Prova scritta di Logica Matematica
15 settembre 2015

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Se $F \models G$ e $\neg F \models G$ allora G è valida. **V** | **F** 1pt

2. $(\neg p \to q) \wedge \neg r \equiv (p \to r) \to \neg(\neg r \to \neg q)$. **V** | **F** 1pt

3. Esiste un insieme di Hintikka che contiene le formule
$(\neg p \to q) \wedge \neg r$, $\neg p$ e $q \to r$. **V** | **F** 1pt

4. Se $T, F \rhd G$ allora $T \rhd F \to G$. **V** | **F** 1pt

5. Quante delle seguenti formule sono enunciati? $\forall x(\exists y\, r(x,y) \to q(y,x))$,
$\forall x\, \exists y(r(x,y) \to q(y,x))$, $\forall x\, \exists y\, r(x,y) \to \exists y\, q(y,x)$. **0** | **1** | **2** | **3** 1pt

6. Sia I l'interpretazione normale con $D^I = \{0,1,2,3\}$, $f^I(d,d') = \min\{d,d'\}$
e $p^I = \{1,3\}$. Allora $I \models_= \forall x\, \forall y(x \neq y \wedge \neg p(f(x,y)) \to p(x) \vee p(y))$. **V** | **F** 1pt

7. $\exists x\, p(x) \to \neg \exists y\, q(y) \equiv \forall z(p(z) \to \neg q(z))$. **V** | **F** 1pt

8. Sia $\sim$ una relazione di congruenza sull'interpretazione I.
Se $I \models p(c)$ e $d \sim c^I$ allora $I, \sigma[x/d] \models p(x)$. **V** | **F** 1pt

9. Esiste un enunciato insoddisfacibile
che ha un tableau sistematico infinito. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sia $\mathcal{L} = \{c, p, q\}$ il linguaggio con c simbolo di costante, e p e q simboli di relazione unari. Siano I e J le seguenti interpretazioni per $\mathcal{L}$: 4pt

$$D^I = \{0,1,2,3\}, \quad c^I = 1, \quad p^I = \{0,2,3\}, \quad q^I = \{0,1,2,3\};$$

$$D^J = \{A,B,C\}, \quad c^J = C, \quad p^J = \{A,B\}, \quad q^J = \{A,C\}.$$

Sul retro del foglio definite un omomorfismo forte di I in J.
Dimostrate che I e J non sono elementarmente equivalenti (e quindi non esiste un omomorfismo forte suriettivo di I in J).

11. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x(r(x,f(x)) \to \neg r(f(x),x)), \exists x\, \forall y\, r(x,f(y)) \models_= \exists z\, f(z) \neq z.$$

12. Sia $\mathcal{L} = \{a, c, m, s, u, =\}$ un linguaggio con uguaglianza, dove a e c sono simboli di costante, m è un simbolo di funzione unario, e s e u sono simboli di relazione binari. Interpretando a come "Anna", c come "Chiara", $m(x)$ come "la maestra di x", $s(x, y)$ come "x è severo con y" e $u(x, y)$ come "x ubbidisce ad y", traducete le seguenti frasi:

(i) Anna e Chiara non hanno la stessa maestra, e almeno una delle due maestre è severa con la sua alunna (cioè la maestra di Anna con Anna, quella di Chiara con Chiara); 3pt

(ii) c'è qualcuno che ubbidisce alla sua maestra ed è severo con tutti quelli che hanno la sua stessa maestra ma non le ubbidiscono. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$(p \wedge r \to \neg q) \wedge (r \to \neg s) \to \neg(p \wedge \neg q) \vee \neg\big(q \vee (r \wedge (t \to s))\big)$$

è valida. Se la formula non è valida definite un'interpretazione che non la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\exists z\, r(a, f(z)), \forall x(\exists y\, r(y, x) \to \neg p(x)) \rhd \neg\forall y\, p(y).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Utilizzando lo spazio qui sotto mettete in forma prenessa l'enunciato 2pt

$$\big(\forall x\, \neg\forall y\, r(y, x) \to \exists z\, r(z, z)\big) \vee \neg\exists y\big(\forall x\, r(x, f(y, x)) \wedge \neg\exists z\, \neg r(f(z, y), y)\big).$$

[Se si usa il minimo numero di quantificatori possibili, 1pt in più.]

