Prova scritta di Logica Matematica
27 gennaio 2014

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $q \wedge \neg r \to \neg p \wedge q \models p \to r$. **V** | **F** 1pt

2. Perché l'algoritmo di Fitting per la forma normale disgiuntiva goda della proprietà della terminazione forte è necessario agire sulle β-formule solo quando non si può agire sulle doppie negazioni e sulle α-formule. **V** | **F** 1pt

3. Se Γ è un insieme di Hintikka tale che $p \in \Gamma$ e $\neg q \wedge r \to \neg p \in \Gamma$ allora $r \notin \Gamma$. **V** | **F** 1pt

4. Se $\Gamma, F \rhd G \vee H$ allora $\Gamma \rhd F \to G \vee H$. **V** | **F** 1pt

5. $\neg\exists x(p(x) \wedge \forall y\, r(y, f(x)))$ è una α, β, γ o δ-formula? α | β | γ | δ 1pt

6. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $f^I(0) = 2$, $f^I(1) = 3$, $f^I(2) = 2$, $f^I(3) = 1$, $p^I = \{0, 2\}$, $r^I = \{(0, 1), (0, 3), (1, 1), (2, 1), (2, 3), (3, 3)\}$. Allora $I \models \forall x(r(x, f(f(x))) \to \neg p(x))$. **V** | **F** 1pt

7. Se F è un enunciato, I un'interpretazione, σ uno stato di I e $I, \sigma \models F$ allora $I, \sigma[y/d] \models F$ per ogni $d \in D^I$. **V** | **F** 1pt

8. Se $\sim$ è una relazione di congruenza su un'interpretazione I per il linguaggio $\mathcal{L}$ allora $I/\!\sim\; \equiv_{\mathcal{L}} I$. **V** | **F** 1pt

9. Se F è una formula predicativa soddisfacibile allora ogni tableau per F ha una foglia che non contiene coppie complementari. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x\, r(x, f(x)), \forall x\, \forall y(\neg r(x, y) \vee \neg r(y, x)), \forall x\, \forall y(r(x, y) \to p(x) \vee p(y)) \not\models \exists x(p(x) \wedge p(f(x))).$$

11. Sul retro del foglio dimostrate la conseguenza logica 4pt

$$\forall x(\neg p(x) \vee \forall y\, r(y, f(x))), \forall z(\neg r(z, f(z)) \to p(z)) \models \forall x\, \exists y\, r(y, f(x)).$$

12. Sia $\{b, c, d, p, a, i, =\}$ un linguaggio con uguaglianza dove b, c e d sono simboli di costante, p un simbolo di funzione unario, a e i simboli di relazione binari. Interpretando b come "Barbara", c come "Carlo", d come "Davide", $p(x)$ come "il padre di x", $a(x, y)$ come "x è amico di y" e $i(x, y)$ come "x è insegnante di y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) Barbara e Davide hanno lo stesso padre, che non è amico di quello di Carla; 3pt

(ii) il padre di Carla è insegnante di esattamente un amico di Davide. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se vale la conseguenza logica 3pt

$$r \to p \vee q, \neg(p \to s) \to \neg r, r \wedge q \to s \models r \to s.$$

Se la conseguenza logica non vale, definite un'interpretazione che lo testimoni. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\forall z(p(z) \vee r(z, c)), \forall x\, \exists y\, \neg r(f(y), x) \rhd \exists v\, p(f(v)).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((p \to \neg q \wedge r) \wedge \neg s \to \neg(\neg u \vee v \to \neg t)\big).$$

