## Prova scritta di Logica Matematica
## 10 settembre 2013

Cognome                Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

### PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

**1.** Se $v(p) = \mathbf{V}$ e $v(q) = \mathbf{F}$ allora $v(p \to q) = \mathbf{V}$. **V** **F** 1pt

**2.** $\forall x\, p(x) \land q(x) \models \forall x (p(x) \land q(x))$. **V** **F** 1pt

**3.** Se $F \models G$ allora qualunque tableau per $F, \neg G$ è chiuso. **V** **F** 1pt

**4.** Se $\Gamma \rhd F \land G$ e $\Gamma, F \rhd H$ allora $\Gamma \rhd H$. **V** **F** 1pt

**5.** Se $I$ è un'interpretazione tale che per ogni simbolo di costante $a$ si ha $I \models p(a)$ allora $I \models \forall x\, p(x)$. **V** **F** 1pt

**6.** Sia $I$ l'interpretazione con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $f^I(0) = 1$, $f^I(1) = 2$, $f^I(2) = 3$, $f^I(3) = 2$ e $p^I = \{1, 3\}$. Allora $I \models \forall x (p(x) \lor p(f(x)))$. **V** **F** 1pt

**7.** $\forall x\, p(x) \to \exists x\, q(x)$ è una $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ o $\delta$-formula? $\alpha$ $\beta$ $\gamma$ $\delta$ 1pt

**8.** Se $\Gamma$ è un insieme di Hintikka di enunciati tale che $\exists x\, (p(x) \land r(c, f(x))) \in \Gamma$ allora $\neg p(c) \notin \Gamma$. **V** **F** 1pt

**9.** Una relazione di congruenza su un'interpretazione $I$ è una relazione d'equivalenza sull'insieme $D^I$. **V** **F** 1pt

### SECONDA PARTE

**10.** Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x\, \forall y (p(x) \land p(y) \to r(x, y)), \forall x\, x \neq f(x), \forall x (\neg p(x) \to p(f(x))) \not\models_{=} \exists z\, \exists w (r(z, w) \land z \neq w).$$

**11.** Sia $\mathcal{L} = \{p, r\}$ il linguaggio con $p$ simbolo di relazione unario e $r$ simbolo di relazione binario. Sia $I$ la seguente interpretazione per $\mathcal{L}$:

$$D^I = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad p^I = \{0, 2, 3\}, \quad r^I = \{(0, 1), (0, 4), (1, 2), (3, 1), (3, 4), (4, 2)\}.$$

Sul retro del foglio definite una relazione di congruenza $\sim$ su $I$ che abbia tre classi d'equivalenza. Descrivete l'interpretazione quoziente $I/\!\sim$. 4pt

**12.** Sia $\{a, b, m, c, n, i\}$ un linguaggio dove $a$ e $b$ sono simboli di costante, $m$ un simbolo di funzione unario, $c$ e $n$ simboli di relazione unari, e $i$ un simbolo di relazione binario. Interpretando $a$ come "Alfa", $b$ come "Bobi", $m(x)$ come "la madre di $x$", $c(x)$ come "$x$ è un cane", $n(x)$ come "$x$ è nero" e $i(x, y)$ come "$x$ insegue $y$", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) La madre di Bobi insegue un cane nero; 3pt

(ii) ogni cane nero insegue qualche cane che insegue Alfa o Bobi. 3pt

**13.** Mostrate che 3pt

$$\neg F \vee (G \to \neg H), H \to F, G \vee \neg H \rhd \neg H.$$

Usate solo le regole della deduzione naturale proposizionale, comprese le quattro regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

**14.** Usando il metodo dei tableaux stabilite che 5pt

$$\forall x(\neg p(x) \vee q(x)), \forall x(\neg r(x, x) \to p(x)), \forall x(\neg q(x) \vee r(x, a)) \models \forall y\, \exists z\, r(y, z).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

**15.** Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$(p \to \neg q \wedge r) \to \neg(s \wedge \neg t \to \neg(u \vee v)).$$

