Prova scritta di Logica Matematica
23 giugno 2014

Cognome

Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $\neg(p \to \neg q \vee r) \equiv p \wedge \neg r \wedge q$. **V** | **F** 1pt

2. Se $F \models \neg G$ e $H \models \neg K$ allora $F \vee H \models \neg(G \wedge K)$; **V** | **F** 1pt

3. Non esiste un insieme di Hintikka che contiene sia $\neg(p \to \neg(q \to r))$ che $q \wedge \neg s$. **V** | **F** 1pt

4. $\forall x\, p(x) \to \exists x\, q(x, f(x))$ è una α, β, γ o δ-formula? α | β | γ | δ 1pt

5. Sia I l'interpretazione normale con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $f^I(0) = 0$, $f^I(1) = 3$, $f^I(2) = 1$, $f^I(3) = 3$, $p^I = \{0, 2\}$. Allora $I \models \exists x\, f(x) \neq f(f(x)) \wedge \forall x(p(x) \to x = f(x))$. **V** | **F** 1pt

6. Se F è una formula priva di quantificatori allora $\exists x\, \forall y\, \forall z\, \neg F$ è in forma prenessa. **V** | **F** 1pt

7. Siano I_0 e I_1 interpretazioni per un linguaggio $\mathcal{L}$. Se esiste un omomorfismo forte e suriettivo di I_1 in I_0, allora esiste un omomorfismo forte e suriettivo di I_0 in I_1. **V** | **F** 1pt

8. L'algoritmo dei tableaux predicativi ha la proprietà della terminazione forte. **V** | **F** 1pt

9. Se $\Gamma \rhd r(x, f(x))$ e x non è libera in nessuna formula di Γ allora $\Gamma \rhd \forall x\, r(x, f(x))$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che il seguente insieme di enunciati è soddisfacibile nella logica con uguaglianza 4pt

$$\{\forall x(x \neq f(x) \wedge x \neq f(f(x)) \wedge f(x) \neq f(f(x))), \neg p(a), \forall y(p(f(y)) \vee p(y))\}.$$

11. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\exists x\, r(x, f(x)), \forall z(\exists y\, r(y, z) \to r(z, f(a)) \vee r(f(z), z)) \models \exists u\, \exists v\, r(f(u), f(v)).$$

12. Sia $\mathcal{L} = \{a, b, s, \ell, r, c\}$ un linguaggio dove a e b sono simboli di costante, s e ℓ sono simboli di relazione unari e r e c sono simboli di relazione binari. Interpretando a come "Alessia", b come "Bruno", $s(x)$ come "x è uno scienziato", $\ell(x)$ come "x è un letterato", $r(x, y)$ come "x è più rigoroso di y", $c(x, y)$ come "x conosce y" traducete le seguenti frasi:

(i) Bruno è uno scienziato che conosce qualche letterato; 3pt

(ii) ogni letterato conosciuto da Alessia conosce scienziati più rigorosi di Bruno. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$(\neg p \vee q) \wedge (s \to p \vee r) \to (s \wedge \neg q \to r)$$

è valida. Se la formula non è valida definite un'interpretazione che non la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\forall x(p(x) \vee r(x, f(x))), \forall x(p(x) \to \exists y\, r(x, y)) \rhd \forall x\, \exists y\, r(x, y).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$(\neg p \wedge q) \vee r \to \neg(\neg s \to \neg t \wedge u).$$

Soluzioni

1. V come si verifica per esempio con le tavole di verità.

2. V se $v(F \vee H) = \mathbf{V}$ allora $v(F) = \mathbf{V}$ oppure $v(H) = \mathbf{V}$. Nel primo caso dalla prima ipotesi segue che $v(\neg G) = \mathbf{V}$, cioè $v(G) = \mathbf{F}$; nel secondo caso per la seconda ipotesi si ha $v(\neg H) = \mathbf{V}$, cioè $v(K) = \mathbf{F}$. In entrambi i casi si ha $v(G \wedge K) = \mathbf{F}$, cioè $v(\neg(G \wedge K)) = \mathbf{V}$.

3. F $\{\neg(p \to \neg(q \to r)), p, \neg\neg(q \to r), q \to r, r, q \wedge \neg s, q, \neg s\}$ è un insieme di Hintikka.

4. β: è un'implicazione.

5. F dato che $I, \sigma[x/2] \models f(x) \neq f(f(x))$ (perché $f^I(2) = 1$ e $f^I(f^I(2)) = 3$) si ha $I \models \exists x\, f(x) \neq f(f(x))$; però $2 \in p^I$ e $f^I(2) = 1$ significa che $I, \sigma[x/2] \not\models p(x) \to x = f(x)$ e quindi $I \not\models \forall x(p(x) \to x = f(x))$.

6. V per la definizione 7.60 delle dispense.

7. F se I_0 e I_1 sono le interpretazioni dell'esempio 9.15 delle dispense è facile vedere che esiste un omomorfismo forte e suriettivo di I_1 in I_0, ma non un omomorfismo forte e suriettivo di I_0 in I_1.

