Prova scritta di Logica Matematica 1
10 febbraio 2011

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Se $F \models G$ e $H \models K$ allora $F \wedge H \models G \wedge K$. **V** **F** 1pt

2. Quante delle seguenti formule sono in forma normale congiuntiva?
$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg s \vee q)$, $\neg(p \vee r)$, $(p \vee \neg s) \wedge (t \to q)$. **0** **1** **2** **3** 1pt

3. Se un insieme di Hintikka contiene una β-formula allora deve contenere entrambi i suoi ridotti. **V** **F** 1pt

4. Se F e G sono formule tali che x è l'unica variabile libera di F e y è l'unica variabile libera di G, allora $\forall x\, \exists y\, F \wedge G$ è un enunciato. **V** **F** 1pt

5. $\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) \equiv \forall x(p(x) \vee q(x))$. **V** **F** 1pt

6. Se $I \equiv_{\mathcal{L}} J$ e F è un enunciato tale che $J \models F$, allora $I \models F$. **V** **F** 1pt

7. L'algoritmo per la trasformazione in forma prenessa ha la proprietà della terminazione forte. **V** **F** 1pt

8. L'algoritmo dei tableaux per la logica predicativa ha la proprietà della terminazione forte. **V** **F** 1pt

9. Se F è valida nella logica con uguaglianza allora $\rhd_= F$. **V** **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x(p(x) \to \exists y(r(x,y) \wedge \neg p(y))), \forall x\, \forall y\, \forall z(r(x,y) \wedge r(x,z) \to y = z) \models_= \forall x(r(x,x) \to \neg p(x)).$$

11. Sul retro del foglio dimostrate che l'insieme 4pt

$$\{\forall x(p(x) \to \exists y(r(x,y) \wedge \neg p(y))), \forall x(\neg p(x) \to \exists y(r(x,y) \wedge p(y))), \forall x\, \forall y(\neg r(x,y) \vee \neg r(y,x))\}$$

è soddisfacibile.

12. Considerate il linguaggio $\{c, d, p, b, a\}$ dove c e d sono simboli di costante, p è un simbolo di funzione unario e b e a sono simboli di relazione binari. Interpretando c come "Claudia", d come "Dario", $p(x)$ come "il padre di x", $b(x, y)$ come "x è più basso di y" e $a(x, y)$ come "x è amico di y" traducete le seguenti frasi utilizzando lo spazio sotto di esse:

(i) il padre di Claudia non è più basso del nonno paterno di Dario ma è più basso del padre di Dario; 3pt

(ii) almeno un amico di Claudia è più basso di tutti gli amici del padre di Dario. 3pt

13. Dimostrate che $F \vee G, G \wedge H \to F \rhd H \to F$. Usate solo le regole della deduzione naturale proposizionale, comprese le quattro regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio) 3pt

14. Usando il metodo dei tableaux stabilite che 5pt

$$\exists x(\neg q(x) \to r(x)), \forall x(q(x) \to r(a)) \models \exists x\, r(x).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

15. Utilizzando lo spazio qui sotto mettete in forma prenessa la formula 2pt

$$\forall x\, \neg \forall y\, r(x, y) \to \exists x\, \neg \exists y\, r(x, f(y)) \wedge \exists x\, \forall y\, r(f(x), f(y)).$$

[Se si usa il minimo numero di quantificatori possibili, 1pt in più.]

Soluzioni

1. **V** se $v(F \land H) = \mathbf{V}$ allora $v(F) = \mathbf{V}$ e $v(H) = \mathbf{V}$, da cui, per ipotesi, seguono $v(G) = \mathbf{V}$ e $v(K) = \mathbf{V}$. Quindi $v(G \land K) = \mathbf{V}$.

2. **1** solo la prima formula è in forma normale congiuntiva.

3. **F** per la Definizione 4.25 delle dispense è sufficiente che uno dei ridotti della β-formula stia nell'insieme di Hintikka.

4. **F** la variabile y risulta essere libera in $\forall x\, \exists y\, F \land G$.

5. **F** si veda l'Esercizio 7.57 delle dispense.

6. **V** per definizione di interpretazioni elementarmente equivalenti.

7. **V** è il Lemma 7.74 delle dispense.

8. **F** la mancanza di terminazione forte è una delle principali differenze tra il metodo dei tableaux per la logica predicativa e lo stesso metodo per la logica proposizionale.

9. **V** F è valida nella logica con uguaglianza significa $\models_{=} F$ e da questo $\rhd_{=} F$ si ottiene per la completezza della deduzione naturale con uguaglianza (Teorema 11.47 delle dispense).