Soluzioni

1. **V** perché per qualunque valutazione v si ha $v(F) = \mathbf{V}$ oppure $v(\neg F) = \mathbf{V}$: nel primo caso $v(G) = \mathbf{V}$ segue da $F \models G$, nel secondo da $\neg F \models G$.
2. **V** come si verifica per esempio con le tavole di verità, oppure notando che entrambe le formule sono logicamente equivalenti a $(p \lor q) \land \neg r$.
3. **F** se T è un insieme di Hintikka tale che $(\neg p \to q) \land \neg r \in T$ allora si ha $\neg p \to q \in T$ e $\neg r \in T$; se $q \to r \in T$, dato che $r \notin T$ deve essere $\neg q \in T$; ma allora, visto che $q \notin T$ deve essere $\neg\neg p \in T$ e quindi $p \in T$; perciò $\neg p \notin T$ e T non può avere tutte le proprietà richieste.
4. **V** Una deduzione naturale che mostra $T \rhd F \to G$ si ottiene da una che mostra $T, F \rhd G$ applicando la regola $(\to i)$.
5. **1** la seconda formula è l'unico enunciato: nella prima formula y è libera, mentre nella terza x è libera.
6. **F** perché $I, \sigma[x/0, y/2] \not\models_= x \neq y \land \neg p(f(x,y)) \to p(x) \lor p(y)$.
7. **F** dopo aver applicato il Lemma 7.47 delle dispense non è possibile applicare il lemma 7.78 (come evidenziato dall'esercizio 7.59). Infatti si può verificare che $\forall z(p(z) \to \neg q(z)) \not\models \exists x\, p(x) \to \neg\exists y\, q(y)$.
8. **V** $I \models p(c)$ significa $c^I \in p^I$; dato che $d \sim c^I$, per definizione di congruenza si ha $d \in p^I$ che implica $I, \sigma[x/d] \models p(x)$.
9. **F** dato che un tableau infinito è aperto, l'affermazione contraddice il teorema di completezza (teorema 10.36 delle dispense).
10. L'unico omomorfismo forte φ di I in J è il seguente: $\varphi(0) = A$, $\varphi(1) = C$, $\varphi(2) = A$, $\varphi(3) = A$. Notiamo che φ non è suriettivo, e quindi il corollario 9.13 delle dispense non si può applicare.

    Per verificare che I e J non sono elementarmente equivalenti è necessario trovare un enunciato soddisfatto da un'interpretazione ma non dall'altra. Ad esempio $\exists x(p(x) \land \neg q(x))$ è vero in J ma non in I.
11. Supponiamo che I sia un'interpretazione normale che soddisfa i due enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica (che indichiamo nell'ordine con F e G). L'obiettivo è quello di mostrare che $I \models \exists z\, f(z) \neq z$.

    Dato che $I \models G$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d_0] \models \forall y\, r(x, f(y))$, cioè $(d_0, f^I(d)) \in r^I$ per ogni $d \in D^I$. Dato che $I \models F$ si ha in particolare $I, \sigma[x/d_0] \models r(x, f(x)) \to \neg r(f(x), x)$. Visto che $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$ si ha $I, \sigma[x/d_0] \models \neg r(f(x), x)$, cioè $(f^I(d_0), d_0) \notin r^I$.

    Ma allora non può essere $f^I(d_0) = d_0$ (perché altrimenti si avrebbe simultaneamente $(d_0, d_0) \in r^I$ e $(d_0, d_0) \notin r^I$). Dato che I è normale abbiamo $I, \sigma[z/d_0] \models f(z) \neq z$ e quindi $I \models \exists z\, f(z) \neq z$.
12. (i) $m(a) \neq m(c) \land (s(m(a), a) \lor s(m(c), c))$;

    (ii) $\exists x\big(u(x, m(x)) \land \forall y(m(y) = m(x) \land \neg u(y, m(y)) \to s(x, y))\big)$.

