Prova scritta di Logica Matematica
17 settembre 2018

Cognome Nome Matricola

Indicate su ogni foglio che consegnate cognome, nome e numero di matricola.

Nella prima parte ogni riposta corretta vale 1, ogni risposta sbagliata -1, ogni risposta non data 0. Il punteggio minimo per superare questa parte è 6. Il punteggio che eccede 6 viene sommato al risultato della seconda parte per ottenere il voto dello scritto.

Nella seconda parte per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

a. $(p \wedge q \to r) \to \neg(q \to p) \wedge r \equiv q \wedge (\neg(p \to r) \vee \neg(p \vee \neg r))$. **V** | **F**

b. Se $F \wedge G \models H$ allora $F \models H$ e $G \models H$. **V** | **F**

c. Quante sono le variabili libere nella formula
$\forall x(\exists y\, r(x, f(y, x)) \to \forall u(\forall z\, r(z, u) \to r(u, f(x, u))))$? **0** | **1** | **2** | **3** | **4**

d. La sostituzione $\{x/g(y, z)\}$ è ammissibile in $\forall u(\forall y\, r(u, g(x, y)) \to r(x, g(u, z)))$. **V** | **F**

e. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $p^I = \{1, 3\}$, $q^I = \{2, 3, 4\}$,
$f^I(0) = 4$, $f^I(1) = 1$, $f^I(2) = 3$, $f^I(3) = 2$, $f^I(4) = 1$.
Allora $I \models \forall z(\neg p(z) \wedge q(f(z)) \to p(f(f(z))))$. **V** | **F**

f. $\forall x\, \exists y\, r(x, y) \equiv \exists y\, \forall x\, r(x, y)$. **V** | **F**

g. Se $\sim$ è una relazione di congruenza su I e $d_0 \sim d_1$ allora $f^I(d_0) \sim f^I(d_1)$. **V** | **F**

h. Un tableau predicativo aperto è finito. **V** | **F**

i. Esiste un insieme di Hintikka che contiene gli enunciati $\forall x\, \neg r(x, b)$,
$\neg r(a, a)$ e $\exists y\, r(a, y)$. **V** | **F**

j. Questo albero rappresenta una deduzione naturale corretta: **V** | **F**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y\, r(y, c)}{r(y, c)}}{\exists v\, r(g(v), c)} \qquad \dfrac{\forall z(\exists v\, r(g(v), z) \to p(z))}{\exists v\, r(g(v), c) \to p(c)}}{p(c)}$$

k. Scrivete nel riquadro l'enunciato del teorema di correttezza
per la deduzione naturale predicativa.

SECONDA PARTE

Usate il retro del foglio per svolgere tutti gli esercizi salvo il numero 2.

1. Usando l'algoritmo di Fitting mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((p \to \neg(q \vee \neg r)) \wedge \neg(s \to \neg(t \to \neg u))\big).$$

2. Sia $\{b, m, p, c, g, a\}$ un linguaggio dove b e m sono simboli di costante, p è un simbolo di funzione unario, c e g sono simboli di relazione unari e a è un simbolo di relazione binario. Interpretando b come "Bobi", m come "Micio", $p(x)$ come "il padrone di x", $c(x)$ come "x è un cane", $g(x)$ come "x è un gatto" e $a(x, y)$ come "x ama y", traducete le seguenti frasi:

(i) Micio è un gatto che ama sia il suo padrone che quello del cane Bobi; 3pt

(ii) i gatti che non amano nessun cane hanno padroni che amano qualche cane. 3pt

3. Usando il metodo dei tableaux stabilite se l'insieme di formule 3pt

$$\{(p \to q) \wedge (\neg r \to s \vee \neg t), \neg q \vee \neg s, \neg(t \wedge p \to r)\}$$

è soddisfacibile. Se l'insieme è soddisfacibile definite una valutazione che lo testimoni.

4. Mettete in forma prenessa la formula 2pt

$$\forall x(\neg\exists y\, p(f(x, y)) \to \neg\forall z\, p(g(z, x))) \wedge \neg\exists v\, \forall w\, p(h(v, w)).$$

Se riuscite, usate il minimo numero di quantificatori possibili. 1pt

5. Dimostrate che l'insieme di enunciati 4pt

$$\{\exists x\, \neg p(x), \forall z\, r(z, f(z)), \forall u\, \forall v(r(u, v) \to \neg r(v, u) \wedge (p(u) \vee p(v)))\}$$

è soddisfacibile.