8. F vedere la nota 10.44 delle dispense

9. V la seconda deduzione naturale si ottiene dalla prima con un'applicazione della regola $(\forall i)$.

10. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfi i tre enunciati dell'insieme. Forniamo due esempi di interpretazioni con queste caratteristiche:

$$D^I = \{0,1,2\}, \qquad a^I = 0, \qquad f^I(0) = 1, \quad f^I(1) = 2, \quad f^I(2) = 0, \qquad p^I = \{1,2\};$$

$$D^J = \mathbb{N}, \qquad a^J = 0, \qquad f^J(n) = n+1, \qquad p^J = \{\, n \in \mathbb{N} : n \text{ è dispari} \,\}.$$

11. Indichiamo con F e G gli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e con H quello a destra. Dobbiamo dimostrare che per qualunque interpretazione I tale che $I \models F, G$ si ha $I \models H$. Fissiamo dunque I tale che $I \models F, G$.

Dato che $I \models F$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d_0] \models r(x, f(x))$, cioè $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$. Da questo fatto discende che $I, \sigma[z/f^I(d_0)] \models \exists y\, r(y, z)$.

Dato che $I \models G$ si ha in particolare $I, \sigma[z/f^I(d_0)] \models \exists y\, r(y, z) \to r(z, f(a)) \vee r(f(z), z)$. Da quanto osservato sopra segue $I, \sigma[z/f^I(d_0)] \models r(z, f(a)) \vee r(f(z), z)$. Si hanno dunque due possibilità: nella prima $(f^I(d_0), f^I(a^I)) \in r^I$, mentre nella seconda $(f^I(f^I(d_0)), f^I(d_0)) \in r^I$.

Nel primo caso si ha $I, \sigma[u/d_0, v/a^I] \models r(f(u), f(v))$ e quindi $I \models \exists u\, \exists v\, r(f(u), f(v))$. Nel secondo caso vale $I, \sigma[u/f^I(d_0), v/d_0] \models r(f(u), f(v))$ e otteniamo nuovamente $I \models \exists u\, \exists v\, r(f(u), f(v))$.

In ogni caso $I \models H$ e la dimostrazione è completata.

12. (i) $s(b) \wedge \exists x(\ell(x) \wedge c(b, x))$;

(ii) $\forall x(\ell(x) \wedge c(a, x) \to \exists y(c(x, y) \wedge s(y) \wedge r(y, b)))$.

13. Per stabilire se la formula è valida costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.33 e 4.34 delle dispense) un tableau con la radice etichettata dalla negazione della formula. Sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$\begin{array}{c}
\underline{\neg\big((\neg p \lor q) \land (s \to p \lor r) \to (s \land \neg q \to r)\big)} \\
| \\
\underline{(\neg p \lor q) \land (s \to p \lor r)}, \neg(s \land \neg q \to r) \\
| \\
\neg p \lor q, s \to p \lor r, \underline{\neg(s \land \neg q \to r)} \\
| \\
\neg p \lor q, s \to p \lor r, \underline{s \land \neg q}, \neg r \\
| \\
\underline{\neg p \lor q}, s \to p \lor r, s, \neg q, \neg r
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \diagup \qquad \diagdown & \\
\neg p, \underline{s \to p \lor r}, s, \neg q, \neg r & & q, s \to p \lor r, s, \neg q, \neg r \\
 & & \otimes
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\diagup & \diagdown \\
\neg p, \neg s, s, \neg q, \neg r & \neg p, \underline{p \lor r}, s, \neg q, \neg r \\
\otimes &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\diagup & \diagdown \\
\neg p, p, s, \neg q, \neg r & \neg p, r, s, \neg q, \neg r \\
\otimes & \otimes
\end{array}$$

Il tableau è chiuso e quindi la formula è valida.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(p(x) \lor r(x, f(x)))}{p(x) \lor r(x, f(x))} \qquad \dfrac{[p(x)]^1 \qquad \dfrac{\forall x(p(x) \to \exists y\, r(x, y))}{p(x) \to \exists y\, r(x, y)}}{\exists y\, r(x, y)} \qquad \dfrac{[r(x, f(x))]^1}{\exists y\, r(x, y)}}{\dfrac{\exists y\, r(x, y)}{\forall x\, \exists y\, r(x, y)}}\;{\scriptstyle 1}$$

15.

$$\begin{array}{c}
\langle [(\neg p \land q) \lor r \to \neg(\neg s \to \neg t \land u)] \rangle \\
\langle [\neg((\neg p \land q) \lor r), \neg(\neg s \to \neg t \land u)] \rangle \\
\langle [\neg(\neg p \land q), \neg(\neg s \to \neg t \land u)], [\neg r, \neg(\neg s \to \neg t \land u)] \rangle \\
\langle [p, \neg q, \neg(\neg s \to \neg t \land u)], [\neg r, \neg s], [\neg r, \neg(\neg t \land u)] \rangle \\
\langle [p, \neg q, \neg s], [p, \neg q, \neg(\neg t \land u)], [\neg r, \neg s], [\neg r, t, \neg u] \rangle \\
\langle [p, \neg q, \neg s], [p, \neg q, t, \neg u], [\neg r, \neg s], [\neg r, t, \neg u] \rangle
\end{array}$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(p \lor \neg q \lor \neg s) \land (p \lor \neg q \lor t \lor \neg u) \land (\neg r \lor \neg s) \land (\neg r \lor t \lor \neg u).$$