Prova scritta di Logica Matematica
22 gennaio 2019

Cognome Nome Matricola

Indicate su ogni foglio che consegnate cognome, nome e numero di matricola.

Nella prima parte ogni riposta corretta vale 1, ogni risposta sbagliata −1, ogni risposta non data 0. Il punteggio minimo per superare questa parte è 6. Il punteggio che eccede 6 viene sommato al risultato della seconda parte per ottenere il voto dello scritto.

Nella seconda parte per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

a. $(q \wedge r \to \neg p) \wedge ((r \to q) \vee p) \equiv \neg(\neg(\neg p \to q) \vee (p \wedge q \wedge r))$. **V** **F**

b. Se $F \models G \to H$ allora $F, \neg H \models \neg G$. **V** **F**

c. Quante delle formule seguenti sono γ-formule? $\neg\forall x\, r(x, f(x))$, $\neg\exists y\, p(y) \wedge \forall z\, r(z, z)$, $\forall x\, r(x, f(x)) \to p(c)$, $\neg\exists y(p(y) \wedge \forall z\, r(z, z))$. **0** **1** **2** **3** **4**

d. Sia I l'interpretazione normale con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $f^I(0) = 2$, $f^I(1) = 0$, $f^I(2) = 0$, $f^I(3) = 3$, $p^I = \{0, 1\}$, $r^I = \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (3, 1)\}$.
Allora $I \models \forall z(p(z) \to \exists y\, (y \neq z \wedge r(f(y), f(z))))$. **V** **F**

e. Ci sono insiemi di Hintikka predicativi in cui non compaiono simboli di costante. **V** **F**

f. $\exists y\, p(y) \to q(y) \equiv \forall y(p(y) \to q(y))$. **V** **F**

g. Se φ è un omomorfismo forte di I in J e $c^I \in p^I$ allora $J \models p(c)$. **V** **F**

h. Ogni interpretazione normale soddisfa gli assiomi dell'uguaglianza $\mathsf{Eq}_{\mathcal{L}}$. **V** **F**

i. Esistono tableaux predicativi chiusi infiniti. **V** **F**

j. Questo albero rappresenta una deduzione naturale corretta: **V** **F**

$$\dfrac{\exists x\, q(f(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{[q(f(x))]^1 \qquad \dfrac{\forall y(q(f(y)) \to q(y))}{q(f(x)) \to q(x)}}{q(x)}}{\forall x\, q(x)}}{\forall x\, q(x)}\ {}_1$$

k. Completate la seguente affermazione:

F è insoddisfacibile se e solo se $\neg F$ è ____________________

SECONDA PARTE

Usate il retro del foglio per svolgere tutti gli esercizi salvo il numero 2.

1. Usando l'algoritmo di Fitting mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big(\neg(p \vee (q \wedge \neg r)) \to ((s \to \neg t \wedge u) \to v)\big).$$

2. Sia $\{b, p, c, g, a\}$ un linguaggio dove b è un simbolo di costante, p è un simbolo di funzione unario, c e g sono simboli di relazione unari e a è un simbolo di relazione binario. Interpretando b come "Bobi", $p(x)$ come "la padrona di x", $c(x)$ come "x è un cane", $g(x)$ come "x è un gatto" e $a(x, y)$ come "x ama y", traducete la frase:

qualche cane che ama la padrona di Bobi ha una padrona che non ama nessun gatto. 3pt

3. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$\neg(p \vee q) \to r, s \vee q \to r \models \neg r \to \neg s \wedge p.$$

Se la conseguenza logica non vale definite una valutazione che lo testimoni.

4. Mettete in forma prenessa la formula 2pt

$$\forall x\, \neg\forall y\, r(x, f(y)) \to \neg\forall z\, \exists y\, \neg r(f(z), y) \wedge \forall z\, p(z).$$

Se riuscite, usate il minimo numero di quantificatori possibili. 1pt

5. Dimostrate che 4pt

$$\forall x\, \forall y(p(x) \wedge \neg p(y) \to r(y, x)), \forall x(r(x, x) \wedge \neg r(f(x), x)), p(a) \not\models \forall v\, p(v).$$

6. Dimostrate che l'enunciato 4pt

$$\forall x\big(p(g(x)) \to \neg r(x, x)\big) \wedge \forall z\big(\forall y\, r(y, z) \vee \neg p(z)\big) \to \exists v\, \neg p(v)$$

è valido.

