Prova scritta di Logica Matematica 1
2 settembre 2010

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $p \vee (\neg q \wedge r) \equiv (r \to q) \to p$. **V** **F** 1pt

2. Per essere sicuri della convergenza dell'algoritmo di Fitting per la fnc bisogna sempre agire sulle β-formule quando possibile. **V** **F** 1pt

3. In quante delle seguenti formule la sostituzione $\{x/f(y)\}$ è ammissibile?
$\forall y\, r(x,y)$, $\forall z\, r(x,z)$, $\exists w\, g(w,x) \wedge \forall y\, \neg r(x,y)$,
$\forall z(\exists y\, r(z,y) \to \neg r(x,z))$. **0** **1** **2** **3** **4** 1pt

4. $p(x) \to \forall x\, F \equiv \forall x(p(x) \to F)$, qualunque sia la formula F. **V** **F** 1pt

5. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, q(x,y,z,f(x,z,y)) \models \forall x\, \forall y\, \forall z\, \exists u\, q(x,y,z,u)$. **V** **F** 1pt

6. La formula $\forall x\, \exists y\, f(x) = y$ è valida nella logica con uguaglianza. **V** **F** 1pt

7. Siano I e J interpretazioni per un linguaggio $\mathcal{L}$.
Se esiste un omomorfismo forte suriettivo di J in I, allora $I \equiv_{\mathcal{L}} J$. **V** **F** 1pt

8. Se un tableau (non necessariamente sistematico) per l'enunciato predicativo F è aperto, allora F è soddisfacibile. **V** **F** 1pt

9. Se un insieme di Hintikka contiene sia $p \to (q \wedge \neg r)$ che r allora contiene necessariamente anche $\neg p$. **V** **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\exists x\, \exists y\, r(x,y), \forall x\, \forall y(r(x,y) \to \exists z(r(x,z) \wedge r(z,y))) \not\models \exists x\, r(x,x).$$

11. Sia $\mathcal{L} = \{f, r\}$ un linguaggio in cui f è un simbolo di funzione unario e r è un simbolo di relazione binario. Sia I l'interpretazione per $\mathcal{L}$ definita da 4pt

$$D^I = \{A, B, C, D, E\}; \qquad r^I = \{(B,A), (B,C), (B,D), (E,B), (E,E)\}$$

$$f^I(A) = C; \quad f^I(B) = D; \quad f^I(C) = f^I(D) = A; \quad f^I(E) = B.$$

Sul retro del foglio definite una relazione di congruenza $\sim$ su I che abbia tre classi d'equivalenza, giustificando la vostra risposta.

12. Sia $\mathcal{L} = \{d, m, c, u, a, =\}$ un linguaggio con uguaglianza dove d e m sono simboli di funzione unari, c e u sono simboli relazionali binari, e a è un simbolo di costante. Interpretando $d(x)$ come "il dentista di x", $m(x)$ come "il miglior amico di x", $c(x, y)$ come "x è cliente di y", $u(x, y)$ come "x cura y", e a come "Alex" traducete le seguenti frasi:

(i) il dentista di Alex non è suo cliente, ma Alex è il suo miglior amico; 3pt

(ii) i clienti di Alex non curati dal dentista di Alex sono curati dal dentista di qualche cliente del miglior amico di Alex. 3pt

13. Dimostrate che $H \to \neg F, F \vee G, \neg(G \wedge H) \rhd \neg H$. Usate solo le regole della deduzione naturale proposizionale, comprese le quattro regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio) 3pt

14. Usando il metodo dei tableaux stabilite che 5pt

$$\forall x\, p(x), \forall x(\forall z\, r(x, z) \to \neg p(x)) \models \forall y\, \exists x\, \neg r(y, x).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

15. Utilizzando lo spazio qui sotto mettete in forma prenessa la formula 2pt

$$\forall x(\exists y\, r(x, y) \vee \exists y\, q(y, x)) \to \exists u\, \forall v\, \neg(\forall w\, q(u, f(v, w)) \wedge \neg\exists w\, r(f(u, v), w)).$$

[Se si usa il minimo numero di quantificatori possibili, 1pt in più.]

Soluzioni

1. V come può essere verificato sia con le tavole di verità che scrivendo una catena di equivalenze logiche.

2. F l'algoritmo in questione gode della proprietà della terminazione forte (Lemma 3.25 delle dispense).

3. 2 la sostituzione è ammissibile nella seconda e nella quarta formula.

