Prova scritta straordinaria di Logica Matematica
27 giugno 2018

Cognome Nome Matricola

Indicate su ogni foglio che consegnate cognome, nome e numero di matricola.

Nella prima parte ogni riposta corretta vale 1, ogni risposta sbagliata -1, ogni risposta non data 0. Il punteggio minimo per superare questa parte è 6. Il punteggio che eccede 6 viene sommato al risultato della seconda parte per ottenere il voto dello scritto.

Nella seconda parte per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

a. $(p \wedge q \to r) \to \neg(q \vee r) \equiv (\neg r \to p \vee q) \to \neg(\neg p \vee (q \wedge r)) \wedge (q \vee \neg r)$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

b. $F \to G \vDash \neg F$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

c. Se $F \vee G \vDash H$ allora $F \vDash H$ e $G \vDash H$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

d. Se un insieme di formule proposizionali contiene una coppia complementare allora è insoddisfacibile. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

e. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{A, B, C, D, E\}$, $p^I = \{A, C, D\}$, $q^I = \{C, E\}$, $r^I = \{(A, A), (A, B), (B, C), (C, E), (D, A), (D, C), (E, C)\}$.
Allora $I \vDash \forall x(p(x) \vee q(x) \to \exists y(r(x, y) \wedge (\neg p(y) \vee \neg q(y))))$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

f. $\exists x\, \exists y\, r(x, y) \equiv \exists y\, \exists x\, r(x, y)$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

g. Se $\sim$ è una relazione di congruenza su I, $d_0 \in p^I$ e $d_1 \in p^I$ allora $d_0 \sim d_1$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

h. Quante delle formule seguenti sono δ-formule? $\neg\forall x\, \neg r(x, f(x))$, $\exists y\, r(c, f(x)) \wedge \neg r(c, c)$, $\exists x\, r(x, f(x))$, $p(c) \to \exists x\, r(x, f(x))$. $\boxed{\mathbf{0}}\boxed{\mathbf{1}}\boxed{\mathbf{2}}\boxed{\mathbf{3}}\boxed{\mathbf{4}}$

i. Esiste un insieme di Hintikka che contiene le formule $\forall x\, \neg q(x)$, $q(a) \vee \neg p(b)$ e $\exists x\, p(x)$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

j. Questo albero rappresenta una deduzione naturale corretta: $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

$$\dfrac{\exists x\, q(x) \qquad \dfrac{\dfrac{[q(x)]^1 \qquad \dfrac{\forall z(q(z) \to \neg p(f(z)))}{q(x) \to \neg p(f(x))}}{\neg p(f(x))}}{\exists u\, \neg p(u)}}{\exists u\, \neg p(u)}\,{\scriptstyle 1}$$

k. Scrivete nel riquadro l'enunciato del risultato che collega gli omomorfismi forti suriettivi e l'equivalenza elementare.

SECONDA PARTE

Usate il retro del foglio per svolgere tutti gli esercizi salvo il numero 6.

1. Usando l'algoritmo di Fitting mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$(\neg p \to q \wedge r) \to \neg(\neg s \vee (t \wedge u)) \vee v.$$

2. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$(p \to \neg q \vee r) \wedge (\neg r \to p \vee q) \vDash \neg q \to r.$$

Se la conseguenza logica non vale definite una valutazione che lo testimoni.

3. Dimostrate che l'insieme di enunciati 4pt

$$\{\forall x(\neg p(x) \vee \forall y\, r(x,y)), \exists z\, \neg r(z, f(z)), \forall y(\exists v\, \neg r(v, f(y)) \to p(y))\}$$

è insoddisfacibile.

4. Dimostrate che l'insieme di enunciati 4pt

$$\{\forall x\, \forall y(r(x,y) \to p(x) \wedge \neg p(y)), \forall u\, \exists v(r(u,v) \vee r(v,u)), \forall x\big(p(x) \to \neg\forall y(p(y) \vee r(x,y))\big)\}$$

è soddisfacibile.