7. Sia $\mathcal{L} = \{f, p, r\}$ un linguaggio in cui f è un simbolo di funzione unario, p un simbolo di relazione unario e r un simbolo di relazione binario. Sia I l'interpretazione per $\mathcal{L}$ definita da 3pt

$$D^I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \qquad p^I = \{2, 4, 5, 6\}; \qquad r^I = \{(0, 4), (1, 4), (3, 4), (4, 6), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$f^I(0) = 2; \quad f^I(1) = 5; \quad f^I(2) = 1; \quad f^I(3) = 2; \quad f^I(4) = 0; \quad f^I(5) = 3; \quad f^I(6) = 4.$$

Definite una relazione di congruenza $\sim$ su I che abbia quattro classi d'equivalenza, giustificando la vostra risposta. Descrivete l'interpretazione quoziente $I/\!\sim$.

8. Usando il metodo dei tableaux stabilite che 4pt

$$\exists z\, r(z, a), \forall x(\exists y\, r(x, y) \to p(x) \vee q(x)), \forall x \neg(p(x) \wedge r(x, a)) \models \exists u\, q(u).$$

9. Dimostrate, usando solo le regole della deduzione naturale predicativa (comprese le sei regole derivate) che 5pt

$$\forall x\, q(f(x)), \forall y(\forall x\, r(x, y) \to \neg p(f(y))), \forall z(q(f(z)) \to r(z, c)) \rhd \exists y\, \neg p(y).$$

Soluzioni

a. F come si verifica per esempio con le tavole di verità.

b. V se $v(F) = \mathbf{V}$ e $v(\neg H) = \mathbf{V}$ allora, per l'ipotesi, si ha $v(G \to H) = \mathbf{V}$ e quindi $v(G) = \mathbf{V}$ non è possibile. Perciò $v(G) = \mathbf{F}$ e $v(\neg G) = \mathbf{V}$.

c. 1 solo la quarta formula è una γ-formula. Le precedenti sono nell'ordine δ, α e β formule.

d. V come si verifica controllando che per ognuno dei quattro $d \in D^I$ si ha $I, \sigma[z/d] \vDash p(z) \to \exists y\,(y \neq z \wedge r(f(y), f(z)))$.

e. F per la condizione (0) della Definizione 10.38 delle dispense.

f. F non si può applicare il Lemma 7.69 delle dispense perché nella formula di sinistra y è libero nel conseguente dell'implicazione. Non è difficile definire un'interpretazione I e uno stato σ che soddisfano la formula di sinistra (perché $\sigma(y) \in q^I$) ma non quella di destra (perché esiste $d \in D^I$ tale che $d \in p^I$ e $d \notin q^I$).

g. V perché per definizione di omomorfismo forte si ha $c^J = \varphi(c^I) \in p^J$.

h. V è il Lemma 7.104 delle dispense.

i. F un tableau predicativo infinito ha un ramo infinito per il Lemma 4.10 delle dispense e quindi è aperto.

j. F la presunta applicazione di $(\forall i)$ nel passo che ha per ipotesi $q(x)$ non è corretta, perché x è libera nell'ipotesi (in quel momento attiva) $q(f(x))$.

k. valida per il Teorema 2.37(b) delle dispense.

1. Utilizziamo l'Algoritmo 3.22 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.30:

$$[\langle \neg\big(\neg(p \vee (q \wedge \neg r)) \to ((s \to \neg t \wedge u) \to v)\big) \rangle]$$
$$[\langle \neg(p \vee (q \wedge \neg r)), \neg((s \to \neg t \wedge u) \to v) \rangle]$$
$$[\langle \neg p, \neg(q \wedge \neg r), s \to \neg t \wedge u, \neg v \rangle]$$
$$[\langle \neg p, \neg q, s \to \neg t \wedge u, \neg v \rangle, \langle \neg p, r, s \to \neg t \wedge u, \neg v \rangle]$$
$$[\langle \neg p, \neg q, \neg s, \neg v \rangle, \langle \neg p, \neg q, \neg t \wedge u, \neg v \rangle, \langle \neg p, r, \neg s, \neg v \rangle, \langle \neg p, r, \neg t \wedge u, \neg v \rangle]$$
$$[\langle \neg p, \neg q, \neg s, \neg v \rangle, \langle \neg p, \neg q, \neg t, u, \neg v \rangle, \langle \neg p, r, \neg s, \neg v \rangle, \langle \neg p, r, \neg t, u, \neg v \rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg s \wedge \neg v) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg t \wedge u \wedge \neg v) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg s \wedge \neg v) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg t \wedge u \wedge \neg v).$$

2. $\exists x(c(x) \wedge a(x, p(b)) \wedge \forall y(g(y) \to \neg a(p(x), y)))$ oppure $\exists x(c(x) \wedge a(x, p(b)) \wedge \neg \exists y(g(y) \wedge a(p(x), y)))$ (i due enunciati sono logicamente equivalenti).

