **F** 1pt

6. se x non è libera in G allora $\forall x\, F \to G \equiv \forall x(F \to G)$. **V** | **F** 1pt

7. Se F è un enunciato di $\mathcal{L}$, $I \models F$ e $J \models \neg F$ allora $I \not\equiv_{\mathcal{L}} J$. **V** | **F** 1pt

8. $\neg\exists x(p(x) \wedge \forall y\, r(x,y))$ è una α, β, γ o δ-formula? α | β | γ | δ 1pt

9. Un tableau per una formula predicativa insoddisfacibile che non sia sistematico può essere aperto. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate l'insoddisfacibilità dell'insieme di enunciati 4pt

$$\left\{\exists x(p(x) \wedge \neg q(x)), \forall x(p(x) \to \forall y\, r(x,y)), \forall x(q(x) \vee \neg r(x,c))\right\}$$

11. Sia $\mathcal{L} = \{c, f, p\}$ il linguaggio con c simbolo di costante, f di funzione unario e p di relazione unario. Considerate le interpretazioni per $\mathcal{L}$:

$$D^I = \mathbb{N}, \quad c^I = 7, \quad f^I(n) = n+3, \quad p^I = \{\, n : n \text{ è pari} \,\};$$

$$D^J = \{0,1,2,3\}, \quad c^J = ?, \quad f^J(0) = 3, f^J(1) = 0, f^J(2) = 1, f^J(3) = 2, \quad p^J = \{0,2\}.$$

Sul retro del foglio definite c^J in modo che esista un omomorfismo forte suriettivo di I in J e definite questo omomorfismo. Che conclusione possiamo trarre sul rapporto tra I e J? 4pt

Dimostrate che I e J non sono elementarmente equivalenti nella logica con uguaglianza (cioè nel linguaggio ottenuto aggiungendo $=$ a $\mathcal{L}$).

12. Sia $\{b, c, v, m, s, u, a\}$ un linguaggio dove b, c e v sono simboli di costante, m e s simboli di relazione unari, e u e a simboli di relazione binari. Interpretando b come "Bruno", c come "chitarra", v come "viola", $m(x)$ come "x è un musicista", $s(x)$ come "x è uno strumento", $u(x, y)$ come "x suona y", $a(x, y)$ come "x ama y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) Bruno è un musicista che suona la viola e ama la chitarra; 3pt

(ii) chi non è musicista non ama nessuno strumento, oppure li ama tutti. 3pt

13. Mostrate che 3pt

$$F \vee (\neg G \to H), \neg G \wedge (K \to \neg F) \rhd \neg K \vee H.$$

Usate solo le regole della deduzione naturale proposizionale, comprese le quattro regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux stabilite che 5pt

$$\forall x(p(x) \to \forall y\, r(x, y)) \wedge (p(a) \vee p(b)) \to \exists z\, r(z, z)$$

è valida. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$(p \to q \vee \neg r) \vee \neg(s \to \neg t) \to u \wedge (v \to \neg w).$$

Soluzioni

1. **V** perché nessuna interpretazione soddisfa $\neg F$.

2. **V** attraverso la trasformazione in forma normale disgiuntiva.

3. **F** se $\neg(p \vee q \to r) \in \Gamma$ allora in particolare $p \vee q \in \Gamma$. Dato che $q \in \Gamma$ è impossibile perché $\neg q \in \Gamma$, deve essere $p \in \Gamma$ e quindi certamente $\neg p \notin \Gamma$.

4. **F** per poter applicare la regola $(\vee e)$ abbiamo bisogno anche di $\Gamma, G \rhd H$. Se $\Gamma = \emptyset$ e F, G e H sono rispettivamente p, $\neg p$ e $p \vee q$ si ottiene un controesempio.

5. **F** si ha $I, \sigma[x/0] \not\models \neg p(x) \vee p(f(x)) \vee \exists y (p(f(y)) \wedge r(f(x), y))$.

6. **F** il Lemma 7.50 delle dispense asserisce che se x non è libera in G si ha $\forall x\, F \to G \equiv \exists x (F \to G)$ e non $\forall x\, F \to G \equiv \forall x (F \to G)$.

7. **V** per la definizione di elementare equivalenza (definizione 9.1 delle dispense).

8. γ

9. **V** si vedano l'esempio 10.15 e la nota 10.16 delle dispense.

10. Dobbiamo mostrare che nessuna interpretazione I soddisfa tutti e tre gli enunciati, che indichiamo con F, G e H. Per dimostrarlo supponiamo per assurdo che I sia un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati.