6. Dimostrate che 4pt

$$\exists x\, \neg r(f(x), x), \forall y(\forall x\, r(x, y) \vee (p(y) \wedge p(g(y)))), \forall u(p(u) \to \neg p(f(u))) \vDash \exists z(p(z) \wedge \neg p(f(g(z)))).$$

7. Sia $\mathcal{L} = \{p, q, r\}$ il linguaggio con tre simboli di relazione unari. Siano I e J le seguenti interpretazioni per $\mathcal{L}$: 3pt

$$D^I = \{0, 1, 2, 3\}, \quad p^I = \{0, 2, 3\}, \quad q^I = \{0, 1, 2\}, \quad r^I = \{1, 2\};$$

$$D^J = \{A, B, C, D, E, F\}, \quad p^J = \{A, C, D, E, F\}, \quad q^J = \{B, E, F\}, \quad r^J = \{B\}.$$

Definite un omomorfismo forte di J in I.

Esiste un omomorfismo forte suriettivo di J in I? Giustificate la vostra risposta.

8. Usando il metodo dei tableaux stabilite che 4pt

$$\forall x(p(x) \to \neg\exists y\, r(x, y)), \forall z(\forall u\, \neg r(z, u) \to \neg p(z)) \vDash \exists u\, \neg p(u).$$

9. Dimostrate, usando solo le regole della deduzione naturale predicativa (comprese le sei regole derivate) che 5pt

$$\forall x(\forall y\, \neg r(y, x) \vee \neg p(g(x))), \exists z\, r(z, f(z)) \rhd \neg\forall y\, p(y).$$

Soluzioni

a. **V** come si verifica per esempio con le tavole di verità.

b. **F** perché sapere che $F \wedge G \models H$ ci fornisce informazioni sulle interpretazioni che soddisfano sia F che G, ma non su quelle che soddisfano solo F (e similmente per G); un controesempio si ottiene scegliendo p, q e $p \wedge q$, come F, G e H; infatti $p \wedge q \models p \wedge q$ ma $p \not\models p \wedge q$ e $q \not\models p \wedge q$.

c. **0** la formula in questione è infatti un enunciato.

d. **F** perché $g(y, z)$ non è libero per la sostituzione al posto della prima occorrenza di x nella formula: infatti questa occorrenza è contenuta nella sottoformula $\forall y\, r(u, g(x, y))$ e y compare in $g(y, z)$.

e. **F** perché $I, \sigma[z/2] \not\models \neg p(z) \wedge q(f(z)) \to p(f(f(z)))$.

f. **F** come indicato nell'Esercizio 7.31 delle dispense.

g. **V** è un caso particolare del secondo punto della Definizione 9.19 delle dispense.

h. **F** come evidenziato dall'Esempio 10.13 delle dispense.

i. **V** $\{\forall x\, \neg r(x, b), \neg r(a, a), \exists y\, r(a, y), r(a, c), \neg r(a, b), \neg r(b, b), \neg r(c, b)\}$ è un insieme di Hintikka.

j. **F** la presunta applicazione di $(\exists i)$ non è corretta, perché $r(y, c)$ non si ottiene per sostituzione da $r(g(v), c)$.

k. Se $T \rhd F$ allora $T \models F$.

1. Utilizziamo l'Algoritmo 3.22 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.29:

$$\langle[\neg((p \to \neg(q \vee \neg r)) \wedge \neg(s \to \neg(t \to \neg u)))]\rangle$$
$$\langle[\neg(p \to \neg(q \vee \neg r)), s \to \neg(t \to \neg u)]\rangle$$
$$\langle[\neg(p \to \neg(q \vee \neg r)), \neg s, \neg(t \to \neg u)]\rangle$$
$$\langle[p, \neg s, \neg(t \to \neg u)], [q \vee \neg r, \neg s, \neg(t \to \neg u)]\rangle$$
$$\langle[p, \neg s, t], [p, \neg s, u], [q, \neg r, \neg s, \neg(t \to \neg u)]\rangle$$
$$\langle[p, \neg s, t], [p, \neg s, u], [q, \neg r, \neg s, t], [q, \neg r, \neg s, u]\rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(p \vee \neg s \vee t) \wedge (p \vee \neg s \vee u) \wedge (q \vee \neg r \vee \neg s \vee t) \wedge (q \vee \neg r \vee \neg s \vee u).$$