5. Mettete in forma prenessa la formula 2pt

$$\neg\big(\forall z\, p(z) \to \exists x\, r(x, f(x))\big) \wedge \big(\neg\forall x\, \exists y\, \neg r(x,y) \vee \forall x\, \exists y\, r(x, f(y))\big).$$

Se riuscite, usate il minimo numero di quantificatori possibili. 1pt

6. Sia $\mathcal{L} = \{b, c, p, m, a\}$ un linguaggio dove b e c sono simboli di costante, p è un simbolo di funzione unario, m è un simbolo di relazione unario e a è un simbolo di relazione binario. Interpretando b come "Barbara", c come "Claudio", $p(x)$ come "il padre di x", $m(x)$ come "x è un matematico", $a(x,y)$ come "x è amico di y", traducete le seguenti frasi:

(i) il padre di Claudio è un matematico amico di Barbara ma non di suo (di Barbara) padre; 3pt

(ii) C'è un matematico che è amico di tutti i matematici che sono amici del nonno paterno di Barbara. 3pt

7. Sia I l'interpretazione definita da $D^I = \{A, B, C, D, E, F\}$, $p^I = \{A, B, D\}$ e $q^I = \{B, C, F\}$. J è un'altra interpretazione per lo stesso linguaggio con $D^J = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $p^J = \{0, 2\}$ e $q^J = \{0, 4\}$. Definite un omomorfismo forte di I in J. Si può definire un omomorfismo forte suriettivo di I in J? Giustificate la vostra risposta. 3pt

8. Usando il metodo dei tableaux stabilite la validità dell'enunciato 4pt

$$\exists x(\neg p(x) \wedge \forall y\, r(x,y)) \wedge \forall x(\forall y\, r(y,x) \to p(x)) \to \exists x\, \neg\forall y(r(x,y) \to r(y,x)).$$

9. Dimostrate, usando solo le regole della deduzione naturale predicativa (comprese le sei regole derivate) che 5pt

$$\forall x(\exists y\, r(f(y), x) \vee \neg p(x)), p(a), \forall z(\exists u\, r(z,u) \to q(z)) \rhd \exists v\, q(f(v)).$$

Soluzioni

a. V come si verifica per esempio con le tavole di verità.

b. F ad esempio $p \to p \not\models \neg p$, dato che se $v(p) = \mathbf{V}$ si ha $v(p \to p) = \mathbf{V}$ ma $v(\neg p) = \mathbf{F}$.

c. V per la transitività di $\models$ e perché $F \models F \vee G$ e $G \models F \vee G$.

d. V per il Lemma 3.3 delle dispense.

e. F perché $I, \sigma[x/E] \models p(x) \vee q(x)$ ma $I, \sigma[x/E] \not\models \exists y(r(x, y) \wedge (\neg p(y) \vee \neg q(y)))$.

f. V perché i due enunciati sono le chiusura esistenziali di $r(x, y)$ e si può applicare il Corollario 7.29 delle dispense. Si può anche usare l'Esercizio 7.31 delle dispense.

g. F un controesempio è fornito da $D^I = p^I = \{d_0, d_1\}$ e $\sim$ l'identità (che è sempre una relazione di congruenza, come notato nell'Esempio 9.20 delle dispense).

h. 2 la prima e la terza formula sono δ-formule, mentre la seconda è una α-formula e la quarta una β-formula.

i. V $\{\forall x\, \neg q(x), \neg q(a), \neg q(b), q(a) \vee \neg p(b), \neg p(b), \exists x\, p(x), p(a)\}$ è un insieme di Hintikka.

j. V tutte le regole sono usate correttamente; in particolare l'uso di $(\exists e)$ è corretto perché x non è libero né in $\forall z(q(z) \to \neg p(f(z)))$ né in $\exists u\, \neg p(u)$.

k. E' il Corollario 9.13 delle dispense: se I e J sono interpretazioni per un linguaggio $\mathcal{L}$ e esiste un omomorfismo forte suriettivo di I in J, allora $I \equiv_{\mathcal{L}} J$.

1. Utilizziamo l'Algoritmo 3.18 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.29:

$$
\begin{gathered}
\langle [(\neg p \to q \wedge r) \to \neg(\neg s \vee (t \wedge u)) \vee v] \rangle \\
\langle [\neg(\neg p \to q \wedge r), \neg(\neg s \vee (t \wedge u)) \vee v] \rangle \\
\langle [\neg(\neg p \to q \wedge r), \neg(\neg s \vee (t \wedge u)), v] \rangle \\
\langle [\neg p, \neg(\neg s \vee (t \wedge u)), v], [\neg(q \wedge r), \neg(\neg s \vee (t \wedge u)), v] \rangle \\
\langle [\neg p, \neg(\neg s \vee (t \wedge u)), v], [\neg q, \neg r, \neg(\neg s \vee (t \wedge u)), v] \rangle \\
\langle [\neg p, s, v], [\neg p, \neg(t \wedge u), v], [\neg q, \neg r, s, v], [\neg q, \neg r, \neg(t \wedge u), v] \rangle \\
\langle [\neg p, s, v], [\neg p, \neg t, \neg u, v], [\neg q, \neg r, s, v], [\neg q, \neg r, \neg t, \neg u, v] \rangle
\end{gathered}
$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \vee s \vee v) \wedge (\neg p \vee \neg t \vee \neg u \vee v) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee s \vee v) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \neg t \vee \neg u \vee v).$$

