Prova scritta di Logica Matematica
20 gennaio 2022

Indicate su ogni foglio che consegnate cognome, nome e numero di matricola.
Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio.

1. Usando l'algoritmo di Fitting mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((p \to \neg(q \vee \neg w)) \to (r \wedge \neg(s \wedge \neg t))\big).$$

2. Sia $\mathcal{L} = \{m, p, a, s, =\}$ un linguaggio con uguaglianza dove m è un simbolo di funzione unario, p è un simbolo di relazione unario e a e s sono simboli di relazione binari. Interpretando $m(x)$ come *il medico di* x, $p(x)$ come x *è un paziente*, $a(x,y)$ come x *è amico di* y e $s(x,y)$ come x *stima* y, traducete la frase: 3pt

qualche paziente stima il proprio medico
ed è amico di tutti i pazienti che hanno il suo stesso medico e lo stimano (il medico)

3. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$\neg p \wedge q \to \neg(r \wedge s), \neg(q \to \neg r) \vee s \models p \vee s.$$

Se la conseguenza logica non vale definite una valutazione che lo testimoni.

4. Mettete in forma prenessa l'enunciato 2pt

$$\exists x(\exists y\, r(x, f(y)) \to p(f(x))) \wedge \forall x\, q(g(x)) \to \neg\exists x\, \forall y\, \neg r(g(y), f(x)).$$

Se riuscite, usate il minimo numero di quantificatori possibili. 1pt

5. Dimostrate che 4pt

$$\forall x\big((p(x) \to \neg p(f(x))) \wedge (\neg p(f(x)) \to p(x))\big) \not\models_{=} \exists w\, f(f(w)) = w$$

6. Dimostrate l'insoddisfacibilità dell'insieme di enunciati 4pt

$$\{\forall x\, \exists y(\neg r(x,y) \vee \neg r(y, f(x))), \exists x\, \forall y\, r(y, f(x)), \forall x\, \forall y(r(x, f(y)) \to r(y,x))\}.$$

7. Sia $\mathcal{L} = \{p, q\}$ un linguaggio con due simboli di relazione unari. Siano I e J le seguenti interpretazioni per $\mathcal{L}$: 3pt

$$D^I = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}, \quad p^I = \{0,3,6,7\}, \quad q^I = \{0,1,3,4,5,7\};$$
$$D^J = \{A,B,C,D,E\}, \quad p^J = \{A,B,C\}, \quad q^J = \{B,C,E\}.$$

- Definite un omomorfismo forte suriettivo tra I e J;
- Scrivete un enunciato del linguaggio $\mathcal{L} \cup \{=\}$ che sia soddisfatto da I ma non da J (consideriamo I e J interpretazioni normali).

8. Usando il metodo dei tableaux dimostrate l'insoddisfacibilità dell'insieme di enunciati 4pt

$$\{\forall x(p(x) \to \exists y\, \neg r(y,x)), \forall x(\exists y\, \neg r(x,y) \to \neg p(x)), \forall z\, p(z)\}.$$

9. Dimostrate, usando solo le regole della deduzione naturale predicativa (comprese le sei regole derivate) che 5pt

$$\forall y(\exists z\, \neg r(z,y) \to p(y)), \forall u\, \neg p(f(u)) \rhd \neg\exists x\, \neg r(x, f(x)).$$

Soluzioni

1. Utilizziamo l'Algoritmo 3.18 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.30:

$$\big\langle[\neg\big((p \to \neg(q \lor \neg w)) \to (r \land \neg(s \land \neg t))\big)]\big\rangle$$

$$\langle[p \to \neg(q \lor \neg w)], [\neg(r \land \neg(s \land \neg t))]\rangle$$

$$\langle[\neg p, \neg(q \lor \neg w)], [\neg r, s \land \neg t]\rangle$$

$$\langle[\neg p, \neg q], [\neg p, w], [\neg r, s], [\neg r, \neg t]\rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \lor \neg q) \land (\neg p \lor w) \land (\neg r \lor s) \land (\neg r \lor \neg t).$$

2. $\exists x(p(x) \land s(x, m(x)) \land \forall y(p(y) \land m(y) = m(x) \land s(y, m(x)) \to a(x, y)))$.

