# Prova scritta di Logica Matematica
## 19 settembre 2017

Cognome Nome

Matricola

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

### PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

**1.** $(\neg p \vee q \to q \wedge \neg p) \wedge r \equiv (p \to q) \to \neg(q \to p) \wedge r$. **V** **F** 1pt

**2.** Se $F \vee G \vDash H$ allora $G \vDash H$. **V** **F** 1pt

**3.** L'algoritmo di Fitting per la forma normale disgiuntiva gode della proprietà dell terminazione forte. **V** **F** 1pt

**4.** Sia $I$ l'interpretazione con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $f^I(0) = 3$, $f^I(1) = 3$, $f^I(2) = 1$, $f^I(3) = 2$, $p^I = \{0, 1\}$, $r^I = \{(0, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 3)\}$. Allora $I \vDash \forall x(\neg r(x, x) \to p(f(x)) \vee r(f(x), x))$. **V** **F** 1pt

**5.** $\forall x\, p(x) \wedge \neg\exists y\, q(y) \equiv \forall x(p(x) \wedge \neg q(x))$. **V** **F** 1pt

**6.** Quante delle seguenti formule sono enunciati? $\neg\forall x\, \neg r(x, f(x)) \to p(x)$, $\neg(\forall x\, \neg r(x, f(x)) \to p(x))$, $\exists x\, \neg r(x, f(x)) \to p(a)$, $\forall x(\neg r(x, f(y)) \to p(x))$. **0** **1** **2** **3** **4** 1pt

**7.** Se $F$ è un enunciato e un tableau per $F$ è chiuso allora $F$ è valido. **V** **F** 1pt

**8.** Esiste un insieme di Hintikka che contiene i tre enunciati $\forall x \neg(p(x) \wedge r(b, x))$, $p(a)$ e $\exists y\, \neg r(b, y) \to \forall x\, \neg p(x)$. **V** **F** 1pt

**9.** Questo albero rappresenta una deduzione naturale corretta: **V** **F** 1pt

$$\dfrac{\exists x\, p(x) \qquad \dfrac{\dfrac{[p(x)]^1 \qquad \dfrac{\forall x(p(x) \to q(f(x)))}{p(x) \to q(f(x))}}{q(f(x))}}{\exists y\, q(f(y))}}{\exists y\, q(f(y))}\,{\scriptstyle 1}$$

### SECONDA PARTE

**10.** Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x\, r(f(x), x), \forall y\, \forall z(\neg r(y, z) \vee f(y) \neq z) \vDash_{=} \forall x\, f(x) \neq x.$$

**11.** Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$p(a), \forall x(p(x) \to r(f(x), x) \wedge p(f(x))), \forall y\, \forall z(\neg r(y, z) \vee f(y) \neq z) \nvDash_{=} \exists x\, r(x, x) \vee \forall x\, p(x).$$

**12.** Sia $\{c, p, a, f, \ell, r\}$ un linguaggio dove $c$ e $p$ sono simboli di costante, $a$, $f$ e $\ell$ sono simboli di relazione unari e $r$ è un simbolo di relazione binario. Interpretando $c$ come "Tom Cruise", $p$ come "Brad Pitt", $a(x)$ come "$x$ è un attore", $f(x)$ come "$x$ è famoso", $\ell(x)$ come "$x$ è un film", $r(x, y)$ come "$x$ ha recitato in $y$", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto di esse:

(i) Tom Cruise e Brad Pitt sono attori famosi; 3pt

(ii) ci sono film famosi in cui non ha recitato nessun attore famoso. 3pt

**13.** Mostrate che 3pt

$$F \to (K \to G) \rhd K \wedge (F \vee \neg K) \to G.$$

Usate solo le regole della deduzione naturale proposizionale, comprese le quattro regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

**14.** Usando il metodo dei tableaux stabilite sul retro del foglio la validità dell'enunciato 5pt

$$\forall x\, \forall y (r(x, y) \to r(y, x)) \wedge \exists x\, \forall y\, r(x, y) \to \exists x\, r(c, x).$$

**15.** Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$(\neg p \vee q \to r \vee \neg s) \to \neg(\neg t \wedge u).$$

## Soluzioni

**1. F** come si verifica per esempio con le tavole di verità.

**2. V** se $v$ è un'interpretazione tale che $v(G) = \mathbf{V}$, allora si ha anche $v(F \vee G) = \mathbf{V}$ e quindi, per l'ipotesi, $v(H) = \mathbf{V}$.

**3. V** è il Lemma 3.30 delle dispense.

**4. V** perché si verifica che se $d \in D^I$ è tale che $(d, d) \notin r^I$ allora $I, \sigma[x/d] \models p(f(x)) \vee r(f(x), x)$: il primo disgiunto risulta vero quando $d$ è 2, il secondo disgiunto quando $d$ è 0 oppure 1.

**5. V** per i lemmi 7.47 e 7.80 delle dispense.

**6. 1** nella prima e nella seconda formula $x$ è libera, nella quarta formula è libera $y$, mentre la terza formula non ha variabili libere ed è un enunciato.

**7. F** sotto le ipotesi enunciate il teorema di correttezza 10.28 conclude che $F$ è insoddisfacibile. Se il tableaux fosse per $\neg F$ potremmo concludere la validità di $F$.

