Prova scritta di Logica Matematica
18 febbraio 2014

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $p \wedge q \to \neg r \equiv p \wedge r \to (q \to \neg r)$. **V** | **F** 1pt

2. Se $F \models \neg G$ e $H \models K$ allora $G \wedge H \models K \wedge \neg F$. **V** | **F** 1pt

3. Perché l'algoritmo dei tableaux proposizionali goda della proprietà della terminazione forte è necessario agire sulle β-formule solo quando non si può agire sulle doppie negazioni e sulle α-formule. **V** | **F** 1pt

4. Quante delle seguenti formule sono enunciati? $\exists z\, r(z, g(z, x))$, $\forall x\, \exists y(r(x, y) \to \neg q(y, x))$, $\exists x\, p(x) \to \forall y\, r(g(y, y), x)$. **0** | **1** | **2** | **3** 1pt

5. Sia I l'interpretazione normale con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $f^I(0) = 0$, $f^I(1) = 3$, $f^I(2) = 1$, $f^I(3) = 3$, $p^I = \{0, 2\}$. Allora $I \models \forall x(p(x) \vee x \neq f(x))$. **V** | **F** 1pt

6. Se I è un'interpretazione tale che per ogni simbolo di costante a vale $I \models p(a)$ allora $I \models \forall x\, p(x)$. **V** | **F** 1pt

7. Sia $\sim$ è una relazione di congruenza su un'interpretazione I per un linguaggio che comprende il simbolo di funzione unario f. Se $d, d' \in D^I$ sono tali che $d \sim d'$ allora $f^I(d) \sim f^I(d')$. **V** | **F** 1pt

8. Non esiste un insieme di Hintikka che contiene $\forall x(q(x) \to p(x))$, $\forall y\, q(y)$ e $\neg(\forall z\, r(z) \to p(a))$. **V** | **F** 1pt

9. Se $\Gamma \rhd r(x, f(x))$ allora $\Gamma \rhd \exists y\, r(x, y)$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sia $\mathcal{L} = \{f, p\}$ il linguaggio con f simbolo di funzione unario e p simbolo di relazione unario. Siano I e J le seguenti interpretazioni per $\mathcal{L}$: 4pt

$$D^I = \mathbb{N}, \quad f^I(n) = n + 7 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}, \quad p^I = \{\, n \in \mathbb{N} : n \text{ è dispari} \,\};$$

$$D^J = \{A, B, C\}, \quad f^J(A) = B, \quad f^J(B) = C, \quad f^J(C) = B, \quad p^J = \{B\}.$$

Sul retro del foglio dimostrate che $I \equiv_{\mathcal{L}} J$.

11. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x(p(f(x)) \vee q(x)), \forall z(p(z) \to r(z, f(z))), \forall x(\neg q(x) \vee r(f(x), c)) \models \forall x\, \exists y\, r(f(x), y).$$

12. Sia $\{b, c, d, m, a, i\}$ un linguaggio dove b, c e d sono simboli di costante, m un simbolo di funzione unario, a e i simboli di relazione binari. Interpretando b come "Bruna", c come "Chiara", d come "Dario", $m(x)$ come "la madre di x", $a(x, y)$ come "x è amico di y" e $i(x, y)$ come "x è insegnante di y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) la madre di Bruna è insegnante di Chiara, ma non di Dario; 3pt

(ii) Bruna e Dario hanno un insegnante in comune, che non è insegnante di nessun amico di Chiara. 3pt

13. Mostrate che 3pt

$$F \to G, H \vee \neg K, G \to K \rhd F \to K \wedge H.$$

Usate solo le regole della deduzione naturale proposizionale, comprese le quattro regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux stabilite sul retro del foglio l'insoddisfacibilità dell'insieme di enunciati 5pt

$$\big\{\forall x\, \neg p(f(x)), \forall y\, r(y, c) \wedge p(c), \forall x(p(x) \to p(f(x)) \vee \exists y\, \neg r(g(y), x))\big\}.$$

15. Utilizzando lo spazio qui sotto mettete in forma prenessa l'enunciato 2pt

$$\big(\forall x\, r(x, x) \to \neg\forall y\, \neg p(f(y))\big) \vee \neg\big(\forall z\, p(z) \wedge \neg\forall w(\forall u\, r(u, w) \to q(w))\big).$$

[Se si usa il minimo numero di quantificatori possibili, 1pt in più.]

