Prova scritta di Logica Matematica
27 giugno 2016

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $\neg(p \vee (q \to p) \vee \neg r) \equiv \neg p \wedge (p \wedge \neg q \to r) \wedge q$. **V** | **F** 1pt

2. Se F è soddisfacibile, G è insoddisfacibile e $F \vee G \models H$ allora H è soddisfacibile. **V** | **F** 1pt

3. L'algoritmo di costruzione dei tableaux proposizionali non gode della proprietà della terminazione forte. **V** | **F** 1pt

4. Esiste un insieme di Hintikka che contiene le formule $\neg(q \to r)$, $q \to s$ e $s \to r$. **V** | **F** 1pt

5. Quante sono le variabili libere nella formula $\forall y(\forall x\, r(x, f(y, x)) \to \exists z\, p(z) \vee r(f(z, z), y))$? **0** | **1** | **2** | **3** 1pt

6. Sia I un'interpretazione con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $f^I(0) = f^I(2) = 2$, $f^I(1) = 0$, $f^I(3) = 1$, $p^I = \{0, 2\}$ e $r^I = \{(1, 0), (1, 2), (3, 2), (3, 3)\}$. Allora $I \models \forall x(p(x) \to \exists y(\neg p(f(y)) \wedge r(y, f(x))))$. **V** | **F** 1pt

7. $\forall x(p(x) \wedge \neg q(x)) \equiv \forall x\, p(x) \wedge \neg\exists x\, q(x)$. **V** | **F** 1pt

8. Se $\sim$ è una relazione di congruenza su I allora $I \equiv_{\mathcal{L}} I/{\sim}$. **V** | **F** 1pt

9. Se $T \models_= F$ allora $T \rhd_= F$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sia $\mathcal{L} = \{f, r\}$ un linguaggio in cui f è un simbolo di funzione unario e r è un simbolo di relazione binario. Sia I l'interpretazione per $\mathcal{L}$ definita da 4pt

$$D^I = \{A, B, C, D, E, F\}; \qquad r^I = \{(A, E), (E, E), (F, E)\}$$

$$f^I(A) = E; \quad f^I(B) = C; \quad f^I(C) = C; \quad f^I(D) = B; \quad f^I(E) = D; \quad f^I(F) = E.$$

Sul retro del foglio definite una relazione di congruenza $\sim$ su I che abbia tre classi d'equivalenza, giustificando la vostra risposta.
(Se si descrive l'interpretazione quoziente $I/{\sim}$, 1pt in più.)

11. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x(p(f(x)) \vee q(x) \to q(h(x))), p(f(a)) \vee q(b) \models \exists z\, q(h(h(z))).$$

12. Sia $\mathcal{L} = \{b, m, p, c, g, a\}$ un linguaggio dove b e m sono simboli di costante, p è un simbolo di funzione unario, c e g sono simboli di relazione unari e a è un simbolo di relazione binario. Interpretando b come "Bobi", m come "Micio", $p(x)$ come "il padrone di x", $c(x)$ come "x è un cane", $g(x)$ come "x è un gatto", $a(x, y)$ come "x ama y", traducete le seguenti frasi:

(i) Bobi è un cane, Micio un gatto, e i loro padroni si amano l'un l'altra; 3pt

(ii) c'è un cane che non ama nessun gatto, ma il cui padrone ama qualche gatto. 3pt

13. Mostrate che 3pt

$$F \vee \neg G, H \to \neg F, K \to G \wedge F \rhd K \to \neg H.$$

Usate solo le regole della deduzione naturale proposizionale, comprese le quattro regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux stabilite sul retro del foglio che 5pt

$$\{\exists x\, p(x), \neg\forall x\, p(x), \forall x(\exists y\, r(x, y) \to \neg p(x)), \forall x(\neg p(x) \to \forall z\, r(z, x))\}$$

è insoddisfacibile.