3. Per stabilire se la conseguenza logica sussiste applichiamo l'Algoritmo 4.40 delle dispense. Costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.31 e 4.32) un tableau con la radice etichettata dalle formulae a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione di quella a destra. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\neg(p \vee q) \to r, s \vee q \to r, \underline{\neg(\neg r \to \neg s \wedge p)}$$

$$\neg(p \vee q) \to r, \underline{s \vee q \to r}, \neg r, \neg(\neg s \wedge p)$$

$$\neg(p \vee q) \to r, \neg(s \vee q), \neg r, \neg(\neg s \wedge p) \qquad \neg(p \vee q) \to r, r, \neg r, \neg(\neg s \wedge p)$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \otimes$$

$$\neg(p \vee q) \to r, \neg s, \neg q, \neg r, \underline{\neg(\neg s \wedge p)}$$

$$\neg(p \vee q) \to r, \neg s, \neg q, \neg r, s \qquad \underline{\neg(p \vee q) \to r}, \neg s, \neg q, \neg r, \neg p$$
$$\otimes \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$$

$$\underline{p \vee q}, \neg s, \neg q, \neg r, \neg p \qquad r, \neg s, \neg q, \neg r, \neg p$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \otimes$$

$$p, \neg s, \neg q, \neg r, \neg p \qquad q, \neg s, \neg q, \neg r, \neg p$$
$$\otimes \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \otimes$$

Il tableau è chiuso e quindi la conseguenza logica sussiste.

4. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\forall x\, \neg\forall y\, r(x, f(y)) \to \neg\forall z\, \exists y\, \neg r(f(z), y) \wedge \forall z\, p(z)$$
$$\forall x\, \exists y\, \neg r(x, f(y)) \to \exists z\, \forall y\, r(f(z), y) \wedge \forall z\, p(z)$$
$$\forall x\, \exists y\, \neg r(x, f(y)) \to \exists z(\forall y\, r(f(z), y) \wedge \forall z\, p(z))$$
$$\exists x(\exists y\, \neg r(x, f(y)) \to \forall y\, r(f(x), y) \wedge \forall z\, p(z))$$
$$\exists x(\exists y\, \neg r(x, f(y)) \to \forall z(r(f(x), z) \wedge p(z)))$$
$$\exists x\, \forall y\, \forall z(\neg r(x, f(y)) \to r(f(x), z) \wedge p(z)).$$

5. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfa gli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, ma non quello a destra. Un'interpretazione con queste caratteristiche è:

$$D^I = \{0, 1, 2, 3\}, \quad a^I = 0, \quad f^I(0) = 1, f^I(1) = 0, f^I(2) = 3, f^I(3) = 2,$$
$$p^I = \{0, 1\}, \quad r^I = \{(0,0), (1,1), (2,0), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1), (3,3)\}.$$

6. Sia I sia un'interpretazione: dobbiamo dimostrare che I soddisfa l'enunciato, che è della forma $F \wedge G \to H$. Se $I \not\models F \wedge G$, allora $I \models F \wedge G \to H$ e siamo a posto.

Supponiamo dunque che $I \models F \wedge G$, ovvero che F e G siano veri in I. Il nostro obiettivo è verificare che si ha anche $I \models H$.

Fissiamo $d_0 \in D^I$: da $I \models G$ segue in particolare che $I, \sigma[z/d_0] \models \forall y\, r(y,z) \vee \neg p(z)$, ovvero $I, \sigma[z/d_0] \models \forall y\, r(y,z)$ oppure $I, \sigma[z/d_0] \models \neg p(z)$. Nel secondo caso $I \models H$ è immediato.

Supponiamo dunque $I, \sigma[z/d_0] \models \forall y\, r(y,z)$. Da $I \models F$ segue $I, \sigma[x/d_0] \models p(g(x)) \to \neg r(x,x)$. Dato che $(d_0, d_0) \in r^I$ per ipotesi, deve essere $I, \sigma[x/d_0] \not\models p(g(x))$, cioè $g^I(d_0) \notin p^I$. Abbiamo allora $I \models H$ anche in questo caso.