2. (i) $g(m) \wedge a(m, p(m)) \wedge a(m, p(b)) \wedge c(b)$;

(ii) $\forall x(g(x) \wedge \forall y(c(y) \to \neg a(x, y)) \to \exists z(c(z) \wedge a(p(x), z)))$ oppure $\forall x(g(x) \wedge \neg\exists y(c(y) \wedge a(x, y)) \to \exists z(c(z) \wedge a(p(x), z)))$ (i due enunciati sono logicamente equivalenti).

3. Per stabilire la soddisfacibilità dell'insieme di formule applichiamo l'Algoritmo 4.39 delle dispense. Costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.31 e 4.32) un tableau con la radice etichettata dall'insieme e in ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$\underline{(p \to q) \land (\neg r \to s \lor \neg t)}, \neg q \lor \neg s, \neg(t \land p \to r)$$

$$|$$

$$p \to q, \neg r \to s \lor \neg t, \neg q \lor \neg s, \underline{\neg(t \land p \to r)}$$

$$|$$

$$p \to q, \neg r \to s \lor \neg t, \neg q \lor \neg s, \underline{t \land p}, \neg r$$

$$|$$

$$\underline{p \to q}, \neg r \to s \lor \neg t, \neg q \lor \neg s, t, p, \neg r$$

$$\neg p, \neg r \to s \lor \neg t, \neg q \lor \neg s, t, p, \neg r \quad \bigotimes \qquad\qquad q, \underline{\neg r \to s \lor \neg t}, \neg q \lor \neg s, t, p, \neg r$$

$$q, r, \neg q \lor \neg s, t, p, \neg r \quad \bigotimes \qquad\qquad q, \underline{s \lor \neg t}, \neg q \lor \neg s, t, p, \neg r$$

$$q, s, \underline{\neg q \lor \neg s}, t, p, \neg r \qquad\qquad q, \neg t, \neg q \lor \neg s, t, p, \neg r \quad \bigotimes$$

$$q, s, \neg q, t, p, \neg r \quad \bigotimes \qquad\qquad q, s, \neg s, t, p, \neg r \quad \bigotimes$$

Il tableau è chiuso e quindi l'insieme di formule non è soddisfacibile.

4. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\forall x(\neg\exists y\, p(f(x,y)) \to \neg\forall z\, p(g(z,x))) \land \neg\exists v\, \forall w\, p(h(v,w))$$
$$\forall x(\forall y\, \neg p(f(x,y)) \to \exists z\, \neg p(g(z,x))) \land \forall v\, \exists w\, \neg p(h(v,w))$$
$$\forall x\, \exists y(\neg p(f(x,y)) \to \neg p(g(y,x))) \land \forall v\, \exists w\, \neg p(h(v,w))$$
$$\forall x\big(\exists y(\neg p(f(x,y)) \to \neg p(g(y,x))) \land \exists w\, \neg p(h(x,w))\big)$$
$$\forall x\, \exists y\, \exists w\, \big((\neg p(f(x,y)) \to \neg p(g(y,x))) \land \neg p(h(x,w))\big)$$

5. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati. Due interpretazioni con queste caratteristiche sono:

$$D^I = \{0,1,2\}, \quad f^I(0) = 1, f^I(1) = 2, f^I(2) = 3, \quad p^I = \{1,2\}, \quad r^I = \{(0,1),(1,2),(2,0)\};$$
$$D^J = \mathbb{N}, \quad f^J(n) = n+1, \quad p^J = \{\, n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari} \,\}, \quad r^J = \{\, (n, n+1) : n \in \mathbb{N} \,\}.$$

6. Supponiamo che I sia un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, che chiamiamo F, G e H.

Dato che $I \vDash F$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $(f^I(d_0), d_0) \notin r^I$. Da $I \vDash G$ segue in particolare che $I, \sigma[y/d_0] \vDash \forall x\, r(x,y) \lor (p(y) \land p(g(y)))$. Osserviamo che, dato che $I, \sigma[y/d_0, x/f^I(d_0)] \nvDash r(x,y)$, si ha $I, \sigma[y/d_0] \nvDash \forall x\, r(x,y)$. Quindi $I, \sigma[y/d_0] \vDash p(y) \land p(g(y))$, cioé $d_0 \in p^I$ e $g^I(d_0) \in p^I$.