Soluzioni

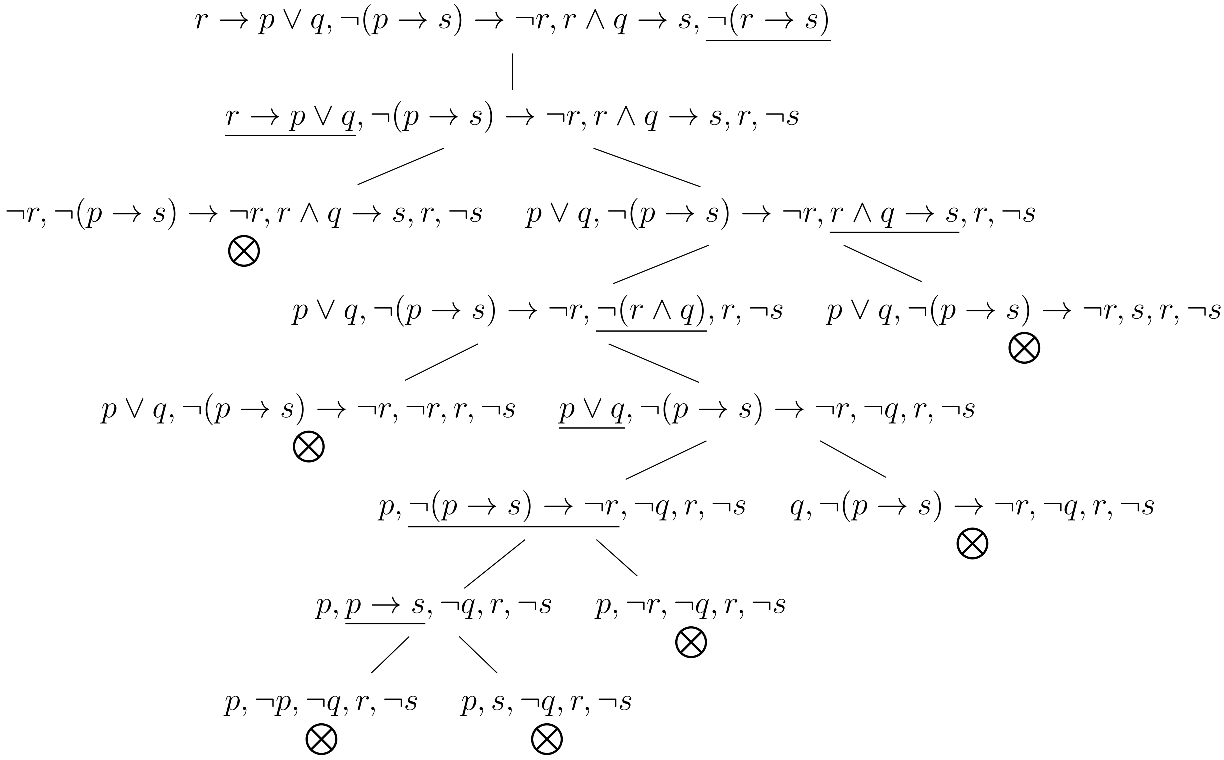
1. **F** come si verifica per esempio con le tavole di verità; un'interpretazione che mostra che la conseguenza logica non vale è quella in cui $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{F}$, $v(r) = \mathbf{F}$.
2. **F** il Lemma 3.25 delle dispense non ha ipotesi sull'esecuzione dell'algoritmo 3.15.
3. **F** $\{p, \neg q \wedge r \rightarrow \neg p, \neg(\neg q \wedge r), \neg r, q\}$ è un insieme di Hintikka.
4. **V** la seconda deduzione naturale si ottiene dalla prima con un'applicazione della regola $(\rightarrow i)$.
5. γ è la negazione di una quantificazione esistenziale.
6. **V** quando $d \in \{1, 3\}$ si ha $I, \sigma[x/d] \models \neg p(x)$, mentre quando $d \in \{0, 2\}$ si ha $I, \sigma[x/d] \not\models r(x, f(f(x)))$.
7. **V** l'affermazione segue dal Lemma 7.10 delle dispense, visto che σ e $\sigma[y/d]$ coincidono sulle variabili libere di F (che, dato che F è un enunciato, non esistono).
8. **V** l'affermazione è contenuta nel Corollario 9.28 delle dispense.
9. **F** per il Teorema 10.28 delle dispense ogni tableau per F è aperto, cioè ha un ramo aperto; il ramo aperto può essere infinito e non avere foglie.
10. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfi i tre enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica ma non quello a destra. Forniamo due esempi di interpretazioni con queste caratteristiche:
$$D^I = \{0, 1, 2, 3\}, \qquad f^I(0) = 1, \quad f^I(1) = 2, \quad f^I(2) = 3, \quad f^I(3) = 0,$$
$$p^I = \{0, 2\}, \qquad r^I = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0)\}$$
$$D^J = \mathbb{N}, \qquad f^J(n) = n + 1$$
$$p^J = \{\, n \in \mathbb{N} \,:\, n \text{ è pari} \,\}, \qquad r^J = \{\, (n, n + 1) \,:\, n \in \mathbb{N} \,\};$$
11. Indichiamo con F e G gli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e con H quello a destra. Dobbiamo dimostrare che se $I \models F, G$ allora $I \models H$, dove I è un'interpretazione arbitraria. Supponiamo dunque $I \models F, G$ e sia $d \in D^I$ arbitrario.