Soluzioni

1. **V** come si verifica per esempio con le tavole di verità.

2. **V** se $v(G \land H) = \mathbf{V}$ allora $v(G) = \mathbf{V}$ e $v(H) = \mathbf{V}$; dal secondo fatto e la seconda ipotesi segue che $v(K) = \mathbf{V}$; se $v(F) = \mathbf{V}$ allora per la prima ipotesi $v(\neg G) = \mathbf{V}$, che contraddice il primo fatto: quindi $v(F) = \mathbf{F}$ e $v(\neg F) = \mathbf{V}$. In conclusione $v(K \land \neg F) = \mathbf{V}$.

3. **F** il teorema 4.14 delle dispense non ha ipotesi sull'esecuzione dell'algoritmo 4.8.

4. **1** la seconda formula è l'unico enunciato.

5. **F** dato che $3 \notin p^I$ e $f^I(3) = 3$ si ha che $I, \sigma[x/3] \not\models p(x) \lor x \neq f(x)$.

6. **F** un controesempio è dato da $D^I = \{0, 1\}$, $a^I = 0$, $p^I = \{0\}$, ma anche da qualunque interpretazione J per un linguaggio senza simboli di costante in cui $p^J \neq D^J$.

7. **V** la condizione è parte della definizione 9.20 delle dispense.

8. **V** se Γ è un insieme di Hintikka e $\forall y\, q(y) \in \Gamma$ deve essere anche $q(a) \in \Gamma$. Se $\forall x(q(x) \to p(x)) \in \Gamma$ allora $q(a) \to p(a) \in \Gamma$ e, dato che non può essere $\neg q(a) \in \Gamma$ si ha $p(a) \in \Gamma$. Ma allora $\neg(\forall z\, r(z) \to p(a)) \notin \Gamma$ perché altrimenti $\neg p(a) \in \Gamma$.

9. **V** la seconda deduzione naturale si ottiene dalla prima con un'applicazione della regola $(\exists i)$ alla formula $r(x, y)\{y/f(x)\}$.

10. Per il corollario 9.14 delle dispense è sufficiente definire un omomorfismo forte suriettivo φ di I in J. Sia $\varphi(0) = A$, $\varphi(2n) = C$ se $n > 0$, $\varphi(2n+1) = B$ per ogni n. È facile verificare che φ ha le caratteristiche richieste.

11. Indichiamo con F, G e H gli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e con K quello a destra. Dobbiamo dimostrare che per qualunque interpretazione I tale che $I \models F, G, H$ si ha $I \models K$. Supponiamo per assurdo che $I \models F, G, H$ e $I \not\models K$.

Dato che $I \not\models K$ si ha $I \models \neg K$ e quindi $I \models \exists x\, \forall y\, \neg r(f(x), y)$. Sia $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d_0] \models \forall y\, \neg r(f(x), y)$. Quindi per ogni $d \in D^I$ si ha $(f^I(d_0), d) \notin r^I$.

Dato che $I \models H$ si ha in particolare $I, \sigma[x/d_0] \models \neg q(x) \lor r(f(x), c)$. Dato che per quanto dimostrato sopra si ha $(f^I(d_0), c^I) \notin r^I$ deve essere $d_0 \notin q^I$.

Dato che $I \models F$ si ha in particolare $I, \sigma[x/d_0] \models p(f(x)) \lor q(x)$ e da $d_0 \notin q^I$ segue $f^I(d_0) \in p^I$.