Dato che $I \vDash H$ si ha in particolare che $I, \sigma[u/g^I(d_0)] \vDash p(u) \to \neg p(f(u))$. Da $g^I(d_0) \in p^I$ segue allora $f^I(g^I(d_0)) \notin p^I$.

Abbiamo ottenuto $d_0 \in p^I$ e $f^I(g^I(d_0)) \notin p^I$, cioè $I, \sigma[z/d_0] \vDash p(z) \land \neg p(f(g(z)))$ che conduce a $I \vDash \exists z(p(z) \land \neg p(f(g(z))))$, come desiderato.

7. Sia φ l'omomorfismo forte di J in I che cerchiamo di costruire. Visto che A sta in p^J ma né in q^J né in r^J deve essere $\varphi(A) = 3$, dato che 3 è l'unico elemento di D^I che sta in p^I ma né in q^I né in r^I. Per la stessa ragione deve essere $\varphi(C) = \varphi(D) = 3$. Invece B appartiene a q^J e a r^J ma non a p^J: quindi deve essere $\varphi(B) = 1$. Infine E e F appartengono a p^J e a q^J ma non a r^J: deve essere $\varphi(E) = \varphi(F) = 0$. Questo completa la definizione dell'omomorfismo forte.

Si noti che tutte le scelte sono state obbligate, ma l'omomorfismo non è suriettivo (2 non appartiene all'immagine di φ). Infatti 2 appartiene sia a p^I che a q^I che a r^I, mentre in J non vi è nessun elemento con la proprietà analoga. Questo significa che non esiste nessun omomorfismo forte suriettivo di J in I.

8. Per mostrare la conseguenza logica utilizziamo l'Algoritmo 10.49 delle dispense e costruiamo (utilizzando le convenzioni 10.20 e 10.22) un tableau chiuso con la radice etichettata dagli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione dell'enunciato a destra. Indichiamo con F, G, H e K le γ-formule $\forall x(p(x) \to \neg\exists y\, r(x, y))$, $\forall z(\forall u\, \neg r(z, u) \to \neg p(z))$, $\neg\exists u\, \neg p(u)$ e $\neg\exists y\, r(a, y)$. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$F, G, \underline{H}$$
$$|$$
$$\underline{F}, G, H, p(a)$$
$$|$$
$$F, \underline{p(a) \to K}, G, H, p(a)$$

$$F, \neg p(a), G, H, p(a) \qquad\qquad F, K, \underline{G}, H, p(a)$$
$$\otimes \qquad\qquad\qquad\qquad |$$
$$F, K, G, \underline{\forall u\, \neg r(a, u) \to \neg p(a)}, H, p(a)$$

$$F, K, G, \neg\forall u\, \neg r(a, u), H, p(a) \qquad F, K, G, \neg p(a), H, p(a)$$
$$| \qquad\qquad\qquad\qquad \otimes$$
$$F, \underline{K}, G, r(a, b), H, p(a)$$
$$|$$
$$F, K, \neg r(a, b), G, r(a, b), H, p(a)$$
$$\otimes$$

9. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{\exists z\, r(z, f(z)) \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(\forall y\, \neg r(y, x) \lor \neg p(g(x)))}{\forall y\, \neg r(y, f(z)) \lor \neg p(g(f((z)))))} \qquad \dfrac{[r(z, f(z))]^2 \qquad \dfrac{[\forall y\, \neg r(y, f(z))]^1}{\neg r(z, f(z))}}{\bot} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall y\, p(y)]^3}{[p(g(f(z)))]^3} \qquad [\neg p(g(f(z)))]^1}{\bot}}{\bot}\,{}_1}{\bot}\,{}_2}{\neg\forall y\, p(y)}\,{}^3$$

Notate che l'ordine di applicazione delle ultime tre regole può essere cambiato.

