Prova scritta di Logica Matematica
9 settembre 2014

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Quante delle seguenti stringhe di simboli sono formule proposizionali?
$p \to \neg r$, $q \neg r$, $\neg q \wedge \neg q$, $p \vee \neg\neg\neg\neg q$. **0 | 1 | 2 | 3 | 4** 1pt

2. $\neg(p \to \neg q) \vee r \equiv \neg r \to p \wedge q$. **V | F** 1pt

3. Se $F \models G$ e F è soddisfacibile, allora anche G è soddisfacibile. **V | F** 1pt

4. Una β-formula è logicamente equivalente
alla congiunzione dei suoi ridotti. **V | F** 1pt

5. Esiste un insieme di Hintikka che contiene le formule
$p \to \neg q$ e $q \wedge (\neg p \to s)$. **V | F** 1pt

6. Sia I l'interpretazione normale con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $f^I(0) = 0$, $f^I(1) = 3$, $f^I(2) = 1$, $f^I(3) = 2$, $p^I = \{0, 2\}$, $r^I = \{(0, 0), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$.
Allora $I \models \forall x(p(f(x)) \to (r(x, x) \to f(x) \neq x))$. **V | F** 1pt

7. Se $\sim$ è una relazione di congruenza sull'interpretazione I
allora I e $I/\!\sim$ sono elementarmente equivalenti. **V | F** 1pt

8. L'algoritmo dei tableaux predicativi gode della proprietà
della terminazione forte. **V | F** 1pt

9. Se $\Gamma \models F$ allora $\Gamma \rhd F$. **V | F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate l'insoddisfacibilità dell'enunciato 4pt

$$\forall x(\exists y\, r(y, x) \to \neg p(x)) \wedge \exists w\, r(w, f(w)) \wedge \forall z\, p(f(z)).$$

11. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\exists x\, r(x, f(x)), \forall x\, x \neq f(x), \forall x(\exists y(r(y, x) \vee r(x, y)) \to p(x)) \not\models_{=} \forall x\, p(x).$$

12. Sia $\{b, p, c, g, m, i\}$ un linguaggio dove b è un simbolo di costante, p è un simbolo di funzione unario, c e g sono simboli di relazione unari, e m e i sono simboli di relazione binari. Interpretando b come "Bobi", $p(x)$ come "il padrone di x", $c(x)$ come "x è un cane", $g(x)$ come "x è un gatto", $m(x, y)$ come "x morde y", $i(x, y)$ come "x insegue y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) Bobi è un cane che non morde il suo padrone; 3pt

(ii) ogni cane che insegue tutti i gatti ne morde qualcuno. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$\neg\big(r \to \neg p \land \neg(q \land s)\big) \land \neg\big((p \land \neg(q \to s)) \lor \neg(r \to \neg s)\big)$$

è soddisfacibile. Se la formula è soddisfacibile definite un'interpretazione che la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\exists x\, r(x, f(x)) \lor s(c), \forall y(\exists z\, r(z, y) \to s(f(y))) \rhd \exists z\, s(z).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Utilizzando lo spazio qui sotto mettete in forma prenessa l'enunciato 2pt

$$\neg\big(\forall x\, p(x) \land \neg\forall x\, \neg r(x, x) \to \exists y\, q(y) \lor \neg\forall z\, r(z, c)\big) \land \neg\exists w\, r(f(w), a).$$

[Se si usa il minimo numero di quantificatori possibili, 1pt in più.]

Soluzioni

1. **3** la seconda stringa non è una formula (perché $\neg$ è un connettivo unario e non binario), mentre l'ultima stringa lo è dato che $\neg q$, $\neg\neg q$, $\neg\neg\neg q$ e $\neg\neg\neg\neg q$ sono formule.

2. **V** come si verifica per esempio con le tavole di verità.

3. **V** se v è un'interpretazione tale che $v(F) = \mathbf{V}$ allora dato che $F \models G$ deve essere anche $v(G) = \mathbf{V}$.

4. **F** Una β-formula è logicamente equivalente alla disgiunzione, e non alla congiunzione, dei suoi ridotti.

5. **V** $\{p \to \neg q, q \land (\neg p \to s), \neg p, q, \neg p \to s, s\}$ è un insieme di Hintikka.

6. **F** si ha $I, \sigma[x/0] \models p(f(x))$ (perché $f^I(0) = 0$ e $0 \in p^I$), $I, \sigma[x/0] \models r(x, x)$ (perchè $(0, 0) \in r^I$) e $I, \sigma[x/0] \models f(x) = x$ (perché l'interpretazione è normale e $f^I(0) = 0$); perciò $I \not\models \forall x(p(f(x)) \to (r(x, x) \to f(x) \neq x))$.

7. **V** è parte del corollario 9.28 delle dispense.

8. **F** vedere l'esempio 10.13 delle dispense.

9. **V** è il teorema di completezza per la deduzione naturale (teoremi 5.18 e 11.11 delle dispense).

10. L'enunciato ha la forma $F \land G \land H$. Dobbiamo dimostrare che esso non è soddisfatto in qualunque interpretazione I: per assurdo supponiamo che $I \models F, G, H$ con l'obiettivo di ottenere una contraddizione.