3. Per stabilire se la conseguenza logica vale applichiamo l'Algoritmo 4.40 delle dispense, etichettando la radice con la formula a sinistra e la negazione di quella a destra del simbolo di conseguenza logica. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\neg p \land q \to \neg(r \land s), \neg(q \to \neg r) \lor s, \underline{\neg(p \lor s)}$$

$$\neg p \land q \to \neg(r \land s), \underline{\neg(q \to \neg r) \lor s}, \neg p, \neg s$$

$$\neg p \land q \to \neg(r \land s), \underline{\neg(q \to \neg r)}, \neg p, \neg s \qquad \neg p \land q \to \neg(r \land s), s, \neg p, \neg s \; \otimes$$

$$\underline{\neg p \land q \to \neg(r \land s)}, q, r, \neg p, \neg s$$

$$\underline{\neg(\neg p \land q)}, q, r, \neg p, \neg s \qquad \underline{\neg(r \land s)}, q, r, \neg p, \neg s$$

$$\underset{\otimes}{p, q, r, \neg p, \neg s} \qquad \underset{\otimes}{\neg q, q, r, \neg p, \neg s} \qquad \underset{\otimes}{\neg r, q, r, \neg p, \neg s} \qquad \underset{\bigcirc}{\neg s, q, r, \neg p, \neg s}$$

Il tableau è aperto e quindi la conseguenza logica non vale. Una valutazione che lo testimonia è data da $v(p) = \mathbf{F}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{V}$, $v(s) = \mathbf{F}$.

4. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\exists x(\exists y\, r(x, f(y)) \to p(f(x))) \land \forall x\, q(g(x)) \to \neg\exists x\, \forall y\, \neg r(g(y), f(x))$$
$$\exists x\, \forall y(r(x, f(y)) \to p(f(x))) \land \forall x\, q(g(x)) \to \forall x\, \exists y\, r(g(y), f(x))$$
$$\exists x(\forall y(r(x, f(y)) \to p(f(x))) \land \forall x\, q(g(x))) \to \forall x\, \exists y\, r(g(y), f(x))$$
$$\exists x\, \forall y((r(x, f(y)) \to p(f(x))) \land q(g(y))) \to \forall x\, \exists y\, r(g(y), f(x))$$
$$\forall x(\forall y((r(x, f(y)) \to p(f(x))) \land q(g(y))) \to \forall x\, \exists y\, r(g(y), f(x)))$$
$$\forall x\, \forall z(\forall y((r(x, f(y)) \to p(f(x))) \land q(g(y))) \to \exists y\, r(g(y), f(z)))$$
$$\forall x\, \forall z\, \exists y((r(x, f(y)) \to p(f(x))) \land q(g(y)) \to r(g(y), f(z)))$$

5. Dobbiamo definire un'interpretazione normale che soddisfi gli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, ma non quello a destra. Due interpretazioni con queste caratteristiche (dato che sono normali non indichiamo l'interpretazione dell'uguaglianza) sono definite da

$$D^I = \{0, 1, 2, 3\}, \quad f^I(0) = 1, \quad f^I(1) = 2, \quad f^I(2) = 3, \quad f^I(3) = 0, \quad p^I = \{0, 2\};$$
$$D^J = \mathbb{N}, \quad f^J(n) = n + 1, \quad p^J = \{\, n \,:\, n \text{ è pari} \,\}.$$

6. Supponiamo che I sia un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati, che indichiamo con F, G e H. Il nostro obiettivo è raggiungere una contraddizione.

Dato che $I \vDash G$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d_0] \vDash \forall y\, r(y, f(x))$, cioè $(d, f^I(d_0)) \in r^I$ per ogni $d \in D^I$.

Dato che $I \vDash F$ si ha in particolare $I, \sigma[x/d_0] \vDash \exists y(\neg r(x, y) \lor \neg r(y, f(x)))$ e quindi esiste $d_1 \in D^I$ tale che $(d_0, d_1) \notin r^I$ oppure $(d_1, f^I(d_0)) \notin r^I$; la seconda alternativa è impossibile per quanto già ottenuto e quindi deve essere $(d_0, d_1) \notin r^I$.