Prova scritta di Logica Matematica
17 settembre 2018

Cognome Nome Matricola

Indicate su ogni foglio che consegnate cognome, nome e numero di matricola.

Nella prima parte ogni riposta corretta vale 1, ogni risposta sbagliata -1, ogni risposta non data 0. Il punteggio minimo per superare questa parte è 6. Il punteggio che eccede 6 viene sommato al risultato della seconda parte per ottenere il voto dello scritto.

Nella seconda parte per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

a. Quante sono le variabili libere nella formula
$\forall y(\forall x\, r(x, f(y, x)) \to \forall u(\exists z\, r(z, u) \to r(u, f(y, u))))$? **0 | 1 | 2 | 3 | 4**

b. $p \wedge (\neg(q \to r) \vee \neg(q \vee \neg r)) \equiv (q \wedge p \to r) \to \neg(p \to q) \wedge r$. **V | F**

c. Se $F \vee G \vDash H$ allora $F \vDash H$ e $G \vDash H$. **V | F**

d. Questo albero rappresenta una deduzione naturale corretta: **V | F**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y\, r(a,y)}{r(a,y)}}{\exists v\, r(a,f(v))} \qquad \dfrac{\forall z(\exists v\, r(z,f(v)) \to q(z))}{\exists v\, r(a,f(v)) \to q(a)}}{q(a)}$$

e. Esiste un insieme di Hintikka che contiene gli enunciati $\forall y\, r(a, y)$,
$r(c, c)$ e $\exists x\, \neg r(x, c)$. **V | F**

f. La sostituzione $\{x/f(z, y)\}$ è ammissibile in $\exists u(\forall y\, r(u, f(y, x)) \wedge r(f(u, z), x))$. **V | F**

g. $\exists y\, \forall x\, r(x, y) \equiv \forall x\, \exists y\, r(x, y)$. **V | F**

h. Un tableau predicativo aperto è finito. **V | F**

i. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{A, B, C, D, E\}$, $p^I = \{B, E\}$, $q^I = \{A, C, E\}$,
$f^I(A) = E$, $f^I(B) = B$, $f^I(C) = B$, $f^I(D) = C$, $f^I(E) = A$.
Allora $I \vDash \forall z(\neg p(z) \wedge q(f(z)) \to p(f(f(z))))$. **V | F**

j. Se $\sim$ è una relazione di congruenza su I e $d_0 \sim d_1$ allora $g^I(d_0) \sim g^I(d_1)$. **V | F**

k. Scrivete nel riquadro l'enunciato del teorema di completezza
per la deduzione naturale predicativa.

SECONDA PARTE

Usate il retro del foglio per svolgere tutti gli esercizi salvo il numero 2.

1. Usando l'algoritmo di Fitting mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big(\neg(p \to \neg(\neg q \to r)) \land (s \to \neg(\neg t \lor u))\big).$$

2. Sia $\{b, m, p, c, g, a\}$ un linguaggio dove b e m sono simboli di costante, p è un simbolo di funzione unario, c e g sono simboli di relazione unari e a è un simbolo di relazione binario. Interpretando b come "Bobi", m come "Micio", $p(x)$ come "il padrone di x", $c(x)$ come "x è un cane", $g(x)$ come "x è un gatto" e $a(x, y)$ come "x ama y", traducete le seguenti frasi:

(i) Bobi è un cane che ama sia il suo padrone che quello del gatto Micio; 3pt

(ii) i cani che non amano nessun gatto hanno padroni che amano qualche gatto. 3pt

3. Usando il metodo dei tableaux stabilite se l'insieme di formule 3pt

$$\{p \lor \neg q, (r \to \neg p) \land (\neg s \to q \lor t), \neg(\neg t \land r \to s)\}$$

è soddisfacibile. Se l'insieme è soddisfacibile definite una valutazione che lo testimoni.