    Se $d \in p^I$ allora, dato che $I \models F$ e quindi in particolare $I, \sigma[x/d] \models \neg p(x) \vee \forall y\, r(y, f(x))$, segue $I, \sigma[x/d] \models \forall y\, r(y, f(x))$. Quindi si ha anche $I, \sigma[x/d] \models \exists y\, r(y, f(x))$.

    Se invece $d \notin p^I$, dato che $I \models G$ e quindi in particolare $I, \sigma[z/d] \models \neg r(z, f(z)) \rightarrow p(z)$, non può essere che $I, \sigma[z/d] \models \neg r(z, f(z))$. Perciò $(d, f^I(d)) \in r^I$ e si ha $I, \sigma[x/d] \models r(x, f(x))$ che implica $I, \sigma[x/d] \models \exists y\, r(y, f(x))$.

    Abbiamo dunque dimostrato che per ogni $d \in D^I$ abbiamo $I, \sigma[x/d] \models \exists y\, r(y, f(x))$, cioè $I \models H$.
12. (i) $p(b) = p(d) \wedge \neg a(p(b), p(c))$;
    (ii) $\exists x(a(x, d) \wedge i(p(c), x) \wedge \forall y(a(y, d) \wedge i(p(c), y) \rightarrow x = y))$ oppure $\exists x(a(x, d) \wedge i(p(c), x)) \wedge \forall x\, \forall y\, (a(x, d) \wedge i(p(c), x) \wedge a(y, d) \wedge i(p(c), y) \rightarrow x = y)$.

13. Per stabilire se vale la conseguenza logica costruiamo, come indicato dall'Algoritmo 4.42 delle dispense, un tableau con la radice etichettata dalle formule a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione di quella a destra. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. Utilizziamo le Convenzioni 4.33 e 4.34 delle dispense.



Il tableau è chiuso e quindi la conseguenza logica vale.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\,\exists y\,\neg r(f(y),x)}{\exists y\,\neg r(f(y),c)} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall z(p(z)\lor r(z,c))}{p(f(y))\lor r(f(y),c)} \qquad \dfrac{[p(f(y))]^1}{\exists v\,p(f(v))} \qquad \dfrac{\dfrac{[r(f(y),c)]^1 \qquad [\neg r(f(y),c)]^2}{\bot}}{\exists v\,p(f(v))}}{\exists v\,p(f(v))}\;{\scriptstyle 1}}{\exists v\,p(f(v))}\;{\scriptstyle 2}$$

15.

