Prova scritta di Logica Matematica
9 febbraio 2015

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $(p \to \neg r) \to r \wedge q \equiv (\neg p \to q) \wedge r$. **V** **F** 1pt

2. Se $F \models G$ e G è insoddisfacibile allora F è insoddisfacibile. **V** **F** 1pt

3. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $p^I = \{0, 2, 3\}$, $q^I = \{0, 1\}$ e $r^I = \{(0, 0), (0, 2), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 0), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$. Allora $I \models \forall x \forall y (r(x, y) \to \neg q(x) \vee p(y))$. **V** **F** 1pt

4. Che tipo di formula è $\forall x(p(x) \wedge \neg q(x)) \to \neg \exists y(\neg p(y) \vee q(y))$? α β γ δ 1pt

5. $\neg \exists x\, p(x) \to q(a) \equiv \exists x(p(x) \vee q(a))$. **V** **F** 1pt

6. Se esiste un omomorfismo forte di I in J, F è una formula arbitraria e $J \models F$ allora $I \models F$. **V** **F** 1pt

7. Esiste un insieme di Hintikka che contiene le formule $\exists x(p(x) \wedge r(x, x))$ e $\forall x(p(x) \to \forall y\, \neg r(y, x))$. **V** **F** 1pt

8. Se esiste un tableau chiuso per la formula predicativa F allora F è insoddisfacibile. **V** **F** 1pt

9. Questo albero rappresenta una deduzione naturale corretta: **V** **F** 1pt

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\, p(x)}{p(x)} \qquad p(x) \to q(x)}{q(x)}}{\forall x\, q(x)}$$

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate la validità dell'enunciato 4pt

$$\forall x\, \exists y\, \neg r(x, g(y)) \wedge \forall x\, (p(x) \to \forall z\, r(x, z)) \to \neg \exists z\, p(g(z)).$$

11. Sul retro del foglio dimostrate la soddisfacibilità dell'insieme di enunciati 4pt

$$\{\forall x(p(x) \to \exists y(r(x, y) \wedge \neg p(y))), \forall x(\neg p(x) \to \exists y(r(x, y) \wedge p(y))), \forall x \forall y(r(x, y) \to \neg r(y, x))\}.$$

12. Sia $\{b, p, c, g, m, i\}$ un linguaggio dove b è un simbolo di costante, p è un simbolo di funzione unario, c e g sono simboli di relazione unari, e m e i sono simboli di relazione binari. Interpretando b come "Bobi", $p(x)$ come "il padrone di x", $c(x)$ come "x è un cane", $g(x)$ come "x è un gatto", $m(x, y)$ come "x morde y", $i(x, y)$ come "x insegue y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) Bobi è un cane che non morde il suo padrone; 3pt

(ii) qualche cane insegue tutti i gatti ma non ne morde nessuno. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$\neg\big(p \to \neg r \land \neg(s \land \neg q)\big) \land \neg\big((r \land (s \to q)) \lor \neg(p \to q)\big)$$

è soddisfacibile. Se la formula è soddisfacibile definite un'interpretazione che la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\forall x(p(x) \to \neg q(f(x)) \lor r(g(x))), \exists z(p(z) \land q(f(z))) \rhd \exists y\, r(y).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((t \to q \land \neg(p \land r)) \land \neg(v \lor \neg s)\big) \land u.$$

Soluzioni

1. **V** come si verifica per esempio con le tavole di verità.

2. **V** se F è soddisfatta dall'interpretazione v allora si ha anche $v(G) = \mathbf{V}$, contro l'insoddisfacibilità di G.

3. **F** $I, \sigma[x/1, y/4] \not\models r(x, y) \to \neg q(x) \vee p(y)$.

4. β si tratta di un'implicazione.

5. **V** $\neg\exists x\, p(x) \to q(a) \equiv \neg\neg\exists x\, p(x) \vee q(a) \equiv \exists x\, p(x) \vee q(a) \equiv \exists x(p(x) \vee q(a))$ per i Lemmi 2.23.3, 2.20.1 e 7.49 delle dispense.

6. **F** come mostrato nell'Esempio 9.9 delle dispense.