7. Dobbiamo partizionare D^I in quattro insiemi in modo da rispettare la Definizione 9.19 delle dispense. Osservando p^I notiamo che 0 può essere congruente solo a 1 e 3 (nessuno di loro appartiene a p^I) mentre gli altri quattro elementi potrebbero essere congruenti tra loro. Prendendo ora in considerazione r^I notiamo che 2 e 5 non compaiono in nessuna coppia appartenente a r^I, a differenza di 4 e 6. I primi due elementi non possono quindi essere congruenti con i secondi due. Inoltre $(0,4) \in r^I$ mentre $(0,6) \notin r^I$ e quindi $4 \nsim 6$.

Queste osservazioni ci portano a concludere che le quattro classi d'equivalenza rispetto a $\sim$ non possono che essere $\{0,1,3\}$ $\{2,5\}$, $\{4\}$ e $\{6\}$. Inoltre $\sim$ verifica anche la condizione che riguarda f, perché $f^I(0) \sim f^I(1) \sim f^I(3)$ e $f^I(2) \sim f^I(5)$.

Si ha allora

$$D^I/\!\sim\, = \{[0],[2],[4],[6]\};$$
$$f^{I/\sim}([0]) = [2], \quad f^{I/\sim}([2]) = [0], \quad f^{I/\sim}([4]) = [0], \quad f^{I/\sim}([6]) = [4];$$
$$p^{I/\sim} = \{[2],[4],[6]\}, \qquad r^{I/\sim} = \{([0],[4]),([4],[6]),([6],[4]),([6],[6])\}.$$

8. Per mostrare la conseguenza logica utilizziamo l'Algoritmo 10.51 delle dispense e costruiamo (utilizzando le convenzioni 10.21 e 10.23) un tableau chiuso con la radice etichettata dagli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione dell'enunciato a destra. Indichiamo con F, G, H e K le γ-formule $\forall x(\exists y\, r(x,y) \to p(x) \vee q(x))$, $\forall x \neg(p(x) \wedge r(x,a))$, $\neg\exists u\, q(u)$ e $\neg\exists y\, r(c,y)$. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

- $\underline{\exists z\, r(z,a)}, F, G, H$
  - $r(c,a), F, \underline{G}, H$
    - $r(c,a), F, G, \underline{\neg(p(c) \wedge r(c,a))}, H$
      - $r(c,a), \underline{F}, G, \neg p(c), H$
        - $r(c,a), F, \underline{\exists y\, r(c,y) \to p(c) \vee q(c)}, G, \neg p(c), H$
          - $r(c,a), F, \underline{K}, G, \neg p(c), H$
            - $r(c,a), F, K, \neg r(c,a), G, \neg p(c), H$ $\otimes$
          - $r(c,a), F, \underline{p(c) \vee q(c)}, G, \neg p(c), H$
            - $r(c,a), F, p(c), G, \neg p(c), H$ $\otimes$
            - $r(c,a), F, q(c), G, \neg p(c), \underline{H}$
              - $r(c,a), F, q(c), G, \neg p(c), H, \neg q(c)$ $\otimes$
      - $r(c,a), F, G, \neg r(c,a), H$ $\otimes$

Si noti l'importanza di scegliere in modo opportuno le istanze delle γ-formule (con altre scelte il tableau cresce rapidamente di dimensione).

9. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\, q(f(x))}{q(f(x))} \qquad \dfrac{\forall z(q(f(z)) \to r(z,c))}{q(f(x)) \to r(x,c)}}{r(x,c)}}{\forall x\, r(x,c)} \qquad \dfrac{\forall y(\forall x\, r(x,y) \to \neg p(f(y)))}{\forall x\, r(x,c) \to \neg p(f(c))}}{\dfrac{\neg p(f(c))}{\exists y\, \neg p(y)}}$$

Prova scritta di Logica Matematica
22 gennaio 2019

Cognome Nome Matricola

Indicate su ogni foglio che consegnate cognome, nome e numero di matricola.

Nella prima parte ogni riposta corretta vale 1, ogni risposta sbagliata -1, ogni risposta non data 0. Il punteggio minimo per superare questa parte è 6. Il punteggio che eccede 6 viene sommato al risultato della seconda parte per ottenere il voto dello scritto.