2. Per stabilire se sussista la conseguenza logica utilizziamo l'Algoritmo 4.40 delle dispense e costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.31 e 4.32) un tableau con la radice etichettata dalla formula a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione di quella a destra. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$\underline{(p \to \neg q \vee r) \wedge (\neg r \to p \vee q)}, \neg(\neg q \to r)$$

$$|$$

$$p \to \neg q \vee r, \neg r \to p \vee q, \underline{\neg(\neg q \to r)}$$

$$|$$

$$p \to \neg q \vee r, \underline{\neg r \to p \vee q}, \neg q, \neg r$$

$$\begin{array}{cc} p \to \neg q \vee r, r, \neg q, \neg r & p \to \neg q \vee r, \underline{p \vee q}, \neg q, \neg r \\ \otimes & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \underline{p \to \neg q \vee r}, p, \neg q, \neg r & p \to \neg q \vee r, q, \neg q, \neg r \\ & \otimes \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \neg p, p, \neg q, \neg r & \underline{\neg q \vee r}, p, \neg q, \neg r \\ \otimes & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \neg q, p, \neg q, \neg r & r, p, \neg q, \neg r \\ \bigcirc & \otimes \end{array}$$

Il tableau è aperto e quindi la conseguenza logica non vale. Un'interpretazione che lo testimonia è data da $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{F}$, $v(r) = \mathbf{F}$.

3. Supponiamo per assurdo che I sia un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati, che chiamiamo F, G e H.

Dato che $I \vDash G$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $(d_0, f^I(d_0)) \notin r^I$. Da $I \vDash H$ segue in particolare che $I, \sigma[y/d_0] \vDash \exists v\, \neg r(v, f(y)) \to p(y)$ e, dato che $I, \sigma[y/d_0, v/d_0] \vDash \neg r(v, f(y))$, si ha $d_0 \in p^I$. D'altra parte $I \vDash F$ implica in particolare che $I, \sigma[x/d_0] \vDash \neg p(x) \vee \forall y\, r(x, y)$ e perciò che deve valere almeno uno tra $d_0 \notin p^I$ e $I, \sigma[x/d_0] \vDash \forall y\, r(x, y)$. La prima di queste possibilità contraddice quanto ottenuto in precedenza, mentre la seconda implicherebbe che $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$, contraddicendo un'altra delle nostre conclusioni. Abbiamo dunque ottenuto la contraddizione che volevamo.

4. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati. Due interpretazioni normali con queste caratteristiche sono definite da

$$D^I = \{0, 1, 2, 3\}, \quad p^I = \{0, 2\}, \quad r^I = \{(0, 1), (2, 3)\};$$

$$D^J = \mathbb{N}, \quad p^J = \{\, n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari} \,\}, \quad r^J = \{\, (2n, 2n+1) : n \in \mathbb{N} \,\}.$$

5. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\neg\big(\forall z\, p(z) \to \exists x\, r(x, f(x))\big) \wedge \big(\neg \forall x\, \exists y\, \neg r(x, y) \vee \forall x\, \exists y\, r(x, f(y))\big)$$

$$\neg \exists x \big(p(x) \to r(x, f(x))\big) \wedge \big(\exists x\, \forall y\, r(x, y) \vee \forall x\, \exists y\, r(x, f(y))\big)$$

$$\forall x \neg\big(p(x) \to r(x, f(x))\big) \wedge \forall x \big(\exists x\, \forall y\, r(x, y) \vee \exists y\, r(x, f(y))\big)$$

$$\forall x \neg\big(p(x) \to r(x, f(x))\big) \wedge \forall x\, \exists u \big(\forall y\, r(u, y) \vee r(x, f(u))\big)$$

$$\forall x \neg\big(p(x) \to r(x, f(x))\big) \wedge \forall x\, \exists u\, \forall y \big(r(u, y) \vee r(x, f(u))\big)$$

$$\forall x \big(\neg(p(x) \to r(x, f(x))) \wedge \exists u\, \forall y (r(u, y) \vee r(x, f(u)))\big)$$

$$\forall x\, \exists u\, \forall y \big(\neg(p(x) \to r(x, f(x))) \wedge (r(u, y) \vee r(x, f(u)))\big)$$

6. (i) $m(p(c)) \wedge a(p(c), b) \wedge \neg a(p(c), p(b))$;
(ii) $\exists x(m(x) \wedge \forall y(m(y) \wedge a(y, p(p(b))) \to a(x, y)))$.