**Soluzioni**

**1.** **F** secondo le tavole di verità dell'implicazione (p.9 delle dispense).

**2.** **F** è l'Esempio 7.52 delle dispense.

**3.** **V** si veda l'Algoritmo 4.42 delle dispense.

**4.** **V** le deduzioni naturali che mostrano $\Gamma \rhd F \wedge G$ e $\Gamma, F \rhd H$ si combinano in

$$\dfrac{\Gamma \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \triangledown \\ F \wedge G\end{array}}{F}}{H}$$

che mostra $\Gamma \rhd H$.

**5.** **F** non è detto che ogni elemento di $D^I$ sia l'interpretazione di un simbolo di costante del linguaggio (che potrebbe persino non avere simboli di costante).

**6.** **V** quando $d \in \{1,3\}$ si ha $I, \sigma[x/d] \models p(x)$, mentre quando $d \in \{0,2\}$ si ha $I, \sigma[x/d] \models p(f(x))$.

**7.** $\beta$ è un'implicazione.

**8.** **F** $\{\exists x\,(p(x) \wedge r(c, f(x))), p(a) \wedge r(c, f(a)), p(a), r(c, f(a)), \neg p(c)\}$ è un insieme di Hintikka.

**9.** **V** essere una relazione d'equivalenza è la prima condizione della Definizione 9.20 delle dispense.

**10.** Indichiamo con $F$, $G$ e $H$ gli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e con $K$ quello a destra. Dobbiamo definire un'interpretazione normale che soddisfi $F$, $G$ e $H$ ma non $K$. Un esempio è l'interpretazione normale $I$ definita da

$$D^I = \{0,1\}, \qquad f^I(0) = 1, \quad f^I(1) = 0, \quad p^I = \{0\}, \qquad r^I = \{(0,0)\}.$$

**11.** Definiamo $\sim$ in modo che le sue classi d'equivalenza siano $\{0,3\}$, $\{1,4\}$ e $\{2\}$. Allora $D^I = \{[0],[1],[2]\}$, $p^{I/\sim} = \{[0],[2]\}$ e $r^{I/\sim} = \{([0],[1]),([1],[2])\}$.

**12.** (i) $\exists x(i(m(b), x) \wedge c(x) \wedge n(x))$;

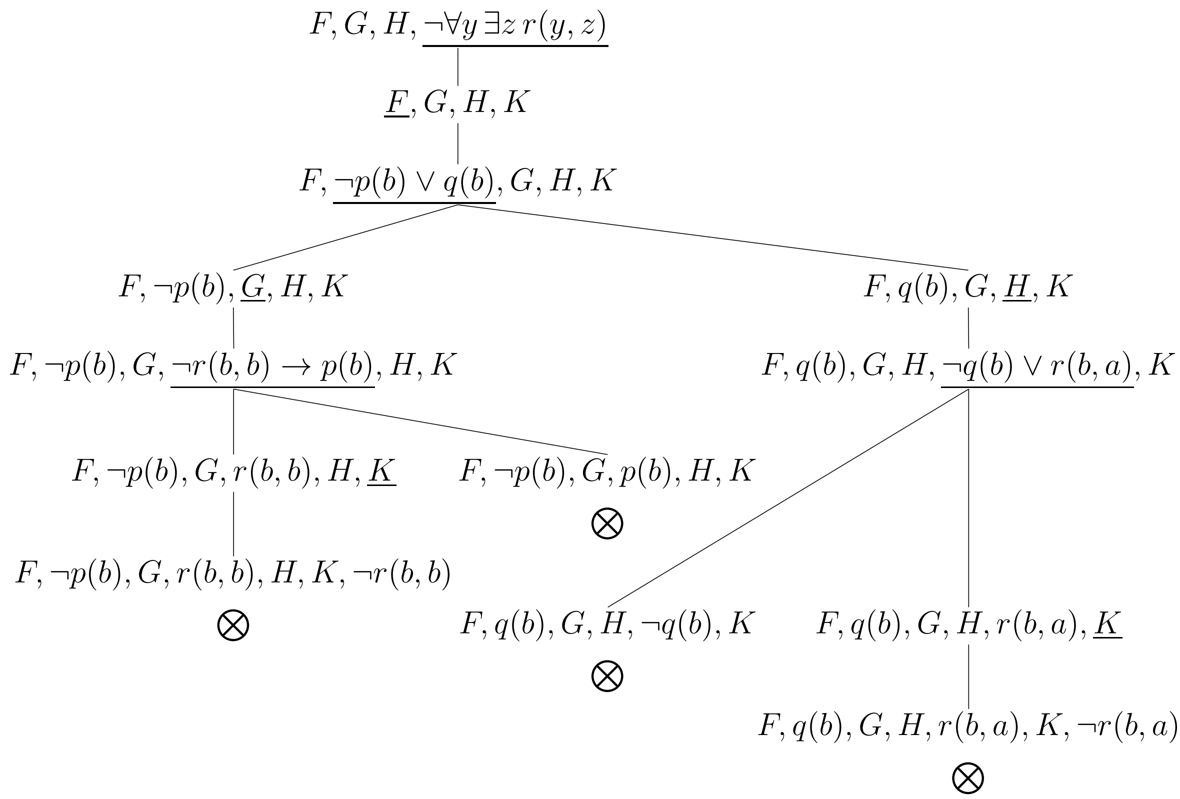
(ii) $\forall x\big(c(x) \wedge n(x) \to \exists y(c(y) \wedge i(x,y) \wedge (i(y,a) \vee i(y,b)))\big)$.