4. Mettete in forma prenessa la formula 2pt

$$\forall x(\neg\exists y\, \neg r(y, x) \to \neg\forall z\, p(f(z, x))) \land \neg\exists u\, \forall v\, p(f(u, v)).$$

Se riuscite, usate il minimo numero di quantificatori possibili. 1pt

5. Dimostrate che 4pt

$$\exists x\, r(x, g(x)), \forall y(\forall x\, \neg r(y, x) \lor (p(y) \land p(f(y)))), \forall v(p(v) \to \neg p(g(v))) \vDash \exists z(p(z) \land \neg p(g(f(z)))).$$

6. Dimostrate che l'insieme di enunciati 4pt

$$\{\exists x\, \neg p(x), \forall y\, r(f(y), y), \forall v\, \forall w(r(w, v) \to \neg r(v, w) \land (p(v) \lor p(w)))\}$$

è soddisfacibile.

7. Sia $\mathcal{L} = \{p, q, r\}$ il linguaggio con tre simboli di relazione unari. Siano I e J le seguenti interpretazioni per $\mathcal{L}$: 3pt

$$D^I = \{A, B, C, D\}, \quad p^I = \{A, B, D\}, \quad q^I = \{A, C, D\}, \quad r^I = \{C, D\};$$

$$3^J = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \quad p^J = \{0, 2, 3, 4, 5\}, \quad q^J = \{1, 4, 5\}, \quad r^J = \{1\}.$$

Definite un omomorfismo forte di J in I.

esiste un omomorfismo forte suriettivo di J in I? Giustificate la vostra risposta.

8. Usando il metodo dei tableaux stabilite che 4pt

$$\forall x(\neg p(x) \to \neg\exists y\, r(y, x)), \forall z(\forall w\, \neg r(w, z) \to p(z)) \vDash \exists u\, p(u).$$

9. Dimostrate, usando solo le regole della deduzione naturale predicativa (comprese le sei regole derivate) che 5pt

$$\forall x(\forall y\, \neg r(x, y) \lor \neg p(f(x))), \exists z\, r(g(z), z) \rhd \neg\forall y\, p(y).$$

Soluzioni

a. 0 la formula in questione è infatti un enunciato.

b. V come si verifica per esempio con le tavole di verità.

c. V per verificare che $F \models H$ sia v tale che $v(F) = \mathbf{V}$; allora si ha anche $v(F \vee G) = \mathbf{V}$ e dall'ipotesi segue $v(H) = \mathbf{V}$; l'argomento per verificare che $G \models H$ è simmetrico.

d. F la presunta applicazione di $(\exists i)$ non è corretta, perché $r(a, y)$ non si ottiene per sostituzione da $r(a, f(v))$.

e. V $\{\forall y\, r(a, y), r(c, c), \exists x\, \neg r(x, c), \neg r(b, c), r(a, a), r(a, b), r(a, c)\}$ è un insieme di Hintikka.

f. F perché $f(z, y)$ non è libero per la sostituzione al posto della prima occorrenza di x nella formula: infatti questa occorrenza è contenuta nella sottoformula $\forall y\, r(u, f(y, x))$ e y compare in $f(z, y)$.

g. F come indicato nell'Esercizio 7.31 delle dispense.

h. F come evidenziato dall'Esempio 10.13 delle dispense.

i. F perché $I, \sigma[z/A] \not\models \neg p(z) \wedge q(f(z)) \to p(f(f(z)))$.

j. V è un caso particolare del secondo punto della Definizione 9.19 delle dispense.

k. Se $T \models F$ allora $T \rhd F$.

1. Utilizziamo l'Algoritmo 3.22 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.29:

$$\big\langle [\neg\big(\neg(p \to \neg(\neg q \to r)) \wedge (s \to \neg(\neg t \vee u))\big)]\big\rangle$$
$$\langle [p \to \neg(\neg q \to r), \neg(s \to \neg(\neg t \vee u))]\rangle$$
$$\langle [\neg p, \neg(\neg q \to r), \neg(s \to \neg(\neg t \vee u))]\rangle$$
$$\langle [\neg p, \neg q, \neg(s \to \neg(\neg t \vee u))], [\neg p, \neg r, \neg(s \to \neg(\neg t \vee u))]\rangle$$
$$\langle [\neg p, \neg q, s], [\neg p, \neg q, \neg t \vee u], [\neg p, \neg r, s], [\neg p, \neg r, \neg t \vee u]\rangle$$
$$\langle [\neg p, \neg q, s], [\neg p, \neg q, \neg t, u], [\neg p, \neg r, s], [\neg p, \neg r, \neg t, u]\rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \vee \neg q \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg t \vee u) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg t \vee u).$$