10. Dobbiamo mostrare che se un'interpretazione normale I soddisfa entrambe gli enunciati sulla sinistra, che indichiamo con F e G, allora soddisfa anche quello a destra, che indichiamo con H. Per mostrare $I \models H$ fissiamo $d \in D^I$ con lo scopo di mostrare che $I, \sigma[x/d] \models r(x,x) \to \neg p(x)$. Se $(d,d) \notin r^I$ o se $d \notin p^I$ questo è immediato, quindi supponiamo $(d,d) \in r^I$ e $d \in p^I$, con l'obiettivo di ottenere una contraddizione.

Dato che $I \models F$ si ha $I, \sigma[x/d] \models p(x) \to \exists y(r(x,y) \land \neg p(y))$ e quindi (dato che $d \in p^I$) esiste $d_0 \in D^I$ tale che $(d, d_0) \in r^I$ e $d_0 \notin p^I$.

Visto che $I \models G$ si ha $I, \sigma[x/d, y/d, z/d_0] \models r(x,y) \land r(x,z) \to y = z$. Da $(d,d) \in r^I$ e $(d, d_0) \in r^I$ segue allora $I, \sigma[x/d, y/d, z/d_0] \models y = z$ che, per la normalità di I, significa $d = d_0$. Ma questo contraddice $d \in p^I$ e $d_0 \notin p^I$.

11. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfi i tre enunciati. L'interpretazione I definita da

$$D^I = \{0,1,2,3\}, \quad p^I = \{0,2\}, \quad r^I = \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,0)\}$$

ha queste caratteristiche. Anche l'interpretazione J definita da

$$D^J = \mathbb{N}, \quad p^I = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari}\}, \quad r^J = \left\{ (n,m) \in \mathbb{N}^2 \,:\, n < m \right\}$$

andrebbe bene.

12. (i) $\neg b(p(c), p(p(d))) \land b(p(c), p(d))$;
(ii) $\exists x(a(x,c) \land \forall y(a(y, p(d)) \to b(x,y)))$.

13. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{F \lor G \qquad \dfrac{[F]^2}{H \to F} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[G]^2 \quad [H]^1}{G \land H} \qquad G \land H \to F}{F}}{H \to F}\,{}^{1}}{H \to F}\,{}^{2}$$

Si può anche scambiare l'ordine di applicazione di $(\lor e)$ e $(\to i)$.

14. Per stabilire la conseguenza logica utilizziamo l'Algoritmo 10.48 delle dispense e costruiamo un tableau chiuso con la radice etichettata dalle formule a sinistra del simbolo di conseguenza logica e la negazione della formula a destra. Indichiamo con F e G le γ-formule $\forall x(q(x) \to r(a))$ e $\neg\exists x\, r(x)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

- $\underline{\exists x(\neg q(x) \to r(x))}, F, G$
  - $\underline{\neg q(b) \to r(b)}, F, G$
    - $q(b), \underline{F}, G$
      - $q(b), F, \underline{q(b) \to r(a)}, G$
        - $q(b), F, \neg q(b), G$
          - $\otimes$
        - $q(b), F, r(a), \underline{G}$
          - $q(b), F, r(a), G, \neg r(a)$
            - $\otimes$
    - $r(b), F, \underline{G}$
      - $r(b), F, G, \neg r(b)$
        - $\otimes$

15. Una possibile soluzione, in cui si usa il minimo numero di quantificatori, è la seguente:

$$\forall x\, \neg\forall y\, r(x,y) \to \exists x\, \neg\exists y\, r(x, f(y)) \wedge \exists x\, \forall y\, r(f(x), f(y))$$
$$\forall x\, \exists y\, \neg r(x,y) \to \exists x\, \forall y\, \neg r(x, f(y)) \wedge \exists z\, \forall y\, r(f(z), f(y))$$
$$\forall x\, \exists y\, \neg r(x,y) \to \exists x\, \exists z(\forall y\, \neg r(x, f(y)) \wedge \forall y\, r(f(z), f(y)))$$
$$\exists x(\exists y\, \neg r(x,y) \to \exists z\, \forall y(\neg r(x, f(y)) \wedge r(f(z), f(y))))$$
$$\exists x\, \exists z\, \forall y(\exists w\, \neg r(x,w) \to \neg r(x, f(y)) \wedge r(f(z), f(y)))$$
$$\exists x\, \exists z\, \forall y\, \forall w(\neg r(x,w) \to \neg r(x, f(y)) \wedge r(f(z), f(y)))$$