Nella seconda parte per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

a. Quante delle formule seguenti sono γ-formule? $\neg\exists x\, r(x, f(x))$, $\neg\forall y(p(y) \to \forall z\, r(z, z))$, $\neg\exists y(p(y) \wedge \forall z\, r(z, z))$, $\forall x\, r(x, f(x)) \to p(c)$. **0 | 1 | 2 | 3 | 4**

b. Se $F, \neg H \models \neg G$ allora $F \models G \to H$. **V | F**

c. $(p \wedge q \to r) \wedge ((q \to p) \vee \neg r) \equiv \neg((p \wedge q \wedge \neg r) \vee \neg(r \to p))$. **V | F**

d. Sia I l'interpretazione normale con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $f^I(0) = 2$, $f^I(1) = 1$, $f^I(2) = 3$, $f^I(3) = 2$, $p^I = \{1, 3\}$, $r^I = \{(0, 2), (0, 3), (1, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0)\}$.
Allora $I \models \forall z(\neg p(z) \to \exists y\, (y \neq z \wedge r(f(y), f(z))))$. **V | F**

e. $\forall z\, p(z) \to q(z) \equiv \exists z(p(z) \to q(z))$. **V | F**

f. Se φ è un omomorfismo forte di I in J e $c^I \notin p^I$ allora $J \models \neg p(c)$. **V | F**

g. Esiste un'interpretazione normale che non soddisfa gli assiomi dell'uguaglianza $\mathsf{Eq}_{\mathcal{L}}$. **V | F**

h. Ogni tableau predicativo chiuso è finito. **V | F**

i. In ogni insieme di Hintikka predicativo compare almeno un simbolo di costante. **V | F**

j. Questo albero rappresenta una deduzione naturale corretta: **V | F**

$$\dfrac{\exists x\, p(x) \qquad \dfrac{\dfrac{[p(x)]^1 \qquad \dfrac{\forall y(p(y) \to p(f(y)))}{p(x) \to p(f(x))}}{p(f(x))}}{\forall x\, p(f(x))}}{\forall x\, p(f(x))}\ {}_1$$

k. Completate la seguente affermazione:

F è valida se e solo se $\neg F$ è __________________________

SECONDA PARTE

Usate il retro del foglio per svolgere tutti gli esercizi salvo il numero 2.

1. Usando l'algoritmo di Fitting mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big(\neg((\neg p \wedge q) \vee \neg r) \rightarrow ((\neg s \rightarrow t \wedge \neg u) \rightarrow v)\big).$$

2. Sia $\{m, p, c, g, a\}$ un linguaggio dove m è un simbolo di costante, p è un simbolo di funzione unario, c e g sono simboli di relazione unari e a è un simbolo di relazione binario. Interpretando m come "Micio", $p(x)$ come "il padrone di x", $c(x)$ come "x è un cane", $g(x)$ come "x è un gatto" e $a(x, y)$ come "x ama y", traducete la frase:

qualche gatto che ama il padrone di Micio ha un padrone che non ama nessun cane. 3pt

3. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$p \vee q \rightarrow r, \neg(s \vee q) \rightarrow r \vDash \neg r \rightarrow \neg p \wedge s.$$

Se la conseguenza logica non vale definite una valutazione che lo testimoni.

4. Mettete in forma prenessa la formula 2pt

$$\forall y\, \neg\forall x\, r(f(x), y) \rightarrow \neg\forall v\, \exists x\, \neg r(x, f(v)) \wedge \forall v\, p(v).$$

Se riuscite, usate il minimo numero di quantificatori possibili. 1pt

5. Dimostrate che 4pt

$$\forall x\, \forall y(p(x) \wedge \neg p(y) \rightarrow r(x, y)), \forall x(r(x, x) \wedge \neg r(x, f(x))), p(a) \nvDash \forall z\, p(z).$$

6. Dimostrate che l'enunciato 4pt

$$\forall x\big(\forall y\, r(x, y) \vee \neg p(x)\big) \wedge \forall z\big(p(f(z)) \rightarrow \neg r(z, z)\big) \rightarrow \exists v\, \neg p(v)$$

è valido.