Da $I \models G$ segue che $I, \sigma[z/f^I(d_0)] \models p(z) \to r(z, f(z))$. Dato che $f^I(d_0) \in p^I$ deve essere $(f^I(d_0), f^I(f^I(d_0))) \in r^I$. Ma quanto ottenuto nel secondo paragrafo della dimostrazione implica che $(f^I(d_0), f^I(f^I(d_0))) \notin r^I$, e abbiamo ottenuto la contraddizione cercata.

12. (i) $i(m(b), c) \land \neg i(m(b), d)$;
(ii) $\exists x(i(x, b) \land i(x, d) \land \forall y(a(y, c) \to \neg i(x, y)))$.

13. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[F]^2 \qquad F\to G}{G} \qquad G\to K}{K} \qquad \dfrac{H\vee\neg K \qquad [H]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg K]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[F]^2 \qquad F\to G}{G} \qquad G\to K}{K}}{\bot}}{H}}{H}\,{}^{1}}{K\wedge H}}{F\to K\wedge H}\,{}^{2}$$

14. Per stabilire l'insoddisfacibilità dell'insieme di enunciati utilizziamo l'algoritmo 10.47 delle dispense e costruiamo un tableau chiuso con la radice etichettata dalle formule dell'insieme. Indichiamo con F, G e H le γ-formule $\forall x\,\neg p(f(x))$, $\forall y\, r(y,c)$ e $\forall x(p(x)\to p(f(x))\vee\exists y\,\neg r(g(y),x))$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\begin{array}{c}
F,\underline{G\wedge p(c)},H \\
| \\
F,G,p(c),\underline{H} \\
| \\
F,G,p(c),H,\underline{p(c)\to p(f(c))\vee\exists y\,\neg r(g(y),c)} \\
\diagup \qquad\qquad \diagdown \\
\begin{array}{cc}
F,G,p(c),H,\neg p(c) & F,G,p(c),H,\underline{p(f(c))\vee\exists y\,\neg r(g(y),c)} \\
\bigotimes & \diagup \qquad\qquad \diagdown \\
 & \begin{array}{cc}
\underline{F},G,p(c),H,p(f(c)) & F,G,p(c),H,\underline{\exists y\,\neg r(g(y),c)} \\
| & | \\
F,\neg p(f(c)),G,p(c),H,p(f(c)) & F,\underline{G},p(c),H,\neg r(g(a),c) \\
\bigotimes & | \\
 & F,G,r(g(a),c),p(c),H,\neg r(g(a),c) \\
 & \bigotimes
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

15. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quanticatori è:

$$\begin{gathered}
\big(\forall x\, r(x,x)\to\neg\forall y\,\neg p(f(y))\big)\vee\neg\big(\forall z\, p(z)\wedge\neg\forall w(\forall u\, r(u,w)\to q(w))\big) \\
\big(\forall x\, r(x,x)\to\exists y\, p(f(y))\big)\vee\neg\big(\forall z\, p(z)\wedge\exists w\neg\exists u(r(u,w)\to q(w))\big) \\
\big(\forall x\, r(x,x)\to\exists x\, p(f(x))\big)\vee\neg\exists w\big(\forall z\, p(z)\wedge\forall u\,\neg(r(u,w)\to q(w))\big) \\
\exists x\big(r(x,x)\to p(f(x))\big)\vee\forall w\neg\big(\forall z\, p(z)\wedge\forall z\,\neg(r(z,w)\to q(w))\big) \\
\forall w\big(\exists x(r(x,x)\to p(f(x)))\vee\neg\forall z(p(z)\wedge\neg(r(z,w)\to q(w)))\big) \\
\forall w\big(\exists x(r(x,x)\to p(f(x)))\vee\exists z\neg(p(z)\wedge\neg(r(z,w)\to q(w)))\big) \\
\forall w\big(\exists x(r(x,x)\to p(f(x)))\vee\exists x\neg(p(x)\wedge\neg(r(x,w)\to q(w)))\big) \\
\forall w\,\exists x\big((r(x,x)\to p(f(x)))\vee\neg(p(x)\wedge\neg(r(x,w)\to q(w)))\big).
\end{gathered}$$

