Prova scritta di Logica Matematica 1
27 luglio 2011

Cognome Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $p \to \neg q \vee (r \wedge p) \equiv q \to (p \to r)$. **V** | **F** 1pt

2. Se G e H sono state ottenute con due diverse applicazioni dell'algoritmo di Fitting per la forma normale congiuntiva a partire dalla stessa formula F, allora $G \equiv H$. **V** | **F** 1pt

3. Quante delle seguenti formule sono enunciati?
$p(a) \to \neg\exists x\, r(f(a), x)$, $\forall x\, \exists y\, p(g(f(x), y))$,
$\neg p(g(a, f(f(c))))$, $\forall x(p(f(x)) \to \exists z\, \forall y\, p(g(x, g(y, z))))$. **0** | **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

4. $\exists x(p(x) \wedge \neg q(x)) \equiv \exists x\, p(x) \wedge \neg\forall x\, q(x)$. **V** | **F** 1pt

5. Se $I \models \mathsf{Eq}_{\mathcal{L}}$ allora I è un'interpretazione normale del linguaggio con uguaglianza $\mathcal{L}$. **V** | **F** 1pt

6. Se F è una γ-formula e G un'istanza di F allora $G \models F$. **V** | **F** 1pt

7. L'algoritmo dei tableaux sistematici per la logica predicativa ha la proprietà della terminazione forte. **V** | **F** 1pt

8. Se Γ è un insieme di Hintikka cui appartengono sia $\forall x(p(x) \to q(x))$ che $p(a)$, allora $q(a) \in \Gamma$. **V** | **F** 1pt

9. Se $\Gamma \rhd_{=} F$ allora $\Gamma \models_{=} F$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x(p(x) \to p(f(x)) \wedge r(x, a)), \exists x\, p(x) \models \exists x\, \exists y\, r(f(x), y).$$

11. Sul retro del foglio dimostrate la soddisfacibilità di 4pt

$$\{\forall x\, \exists y\, r(x, y), \forall x\, \forall y(r(x, y) \to (p(x) \vee p(y)) \wedge (\neg p(x) \vee \neg p(y))), \exists y\, \forall x\, \neg r(x, y)\}.$$

12. Sia $\mathcal{L} = \{c, m, p, t, a\}$ un linguaggio dove c è un simbolo di costante, m e p sono simboli di funzione unari, t è un simbolo di relazione unario e a sono simboli di relazione binari. Interpretando c come "Claudio", $m(x)$ come "la madre di x", $p(x)$ come "il padre di x", $t(x)$ come "x ama il teatro", $a(x, y)$ come "x è amico di y", traducete le seguenti frasi utilizzando lo spazio sotto di esse:

(i) il nonno materno di Claudio, ma non sua madre, ama il teatro; 3pt

(ii) se il padre di qualcuno ama il teatro, allora quella persona ama il teatro oppure ha un amico che lo ama. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$p \to \neg\big((\neg p \lor (q \land r)) \land (p \to \neg t \lor s)\big) \lor \big((s \to \neg q) \to \neg(\neg r \lor t)\big)$$

è valida. Se la formula non è valida definite un'interpretazione che non la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\exists x(p(x) \lor q(f(x))), \forall x(p(x) \to r(x, a)), \forall x(q(x) \to r(x, a)) \rhd \exists z\, r(z, a).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Utilizzando lo spazio qui sotto mettete in forma prenessa l'enunciato 2pt

$$\exists x\big(\neg\exists y\, \forall z\, r(g(x, z), y) \land \neg\exists w\, \neg r(w, x) \to \exists v\, r(v, g(x, v))\big) \to \forall u\, r(u, u).$$

[Se si usa il minimo numero di quantificatori possibili, 1pt in più.]

Soluzioni

1. **V** come si può verificare ad esempio con le tavole di verità.

2. **V** l'algoritmo di Fitting produce formule logicamente equivalenti a F e quindi tra loro.

3. **4** tutte le formule sono enunciati.

4. **F** si veda l'Esercizio 7.57 delle dispense.

5. **F** si veda l'Esempio 7.97 delle dispense.

6. **F** ad esempio $p(a) \not\models \forall x\, p(x)$ (si confronti il Lemma 10.6 delle dispense).

7. **F** la costruzione sistematica dei tableaux garantisce la completezza del metodo, ma non può avere la proprietà della terminazione forte, che implicherebbe la decidibilità dell'insoddisfacibilità degli enunciati predicativi (si veda la Nota 10.45 delle dispense).

8. **V** $\forall x(p(x) \to q(x)) \in \Gamma$ implica $p(a) \to q(a) \in \Gamma$ e quindi, dato che $p(a) \in \Gamma$, deve essere $q(a) \in \Gamma$.

9. **V** Teorema 11.47 delle dispense.

10. Dobbiamo mostrare che se un'interpretazione I soddisfa i due enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, che indichiamo con F e G, allora soddisfa anche quello a destra, che indichiamo con H. Dato che $I \models G$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $d_0 \in p^I$. Da $I \models F$ segue in particolare che $I, \sigma[x/d_0] \models p(x) \to p(f(x)) \wedge r(x,a)$. Da quest'ultimo fatto e da $d_0 \in p^I$ seguono $f^I(d_0) \in p^I$ e $(d_0, a^I) \in r^I$. Sfruttando nuovamente $I \models G$ abbiamo anche $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \models p(x) \to p(f(x)) \wedge r(x,a)$. Da quest'ultimo fatto e da $f^I(d_0) \in p^I$ segue tra l'altro $(f^I(d_0), a^I) \in r^I$. Ma allora vale $I, \sigma[x/d_0, y/a^I] \models r(f(x), y)$ e quindi $I \models H$.

11. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfi i tre enunciati. L'interpretazione I definita da

$$D^I = \{0,1,2\}, \quad p^I = \{0,2\}, \quad r^I = \{(0,1),(1,2),(2,1)\}$$

ha queste caratteristiche. Anche l'interpretazione J definita da

$$D^J = \mathbb{N}, \quad p^J = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari}\}, \quad r^J = \left\{\, (n,m) \in \mathbb{N}^2 \,:\, m = n+1 \,\right\}.$$

andrebbe bene.

12. (i) $t(p(m(c))) \wedge \neg t(m(c))$;
(ii) $\forall x(t(p(x)) \to t(x) \vee \exists y(a(x,y) \wedge t(y)))$.

13. Per stabilire se la formula è valida costruiamo un tableau per la sua negazione. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. Utilizziamo ripetutamente la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.

- $\underline{\neg\big(p \to \neg\big((\neg p \lor (q \land r)) \land (p \to \neg t \lor s)\big) \lor \big((s \to \neg q) \to \neg(\neg r \lor t)\big)\big)}$
  - $p, \underline{\neg\big(\neg\big((\neg p \lor (q \land r)) \land (p \to \neg t \lor s)\big) \lor \big((s \to \neg q) \to \neg(\neg r \lor t)\big)\big)}$
    - $p, \underline{(\neg p \lor (q \land r)) \land (p \to \neg t \lor s)}, \neg\big((s \to \neg q) \to \neg(\neg r \lor t)\big)$
      - $p, \neg p \lor (q \land r), p \to \neg t \lor s, \underline{\neg\big((s \to \neg q) \to \neg(\neg r \lor t)\big)}$
        - $p, \underline{\neg p \lor (q \land r)}, p \to \neg t \lor s, s \to \neg q, \neg r \lor t$
          - $p, \neg p, p \to \neg t \lor s, s \to \neg q, \neg r \lor t$ $\otimes$
          - $p, \underline{q \land r}, p \to \neg t \lor s, s \to \neg q, \neg r \lor t$
            - $p, q, r, p \to \neg t \lor s, \underline{s \to \neg q}, \neg r \lor t$
              - $p, q, r, p \to \neg t \lor s, \neg s, \underline{\neg r \lor t}$
                - $p, q, r, p \to \neg t \lor s, \neg s, \neg r$ $\otimes$
                - $p, q, r, \underline{p \to \neg t \lor s}, \neg s, t$
                  - $p, q, r, \neg p, \neg s, t$ $\otimes$
                  - $p, q, r, \underline{\neg t \lor s}, \neg s, t$
                    - $p, q, r, \neg t, \neg s, t$ $\otimes$
                    - $p, q, r, s, \neg s, t$ $\otimes$
              - $p, q, r, p \to \neg t \lor s, \neg q, \underline{\neg r \lor t}$ $\otimes$

Il tableau è chiuso e quindi la formula di partenza è valida.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\exists x(p(x) \lor q(f(x))) \qquad \dfrac{[p(x) \lor q(f(x))]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[p(x)]^1 \qquad \dfrac{\forall x(p(x) \to r(x,a))}{p(x) \to r(x,a)}}{r(x,a)}}{\exists z\, r(z,a)} \qquad \dfrac{\dfrac{[q(f(x))]^1 \qquad \dfrac{\forall x(q(x) \to r(x,a))}{q(f(x)) \to r(f(x),a)}}{r(f(x),a)}}{\exists z\, r(z,a)}}{\exists z\, r(z,a)}\,1}{\exists z\, r(z,a)}\,2$$

15. Una possibile soluzione, in cui si usa il minimo numero di quantificatori, è la seguente:

$$\exists x\big(\neg\exists y\,\forall z\, r(g(x,z),y) \wedge \neg\exists w\,\neg r(w,x) \to \exists v\, r(v,g(x,v))\big) \to \forall u\, r(u,u)$$
$$\forall u\big(\exists x\big(\forall y\,\exists z\,\neg r(g(x,z),y) \wedge \forall w\, r(w,x) \to \exists v\, r(v,g(x,v))\big) \to r(u,u)\big)$$
$$\forall u\big(\exists x\big(\forall y(\exists z\,\neg r(g(x,z),y) \wedge r(y,x)) \to \exists v\, r(v,g(x,v))\big) \to r(u,u)\big)$$
$$\forall u\,\forall x\big(\big(\forall y\,\exists z(\neg r(g(x,z),y) \wedge r(y,x)) \to \exists v\, r(v,g(x,v))\big) \to r(u,u)\big)$$
$$\forall u\,\forall x\big(\exists y\big(\exists z(\neg r(g(x,z),y) \wedge r(y,x)) \to r(y,g(x,y))\big) \to r(u,u)\big)$$
$$\forall u\,\forall x\,\forall y\big(\big(\exists z(\neg r(g(x,z),y) \wedge r(y,x)) \to r(y,g(x,y))\big) \to r(u,u)\big)$$
$$\forall u\,\forall x\,\forall y\big(\forall z\big((\neg r(g(x,z),y) \wedge r(y,x)) \to r(y,g(x,y))\big) \to r(u,u)\big)$$
$$\forall u\,\forall x\,\forall y\,\exists z\big((\neg r(g(x,z),y) \wedge r(y,x) \to r(y,g(x,y))) \to r(u,u)\big)$$

Un'altra possibile soluzione, ottenuta posticipando il più possibile l'azione sul quantificatore su u è

$$\forall x\,\forall y\,\exists z\,\forall u\big((\neg r(g(x,z),y) \wedge r(y,x) \to r(y,g(x,y))) \to r(u,u)\big).$$