Dato che $I \models F$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d_0] \models p(x) \wedge \neg q(x)$, ovvero $d_0 \in P^I$ e $d_0 \notin q^I$.

Dato che $I \models G$ abbiamo $I, \sigma[x/d_0] \models \forall x (p(x) \to \forall y\, r(x, y))$ abbiamo che $I, \sigma[x/d_0] \models p(x) \to \forall y\, r(x, y)$ e quindi $I, \sigma[x/d_0, y/c^I] \models r(x, y)$, cioè $(d_0, c^I) \in r^I$.

D'altra parte, dato che $I \models H$ abbiamo $I, \sigma[x/d_0] \models q(x) \vee \neg r(x, c)$, che implica che $d_0 \in q^I$ oppure $(d_0, c^I) \notin r^I$. Questo è impossibile e abbiamo raggiunto la contraddizione desiderata.

11. Poniamo $c^J = 3$ e definiamo $\varphi : D^I \to D^J$ decretando che $\varphi(n)$ sia il resto della divisione di n per 4. Allora φ è un omomorfismo forte susriettivo e quindi I e J sono elementarmente equivalenti rispetto a $\mathcal{L}$.

Per mostrare che l'elementare equivalenza non vale nella logica con uguaglianza basta indicare un enunciato del linguaggio con uguaglianza vero in I e falso in J (o viceversa): $\exists x\, \forall y\, x \neq f(y)$ va bene.

12. (i) $m(b) \wedge u(b, v) \wedge a(b, c)$;
(ii) $\forall x \big(\neg m(x) \to \forall y (s(y) \to \neg a(x, y)) \vee \forall y (s(y) \to a(x, y)) \big)$.

13. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{F \vee (\neg G \to H) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[F]^2 \qquad \dfrac{[K]^1 \qquad \dfrac{\neg G \wedge (K \to \neg F)}{K \to \neg F}}{\neg F}}{\bot}}{\neg K}{\scriptstyle 1}}{\neg K \vee H} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg G \wedge (K \to \neg F)}{\neg G} \qquad [\neg G \to H]^2}{H}}{\neg K \vee H}}{\neg K \vee H}{\scriptstyle 2}$$

14. Sviluppiamo un tableau con la negazione della formula alla radice. Indichiamo con F la formula di partenza e con G e H le γ-formule $\forall x(p(x) \to \forall y\, r(x,y))$ e $\neg\exists z\, r(z,z)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. Il tableau inizia nel seguente modo:

$$\underline{\neg F}$$

$$\underline{G \wedge (p(a) \vee p(b))}, H$$

$$G, \underline{p(a) \vee p(b)}, H$$

$$G, p(a), \underline{H} \qquad\qquad G, p(b), \underline{H}$$

$$G, p(a), \neg r(a,a), H \qquad\qquad G, p(b), \neg r(b,b), H$$

Per ragioni di spazio sviluppiamo solo il ramo di sinistra (quello di destra è analogo, con b al posto di a), indicando con K la formula $p(a) \to \forall y\, r(a,y)$.

$$\underline{G}, p(a), \neg r(a,a), H$$

$$G, \underline{K}, p(a), \neg r(a,a), H$$

$$G, \neg p(a), p(a), \neg r(a,a), H \qquad\qquad G, \underline{\forall y\, r(a,y)}, p(a), \neg r(a,a), H$$

$$\otimes \qquad\qquad G, \forall y\, r(a,y), r(a,a), p(a), \neg r(a,a), H$$

$$\otimes$$

Il tableau è chiuso e quindi F è valida.

15.

$$[\langle (p \to q \vee \neg r) \vee \neg(s \to \neg t) \to u \wedge (v \to \neg w)\rangle]$$
$$[\langle \neg((p \to q \vee \neg r) \vee \neg(s \to \neg t))\rangle, \langle u \wedge (v \to \neg w)\rangle]$$
$$[\langle \neg(p \to q \vee \neg r), s \to \neg t\rangle, \langle u, v \to \neg w\rangle]$$
$$[\langle p, \neg(q \vee \neg r), s \to \neg t\rangle, \langle u, \neg v\rangle, \langle u, \neg w\rangle]$$
$$[\langle p, \neg q, r, s \to \neg t\rangle, \langle u, \neg v\rangle, \langle u, \neg w\rangle]$$
$$[\langle p, \neg q, r, \neg s\rangle, \langle p, \neg q, r, \neg t\rangle, \langle u, \neg v\rangle, \langle u, \neg w\rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg t) \vee (u \wedge \neg v) \vee (u \wedge \neg w).$$