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((\neg p \wedge \neg(q \vee \neg r)) \vee (\neg(s \to t) \to u)\big).$$

Soluzioni

1. **F** un'interpretazione che soddisfa la seconda formula ma non la prima è data da $v(p) = \mathbf{F}$, $v(q) = \mathbf{V}$ e $v(r) = \mathbf{F}$, come si verifica per esempio con le tavole di verità.
2. **V** se v è un 'interpretazione che soddisfa F (esiste perché F è soddisfacibile) allora $v(F \vee G) = \mathbf{V}$ e quindi $v(H) = \mathbf{V}$ (perché $F \vee G \models H$). Abbiamo dunque un'interpretazione che soddisfa H.
3. **F** l'affermazione contraddice il Teorema 4.11 delle dispense.
4. **F** se un insieme di Hintikka contiene $\neg(q \to r)$ deve contenere sia q che $\neg r$. Allora, se contiene $q \to s$ deve contenere s, mentre se contiene $s \to r$ deve contenere $\neg s$. Questo è impossibile perché un insieme di Hintikka non contiene coppie complementari di letterali.
5. **1** le ultime due occorrenze di z sono libere.
6. **V** come si verifica considerando stati che assegnino ad x ognuno degli elementi di D^I.
7. **V** come segue dai lemmi 7.47 e 7.56 delle dispense.
8. **V** per il Corollario 9.29 delle dispense.
9. **V** è il teorema di completezza per la deduzione naturale con uguaglianza: Teorema 11.52 delle dispense.
10. Definiamo $\sim$ in modo che le sue classi d'equivalenza siano $\{A, F\}$, $\{B, C, D\}$ e $\{E\}$. Bisogna verificare le condizioni della definizione di relazione di congruenza.

    Inoltre $D^{I/\sim} = \{[A], [B], [E]\}$, $r^{I/\sim} = \{([A], [E]), ([E], [E])\}$, $f^{I/\sim}([A]) = [E]$, $f^{I/\sim}([B]) = [B]$, $f^{I/\sim}([E]) = [B]$.
11. Supponiamo che un'interpretazione I soddisfi i due enunciati (che indichiamo con F e G) a sinistra del simbolo di conseguenza logica. L'obiettivo è mostrare che I soddisfa anche l'enunciato sulla destra. Per comodità indichaimo con H la formula $p(f(x)) \vee q(x) \to q(h(x))$, in modo che F sia $\forall x\, H$ e $I, \sigma[x/d] \models H$ per ogni $d \in D^I$.

    Dato che $I \models G$ si ha $f^I(a^I) \in p^I$ oppure $b^I \in q^I$.

    Nel primo caso utilizziamo $I, \sigma[x/a^I] \models H$ per ottenere $h^I(a^I) \in q^I$. Abbiamo anche $I, \sigma[x/h^I(a^I)] \models H$ che ci conduce a $h^I(h^I(a^I)) \in q^I$. Abbiamo dunque $I \models \exists z\, q(h(h(z)))$.

    Nel secondo caso si parte da $I, \sigma[x/b^I] \models H$ ottenendo $h^I(b^I) \in q^I$ e quindi, utilizzando $I, \sigma[x/h^I(b^I)] \models H$, si arriva a $h^I(h^I(b^I)) \in q^I$. Anche in questo caso $I \models \exists z\, q(h(h(z)))$.