2. (i) $c(b) \wedge a(b, p(b)) \wedge a(b, p(m)) \wedge g(m)$;

(ii) $\forall x(c(x) \wedge \forall y(g(y) \to \neg a(x, y)) \to \exists z(g(z) \wedge a(p(x), z)))$ oppure $\forall x(c(x) \wedge \neg\exists y(g(y) \wedge a(x, y)) \to \exists z(g(z) \wedge a(p(x), z)))$ (i due enunciati sono logicamente equivalenti).

3. Per stabilire la soddisfacibilità dell'insieme di formule applichiamo l'Algoritmo 4.39 delle dispense. Costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.31 e 4.32) un tableau con la radice etichettata dall'insieme e in ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

- $p \lor \neg q, \underline{(r \to \neg p) \land (\neg s \to q \lor t)}, \neg(\neg t \land r \to s)$
  - $p \lor \neg q, r \to \neg p, \neg s \to q \lor t, \underline{\neg(\neg t \land r \to s)}$
    - $p \lor \neg q, r \to \neg p, \neg s \to q \lor t, \underline{\neg t \land r}, \neg s$
      - $p \lor \neg q, \underline{r \to \neg p}, \neg s \to q \lor t, \neg t, r, \neg s$
        - $p \lor \neg q, \neg r, \neg s \to q \lor t, \neg t, r, \neg s$ $\otimes$
        - $\underline{p \lor \neg q}, \neg p, \neg s \to q \lor t, \neg t, r, \neg s$
          - $p, \neg p, \neg s \to q \lor t, \neg t, r, \neg s$ $\otimes$
          - $\neg q, \neg p, \underline{\neg s \to q \lor t}, \neg t, r, \neg s$
            - $\neg q, \neg p, s, \neg t, r, \neg s$ $\otimes$
            - $\neg q, \neg p, \underline{q \lor t}, \neg t, r, \neg s$
              - $\neg q, \neg p, q, \neg t, r, \neg s$ $\otimes$
              - $\neg q, \neg p, t, \neg t, r, \neg s$ $\otimes$

Il tableau è chiuso e quindi l'insieme di formule non è soddisfacibile.

4. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\forall x(\neg\exists y\,\neg r(y,x) \to \neg\forall z\, p(f(z,x))) \land \neg\exists u\,\forall v\, p(f(u,v))$$
$$\forall x(\forall y\, r(y,x) \to \exists z\,\neg p(f(z,x))) \land \forall u\,\exists v\,\neg p(f(u,v))$$
$$\forall x\,\exists y(r(y,x) \to \neg p(f(y,x))) \land \forall u\,\exists v\,\neg p(f(u,v))$$
$$\forall x\big(\exists y(r(y,x) \to \neg p(f(y,x))) \land \exists v\,\neg p(f(x,v))\big)$$
$$\forall x\,\exists y\,\exists v\big((r(y,x) \to \neg p(f(y,x))) \land \neg p(f(x,v))\big)$$

5. Supponiamo che I sia un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, che chiamiamo F, G e H.

Dato che $I \vDash F$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $(d_0, g^I(d_0)) \in r^I$. Da $I \vDash G$ segue in particolare che $I, \sigma[y/d_0] \vDash \forall x\,\neg r(y,x) \lor (p(y) \land p(f(y)))$. Osserviamo che, dato che $I, \sigma[y/d_0, x/g^I(d_0)] \nvDash \neg r(y,x)$, si ha $I, \sigma[y/d_0] \nvDash \forall x\,\neg r(y,x)$. Quindi $I, \sigma[y/d_0] \vDash p(y) \land p(f(y))$, cioé $d_0 \in p^I$ e $f^I(d_0) \in p^I$.

Dato che $I \vDash H$ si ha in particolare che $I, \sigma[v/f^I(d_0)] \vDash p(v) \to \neg p(g(v))$. Da $f^I(d_0) \in p^I$ segue allora $g^I(f^I(d_0)) \notin p^I$.

