Prova scritta di Logica Matematica
21 giugno 2022

Cognome Nome Matricola

Indicate su ogni foglio che consegnate cognome, nome e numero di matricola.
Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio.

1. Usando l'algoritmo di Fitting mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((p \vee \neg q \to \neg(r \wedge \neg s)) \to t \vee \neg(u \wedge \neg v)\big).$$

2. Sia $\{p, c, g, a\}$ un linguaggio dove p è un simbolo di funzione unario, c e g sono simboli di relazione unari e a è un simbolo di relazione binario. Interpretando $p(x)$ come "il padrone di x", $c(x)$ come "x è un cane", $g(x)$ come "x è un gatto" e $a(x, y)$ come "x ama y", traducete la frase: 3pt

c'è un cane che ama qualche gatto e il cui padrone (del cane) ama tutti i gatti.

3. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$p \to \neg\big((\neg p \vee (\neg q \wedge r)) \wedge (p \to \neg t \vee s)\big) \vee \big((s \to q) \to \neg(\neg r \vee t)\big)$$

è valida. Se la formula non è valida definite un'interpretazione che non la soddisfa.

4. Usando l'algoritmo presentato nel corso mettete in forma prenessa l'enunciato 2pt

$$\exists x\, \forall y\, r(x, y) \wedge \neg\exists z\, p(z) \to \forall x(\neg\forall y\, \neg r(f(y), x) \vee \exists y\, \forall z\, r(x, g(z, y))).$$

Se riuscite, usate il minimo numero di quantificatori possibili. 1pt

5. Dimostrate l'insoddisfacibilità dell'insieme di enunciati 4pt

$$\{\exists x(p(x) \wedge \neg q(f(x))), \forall x\, \forall y(r(x, y) \to q(f(x)) \vee p(y)), \forall x(p(x) \to r(x, f(x)) \wedge \neg p(f(x)))\}.$$

6. Dimostrate che 4pt

$$\forall x\big((p(x) \to \neg p(f(x))) \wedge (\neg p(x) \to p(f(x)))\big) \not\models_{=} \exists x\, f(f(x)) = x.$$

7. Sia $\mathcal{L} = \{p, r\}$ un linguaggio con un simbolo di relazione unario ed uno binario. Siano I e J le seguenti interpretazioni per $\mathcal{L}$: 3pt

$$D^I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad p^I = \{0, 1, 3, 7\}, \quad r^I = \{(0, 0), (2, 0), (5, 0)\};$$
$$D^J = \{A, B, C, D\}, \quad p^J = \{A, C\}, \quad r^J = \{(C, C), (D, C)\}.$$

- Definite un omomorfismo forte suriettivo tra I e J;
- Scrivete un enunciato del linguaggio $\mathcal{L} \cup \{=\}$ che sia soddisfatto da I ma non da J (consideriamo I e J interpretazioni normali).

8. Usando il metodo dei tableaux dimostrate che 4pt

$$\exists x\, p(x), \forall x(p(x) \to \forall y\, q(x, y, a)) \models \exists x\, \exists y(q(x, x, y) \wedge q(x, y, y)).$$

9. Dimostrate, usando solo le regole della deduzione naturale predicativa (comprese le sei regole derivate) che 5pt

$$\exists x(p(x) \vee \neg q(f(x))), \forall x(p(x) \to \neg r(x, a)), \forall x(r(x, a) \to q(x)) \rhd \exists z\, \neg r(z, a).$$

Soluzioni

1. Utilizziamo l'Algoritmo 3.22 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.30:

$$[\langle \neg\big((p \vee \neg q \to \neg(r \wedge \neg s)) \to t \vee \neg(u \wedge \neg v)\big)\rangle]$$
$$[\langle p \vee \neg q \to \neg(r \wedge \neg s), \neg(t \vee \neg(u \wedge \neg v))\rangle]$$
$$[\langle p \vee \neg q \to \neg(r \wedge \neg s), \neg t, u \wedge \neg v\rangle]$$
$$[\langle p \vee \neg q \to \neg(r \wedge \neg s), \neg t, u, \neg v\rangle]$$
$$[\langle \neg(p \vee \neg q), \neg t, u, \neg v\rangle, \langle \neg(r \wedge \neg s), \neg t, u, \neg v\rangle]$$
$$[\langle \neg p, q, \neg t, u, \neg v\rangle, \langle \neg r, \neg t, u, \neg v\rangle, \langle s, \neg t, u, \neg v\rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \wedge q \wedge \neg t \wedge u \wedge \neg v) \vee (\neg r \wedge \neg t \wedge u \wedge \neg v) \vee (s \wedge \neg t \wedge u \wedge \neg v).$$

2. $\exists x(c(x) \wedge \exists y(g(y) \wedge a(x,y)) \wedge \forall z(g(z) \to a(p(x), z)))$.