**13.** Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\neg F \vee (G \to \neg H) \qquad \dfrac{[\neg F]^2 \qquad H \to F}{\neg H} \qquad \dfrac{G \vee \neg H \qquad \dfrac{[G]^1 \qquad [G \to \neg H]^2}{\neg H} \qquad [\neg H]^1}{\neg H}\,{}^{1}}{\neg H}\,{}^{2}$$

Si noti l'uso di $(MT)$ nel passaggio in cui $H \to F$ è un'ipotesi.

**14.** Per stabilire la conseguenza logica utilizziamo l'Algoritmo 10.48 delle dispense e costruiamo un tableau chiuso con la radice etichettata dalle formule a sinistra del simbolo di conseguenza logica e la negazione della formula a destra. Indichiamo con $F$, $G$, $H$ e $K$ le $\gamma$-formule $\forall x(\neg p(x) \vee q(x))$, $\forall x(\neg r(x,x) \to p(x))$, $\forall x(\neg q(x) \vee r(x,a))$ e $\neg\exists z\, r(b,z)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.




**15.**

$$\begin{gathered}
\langle [(p \to \neg q \wedge r) \to \neg(s \wedge \neg t \to \neg(u \vee v))] \rangle \\
\langle [\neg(p \to \neg q \wedge r), \neg(s \wedge \neg t \to \neg(u \vee v))] \rangle \\
\langle [p, \neg(s \wedge \neg t \to \neg(u \vee v))], [\neg(\neg q \wedge r), \neg(s \wedge \neg t \to \neg(u \vee v))] \rangle \\
\langle [p, s \wedge \neg t], [p, u \vee v], [\neg(\neg q \wedge r), s \wedge \neg t], [\neg(\neg q \wedge r), u \vee v] \rangle \\
\langle [p, s], [p, \neg t], [p, u, v], [q, \neg r, s \wedge \neg t], [q, \neg r, u \vee v] \rangle \\
\langle [p, s], [p, \neg t], [p, u, v], [q, \neg r, s], [q, \neg r, \neg t], [q, \neg r, u, v] \rangle
\end{gathered}$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(p \vee s) \wedge (p \vee \neg t) \wedge (p \vee u \vee v) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \wedge (q \vee \neg r \vee \neg t) \wedge (q \vee \neg r \vee u \vee v).$$