7. **F** se T è un insieme di Hintikka contenente la prima formula (che è δ) allora $p(a) \wedge r(a, a) \in T$ per qualche simbolo di costante a. Perciò $p(a) \in T$ e $r(a, a) \in T$. Se anche la seconda formula (che è γ) appartiene a T allora $p(a) \to \forall y\, \neg r(a, y) \in T$. Il primo ridotto di questa β-formula è $\neg p(a)$ e non può appartenere a T. Il secondo ridotto è $\forall y\, \neg r(a, y)$ e, se appartenesse a T, implicherebbe $\neg r(a, a) \in T$, che è impossibile.

8. **V** si tratta del teorema di correttezza per i tableau proposizionali (Teorema 10.28 delle dispense).

9. **F** la presunta deduzione naturale non è corretta perché la regola $(\forall i)$ viene applicata alla variabile x quando x è libera in una delle ipotesi.

10. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che I sia un'interpretazione che non soddisfi l'enunciato, con l'obiettivo di ottenere una contraddizione. Dato che l'enunciato ha la forma $F \wedge G \to H$ si ha $I \models F, G, \neg H$.

Dato che $I \models \neg H$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[z/d_0] \models p(g(z))$, cioè $g^I(d_0) \in p^I$. Dato che $I \models F$ si ha in particolare $I, \sigma[x/g^I(d_0)] \models \exists y\, \neg r(x, g(y))$, e quindi, esiste $d_1 \in D^I$ tale che $(g^I(d_0), g^I(d_1)) \notin r^I$.

Dato che $I \models G$ si ha in particolare $I, \sigma[x/g^I(d_0)] \models p(x) \to \forall z\, r(x, z)$, e quindi, per quanto ottenuto in precedenza $I, \sigma[x/g^I(d_0)] \models \forall z\, r(x, z)$. In particolare $I, \sigma[x/g^I(d_0), z/g^I(d_1)] \models r(x, z)$, cioé $(g^I(d_0), g^I(d_1)) \in r^I$, contraddicendo quanto ottenuto in precedenza.

11. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfi i tre enunciati. Forniamo due esempi di interpretazioni con queste caratteristiche:

$$D^I = \{0, 1, 2, 3\}, \quad p^I = \{0, 2\}, \quad r^I = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0)\};$$

$$D^J = \mathbb{N}, \quad p^J = \{\, n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari} \,\}, \quad r^J = \{\, (n, m) : n < m \,\}.$$

12. (i) $c(b) \wedge \neg m(b, p(b))$;

(ii) $\exists x\bigl(c(x) \wedge \forall y(g(y) \to i(x, y) \wedge \neg m(x, y))\bigr)$.

13. Per stabilire se la formula è soddisfacibile costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.30 e 4.31 delle dispense) un tableau con la radice etichettata dalla formula. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$\underline{\neg\big(p \to \neg r \wedge \neg(s \wedge \neg q)\big) \wedge \neg\big((r \wedge (s \to q)) \vee \neg(p \to q)\big)}$$

$$\underline{\neg\big(p \to \neg r \wedge \neg(s \wedge \neg q)\big)}, \neg\big((r \wedge (s \to q)) \vee \neg(p \to q)\big)$$

$$p, \neg(\neg r \wedge \neg(s \wedge \neg q)), \underline{\neg\big((r \wedge (s \to q)) \vee \neg(p \to q)\big)}$$

$$p, \neg(\neg r \wedge \neg(s \wedge \neg q)), \neg(r \wedge (s \to q)), \underline{p \to q}$$

$$p, \neg(\neg r \wedge \neg(s \wedge \neg q)), \neg(r \wedge (s \to q)), \neg p \qquad\qquad p, \underline{\neg(\neg r \wedge \neg(s \wedge \neg q))}, \neg(r \wedge (s \to q)), q$$

$$\otimes$$

$$p, r, \underline{\neg(r \wedge (s \to q))}, q \qquad\qquad p, \underline{s \wedge \neg q}, \neg(r \wedge (s \to q)), q$$