$$[\big\langle\neg\big((p \to \neg q \wedge r) \wedge \neg s \to \neg(\neg u \vee v \to \neg t)\big)\big\rangle]$$
$$[\langle(p \to \neg q \wedge r) \wedge \neg s, \neg u \vee v \to \neg t\rangle]$$
$$[\langle p \to \neg q \wedge r, \neg s, \neg u \vee v \to \neg t\rangle]$$
$$[\langle\neg p, \neg s, \neg u \vee v \to \neg t\rangle, \langle\neg q \wedge r, \neg s, \neg u \vee v \to \neg t\rangle]$$
$$[\langle\neg p, \neg s, \neg u \vee v \to \neg t\rangle, \langle\neg q, r, \neg s, \neg u \vee v \to \neg t\rangle]$$
$$[\langle\neg p, \neg s, \neg(\neg u \vee v)\rangle, \langle\neg p, \neg s, \neg t\rangle, \langle\neg q, r, \neg s, \neg(\neg u \vee v)\rangle, \langle\neg q, r, \neg s, \neg t\rangle]$$
$$[\langle\neg p, \neg s, u, \neg v\rangle, \langle\neg p, \neg s, \neg t\rangle, \langle\neg q, r, \neg s, u, \neg v\rangle, \langle\neg q, r, \neg s, \neg t\rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$(\neg p \wedge \neg s \wedge u \wedge \neg v) \vee (\neg p \wedge \neg s \wedge \neg t) \vee (\neg q \wedge r \wedge \neg s \wedge u \wedge \neg v) \vee (\neg q \wedge r \wedge \neg s \wedge \neg t)$.

Prova scritta di Logica Matematica
27 gennaio 2014

Cognome | Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $p \wedge r \to p \wedge \neg q \models q \to \neg r$. **V** | **F** 1pt

2. Perché l'algoritmo di Fitting per la forma normale congiuntiva goda della proprietà della terminazione forte è necessario agire sulle α-formule solo quando non si può agire sulle doppie negazioni e sulle β-formule. **V** | **F** 1pt

3. Se Γ è un insieme di Hintikka tale che $\neg p \in \Gamma$ e $q \wedge \neg r \to p \in \Gamma$ allora $q \notin \Gamma$. **V** | **F** 1pt

4. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $f^I(0) = 3$, $f^I(1) = 2$, $f^I(2) = 2$, $f^I(3) = 0$, $p^I = \{1, 2\}$, $r^I = \{(0, 0), (1, 0), (1, 3), (2, 0), (2, 3), (3, 3)\}$. Allora $I \models \forall x(r(x, f(f(x))) \to \neg p(x))$. **V** | **F** 1pt

5. $\neg\forall x(p(x) \to \forall y\, r(f(y), x))$ è una α, β, γ o δ-formula? α | β | γ | δ 1pt

6. Se F è un enunciato, I un'interpretazione, σ uno stato di I e $I, \sigma \models F$ allora $I, \sigma[x/d] \models F$ per ogni $d \in D^I$. **V** | **F** 1pt

7. Se F è una formula predicativa soddisfacibile allora ogni tableau per F ha una foglia che non contiene coppie complementari. **V** | **F** 1pt

8. Se $\sim$ è una relazione di congruenza su un'interpretazione I per il linguaggio $\mathcal{L}$ allora $I/\!\sim\; \equiv_{\mathcal{L}} I$. **V** | **F** 1pt

9. Se $\Gamma, G \vee H \rhd F$ allora $\Gamma \rhd G \vee H \to F$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x\, r(f(x), x), \forall x\, \forall y(\neg r(x, y) \vee \neg r(y, x)), \forall x\, \forall y(r(y, x) \to p(x) \vee p(y)) \not\models \exists x(p(x) \wedge p(f(x))).$$

11. Sul retro del foglio dimostrate la conseguenza logica 4pt

$$\forall x(p(x) \vee \forall y\, \neg r(y, f(x))), \forall z(r(z, f(z)) \to \neg p(z)) \models \forall x\, \exists y\, \neg r(y, f(x)).$$

12. Sia $\{b, c, d, m, a, i, =\}$ un linguaggio con uguaglianza dove b, c e d sono simboli di costante, m un simbolo di funzione unario, a e i simboli di relazione binari. Interpretando b come "Barbara", c come "Carlo", d come "Davide", $m(x)$ come "la madre di x", $a(x, y)$ come "x è amico di y" e $i(x, y)$ come "x è insegnante di y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) Carlo e Davide hanno la stessa madre, che è amica di quella di Barbara; 3pt