    Abbiamo ottenuto $I \models \exists z\, q(h(h(z)))$ in ogni caso, come volevamo.
12. (i) $c(b) \wedge g(m) \wedge a(p(b), p(m)) \wedge a(p(m), p(b))$;

    (ii) $\exists x\big(c(x) \wedge \forall y(g(y) \to \neg a(x, y)) \wedge \exists z(g(z) \wedge a(p(x), z))\big)$.
13. Ecco la deduzione naturale che avevo in mente quando ho preparato il problema:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$F \lor \neg G$}
\AxiomC{$[F]^1$}
\AxiomC{$[H]^2$}
\AxiomC{$H \to \neg F$}
\BinaryInfC{$\neg F$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\AxiomC{$[K]^3$}
\AxiomC{$K \to G \land F$}
\BinaryInfC{$G \land F$}
\UnaryInfC{G}
\AxiomC{$[\neg G]^1$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{1}
\TrinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{2}
\UnaryInfC{$\neg H$}
\RightLabel{3}
\UnaryInfC{$K \to \neg H$}
\end{prooftree}
$$

Alcuni studenti hanno trovato questa deduzione naturale che non usa l'ipotesi $F \lor \neg G$ e quindi mostra che $H \to \neg F, K \to G \land F \rhd K \to \neg H$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[K]^3$}
\AxiomC{$K \to G \land F$}
\BinaryInfC{$G \land F$}
\UnaryInfC{F}
\AxiomC{$[H]^1$}
\AxiomC{$H \to \neg F$}
\BinaryInfC{$\neg F$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$\neg H$}
\RightLabel{2}
\UnaryInfC{$K \to \neg H$}
\end{prooftree}
$$

14. Per stabilire la conseguenza logica utilizziamo l'algoritmo 10.47 delle dispense e costruiamo un tableau chiuso con la radice etichettata dall'insieme di enunciati di cui dobbiamo dimostrare l'insoddisfacibilità. Indichiamo con F, G, H e K le γ-formule $\forall x(\exists y\, r(x,y) \to \neg p(x))$, $\forall x(\neg p(x) \to \forall z\, r(z,x))$, $\neg\exists y\, r(a,y)$ e $\forall z\, r(z,b)$. Utilizziamo la convenzione 10.22 delle dispense e in ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

- $\underline{\exists x\, p(x)}, \neg\forall x\, p(x), F, G$
  - $p(a), \underline{\neg\forall x\, p(x)}, F, G$
    - $p(a), \neg p(b), \underline{F}, G$
      - $p(a), \neg p(b), F, \underline{\exists y\, r(a,y) \to \neg p(a)}, G$
        - $p(a), \neg p(b), F, H, \underline{G}$
          - $p(a), \neg p(b), F, H, G, \underline{\neg p(b) \to \forall z\, r(z,b)}$
            - $p(a), \neg p(b), F, H, G, p(b)$ $\otimes$
            - $p(a), \neg p(b), F, \underline{H}, G, K$
              - $p(a), \neg p(b), F, H, \neg r(a,b), G, \underline{K}$
                - $p(a), \neg p(b), F, H, \neg r(a,b), G, K, r(a,b)$ $\otimes$
        - $p(a), \neg p(b), F, \neg p(a), G$ $\otimes$

15. Utilizziamo l'Algoritmo 3.20 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.28:

$$\begin{gathered}
[\bigl\langle \neg\bigl((\neg p \wedge \neg(q \vee \neg r)) \vee (\neg(s \to t) \to u)\bigr)\bigr\rangle] \\
[\langle \neg(\neg p \wedge \neg(q \vee \neg r)), \neg(\neg(s \to t) \to u)\rangle] \\
[\langle \neg(\neg p \wedge \neg(q \vee \neg r)), \neg(s \to t), \neg u\rangle] \\
[\langle \neg(\neg p \wedge \neg(q \vee \neg r)), s, \neg t, \neg u\rangle] \\
[\langle p, s, \neg t, \neg u\rangle, \langle q \vee \neg r, s, \neg t, \neg u\rangle] \\
[\langle p, s, \neg t, \neg u\rangle, \langle q, s, \neg t, \neg u\rangle, \langle \neg r, s, \neg t, \neg u\rangle]
\end{gathered}$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(p \wedge s \wedge \neg t \wedge \neg u) \vee (q \wedge s \wedge \neg t \wedge \neg u) \vee (\neg r \wedge s \wedge \neg t \wedge \neg u).$$