Prova scritta di Logica Matematica
18 febbraio 2014

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Se $F \models G$ e $H \models \neg K$ allora $F \wedge K \models \neg H \wedge G$. **V** **F** 1pt

2. Se I è un'interpretazione tale che per qualche simbolo di costante a vale $I \models p(a)$ allora $I \models \exists x\, p(x)$. **V** **F** 1pt

3. $p \wedge q \to r \equiv q \wedge \neg r \to (p \to r)$. **V** **F** 1pt

4. L'algoritmo dei tableaux proposizionali gode della proprietà della terminazione forte anche se non si agisce sulle β-formule solo quando non si può agire sulle doppie negazioni e sulle α-formule. **V** **F** 1pt

5. Esiste un insieme di Hintikka che contiene $\forall x(p(x) \to q(x))$, $\neg(\exists y\, r(y) \to q(a))$ e $\forall z\, p(z)$. **V** **F** 1pt

6. Se $\Gamma \rhd r(g(x,x),x)$ allora $\Gamma \rhd \exists z\, r(z,x)$. **V** **F** 1pt

7. Sia I l'interpretazione normale con $D^I = \{0,1,2,3\}$, $f^I(0) = 3$, $f^I(1) = 0$, $f^I(2) = 2$, $f^I(3) = 3$, $p^I = \{0,3\}$. Allora $I \models \forall x(\neg p(x) \vee x \neq f(x))$. **V** **F** 1pt

8. Sia $\sim$ è una relazione di congruenza su un'interpretazione I per un linguaggio che comprende il simbolo di funzione unario f. Se $d, d' \in D^I$ sono tali che $f^I(d) \sim f^I(d')$ allora $d \sim d'$. **V** **F** 1pt

9. Quante delle seguenti formule sono enunciati? $\exists z\, r(g(z,x),z)$, $\exists z\, p(z) \to \forall x\, r(g(x,x),z)$, $\exists x\, \forall y(\neg r(x,y) \to q(y,x))$. **0** **1** **2** **3** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x(\neg p(x) \vee q(f(x))), \forall x(p(x) \vee r(a, f(x))), \forall z(q(z) \to r(f(z), z)) \models \forall x\, \exists y\, r(y, f(x)).$$

11. Sia $\mathcal{L} = \{f, p\}$ il linguaggio con f simbolo di funzione unario e p simbolo di relazione unario. Siano I e J le seguenti interpretazioni per $\mathcal{L}$: 4pt

$$D^I = \mathbb{N}, \quad f^I(n) = n + 5 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}, \quad p^I = \{\, n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari} \,\};$$

$$D^J = \{A, B, C\}, \quad f^J(A) = C, \quad f^J(B) = C, \quad f^J(C) = B, \quad p^J = \{C\}.$$

Sul retro del foglio dimostrate che $I \equiv_{\mathcal{L}} J$.

12. Sia $\{b, c, d, p, a, i\}$ un linguaggio dove b, c e d sono simboli di costante, p un simbolo di funzione unario, a e i simboli di relazione binari. Interpretando b come "Barbara", c come "Carlo", d come "Davide", $p(x)$ come "il padre di x", $a(x, y)$ come "x è amico di y" e $i(x, y)$ come "x è insegnante di y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) il padre di Davide è insegnante di Carlo, ma non di Barbara; 3pt

(ii) Carlo e Davide hanno un insegnante in comune, che non è insegnante di nessun amico di Barbara. 3pt

13. Mostrate che 3pt

$$F \vee G, H \to \neg G, K \to H \rhd K \to F \wedge \neg G.$$

Usate solo le regole della deduzione naturale proposizionale, comprese le quattro regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux stabilite sul retro del foglio l'insoddisfacibilità dell'insieme di enunciati 5pt

$$\bigl\{\forall x(p(x) \to \exists y\, r(x, g(y)) \vee p(f(x))), \forall x\, \neg p(f(x)), p(a) \wedge \forall y\, \neg r(a, y)\bigr\}.$$

15. Utilizzando lo spazio qui sotto mettete in forma prenessa l'enunciato 2pt

$$\bigl(\neg \exists x\, \neg r(x, f(x)) \to \exists y\, p(y)\bigr) \vee \neg\bigl(\neg \forall z(\forall u\, r(u, z) \to q(z)) \wedge \forall w\, p(w)\bigr).$$

[Se si usa il minimo numero di quantificatori possibili, 1pt in più.]