7. Sia φ l'omomorfismo forte di I in J che cerchiamo di costruire. Dato che B sta sia in p^I che in q^I deve essere $\varphi(B) = 0$, dato che 0 è l'unico elemento di D^J che sta sia in p^J che in q^J. Similmente, E, 1 e 3 sono gli unici elementi a non soddisfare né p né q. Quindi $\varphi(E) = 1$ oppure $\varphi(E) = 3$. Invece A e D soddisfano p ma non q, esattamente come 2, mentre C, F e 4 soddisfano q ma non p. Quindi $\varphi(A) = \varphi(D) = 2$ e $\varphi(C) = \varphi(F) = 4$. Qualunque sia la scelta fatta riguardo a $\varphi(E)$ l'omomorfismo forte non sarà suriettivo (perché uno tra 1 e 3 non apparterrà all'immagine) e la risposta all'ultima domanda è negativa.

8. Per mostrare la validità dell'enunciato utilizziamo l'Algoritmo 10.17 delle dispense e costruiamo (utilizzando le convenzioni 10.20 e 10.22) un tableau chiuso con la radice etichettata dalla negazione dell'enunciato. Indichiamo con F, G, H e K le γ-formule $\forall x(\forall y\, r(y, x) \to p(x))$, $\neg\exists x\, \neg\forall y(r(x, y) \to r(y, x))$, $\forall y\, r(a, y)$ e $\forall y(r(a, y) \to r(y, a))$. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$\underline{\neg\big(\exists x(\neg p(x) \wedge \forall y\, r(x, y)) \wedge F \to \exists x\, \neg\forall y(r(x, y) \to r(y, x))\big)}$$
$$\mid$$
$$\underline{\exists x(\neg p(x) \wedge \forall y\, r(x, y)) \wedge F}, G$$
$$\mid$$
$$\underline{\exists x(\neg p(x) \wedge \forall y\, r(x, y))}, F, G$$
$$\mid$$
$$\neg p(a) \wedge \forall y\, r(a, y), F, G$$
$$\mid$$
$$\neg p(a), H, \underline{F}, G$$
$$\mid$$
$$\neg p(a), H, F, \underline{\forall y\, r(y, a) \to p(a)}, G$$
$$\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
\neg p(a), H, F, \neg\forall y\, r(y, a), G & \neg p(a), H, F, p(a), G \\
\mid & \otimes \\
\neg p(a), H, F, \neg r(b, a), \underline{G} & \\
\mid & \\
\neg p(a), H, F, \neg r(b, a), G, \underline{K} & \\
\mid & \\
\neg p(a), H, F, \neg r(b, a), G, K, r(a, b) \to r(b, a) &
\end{array}$$
$$\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
\neg p(a), \underline{H}, F, \neg r(b, a), G, K, \neg r(a, b) & \neg p(a), H, F, \neg r(b, a), G, K, r(b, a) \\
\mid & \otimes \\
\neg p(a), H, r(a, b), F, \neg r(b, a), G, K, \neg r(a, b) & \\
\otimes &
\end{array}$$

Si noti l'importanza di scegliere in modo opportuno le istanze delle γ-formule (se le scelte non sono appropriate il tableaux cresce rapidamente di dimensione).

9. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$
\dfrac{
\dfrac{\forall x(\exists y\, r(f(y),x) \lor \neg p(x))}{\exists y\, r(f(y),a) \lor \neg p(a)}
\qquad
\dfrac{[\exists y\, r(f(y),a)]^2 \qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[r(f(y),a)]^1}{\exists u\, r(f(y),u)} \quad \dfrac{\forall z(\exists u\, r(z,u) \to q(z))}{\exists u\, r(f(y),u) \to q(f(y))}}{q(f(y))}}{\exists v\, q(f(v))}
}{\exists v\, q(f(v))}{\scriptstyle 1}
\qquad
\dfrac{\dfrac{p(a) \quad [\neg p(a)]^2}{\bot}}{\exists v\, q(f(v))}
}{\exists v\, q(f(v))}{\scriptstyle 2}
$$