3. Per stabilire se la formula è valida applichiamo l'Algoritmo 4.5 delle dispense, etichettando la radice del tableau con la negazione della formula. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{\neg\big(p \to \neg\big((\neg p \vee (\neg q \wedge r)) \wedge (p \to \neg t \vee s)\big) \vee \big((s \to q) \to \neg(\neg r \vee t)\big)\big)}$$
$$|$$
$$p, \underline{\neg\big(\neg\big((\neg p \vee (\neg q \wedge r)) \wedge (p \to \neg t \vee s)\big) \vee \big((s \to q) \to \neg(\neg r \vee t)\big)\big)}$$
$$|$$
$$p, \underline{(\neg p \vee (\neg q \wedge r)) \wedge (p \to \neg t \vee s)}, \neg\big((s \to q) \to \neg(\neg r \vee t)\big)$$
$$|$$
$$p, \neg p \vee (\neg q \wedge r), p \to \neg t \vee s, \underline{\neg\big((s \to q) \to \neg(\neg r \vee t)\big)}$$
$$|$$
$$p, \underline{\neg p \vee (\neg q \wedge r)}, p \to \neg t \vee s, s \to q, \neg r \vee t$$

$$p, \neg p, p \to \neg t \vee s, s \to q, \neg r \vee t \qquad p, \underline{\neg q \wedge r}, p \to \neg t \vee s, s \to q, \neg r \vee t$$
$$\otimes \qquad\qquad\qquad\qquad |$$
$$p, \neg q, r, p \to \neg t \vee s, \underline{s \to q}, \neg r \vee t$$

$$p, \neg q, r, p \to \neg t \vee s, \neg s, \underline{\neg r \vee t} \qquad p, \neg q, r, p \to \neg t \vee s, q, \neg r \vee t$$
$$\otimes$$

$$p, \neg q, r, p \to \neg t \vee s, \neg s, \neg r \qquad p, \neg q, r, \underline{p \to \neg t \vee s}, \neg s, t$$
$$\otimes$$

$$p, \neg q, r, \neg p, \neg s, t \qquad p, \neg q, r, \underline{\neg t \vee s}, \neg s, t$$
$$\otimes$$

$$p, \neg q, r, \neg t, \neg s, t \qquad p, \neg q, r, s, \neg s, t$$
$$\otimes \qquad\qquad \otimes$$

Il tableau è chiuso e quindi la formula di partenza è valida.

4. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\exists x\,\forall y\, r(x,y) \land \neg\exists z\, p(z) \to \forall x(\neg\forall y\,\neg r(f(y),x) \lor \exists y\,\forall z\, r(x,g(z,y)))$$
$$\exists x\,\forall y\, r(x,y) \land \forall z\,\neg p(z) \to \forall x(\exists y\, r(f(y),x) \lor \exists y\,\forall z\, r(x,g(z,y)))$$
$$\exists x(\forall y\, r(x,y) \land \forall z\,\neg p(z)) \to \forall x\,\exists y(r(f(y),x) \lor \forall z\, r(x,g(z,y)))$$
$$\exists x\,\forall y(r(x,y) \land \neg p(y)) \to \forall x\,\exists y\,\forall z(r(f(y),x) \lor r(x,g(z,y)))$$
$$\forall x\big(\forall y(r(x,y) \land \neg p(y)) \to \forall x\,\exists y\,\forall z(r(f(y),x) \lor r(x,g(z,y)))\big)$$
$$\forall x\,\forall w\big(\forall y(r(x,y) \land \neg p(y)) \to \exists y\,\forall z(r(f(y),w) \lor r(w,g(z,y)))\big)$$
$$\forall x\,\forall w\,\exists y\big(r(x,y) \land \neg p(y) \to \forall z(r(f(y),w) \lor r(w,g(z,y)))\big)$$
$$\forall x\,\forall w\,\exists y\,\forall z\big(r(x,y) \land \neg p(y) \to r(f(y),w) \lor r(w,g(z,y))\big)$$

5. Dobbiamo dimostrare che non esiste un'interpretazione che soddisfa tutti e tre gli enunciati, che indichiamo con F, G e H. Supponiamo allora che I sia un'interpretazione che li soddisfa, con l'obiettivo di raggiungere una contraddizione.

Dato che $I \vDash F$, esiste $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d_0] \vDash p(x) \land \neg q(f(x))$, cioè $d_0 \in p^I$ e $f^I(d_0) \notin q^I$.

Dato che $I \vDash H$ si ha in particolare $I, \sigma[x/d_0] \vDash p(x) \to r(x, f(x)) \land \neg p(f(x))$ e quindi, dato che $d_0 \in p^I$, deve valere sia $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$ che $f^I(d_0) \notin p^I$.

Una conseguenza di $I \vDash G$ è che $I, \sigma[x/d_0, y/f^I(d_0)] \vDash r(x,y) \to q(f(x)) \lor p(y)$. Ma questo contraddice $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$, $f^I(d_0) \notin q^I$ e $f^I(d_0) \notin p^I$ che erano stati ottenuti in precedenza.