Abbiamo ottenuto $d_0 \in p^I$ e $g^I(f^I(d_0)) \notin p^I$, cioè $I, \sigma[z/d_0] \vDash p(z) \land \neg p(g(f(z)))$ che conduce a $I \vDash \exists z(p(z) \land \neg p(g(f(z))))$, come desiderato.

6. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati. Due interpretazioni con queste caratteristiche sono:

$$D^I = \{0,1,2\}, \quad f^I(0) = 1, f^I(1) = 2, f^I(2) = 3, \quad p^I = \{1,2\}, \quad r^I = \{(0,2),(1,0),(2,1)\};$$
$$D^J = \mathbb{N}, \quad f^J(n) = n+1, \quad p^J = \{\, n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari} \,\}, \quad r^J = \{\, (n+1, n) : n \in \mathbb{N} \,\}.$$

7. Sia φ l'omomorfismo forte di J in I che cerchiamo di costruire. Visto che 0 sta in p^J ma né in q^J né in r^J deve essere $\varphi(0) = B$, dato che B è l'unico elemento di D^I che sta in p^I ma né in q^I né in r^I. Per la stessa ragione deve essere $\varphi(2) = \varphi(3) = B$. Invece 1 appartiene a q^J e a r^J ma non a p^J: quindi deve essere $\varphi(1) = C$. Infine 4 e 5 appartengono a p^J e a q^J ma non a r^J: deve essere $\varphi(4) = \varphi(5) = A$. Questo completa la definizione dell'omomorfismo forte.

Si noti che tutte le scelte sono state obbligate, ma l'omomorfismo non è suriettivo (D non appartiene all'immagine di φ). Infatti D appartiene sia a p^I che a q^I che a r^I, mentre in J non vi è nessun elemento con la proprietà analoga. Questo significa che non esiste nessun omomorfismo forte suriettivo di J in I.

8. Per mostrare la conseguenza logica utilizziamo l'Algoritmo 10.49 delle dispense e costruiamo (utilizzando le convenzioni 10.20 e 10.22) un tableau chiuso con la radice etichettata dagli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione dell'enunciato a destra. Indichiamo con F, G, H e K le γ-formule $\forall x(\neg p(x) \to \neg\exists y\, r(y,x))$, $\forall z(\forall w\, \neg r(w,z) \to p(z))$, $\neg\exists u\, p(u)$ e $\neg\exists y\, r(y,c)$. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$
\begin{array}{c}
F, G, \underline{H} \\
| \\
\underline{F}, G, H, \neg p(c) \\
| \\
F, \underline{\neg p(c) \to K}, G, H, \neg p(c) \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} F, p(c), G, H, \neg p(c) \\ \otimes \end{array}
&
\begin{array}{c}
F, K, \underline{G}, H, \neg p(c) \\
| \\
F, K, G, \underline{\forall w\, \neg r(w,c) \to p(c)}, H, \neg p(c) \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
F, K, G, \neg\forall w\, \neg r(w,c), H, \neg p(c) \\
| \\
F, \underline{K}, G, r(a,c), H, \neg p(c) \\
| \\
F, K, \neg r(a,c), G, r(a,c), H, \neg p(c) \\
\otimes
\end{array}
&
\begin{array}{c} F, K, G, p(c), H, \neg p(c) \\ \otimes \end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

9. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$
\dfrac{\dfrac{\exists z\, r(g(z),z) \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(\forall y\, \neg r(x,y) \lor \neg p(f(x)))}{\forall y\, \neg r(g(z),y) \lor \neg p(f(g(z)))} \qquad \dfrac{[r(g(z),z)]^2 \qquad \dfrac{[\forall y\, \neg r(g(z),y)]^1}{\neg r(g(z),z)}}{\bot} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall y\, p(y)]^3}{[p(f(g(z)))]^3} \qquad [\neg p(f(g(z)))]^1}{\bot}}{\bot}\,{}_1}{\bot}\,{}_2}{\neg\forall y\, p(y)}\,{}^3
$$

Notate che l'ordine di applicazione delle ultime tre regole può essere cambiato.