7. Sia $\mathcal{L} = \{f, p, r\}$ un linguaggio in cui f è un simbolo di funzione unario, p un simbolo di relazione unario e r un simbolo di relazione binario. Sia I l'interpretazione per $\mathcal{L}$ definita da 3pt

$$D^I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \qquad p^I = \{1, 3, 4, 6\}; \qquad r^I = \{(0, 6), (2, 6), (4, 4), (4, 6), (5, 6), (6, 4)\}$$

$$f^I(0) = 3; \quad f^I(1) = 0; \quad f^I(2) = 1; \quad f^I(3) = 2; \quad f^I(4) = 6; \quad f^I(5) = 3; \quad f^I(6) = 5.$$

Definite una relazione di congruenza $\sim$ su I che abbia quattro classi d'equivalenza, giustificando la vostra risposta. Descrivete l'interpretazione quoziente $I/\!\sim$.

8. Usando il metodo dei tableaux stabilite che 4pt

$$\forall x \neg(q(x) \wedge r(x, c)), \exists z\, r(z, c), \forall x(\exists y\, r(x, y) \rightarrow \neg p(x) \vee q(x)) \vDash \exists u\, \neg p(u).$$

9. Dimostrate, usando solo le regole della deduzione naturale predicativa (comprese le sei regole derivate) che 5pt

$$\forall x\, p(f(x)), \forall y(\forall x\, r(y, x) \rightarrow q(f(y))), \forall z(p(f(z)) \rightarrow r(c, z)) \rhd \exists y\, q(y).$$

Soluzioni

a. **2** la prima e la terza formula sono γ-formule. La seconda e al quarta sono rispettivamente una δ e una β-formula.

b. **V** supponiamo che $v(F) = \mathbf{V}$ e distinguiamo due casi: se $v(H) = \mathbf{V}$ allora $v(G \to H) = \mathbf{V}$ è immediato, mentre se $v(H) = \mathbf{F}$ allora $v(\neg H) = \mathbf{V}$, $v(\neg G) = \mathbf{V}$ per ipotesi e quindi $v(G \to H) = \mathbf{V}$ anche in questo caso.

c. **F** come si verifica per esempio con le tavole di verità.

d. **V** come si verifica controllando che per ognuno dei quattro $d \in D^I$ si ha $I, \sigma[z/d] \models \neg p(z) \to \exists y\, (y \neq z \wedge r(f(y), f(z)))$.

e. **F** non si può applicare il Lemma 7.69 delle dispense perché nella formula di sinistra z è libero nel conseguente dell'implicazione. Non è difficile definire un'interpretazione I e uno stato σ che non soddisfano la formula di sinistra (perché $p^I = D^I$ e $\sigma(z) \notin q^I$) ma soddisfano quella di destra (perché $q^I \neq \emptyset$).

f. **V** perché per definizione di omomorfismo forte si ha $c^J = \varphi(c^I) \notin p^J$.

g. **F** il Lemma 7.104 delle dispense afferma il contrario.

h. **V** un tableau predicativo chiuso non ha rami infiniti e quindi è finito per il Lemma 4.10 delle dispense.

i. **V** per la condizione (0) della Definizione 10.38 delle dispense.

j. **F** la presunta applicazione di $(\forall i)$ nel passo che ha per ipotesi $p(f(x))$ non è corretta, perché x è libera nell'ipotesi (in quel momento attiva) $p(x)$.

k. **insoddisfacibile** per il Teorema 2.37(a) delle dispense.

1. Utilizziamo l'Algoritmo 3.22 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.30:

$$[\langle \neg\big(\neg((\neg p \wedge q) \vee \neg r) \to ((\neg s \to t \wedge \neg u) \to v)\big) \rangle]$$
$$[\langle \neg((\neg p \wedge q) \vee \neg r), \neg((\neg s \to t \wedge \neg u) \to v) \rangle]$$
$$[\langle \neg(\neg p \wedge q), r, \neg s \to t \wedge \neg u, \neg v \rangle]$$
$$[\langle p, r, \neg s \to t \wedge \neg u, \neg v \rangle, \langle \neg q, r, \neg s \to t \wedge \neg u, \neg v \rangle]$$
$$[\langle p, r, s, \neg v \rangle, \langle p, r, t \wedge \neg u, \neg v \rangle, \langle \neg q, r, s, \neg v \rangle, \langle \neg q, r, t \wedge \neg u, \neg v \rangle]$$
$$[\langle p, r, s, \neg v \rangle, \langle p, r, t, \neg u, \neg v \rangle, \langle \neg q, r, s, \neg v \rangle, \langle \neg q, r, t, \neg u, \neg v \rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(p \wedge r \wedge s \wedge \neg v) \vee (p \wedge r \wedge t \wedge \neg u \wedge \neg v) \vee (\neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg v) \vee (\neg q \wedge r \wedge t \wedge \neg u \wedge \neg v).$$

2. $\exists x(g(x) \wedge a(x, p(m)) \wedge \forall y(c(y) \to \neg a(p(x), y)))$ oppure $\exists x(g(x) \wedge a(x, p(m)) \wedge \neg\exists y(c(y) \wedge a(p(x), y)))$ (i due enunciati sono logicamente equivalenti).