Dato che $I \vDash H$ si ha in particolare $I, \sigma[x/d_1, y/d_0] \vDash r(x, f(y)) \to r(y, x)$. Ma abbiamo ottenuto $(d_1, f^I(d_0)) \in r^I$ e $(d_0, d_1) \notin r^I$, che rendono falsa l'implicazione. Abbiamo dunque ottenuto la contraddizione cercata.

7.
- Dato che D^I ha cardinalità maggiore di D^J non esistono funzioni suriettive da D^J in D^I e quindi l'omomorfismo forte suriettivo che cerchiamo (chiamiamolo φ) deve necessariamente essere di I in J.
  Visto che $6 \in p^I \setminus q^I$ deve essere $\varphi(6) \in p^J \setminus q^J = \{A\}$; perciò $\varphi(6) = A$.
  Similmente, da $1, 4, 5 \in q^I \setminus p^I$ e $q^J \setminus p^J = \{E\}$ segue $\varphi(1) = \varphi(4) = \varphi(5) = E$, mentre da $2 \notin p^I \cup q^I$ e $D^J \setminus p^J \cup q^J = \{D\}$ segue $\varphi(2) = D$.
  Infine $0, 3, 7 \in p^I \cap q^I$ e $p^J \cap q^J = \{B, C\}$: per garantire la suriettività di φ è sufficiente non mappare tutti e tre gli elementi di $p^I \cap q^I$ nello stesso elemento di $p^J \cap q^J$. Per esempio possiamo porre $\varphi(0) = \varphi(3) = B$ e $\varphi(7) = C$.
  Si verifica che la φ così definita è effettivamente un omomorfismo forte suriettivo.
- Considerando I e J interpretazioni normali, l'enunciato

  $$\exists x\, \exists y(x \neq y \land \neg p(x) \land q(x) \land \neg p(y) \land q(y))$$

  è soddisfatto da I ma non da J.

8. Per mostrare l'insoddisfacibilità dobbiamo costruire (utilizzando l'Algoritmo 11.51 e le Convenzioni 11.19 e 11.21 delle dispense) un tableau chiuso con la radice etichettata dall'insieme di enunciati.

Indichiamo con F, G, H i tre enunciati (sono tutti γ-formule) e con K la γ-formula $\neg\exists y\, \neg r(b, y)$. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$F, G, \underline{H}$$
$$\underline{F}, G, H, p(a)$$
$$F, \underline{p(a) \to \exists y\, \neg r(y, a)}, G, H, p(a)$$
$$\begin{array}{cc} F, \neg p(a), G, H, p(a) & F, \underline{\exists y\, \neg r(y, a)}, G, H, p(a) \\ \otimes & \end{array}$$
$$F, \neg r(b, a), \underline{G}, H, p(a)$$
$$F, \neg r(b, a), G, \underline{\exists y\, \neg r(b, y) \to \neg p(b)}, H, p(a)$$
$$\begin{array}{cc} F, \neg r(b, a), G, \underline{K}, H, p(a) & F, \neg r(b, a), G, \neg p(b), \underline{H}, p(a) \\ F, \neg r(b, a), G, K, r(b, a), H, p(a) & F, \neg r(b, a), G, \neg p(b), H, p(b), p(a) \\ \otimes & \otimes \end{array}$$

Si noti l'importanza di scegliere in modo opportuno le istanze delle γ-formule. Con altre scelte il tableau cresce rapidamente di dimensione. Si noti anche la necessità di istanziare per due volte la γ-formula H.

9. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\, \neg r(x, f(x))]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg r(x, f(x))]^1}{\exists z\, \neg r(z, f(x))} \qquad \dfrac{\forall y(\exists z\, \neg r(z, y) \to p(y))}{\exists z\, \neg r(z, f(x)) \to p(f(x))}}{p(f(x))} \qquad \dfrac{\forall u\, \neg p(f(u))}{\neg p(f(x))}}{\perp}}{\perp}\,1}{\neg\exists x\, \neg r(x, f(x))}\,2$$