**8. F** se $T$ è un insieme di Hintikka con $\exists y \neg r(b, y) \to \forall x \neg p(x) \in T$ deve essere $\neg\exists y \neg r(b, y) \in T$ oppure $\forall x \neg p(x) \in T$. Se si ha anche $p(a) \in T$ la seconda possibilità, che richiederebbe $\neg p(a) \in T$, è impossibile. Quindi $\neg\exists y \neg r(b, y) \in T$ e perciò $\neg\neg r(b, a) \in T$ che implica $r(b, a) \in T$. Ma allora $\forall x \neg(p(x) \wedge r(b, x)) \in T$, che implica $\neg(p(a) \wedge r(b, a)) \in T$ e quindi $\neg p(a) \in T$ oppure $\neg r(b, a) \in T$, è impossibile.

**9. V** l'applicazione di tutte le regole, come riportate nella sezione 11.2 delle dispense, è corretta.

**10.** Supponiamo che $I$ sia un'interpretazione normale che soddisfa i due enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, che chiamiamo $F$ e $G$, ma non quello a destra, che indichiamo con $H$.

Dato che $I \not\models H$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $f^I(d_0) = d_0$ (stiamo usando la normalità di $I$). Da $I \models F$ segue in particolare $I, \sigma[x/d_0] \models r(f(x), x)$ e quindi $(f^I(d_0), d_0) \in r^I$ che, per quanto ottenuto in precedenza, significa $(d_0, d_0) \in r^I$.

Ma allora $I, \sigma[y/d_0, z/d_0] \models r(y, z) \wedge f(y) = z$, che contraddice $I, \sigma[y/d_0, z/d_0] \models \neg r(y, z) \vee f(y) \neq z$, che è conseguenza di $I \models G$. Abbiamo quindi raggiunto la contraddizione che cercavamo.

**11.** Dobbiamo definire un'interpretazione normale che soddisfa i due enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, ma non quello a destra. Un'interpretazione normale con queste caratteristiche è definita da

$$D^I = \{0, 1, 2, 3\}, \quad a^I = 1, \quad f^I(0) = 0, f^I(1) = 2, f^I(2) = 3, f^I(3) = 1,$$
$$p^I = \{1, 2, 3\}, \quad r^I = \{(2, 1), (3, 2), (1, 3)\}.$$

Dato che $I$ è normale non abbiamo bisogno di specificare $=^I$.

**12.** (i) $a(c) \wedge f(c) \wedge a(p) \wedge f(p)$;
(ii) $\exists x(\ell(x) \wedge f(x) \wedge \neg\exists y(a(y) \wedge f(y) \wedge r(y, x)))$.

**13.** Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$
\dfrac{
\dfrac{[K \wedge (F \vee \neg K)]^2}{F \vee \neg K}
\qquad
\dfrac{\dfrac{[K \wedge (F \vee \neg K)]^2}{K} \qquad \dfrac{[F]^1 \qquad F \to (K \to G)}{K \to G}}{G}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[K \wedge (F \vee \neg K)]^2}{K} \qquad [\neg K]^1}{\bot}}{G}
}{
\dfrac{G}{K \wedge (F \vee \neg K) \to G}\, {}^{2}
}\, {}^{1}
$$

Si noti l'uso di (*ex-falso*).

**14.** Per mostrare che l'enunciato è valido utilizziamo l'Algoritmo 10.17 delle dispense per stabilire che la sua negazione è insoddisfacibile e costruiamo (utilizzando le convenzioni 10.20 e 10.22) un tableau chiuso con la radice etichettata dalla negazione dell'enunciato. Indichiamo con $F$, $F'$, $G$ e $H$ le $\gamma$-formule $\forall x\, \forall y (r(x,y) \to r(y,x))$, $\forall y (r(a,y) \to r(y,a))$, $\neg \exists x\, r(c,x)$ e $\forall y\, r(a,y)$. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$
\begin{array}{c}
\underline{\neg\big(F \wedge \exists x\, \forall y\, r(x,y) \to \exists x\, r(c,x)\big)} \\
| \\
\underline{F \wedge \exists x\, \forall y\, r(x,y)}, G \\
| \\
F, \underline{\exists x\, \forall y\, r(x,y)}, G \\
| \\
\underline{F}, H, G \\
| \\
F, \underline{F'}, H, G \\
| \\
F, F', \underline{r(a,c) \to r(c,a)}, H, G \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
F, F', \neg r(a,c), \underline{H}, G & F, F', r(c,a), H, \underline{G} \\
| & | \\
F, F', \neg r(a,c), H, r(a,c), G & F, F', r(c,a), H, G, \neg r(c,a) \\
\otimes & \otimes
\end{array}
\end{array}
$$

Si noti l'importanza di scegliere in modo opportuno le istanze delle $\gamma$-formule (se le scelte non sono appropriate il tableaux cresce rapidamente di dimensione).

**15.** Utilizziamo l'Algoritmo 3.16 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.28:

$$[\langle(\neg p \vee q \to r \vee \neg s) \to \neg(\neg t \wedge u)\rangle]$$
$$[\langle\neg(\neg p \vee q \to r \vee \neg s), \neg(\neg t \wedge u)\rangle]$$
$$[\langle\neg(\neg p \vee q \to r \vee \neg s), t, \neg u\rangle]$$
$$[\langle\neg p \vee q, t, \neg u\rangle\,, \langle\neg(r \vee \neg s), t, \neg u\rangle]$$
$$[\langle\neg p, q, t, \neg u\rangle\,, \langle\neg r, t, \neg u\rangle\,, \langle s, t, \neg u\rangle]$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \vee q \vee t \vee \neg u) \wedge (\neg r \vee t \vee \neg u) \wedge (s \vee t \vee \neg u).$$