Soluzioni

1. **V** se $v(F \wedge K) = \mathbf{V}$ allora $v(F) = \mathbf{V}$ e $v(K) = \mathbf{V}$; dal primo fatto e la prima ipotesi segue che $v(G) = \mathbf{V}$; se $v(H) = \mathbf{V}$ allora per la seconda ipotesi $v(\neg K) = \mathbf{V}$, che contraddice il secondo fatto: quindi $v(H) = \mathbf{F}$ e $v(\neg H) = \mathbf{V}$. In conclusione $v(\neg H \wedge G) = \mathbf{V}$.

2. **V** per il lemma di sostituzione dall'ipotesi segue $I, \sigma[x/a^I] \models p(x)$ e quindi $I \models \exists x\, p(x)$.

3. **V** come si verifica per esempio con le tavole di verità.

4. **V** il teorema 4.14 delle dispense non ha ipotesi sull'esecuzione dell'algoritmo 4.8.

5. **F** se Γ è un insieme di Hintikka e $\forall z\, p(z) \in \Gamma$ deve essere anche $p(a) \in \Gamma$. Se $\forall x(p(x) \to q(x)) \in \Gamma$ allora $p(a) \to q(a) \in \Gamma$ e, dato che non può essere $\neg p(a) \in \Gamma$ si ha $q(a) \in \Gamma$. Ma allora $\neg(\exists y\, r(y) \to q(a)) \notin \Gamma$ perché altrimenti $\neg q(a) \in \Gamma$.

6. **V** la seconda deduzione naturale si ottiene dalla prima con un'applicazione della regola $(\exists i)$ alla formula $r(z, x)\{z/g(x, x)\}$.

7. **F** dato che $3 \in p^I$ e $f^I(3) = 3$ si ha che $I, \sigma[x/3] \not\models \neg p(x) \vee x \neq f(x)$.

8. **F** la condizione nella definizione 9.20 delle dispense è l'implicazione inversa.

9. **1** la terza formula è l'unico enunciato.

10. Indichiamo con F, G e H gli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e con K quello a destra. Dobbiamo dimostrare che per qualunque interpretazione I tale che $I \models F, G, H$ si ha $I \models K$. Supponiamo per assurdo che $I \models F, G, H$ e $I \not\models K$.

Dato che $I \not\models K$ si ha $I \models \neg K$ e quindi $I \models \exists x \forall y \neg r(y, f(x))$. Sia $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d_0] \models \forall y \neg r(y, f(x))$. Quindi per ogni $d \in D^I$ si ha $(d, f^I(d_0)) \notin r^I$.

Dato che $I \models G$ si ha in particolare $I, \sigma[x/d_0] \models p(x) \vee r(a, f(x))$. Dato che per quanto dimostrato sopra si ha $(a^I, f^I(d_0)) \notin r^I$ deve essere $d_0 \in p^I$.

Dato che $I \models F$ si ha in particolare $I, \sigma[x/d_0] \models \neg p(x) \vee q(f(x))$ e da $d_0 \in p^I$ segue $f^I(d_0) \in q^I$.

Da $I \models H$ segue che $I, \sigma[z/f^I(d_0)] \models q(z) \to r(f(z), z)$. Dato che $f^I(d_0) \in q^I$ deve essere $(f^I(f^I(d_0)), f^I(d_0)) \in r^I$. Ma quanto ottenuto nel secondo paragrafo della dimostrazione implica che $(f^I(f^I(d_0)), f^I(d_0)) \notin r^I$, e abbiamo ottenuto la contraddizione cercata.