(ii) la madre di Barbara è insegnante di esattamente un amico di Carlo. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se vale la conseguenza logica 3pt

$$q \to r \vee s, \neg(r \to p) \to \neg q, q \wedge s \to p \models q \to p.$$

Se la conseguenza logica non vale, definite un'interpretazione che lo testimoni. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\forall x\, \exists y\, r(x, f(y)), \forall z(\neg r(a, z) \vee p(z)) \rhd \exists v\, p(f(v)).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big(\neg p \wedge (q \to r \wedge \neg s) \to \neg(t \vee \neg u \to \neg v)\big).$$

Soluzioni

1. **F** come si verifica per esempio con le tavole di verità; un'interpretazione che mostra che la conseguenza logica non vale è quella in cui $v(p) = \mathbf{F}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{V}$.
2. **F** il Lemma 3.25 delle dispense non ha ipotesi sull'esecuzione dell'algoritmo 3.11.
3. **F** $\{\neg p, q \wedge \neg r \to p, \neg(q \wedge \neg r), \neg\neg r, r, q\}$ è un insieme di Hintikka.
4. **V** quando $d \in \{0, 3\}$ si ha $I, \sigma[x/d] \models \neg p(x)$, mentre quando $d \in \{1, 2\}$ si ha $I, \sigma[x/d] \not\models r(x, f(f(x)))$.
5. δ è la negazione di una quantificazione universale.
6. **V** l'affermazione segue dal Lemma 7.10 delle dispense, visto che σ e $\sigma[x/d]$ coincidono sulle variabili libere di F (che, dato che F è un enunciato, non esistono).
7. **F** per il Teorema 10.28 delle dispense ogni tableau per F è aperto, cioè ha un ramo aperto; il ramo aperto può essere infinito e non avere foglie.
8. **V** l'affermazione è contenuta nel Corollario 9.28 delle dispense.
9. **V** la seconda deduzione naturale si ottiene dalla prima con un'applicazione della regola ($\to i$).
10. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfi i tre enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica ma non quello a destra. Forniamo due esempi di interpretazioni con queste caratteristiche:
$$D^I = \{0, 1, 2, 3\}, \qquad f^I(0) = 1, \quad f^I(1) = 2, \quad f^I(2) = 3, \quad f^I(3) = 0,$$
$$p^I = \{0, 2\}, \qquad r^I = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2), (0, 3)\}$$
$$D^J = \mathbb{N}, \qquad f^J(n) = n + 1$$
$$p^J = \{\, n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari} \,\}, \qquad r^J = \{\, (n + 1, n) : n \in \mathbb{N} \,\};$$
11. Indichiamo con F e G gli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e con H quello a destra. Dobbiamo dimostrare che se $I \models F, G$ allora $I \models H$, dove I è un'interpretazione arbitraria. Supponiamo dunque $I \models F, G$ e sia $d \in D^I$ arbitrario.

    Se $d \notin p^I$ allora, dato che $I \models F$ e quindi in particolare $I, \sigma[x/d] \models p(x) \vee \forall y\, \neg r(y, f(x))$, segue $I, \sigma[x/d] \models \forall y\, \neg r(y, f(x))$. Quindi si ha anche $I, \sigma[x/d] \models \exists y\, \neg r(y, f(x))$.

    Se invece $d \in p^I$, dato che $I \models G$ e quindi in particolare $I, \sigma[z/d] \models r(z, f(z)) \to \neg p(z)$, non può essere che $I, \sigma[z/d] \models r(z, f(z))$. Perciò $(d, f^I(d)) \notin r^I$ e si ha $I, \sigma[x/d] \models \neg r(x, f(x))$ che implica $I, \sigma[x/d] \models \exists y\, r(y, f(x))$.

    Abbiamo dunque dimostrato che per ogni $d \in D^I$ abbiamo $I, \sigma[x/d] \models \exists y\, \neg r(y, f(x))$, cioè $I \models H$.
12. (i) $m(c) = m(d) \wedge a(m(c), m(b))$;

    (ii) $\exists x(a(x, c) \wedge i(m(b), x) \wedge \forall y(a(y, c) \wedge i(m(b), y) \to x = y))$ oppure $\exists x(a(x, c) \wedge i(m(b), x)) \wedge \forall x\, \forall y\, (a(x, c) \wedge i(m(b), x) \wedge a(y, c) \wedge i(m(b), y) \to x = y)$.