3. Per stabilire se la conseguenza logica sussiste applichiamo l'Algoritmo 4.40 delle dispense. Costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.31 e 4.32) un tableau con la radice etichettata dalle formulae a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione di quella a destra. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$p \vee q \to r, \neg(s \vee q) \to r, \neg(\neg r \to \neg p \wedge s)$$

$$\underline{p \vee q \to r}, \neg(s \vee q) \to r, \neg r, \neg(\neg p \wedge s)$$

$$\underline{\neg(p \vee q)}, \neg(s \vee q) \to r, \neg r, \neg(\neg p \wedge s) \qquad \begin{array}{c} r, \neg(s \vee q) \to r, \neg r, \neg(\neg p \wedge s) \\ \otimes \end{array}$$

$$\neg p, \neg q, \neg(s \vee q) \to r, \neg r, \underline{\neg(\neg p \wedge s)}$$

$$\begin{array}{c} \neg p, \neg q, \neg(s \vee q) \to r, \neg r, p \\ \otimes \end{array} \qquad \neg p, \neg q, \underline{\neg(s \vee q) \to r}, \neg r, \neg s$$

$$\neg p, \neg q, \underline{s \vee q}, \neg r, \neg s \qquad \begin{array}{c} \neg p, \neg q, r, \neg r, \neg s \\ \otimes \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \neg p, \neg q, s, \neg r, \neg s \\ \otimes \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg p, \neg q, q, \neg r, \neg s \\ \otimes \end{array}$$

Il tableau è chiuso e quindi la conseguenza logica sussiste.

4. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\forall y \, \neg \forall x \, r(f(x), y) \to \neg \forall v \, \exists x \, \neg r(x, f(v)) \wedge \forall v \, p(v)$$
$$\forall y \, \exists x \, \neg r(f(x), y) \to \exists v \, \forall x \, r(x, f(v)) \wedge \forall v \, p(v)$$
$$\forall y \, \exists x \, \neg r(f(x), y) \to \exists v (\forall x \, r(x, f(v)) \wedge \forall v \, p(v))$$
$$\exists y (\exists x \, \neg r(f(x), y) \to \forall x \, r(x, f(y)) \wedge \forall v \, p(v))$$
$$\exists y (\exists x \, \neg r(f(x), y) \to \forall v (r(v, f(y)) \wedge p(v)))$$
$$\exists y \, \forall x \, \forall v (\neg r(f(x), y) \to (r(v, f(y)) \wedge p(v)))$$

5. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfa gli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, ma non quello a destra. Un'interpretazione con queste caratteristiche è:

$$D^I = \{0, 1, 2, 3\}, \quad a^I = 0, \quad f^I(0) = 1, f^I(1) = 0, f^I(2) = 3, f^I(3) = 2,$$
$$p^I = \{0, 1\}, \quad r^I = \{(0,0), (0,2), (0,3), (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}.$$

6. Sia I sia un'interpretazione: dobbiamo dimostrare che I soddisfa l'enunciato, che è della forma $F \wedge G \to H$. Se $I \not\models F \wedge G$, allora $I \models F \wedge G \to H$ e siamo a posto.

Supponiamo dunque che $I \models F \wedge G$, ovvero che F e G siano veri in I. Il nostro obiettivo è verificare che si ha anche $I \models H$.

Fissiamo $d_0 \in D^I$: da $I \models F$ segue in particolare che $I, \sigma[x/d_0] \models \forall y\, r(x, y) \vee \neg p(x)$, ovvero $I, \sigma[x/d_0] \models \forall y\, r(x, y)$ oppure $I, \sigma[x/d_0] \models \neg p(x)$. Nel secondo caso $I \models H$ è immediato.