4. F se F è $p(x)$ stessa la formula a destra (che è un enunciato) è valida, mentre la formula a sinistra è falsa in alcune interpretazioni e stati.

5. V

6. V

7. V è il Corollario 9.13 delle dispense.

8. F si veda l'Esempio 10.14 delle dispense.

9. V se l'insieme di Hintikka è Γ, da $p \to (q \wedge \neg r) \in \Gamma$ segue che $\neg p \in \Gamma$ oppure $q \wedge \neg r \in \Gamma$. La seconda possibilità implicherebbe $\neg r \in \Gamma$, contraddicendo $r \in \Gamma$.

10. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfi i due enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica ma non quello a destra. L'interpretazione I definita da

$$D^I = \{0, 1, 2\}, \quad r^I = \{(0,1), (1,0), (0,2), (2,0), (1,2), (2,1)\}$$

ha queste caratteristiche. Anche l'interpretazione J definita da

$$D^J = \mathbb{Q}, \quad r^J = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \,:\, x < y \right\}$$

andrebbe bene.

11. Una classe d'equivalenza secondo $\sim$ contiene A, C e D, mentre sia B che E sono congruenti solo a loro stessi. Si tratta poi di verificare che tutte le proprietà della congruenza sono verificate.

12. (i) $\neg c(d(a), a) \wedge m(d(a)) = a$;
(ii) $\forall x(c(x, a) \wedge \neg u(d(a), x) \to \exists y(c(y, m(a)) \wedge u(d(y), x)))$.

13. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{F \vee G \qquad \dfrac{[F]^1 \qquad \dfrac{[H]^2 \qquad H \to \neg F}{\neg F}}{\bot} \qquad \dfrac{\dfrac{[G]^1 \qquad [H]^2}{G \wedge H} \qquad \neg(G \wedge H)}{\bot}}{\bot}\,{}_1}{\neg H}\,{}_2$$

14. Per stabilire la conseguenza logica costruiamo un tableau chiuso la cui radice è etichettata con i due enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e con la negazione di quello a destra (Algoritmo 10.47 delle dispense). Indichiamo con F, G e H le γ-formule $\forall x\, p(x)$, $\forall x(\forall z\, r(x,z) \to \neg p(x))$ e $\neg\exists x\, \neg r(a,x)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$F, G, \underline{\neg\forall y\, \exists x\, \neg r(y,x)}$$

$$F, \underline{G}, H$$

$$F, G, \underline{\forall z\, r(a,z) \to \neg p(a)}, H$$

$$F, G, \underline{\neg\forall z\, r(a,z)}, H \qquad\qquad \underline{F}, G, \neg p(a), H$$

$$F, G, \neg r(a,b), \underline{H} \qquad\qquad F, p(a), G, \neg p(a), H$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \otimes$$

$$F, G, \neg r(a,b), H, r(a,b)$$

$$\otimes$$

15.

$$\forall x(\exists y\, r(x,y) \lor \exists y\, q(y,x)) \to \exists u\, \forall v\, \neg(\forall w\, q(u, f(v,w)) \land \neg\exists w\, r(f(u,v),w))$$
$$\forall x\, \exists y(r(x,y) \lor q(y,x)) \to \exists u\, \forall v\, \neg(\forall w\, q(u, f(v,w)) \land \forall w\, \neg r(f(u,v),w))$$
$$\forall x\, \exists y(r(x,y) \lor q(y,x)) \to \exists u\, \forall v\, \neg\forall w(q(u, f(v,w)) \land \neg r(f(u,v),w))$$
$$\forall x\, \exists y(r(x,y) \lor q(y,x)) \to \exists u\, \forall v\, \exists w\, \neg(q(u, f(v,w)) \land \neg r(f(u,v),w))$$
$$\forall x\, \exists y(r(x,y) \lor q(y,x)) \to \exists x\, \forall v\, \exists w\, \neg(q(x, f(v,w)) \land \neg r(f(x,v),w))$$
$$\exists x\big(\exists y(r(x,y) \lor q(y,x)) \to \forall v\, \exists w\, \neg(q(x, f(v,w)) \land \neg r(f(x,v),w))\big)$$
$$\exists x\, \forall v\, \exists w\big(\exists y(r(x,y) \lor q(y,x)) \to \neg(q(x, f(v,w)) \land \neg r(f(x,v),w))\big)$$
$$\exists x\, \forall v\, \exists w\, \forall y\big((r(x,y) \lor q(y,x)) \to \neg(q(x, f(v,w)) \land \neg r(f(x,v),w))\big)$$