11. Per il corollario 9.14 delle dispense è sufficiente definire un omomorfismo forte suriettivo φ di I in J. Sia $\varphi(2n) = C$ per ogni n, $\varphi(1) = A$, $\varphi(2n+1) = B$ se $n > 0$. È facile verificare che φ ha le caratteristiche richieste.

12. (i) $i(p(d), c) \wedge \neg i(p(d), b)$;
(ii) $\exists x(i(x, c) \wedge i(x, d) \wedge \forall y(a(y, b) \to \neg i(x, y)))$.

13. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{F \lor G \qquad [F]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[G]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[K]^2 \quad K \to H}{H} \quad H \to \neg G}{\neg G}}{\bot}}{F}}{F}\,{}^{1} \qquad \dfrac{\dfrac{[K]^2 \quad K \to H}{H} \quad H \to \neg G}{\neg G}}{F \land \neg G}}{K \to F \land \neg G}\,{}^{2}
$$

14. Per stabilire l'insoddisfacibilità dell'insieme di enunciati utilizziamo l'algoritmo 10.47 delle dispense e costruiamo un tableau chiuso con la radice etichettata dalle formule dell'insieme. Indichiamo con F, G e H le γ-formule $\forall x(p(x) \to \exists y\, r(x, g(y)) \lor p(f(x)))$, $\forall x\, \neg p(f(x))$ e $\forall y\, \neg r(a, y)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$
\begin{array}{c}
F, G, \underline{p(a) \land H} \\
| \\
\underline{F}, G, p(a), H \\
| \\
F, \underline{p(a) \to \exists y\, r(a, g(y)) \lor p(f(a))}, G, p(a), H \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} F, \neg p(a), G, p(a), H \\ \otimes \end{array} &
\begin{array}{c}
F, \underline{\exists y\, r(a, g(y)) \lor p(f(a))}, G, p(a), H \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
F, \underline{\exists y\, r(a, g(y))}, G, p(a), H \\
| \\
F, r(a, g(b)), G, p(a), \underline{H} \\
| \\
F, r(a, g(b)), G, p(a), H, \neg r(a, g(b)) \\
\otimes
\end{array} &
\begin{array}{c}
F, p(f(a)), \underline{G}, p(a), H \\
| \\
F, p(f(a)), G, \neg p(f(a)), p(a), H \\
\otimes
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

15. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quanticatori è:

$$
\begin{gathered}
\big(\neg \exists x\, \neg r(x, f(x)) \to \exists y\, p(y)\big) \lor \neg\big(\neg \forall z(\forall u\, r(u, z) \to q(z)) \land \forall w\, p(w)\big) \\
\big(\forall x\, r(x, f(x)) \to \exists y\, p(y)\big) \lor \neg\big(\exists z\, \neg \exists u(r(u, z) \to q(z)) \land \forall w\, p(w)\big) \\
\big(\forall x\, r(x, f(x)) \to \exists x\, p(x)\big) \lor \neg \exists z\big(\forall u\, \neg(r(u, z) \to q(z)) \land \forall u\, p(u)\big) \\
\exists x(r(x, f(x)) \to p(x)) \lor \forall z\, \neg \forall u\big(\neg(r(u, z) \to q(z)) \land p(u)\big) \\
\forall z\big(\exists x(r(x, f(x)) \to p(x)) \lor \exists u\, \neg(\neg(r(u, z) \to q(z)) \land p(u))\big) \\
\forall z\big(\exists x(r(x, f(x)) \to p(x)) \lor \exists x\, \neg(\neg(r(x, z) \to q(z)) \land p(x))\big) \\
\forall z\, \exists x\big((r(x, f(x)) \to p(x)) \lor \neg(\neg(r(x, z) \to q(z)) \land p(x))\big).
\end{gathered}
$$