Supponiamo dunque $I, \sigma[x/d_0] \models \forall y\, r(x, y)$. Da $I \models G$ segue $I, \sigma[z/d_0] \models p(f(z)) \to \neg r(z, z)$. Dato che $(d_0, d_0) \in r^I$ per ipotesi, deve essere $I, \sigma[z/d_0] \not\models p(f(z))$, cioè $f^I(d_0) \notin p^I$. Abbiamo allora $I \models H$ anche in questo caso.

7. Dobbiamo partizionare D^I in quattro insiemi in modo da rispettare la Definizione 9.19 delle dispense. Osservando p^I notiamo che 0 può essere congruente solo a 2 e 5 (nessuno di loro appartiene a p^I) mentre gli altri quattro elementi potrebbero essere congruenti tra loro. Prendendo ora in considerazione r^I notiamo che 1 e 3 non compaiono in nessuna coppia appartenente a r^I, a differenza di 4 e 6. I primi due elementi non possono quindi essere congruenti con i secondi due. Inoltre $(0, 6) \in r^I$ mentre $(0, 4) \notin r^I$ e quindi $4 \nsim 6$.

Queste osservazioni ci portano a concludere che le quattro classi d'equivalenza rispetto a $\sim$ non possono che essere $\{0, 2, 5\}$ $\{1, 3\}$, $\{4\}$ e $\{6\}$. Inoltre $\sim$ verifica anche la condizione che riguarda f, perché $f^I(0) \sim f^I(2) \sim f^I(5)$ e $f^I(1) \sim f^I(3)$.

Si ha allora

$$D^I/{\sim} = \{[0], [1], [4], [6]\};$$

$$f^{I/\sim}([0]) = [1], \quad f^{I/\sim}([1]) = [0], \quad f^{I/\sim}([4]) = [6], \quad f^{I/\sim}([6]) = [0];$$

$$p^{I/\sim} = \{[1], [4], [6]\}, \qquad r^{I/\sim} = \{([0], [6]), ([4], [4]), ([4], [6]), ([6], [4])\}.$$

8. Per mostrare la conseguenza logica utilizziamo l'Algoritmo 10.51 delle dispense e costruiamo (utilizzando le convenzioni 10.21 e 10.23) un tableau chiuso con la radice etichettata dagli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione dell'enunciato a destra. Indichiamo con F, G, H e K le γ-formule $\forall x \neg(q(x) \wedge r(x,c))$, $\forall x(\exists y\, r(x,y) \rightarrow \neg p(x) \vee q(x))$, $\neg\exists u\, \neg p(u)$ e $\neg\exists y\, r(a,y)$. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & F, \underline{\exists z\, r(z,c)}, G, H \arrow[d, dash] & \\
 & & \underline{F}, r(a,c), G, H \arrow[d, dash] & \\
 & & F, \neg(q(a) \wedge r(a,c)), r(a,c), G, H \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & F, \neg q(a), r(a,c), \underline{G}, H \arrow[d, dash] & & \begin{array}{c} F, \neg r(a,c), r(a,c), G, H \\ \otimes \end{array} \\
 & F, \neg q(a), r(a,c), G, \underline{\exists y\, r(a,y) \rightarrow \neg p(a) \vee q(a)}, H \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
F, \neg q(a), r(a,c), G, \underline{K}, H \arrow[d, dash] & & F, \neg q(a), r(a,c), G, \underline{\neg p(a) \vee q(a)}, H \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\begin{array}{c} F, \neg q(a), r(a,c), G, K, \neg r(a,c), H \\ \otimes \end{array} & & F, \neg q(a), r(a,c), G, \neg p(a), \underline{H} \arrow[d, dash] & \begin{array}{c} F, \neg q(a), r(a,c), G, q(a), H \\ \otimes \end{array} \\
 & & \begin{array}{c} F, \neg q(a), r(a,c), G, \neg p(a), H, p(a) \\ \otimes \end{array} &
\end{tikzcd}
$$

Si noti l'importanza di scegliere in modo opportuno le istanze delle γ-formule (con altre scelte il tableau cresce rapidamente di dimensione).

9. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\, p(f(x))}{p(f(x))} \qquad \dfrac{\forall z(p(f(z)) \rightarrow r(c,z))}{p(f(x)) \rightarrow r(c,x)}}{r(c,x)}}{\forall x\, r(c,x)} \qquad \dfrac{\forall y(\forall x\, r(y,x) \rightarrow q(f(y)))}{\forall x\, r(c,x) \rightarrow q(f(c))}}{q(f(c))}}{\exists y\, q(y)}
$$