6. Dobbiamo definire un'interpretazione normale che soddisfa l'enunciato a sinistra del simbolo di conseguenza logica, ma non quello a destra. Due interpretazioni con queste caratteristiche sono definite da

$$D^I = \{0,1,2,3\}, \quad f^I(0) = 1, \quad f^I(1) = 2, \quad f^I(2) = 3, \quad f^I(3) = 0, \quad p^I = \{0,2\};$$
$$D^J = \mathbb{N}, \quad f^J(n) = n+1, \quad p^J = \{\, n : n \text{ è pari} \,\}.$$

7.
- Dato che D^I ha cardinalità maggiore di D^J non esistono funzioni suriettive da D^J in D^I e quindi l'omomorfismo forte suriettivo che cerchiamo (chiamiamolo φ) deve necessariamente essere di I in J.
  Visto che $0 \in p^I$ e $(0,0) \in r^I$ deve essere $\varphi(0) \in p^J$ e $(\varphi(0), \varphi(0)) \in r^I$; questo ci obbliga a porre $\varphi(0) = C$.
  Similmente, da $1,3,7 \in p^I$ e $(1,1),(3,3),(7,7) \notin r^I$ si ottiene $\varphi(1) = \varphi(3) = \varphi(7) = A$.
  Dato che $2,5 \notin p^I$ ma $(2,0),(5,0) \in r^I$ deve essere $\varphi(2), \varphi(5) \notin p^J$ ma $(\varphi(2), C), (\varphi(5), C) \in r^J$: bisogna quindi porre $\varphi(2) = \varphi(5) = D$.
  Infine $4,6 \notin p^I$ e $(4,0),(6,0) \notin r^I$ ci obbligano a porre $\varphi(4) = \varphi(6) = B$.
  Notate che φ così definita è suriettiva e si può verificare che si tratta effettivamente di un omomorfismo forte.
- Considerando I e J interpretazioni normali, l'enunciato
  $$\exists x\,\exists y(x \neq y \land p(x) \land \forall z\,\neg r(z,x) \land p(y) \land \forall z\,\neg r(z,y))$$
  è soddisfatto da I ma non da J.

8. Per mostrare la conseguenza logica dobbiamo costruire (utilizzando l'Algoritmo 11.52 e le Convenzioni 11.19 e 11.21 delle dispense) un tableau chiuso con la radice etichettata dagli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica (indichiamo il secondo, che è una γ-formula, con F) e la negazione $\neg\exists x\,\exists y(q(x,x,y)\wedge q(x,y,y))$ dell'enunciato a destra (che indichiamo con G).

Indichiamo inoltre con H e K le γ-formule $\forall y\, q(b,y,a)$ e $\neg\exists y(q(b,b,y)\wedge q(b,y,y))$. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$
\begin{array}{c}
\underline{\exists x\, p(x)}, F, G \\
| \\
p(b), \underline{F}, G \\
| \\
p(b), F, \underline{p(b)\to\forall y\, q(b,y,a)}, G \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} p(b), F, \neg p(b), G \\ \otimes \end{array}
&
\begin{array}{c}
p(b), F, H, \underline{G} \\
| \\
p(b), F, H, G, \underline{K} \\
| \\
p(b), F, H, G, K, \underline{\neg(q(b,b,a)\wedge q(b,a,a))} \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} p(b), F, \underline{H}, G, K, \neg q(b,b,a) \\ | \\ p(b), F, H, q(b,b,a), G, K, \neg q(b,b,a) \\ \otimes \end{array}
&
\begin{array}{c} p(b), F, \underline{H}, G, K, \neg q(b,a,a) \\ | \\ p(b), F, H, q(b,a,a), G, K, \neg q(b,a,a) \\ \otimes \end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Si noti l'importanza di scegliere in modo opportuno le istanze delle γ-formule. Con altre scelte il tableau cresce rapidamente di dimensione.

9. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$
\dfrac{\exists x(p(x)\vee\neg q(f(x))) \qquad \dfrac{[p(x)\vee\neg q(f(x))]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[p(x)]^1 \qquad \dfrac{\forall x(p(x)\to\neg r(x,a))}{p(x)\to\neg r(x,a)}}{\neg r(x,a)}}{\exists z\,\neg r(z,a)} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg q(f(x))]^1 \qquad \dfrac{\forall x(r(x,a)\to q(x))}{r(f(x),a)\to q(f(x))}}{\neg r(f(x),a)}}{\exists z\,\neg r(z,a)}}{\exists z\,\neg r(z,a)}\,{\scriptstyle 1}}{\exists z\,\neg r(z,a)}\,{\scriptstyle 2}
$$

Si noti l'utilizzo della regola derivata (MT) per ottenere $\neg r(f(x),a)$.