13. Per stabilire se vale la conseguenza logica costruiamo, come indicato dall'Algoritmo 4.42 delle dispense, un tableau con la radice etichettata dalle formule a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione di quella a destra. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. Utilizziamo le Convenzioni 4.33 e 4.34 delle dispense.

$$q \to r \lor s, \neg(r \to p) \to \neg q, q \land s \to p, \underline{\neg(q \to p)}$$

$$\underline{q \to r \lor s}, \neg(r \to p) \to \neg q, q \land s \to p, q, \neg p$$

$$\underset{\otimes}{\neg q, \neg(r \to p) \to \neg q, q \land s \to p, q, \neg p} \qquad r \lor s, \underline{\neg(r \to p) \to \neg q}, q \land s \to p, q, \neg p$$

$$r \lor s, \underline{r \to p}, q \land s \to p, q, \neg p \qquad \underset{\otimes}{r \lor s, \neg q, q \land s \to p, q, \neg p}$$

$$\underline{r \lor s}, \neg r, q \land s \to p, q, \neg p \qquad \underset{\otimes}{r \lor s, p, q \land s \to p, q, \neg p}$$

$$\underset{\otimes}{r, \neg r, q \land s \to p, q, \neg p} \qquad s, \neg r, \underline{q \land s \to p}, q, \neg p$$

$$s, \neg r, \underline{\neg(q \land s)}, q, \neg p \qquad \underset{\otimes}{s, \neg r, p, q, \neg p}$$

$$\underset{\otimes}{s, \neg r, \neg q, q, \neg p} \qquad \underset{\otimes}{s, \neg r, \neg s, q, \neg p}$$

Il tableau è chiuso e quindi la conseguenza logica vale.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\, \exists y\, r(x, f(y))}{\exists y\, r(a, f(y))} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall z(\neg r(a, z) \lor p(z))}{\neg r(a, f(y)) \lor p(f(y))} \qquad \dfrac{\dfrac{[r(a, f(y))]^2 \qquad [\neg r(a, f(y))]^1}{\bot}}{\exists v\, p(f(v))} \qquad \dfrac{[p(f(y))]^1}{\exists v\, p(f(v))}}{\exists v\, p(f(v))}\;{\scriptstyle 1}}{\exists v\, p(f(v))}\;{\scriptstyle 2}$$

15.

$$[\bigl\langle\neg\bigl(\neg p\wedge(q\to r\wedge\neg s)\to\neg(t\vee\neg u\to\neg v)\bigr)\bigr\rangle]$$
$$[\langle\neg p\wedge(q\to r\wedge\neg s), t\vee\neg u\to\neg v\rangle]$$
$$[\langle\neg p, q\to r\wedge\neg s, t\vee\neg u\to\neg v\rangle]$$
$$[\langle\neg p,\neg q, t\vee\neg u\to\neg v\rangle\,,\langle\neg p, r\wedge\neg s, t\vee\neg u\to\neg v\rangle]$$
$$[\langle\neg p,\neg q,\neg(t\vee\neg u)\rangle\,,\langle\neg p,\neg q,\neg v\rangle\,,\langle\neg p, r,\neg s, t\vee\neg u\to\neg v\rangle]$$
$$[\langle\neg p,\neg q,\neg t, u\rangle\,,\langle\neg p,\neg q,\neg v\rangle\,,\langle\neg p, r,\neg s,\neg(t\vee\neg u)\rangle\,,\langle\neg p, r,\neg s,\neg v\rangle]$$
$$[\langle\neg p,\neg q,\neg t, u\rangle\,,\langle\neg p,\neg q,\neg v\rangle\,,\langle\neg p, r,\neg s,\neg t, u\rangle\,,\langle\neg p, r,\neg s,\neg v\rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg t\wedge u)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg v)\vee(\neg p\wedge r\wedge\neg s\wedge\neg t\wedge u)\vee(\neg p\wedge r\wedge\neg s\wedge\neg v).$$