$$p, s, \neg q, \neg(r \wedge (s \to q)), q$$

$$\otimes$$

$$p, r, \neg r, q \qquad\qquad p, r, \underline{\neg(s \to q)}, q$$

$$\otimes$$

$$p, r, s, \neg q, q$$

$$\otimes$$

Il tableau è chiuso e quindi la formula è insoddisfacibile.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\exists z(p(z) \wedge q(f(z))) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[p(z) \wedge q(f(z))]^2}{p(z)} \quad \dfrac{\forall x(p(x) \to \neg q(f(x)) \vee r(g(x)))}{p(z) \to \neg q(f(z)) \vee r(g(z))}}{\neg q(f(z)) \vee r(g(z))} \quad \dfrac{\dfrac{[\neg q(f(z))]^1 \quad \dfrac{[p(z) \wedge q(f(z))]^2}{q(f(z))}}{\bot}}{\exists y\, r(y)} \quad \dfrac{[r(g(z))]^1}{\exists y\, r(y)}}{\exists y\, r(y)}\,{}_1}{\exists y\, r(y)}\,{}_2$$

Si noti l'uso di (*ex-falso*) nel passaggio in cui l'ipotesi è $\bot$.

15.

$$[\big\langle\neg\big((t\to q\wedge\neg(p\wedge r))\wedge\neg(v\vee\neg s)\big)\wedge u\big\rangle]$$
$$[\big\langle\neg\big((t\to q\wedge\neg(p\wedge r))\wedge\neg(v\vee\neg s)\big), u\big\rangle]$$
$$[\langle\neg(t\to q\wedge\neg(p\wedge r)), u\rangle\,,\langle v\vee\neg s, u\rangle]$$
$$[\langle t,\neg(q\wedge\neg(p\wedge r)), u\rangle\,,\langle v, u\rangle\,,\langle\neg s, u\rangle]$$
$$[\langle t,\neg q, u\rangle\,,\langle t, p\wedge r, u\rangle\,,\langle v, u\rangle\,,\langle\neg s, u\rangle]$$
$$[\langle t,\neg q, u\rangle\,,\langle t, p, r, u\rangle\,,\langle v, u\rangle\,,\langle\neg s, u\rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(t\wedge\neg q\wedge u)\vee(t\wedge p\wedge r\wedge u)\vee(v\wedge u)\vee(\neg s\wedge u).$$

Prova scritta di Logica Matematica
9 febbraio 2015

Cognome | Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $(q \to p) \wedge \neg r \equiv (\neg q \to r) \to \neg r \wedge p$. **V** | **F** 1pt

2. Se $F \models G$ e F è insoddisfacibile allora G è insoddisfacibile. **V** | **F** 1pt

3. Se esiste un tableau chiuso per la formula proposizionale F allora F è insoddisfacibile. **V** | **F** 1pt

4. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $p^I = \{1, 4\}$, $q^I = \{2, 3, 4\}$ e $r^I = \{(0, 0), (0, 2), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 0), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$. Allora $I \models \forall x \forall y (r(x, y) \to q(x) \vee \neg p(y))$. **V** | **F** 1pt

5. $\neg \forall x\, p(x) \to q(a) \equiv \forall x (p(x) \vee q(a))$. **V** | **F** 1pt

6. Che tipo di formula è $\forall x (p(x) \wedge \neg q(x)) \wedge \neg \exists y (\neg p(y) \vee q(y))$? α | β | γ | δ 1pt

7. Esiste un insieme di Hintikka che contiene le formule $\exists x (p(x) \wedge \neg r(x, x))$ e $\forall x (p(x) \to \forall y\, r(x, y))$. **V** | **F** 1pt

8. Questo albero rappresenta una deduzione naturale corretta: **V** | **F** 1pt

$$\dfrac{\dfrac{p(x) \qquad \dfrac{\forall x (p(x) \to q(x))}{p(x) \to q(x)}}{q(x)}}{\forall x\, q(x)}$$

9. Se esiste un omomorfismo forte di I in J, F è una formula arbitraria e $I \models F$ allora $J \models F$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate la validità dell'enunciato 4pt

$$\forall x\, \exists y\, r(f(y), x) \wedge \forall x (p(x) \to \forall z\, \neg r(z, x)) \to \neg \exists z\, p(f(z)).$$