13. Per stabilire se la formula è valida costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.30 e 4.31 delle dispense) un tableau con la radice etichettata dalla negazione della formula. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$\underline{\neg\Big((p \wedge r \to \neg q) \wedge (r \to \neg s) \to \neg(p \wedge \neg q) \vee \neg\big(q \vee (r \wedge (t \to s))\big)\Big)}$$

$$\underline{(p \wedge r \to \neg q) \wedge (r \to \neg s)}, \neg\Big(\neg(p \wedge \neg q) \vee \neg\big(q \vee (r \wedge (t \to s))\big)\Big)$$

$$p \wedge r \to \neg q, r \to \neg s, \underline{\neg\Big(\neg(p \wedge \neg q) \vee \neg\big(q \vee (r \wedge (t \to s))\big)\Big)}$$

$$p \wedge r \to \neg q, r \to \neg s, \underline{p \wedge \neg q}, q \vee (r \wedge (t \to s))$$

$$p \wedge r \to \neg q, r \to \neg s, p, \neg q, \underline{q \vee (r \wedge (t \to s))}$$

$$p \wedge r \to \neg q, r \to \neg s, p, \neg q, q \quad \otimes$$

$$p \wedge r \to \neg q, r \to \neg s, p, \neg q, \underline{r \wedge (t \to s)}$$

$$\underline{p \wedge r \to \neg q}, r \to \neg s, p, \neg q, r, t \to s$$

$$\underline{\neg(p \wedge r)}, r \to \neg s, p, \neg q, r, t \to s$$

$$\neg p, r \to \neg s, p, \neg q, r, t \to s \quad \otimes$$

$$\neg r, r \to \neg s, p, \neg q, r, t \to s \quad \otimes$$

$$\neg q, r \to \neg s, p, \neg q, r, t \to s$$

$$\neg q, \neg r, p, \neg q, r, t \to s \quad \otimes$$

$$\neg q, \neg s, p, \neg q, r, \underline{t \to s}$$

$$\neg q, \neg s, p, \neg q, r, \neg t \quad \bigcirc$$

$$\neg q, \neg s, p, \neg q, r, s \quad \otimes$$

Il tableau è aperto e quindi la formula di partenza non è valida. Un'interpretazione che non la soddisfa può venir letta dal nodo aperto: $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{F}$, $v(r) = \mathbf{V}$, $v(s) = \mathbf{F}$, $v(t) = \mathbf{F}$.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$
\dfrac{\dfrac{\exists z\, r(a,f(z)) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\exists y\, r(y,x) \to \neg p(x))}{\exists y\, r(y,f(z)) \to \neg p(f(z))} \qquad \dfrac{[r(a,f(z))]^1}{\exists y\, r(y,f(z))}}{\neg p(f(z))} \qquad \dfrac{[\forall y\, p(y)]^2}{p(f(z))}}{\bot}}{\bot}\,{\scriptstyle 1}}{\neg \forall y\, p(y)}\,{\scriptstyle 2}
$$

Notare che è possibile invertire l'ordine di applicazione delle regole $(\exists e)$ e $(\neg i)$.

15. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\big(\forall x\, \neg\forall y\, r(y,x) \to \exists z\, r(z,z)\big) \lor \neg\exists y\big(\forall x\, r(x,f(y,x)) \land \neg\exists z\, \neg r(f(z,y),y)\big)$$

$$\big(\forall x\, \exists y\, \neg r(y,x) \to \exists z\, r(z,z)\big) \lor \forall y\, \neg\big(\forall x\, r(x,f(y,x)) \land \forall z\, r(f(z,y),y)\big)$$

$$\exists x\big(\exists y\, \neg r(y,x) \to r(x,x)\big) \lor \forall y\, \neg\forall x\big(r(x,f(y,x)) \land r(f(x,y),y)\big)$$

$$\exists x\, \forall y\, \big(\neg r(y,x) \to r(x,x)\big) \lor \forall y\, \exists x\, \neg\big(r(x,f(y,x)) \land r(f(x,y),y)\big)$$

$$\forall y\Big(\exists x\, \forall y\, \big(\neg r(y,x) \to r(x,x)\big) \lor \exists x\, \neg\big(r(x,f(y,x)) \land r(f(x,y),y)\big)\Big)$$

$$\forall y\, \exists x\Big(\forall y\, \big(\neg r(y,x) \to r(x,x)\big) \lor \neg\big(r(x,f(y,x)) \land r(f(x,y),y)\big)\Big)$$

$$\forall y\, \exists x\, \forall w\Big(\big(\neg r(w,x) \to r(x,x)\big) \lor \neg\big(r(x,f(y,x)) \land r(f(x,y),y)\big)\Big)$$