Dato che $I \models G$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$. Dato che $I \models F$ si ha in particolare $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \models \exists y\, r(y, x) \to \neg p(x)$. Da $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$ segue $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \models \exists y\, r(y, x)$ e quindi abbiamo $f^I(d_0) \notin p^I$. Ma questo contraddice $I \models H$, perché $I, \sigma[z/d_0] \not\models p(f(z))$.

11. Dobbiamo definire un'interpretazione normale che soddisfi i tre enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, ma non quello a destra. Forniamo due esempi di interpretazioni con queste caratteristiche:

$$D^I = \{0, 1, 2\}, \qquad f^I(0) = 1, \quad f^I(1) = 2, \quad f^I(2) = 1, \qquad p^I = \{0, 1\}, \qquad r^I = \{(0, 1)\};$$

$$D^J = \mathbb{N}, \qquad f^J(n) = n + 1, \qquad p^J = \{0, 1\}, \qquad r^J = \{(0, 1)\}.$$

12. (i) $c(b) \land \neg m(b, p(b))$;
(ii) $\forall x\big(c(x) \land \forall y(g(y) \to i(x, y)) \to \exists y(g(y) \land m(x, y))\big)$.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\exists x\, r(x, f(x)) \lor s(c) \qquad \dfrac{[\exists x\, r(x, f(x))]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[r(x, f(x))]^1}{\exists z\, r(z, f(x))} \qquad \dfrac{\forall y(\exists z\, r(z, y) \to s(f(y)))}{\exists z\, r(z, f(x)) \to s(f(f(x)))}}{s(f(f(x)))}}{\exists z\, s(z)}}{\exists z\, s(z)}\,{}^{1} \qquad \dfrac{[s(c)]^2}{\exists z\, s(z)}}{\exists z\, s(z)}\,{}^{2}$$

13. Per stabilire se la formula è soddisfacibile costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.33 e 4.34 delle dispense) un tableau con la radice etichettata dalla formula. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$\underline{\neg\big(r \to \neg p \wedge \neg(q \wedge s)\big) \wedge \neg\big((p \wedge \neg(q \to s)) \vee \neg(r \to \neg s)\big)}$$

$$\underline{\neg\big(r \to \neg p \wedge \neg(q \wedge s)\big)}, \neg\big((p \wedge \neg(q \to s)) \vee \neg(r \to \neg s)\big)$$

$$r, \neg(\neg p \wedge \neg(q \wedge s)), \underline{\neg\big((p \wedge \neg(q \to s)) \vee \neg(r \to \neg s)\big)}$$

$$r, \neg(\neg p \wedge \neg(q \wedge s)), \neg(p \wedge \neg(q \to s)), \underline{r \to \neg s}$$

$$r, \neg(\neg p \wedge \neg(q \wedge s)), \neg(p \wedge \neg(q \to s)), \neg r \qquad r, \underline{\neg(\neg p \wedge \neg(q \wedge s))}, \neg(p \wedge \neg(q \to s)), \neg s$$

$$\otimes$$

$$r, p, \underline{\neg(p \wedge \neg(q \to s))}, \neg s \qquad r, \underline{q \wedge s}, \neg(p \wedge \neg(q \to s)), \neg s$$

$$r, p, \neg p, \neg s \qquad r, p, q \to s, \neg s \qquad r, q, s, \neg(p \wedge \neg(q \to s)), \neg s$$

$$\otimes \qquad\qquad\qquad\qquad \otimes$$

$$r, p, \neg q, \neg s \qquad r, p, s, \neg s$$

$$\bigcirc \qquad \otimes$$

Il tableau è aperto e quindi la formula è soddisfacibile. Un'interpretazione che la soddisfa è data da $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{F}$, $v(r) = \mathbf{V}$, $v(s) = \mathbf{F}$.

15. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quanticatori è:

$$\neg\big(\forall x\, p(x) \wedge \neg\forall x\, \neg r(x,x) \to \exists y\, q(y) \vee \neg\forall z\, r(z,c)\big) \wedge \neg\exists w\, r(f(w),a)$$
$$\neg\big(\forall x(p(x) \wedge \exists x\, \neg\neg r(x,x)) \to \exists y\, q(y) \vee \exists z\, \neg r(z,c)\big) \wedge \forall w\, \neg r(f(w),a)$$
$$\neg\big(\forall x(p(x) \wedge \exists x\, r(x,x)) \to \exists y\, q(y) \vee \exists z\, \neg r(z,c)\big) \wedge \forall w\, \neg r(f(w),a)$$
$$\neg\big(\forall x\, \exists u(p(x) \wedge r(u,u)) \to \exists y(q(y) \vee \neg r(y,c))\big) \wedge \forall w\, \neg r(f(w),a)$$
$$\neg\exists y\big(\exists u(p(y) \wedge r(u,u)) \to (q(y) \vee \neg r(y,c))\big) \wedge \forall w\, \neg r(f(w),a)$$
$$\forall y \neg\forall u\big((p(y) \wedge r(u,u)) \to (q(y) \vee \neg r(y,c))\big) \wedge \forall w\, \neg r(f(w),a)$$
$$\forall y\big(\exists u \neg\big((p(y) \wedge r(u,u)) \to (q(y) \vee \neg r(y,c))\big) \wedge \neg r(f(y),a)\big)$$
$$\forall y\, \exists u\big(\neg\big((p(y) \wedge r(u,u)) \to (q(y) \vee \neg r(y,c))\big) \wedge \neg r(f(y),a)\big).$$