11. Sul retro del foglio dimostrate la soddisfacibilità dell'insieme di enunciati 4pt

$$\{\forall x (p(x) \to \exists y (r(y, x) \wedge \neg p(y))), \forall x (\neg p(x) \to \exists y (r(y, x) \wedge p(y))),$$
$$\forall x \forall y (r(y, x) \to \neg r(x, y))\}.$$

12. Sia $\{a, p, c, g, m, i\}$ un linguaggio dove a è un simbolo di costante, p è un simbolo di funzione unario, c e g sono simboli di relazione unari, e m e i sono simboli di relazione binari. Interpretando a come "Alex", $p(x)$ come "il padrone di x", $c(x)$ come "x è un cane", $g(x)$ come "x è un gatto", $m(x, y)$ come "x morde y", $i(x, y)$ come "x insegue y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) Alex è un gatto che non morde il suo padrone; 3pt

(ii) qualche cane insegue tutti i gatti ma non ne morde nessuno. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$\neg\big(s \to p \wedge \neg(q \wedge \neg r)\big) \wedge \neg\big((\neg p \wedge (q \to r)) \vee \neg(s \to r)\big)$$

è soddisfacibile. Se la formula è soddisfacibile definite un'interpretazione che la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\forall x(q(x) \to p(f(x)) \vee r(g(x))), \exists z(q(z) \wedge \neg p(f(z))) \rhd \exists y\, r(y).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((p \to q \wedge \neg(r \wedge s)) \wedge \neg(t \vee \neg u)\big) \wedge w.$$

Soluzioni

1. V come si verifica per esempio con le tavole di verità.

2. F se F è insoddisfacibile allora $F \models G$ per qualsiasi formula G.

3. V si tratta del teorema di correttezza per i tableau proposizionali (Teorema 4.20 delle dispense).

4. F $I, \sigma[x/1, y/4] \not\models r(x, y) \to q(x) \lor \neg p(y)$.

5. V $\neg \forall x\, p(x) \to q(a) \equiv \neg\neg \forall x\, p(x) \lor q(a) \equiv \forall x\, p(x) \lor q(a) \equiv \forall x(p(x) \lor q(a))$ per i Lemmi 2.23.3, 2.20.1 e 7.49 delle dispense.

6. α si tratta di una congiunzione.

7. F se T è un insieme di Hintikka contenente la prima formula (che è δ) allora $p(a) \land \neg r(a, a) \in T$ per qualche simbolo di costante a. Perciò $p(a) \in T$ e $\neg r(a, a) \in T$. Se anche la seconda formula (che è γ) appartiene a T allora $p(a) \to \forall y\, r(a, y) \in T$. Il primo ridotto di questa β-formula è $\neg p(a)$ e non può appartenere a T. Il secondo ridotto è $\forall y\, r(a, y)$ e, se appartenesse a T, implicherebbe $r(a, a) \in T$, che è impossibile.

8. F la presunta deduzione naturale non è corretta perché la regola $(\forall i)$ viene applicata alla variabile x quando x è libera in una delle ipotesi.

9. F come mostrato nell'Esempio 9.9 delle dispense.

10. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che I sia un'interpretazione che non soddisfi l'enunciato, con l'obiettivo di ottenere una contraddizione. Dato che l'enunciato ha la forma $F \land G \to H$ si ha $I \models F, G, \neg H$.

Dato che $I \models \neg H$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[z/d_0] \models p(f(z))$, cioè $f^I(d_0) \in p^I$. Dato che $I \models F$ si ha in particolare $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \models \exists y\, r(f(y), x)$, e quindi, esiste $d_1 \in D^I$ tale che $(f^I(d_1), f^I(d_0)) \in r^I$.

Dato che $I \models G$ si ha in particolare $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \models p(x) \to \forall z\, \neg r(z, x)$, e quindi, per quanto ottenuto in precedenza $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \models \forall z\, \neg r(z, x)$. In particolare $I, \sigma[x/f^I(d_0), z/f^I(d_1)] \models \neg r(z, x)$, cioé $(f^I(d_1), f^I(d_0)) \notin r^I$, contraddicendo quanto ottenuto in precedenza.

11. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfi i tre enunciati. Forniamo due esempi di interpretazioni con queste caratteristiche:

$$D^I = \{0, 1, 2, 3\}, \quad p^I = \{0, 2\}, \quad r^I = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2), (0, 3)\};$$

$$D^J = \mathbb{N}, \quad p^J = \{\, n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari} \,\}, \quad r^J = \{\, (n, m) : n > m \,\}.$$

12. (i) $g(a) \land \neg m(a, p(a))$;

(ii) $\exists x\big(c(x) \land \forall y(g(y) \to i(x, y) \land \neg m(x, y))\big)$.

13. Per stabilire se la formula è soddisfacibile costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.30 e 4.31 delle dispense) un tableau con la radice etichettata dalla formula. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$\underline{\neg\big(s \to p \wedge \neg(q \wedge \neg r)\big) \wedge \neg\big((\neg p \wedge (q \to r)) \vee \neg(s \to r)\big)}$$

$$\underline{\neg\big(s \to p \wedge \neg(q \wedge \neg r)\big)}, \neg\big((\neg p \wedge (q \to r)) \vee \neg(s \to r)\big)$$

$$s, \neg(p \wedge \neg(q \wedge \neg r)), \underline{\neg\big((\neg p \wedge (q \to r)) \vee \neg(s \to r)\big)}$$

$$s, \neg(p \wedge \neg(q \wedge \neg r)), \neg(\neg p \wedge (q \to r)), \underline{s \to r}$$

- $s, \neg(p \wedge \neg(q \wedge \neg r)), \neg(\neg p \wedge (q \to r)), \neg s$
  $\otimes$
- $s, \underline{\neg(p \wedge \neg(q \wedge \neg r))}, \neg(\neg p \wedge (q \to r)), r$
  - $s, \neg p, \underline{\neg(\neg p \wedge (q \to r))}, r$
    - $s, \neg p, p, r$
      $\otimes$
    - $s, \neg p, \underline{\neg(q \to r)}, r$
      $s, \neg p, q, \neg r, r$
      $\otimes$
  - $s, \underline{q \wedge \neg r}, \neg(\neg p \wedge (q \to r)), r$
    $s, q, \neg r, \neg(\neg p \wedge (q \to r)), r$
    $\otimes$

Il tableau è chiuso e quindi la formula è insoddisfacibile.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\exists z(q(z) \wedge \neg p(f(z))) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[q(z) \wedge \neg p(f(z))]^2}{q(z)} \quad \dfrac{\forall x(q(x) \to p(f(x)) \vee r(g(x)))}{q(z) \to p(f(z)) \vee r(g(z))}}{p(f(z)) \vee r(g(z))} \quad \dfrac{\dfrac{[p(f(z))]^1 \quad \dfrac{[q(z) \wedge \neg p(f(z))]^2}{\neg p(f(z))}}{\bot}}{\exists y\, r(y)} \quad \dfrac{[r(g(z))]^1}{\exists y\, r(y)}}{\exists y\, r(y)}\,{}_1}{\exists y\, r(y)}\,{}_2$$

Si noti l'uso di (*ex-falso*) nel passaggio in cui l'ipotesi è $\bot$.

15.

$$[\big\langle \neg\big((p \to q \land \neg(r \land s)) \land \neg(t \lor \neg u)\big) \land w\big\rangle]$$
$$[\big\langle \neg\big((p \to q \land \neg(r \land s)) \land \neg(t \lor \neg u)\big), w\big\rangle]$$
$$[\langle \neg(p \to q \land \neg(r \land s)), w\rangle \,, \langle t \lor \neg u, w\rangle]$$
$$[\langle p, \neg(q \land \neg(r \land s)), w\rangle \,, \langle t, w\rangle \,, \langle \neg u, w\rangle]$$
$$[\langle p, \neg q, w\rangle \,, \langle p, r \land s, w\rangle \,, \langle t, w\rangle \,, \langle \neg u, w\rangle]$$
$$[\langle p, \neg q, w\rangle \,, \langle p, r, s, w\rangle \,, \langle t, w\rangle \,, \langle \neg u, w\rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(p \land \neg q \land w) \lor (p \land r \land s \land w) \lor (t \land w) \lor (\neg u \land w).$$