Prova scritta di Logica Matematica
20 settembre 2016

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $q \wedge ((r \to p) \to p \wedge \neg r) \equiv \neg p \vee (q \to r) \to \neg(p \vee \neg q) \wedge r$. **V** **F** 1pt

2. Se F è soddisfacibile e $G \models F$ allora G è soddisfacibile. **V** **F** 1pt

3. Una α-formula è logicamente equivalente alla congiunzione dei suoi ridotti. **V** **F** 1pt

4. L'algoritmo dei tableaux per la logica proposizionale ha la proprietà della terminazione forte. **V** **F** 1pt

5. Esiste un insieme di Hintikka che contiene le formule $\neg(p \to q \wedge r)$, $\neg p \vee q$ e $r \wedge \neg s$. **V** **F** 1pt

6. Quante delle seguenti formule sono enunciati?
$\forall x\, \exists y (r(x,y) \vee r(y,x))$, $\forall x (\exists y\, r(x,y) \vee r(y,x))$,
$\forall x (\exists y\, r(x,y) \vee \exists y\, r(y,x))$, $\forall x\, \exists y\, r(x,y) \vee \exists y\, r(y,x)$. **0** **1** **2** **3** **4** 1pt

7. Sia I l'interpretazione normale con $D^I = \{0,1,2,3\}$, $p^I = \{1,3\}$ e $r^I = \{(0,0),(0,1),(1,1),(2,0),(2,2),(3,1)\}$.
Allora $I \models_= \forall x\, \exists y (x \neq y \wedge p(y) \wedge (r(y,x) \vee r(x,y)))$. **V** **F** 1pt

8. $\exists x\, p(x) \to \forall y\, q(y) \equiv \exists x\, \forall y (p(x) \to q(y))$. **V** **F** 1pt

9. Se $\sim$ è una relazione di congruenza su I allora il dominio di $I/\!\sim$ coincide con il dominio di I. **V** **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sia $\mathcal{L} = \{f, p\}$ il linguaggio con un simbolo di funzione unario e un simbolo di relazione unario. Sia I l'interpretazione per $\mathcal{L}$ con $D^I = \mathbb{Z}$, $f^I(n) = n+3$ e $p^I = \{\, n : \exists k (n = 4k \vee n = 4k+1)\,\}$. Di un'altra interpretazione J per $\mathcal{L}$ sappiamo che $D^J = \{A, B, C, D\}$ e $p^J = \{A, D\}$. 4pt

Definite f^J in modo tale che esista un omomorfismo forte di I in J, e definite questo omomorfismo forte.

11. Sul retro del foglio dimostrate che l'enunciato 4pt

$$\forall x f(f(x)) \neq x \to \exists u\, \exists v\, \exists z (u \neq v \wedge u \neq z \wedge v \neq z)$$

è valido nella logica con uguaglianza.

12. Sia $\mathcal{L} = \{a, b, d, m, p\}$ un linguaggio con uguaglianza, dove a e b sono simboli di costante, d e m sono simboli di funzione unari e p è un simbolo di relazione binario. Interpretando a come "Agata", b come "Bianca", $d(x)$ come "il dentista di x", $m(x)$ come "la madre di x" e $p(x, y)$ come "x è parente di y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) La madre di Agata è parente del dentista di Bianca, che è anche il dentista di Agata; 3pt

(ii) Un parente di Bianca è il dentista di tutti i parenti di Agata. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$(p \to \neg(q \to r)) \wedge (\neg q \vee (s \wedge p \to r)) \to \neg(p \wedge \neg s)$$

è valida. Se la formula non è valida definite un'interpretazione che lo mostra. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\exists x(p(x) \wedge \forall y\, r(x, y)), \forall y(p(y) \to \exists z\, \neg r(f(z), y)) \rhd \exists u\, \exists v(r(u, v) \wedge \neg r(v, u)).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Utilizzando lo spazio qui sotto mettete in forma prenessa la formula 2pt

$$\neg\forall x\, p(x) \wedge \forall y\, \exists z\, r(y, z) \to \exists w\, q(w) \vee \neg\forall v\, r(v, f(v)).$$

[Se si usa il minimo numero di quantificatori possibili, 1pt in più.]

Soluzioni

1. **V** come si verifica per esempio con le tavole di verità.

2. **F** ad esempio se F è p e G è $q \wedge \neg q$ si ha che F è soddisfacibile, $G \models F$ ma G è insoddisfacibile.

3. **V** è parte del Lemma 3.12 delle dispense.

4. **V** è il Teorema 4.11 delle dispense.

5. **F** se un insieme di Hintikka T contiene $\neg(p \to q \wedge r)$ contiene sia p che $\neg(q \wedge r)$. Allora deve contenere almeno uno tra $\neg q$ e $\neg r$. Se $\neg p \vee q \in T$, non potendo essere $\neg p \in T$ deve valere $q \in T$, e quindi certamente $\neg r \in T$. Ma allora non può essere $r \wedge \neg s \in T$.

6. **2** la prima e la terza formula sono enunciati; nella seconda l'ultima istanza di y è libera, nella quarta è libera l'ultima istanza di x.

7. **F** $I, \sigma[x/2] \not\models \exists y(x \neq y \wedge p(y) \wedge (r(y,x) \vee r(x,y)))$.

8. **F** il lemma 7.51 delle dispense richiederebbe che uno dei quantificatori su x fosse cambiato.

9. **F** secondo la Definizione 9.22 delle dispense il dominio di $I/{\sim}$ è l'insieme delle classi di equivalenza rispetto a $\sim$.

10. Sia φ un omomorfismo forte di I in J. Per ogni k si ha $4k \in p^I$ e quindi deve essere $\varphi(4k) \in p^J$, cioè $\varphi(4k) \in \{A, D\}$. Per esempio $\varphi(4k) = A$. Allora, dato che deve essere $f^J(A) = f^J(\varphi(4k)) = \varphi(f^I(4k)) = \varphi(4k+3)$ e $4k+3 \notin p^I$ avremo che $f^J(A) \in \{B, C\}$. Poniamo $f^J(A) = \varphi(4k+3) = B$. Ripetendo questo ragionamento, e considerando che vogliamo che φ sia suriettiva, si ottiene $f^J(B) = \varphi(4k+2) = C$, $f^J(C) = \varphi(4k+1) = D$ ed infine $f^J(D) = \varphi(4k) = A$.

11. Sia I un'interpretazione normale per il linguaggio dell'enunciato F, che non ha altri simboli di relazione al di fuori dell'uguaglianza. L'obiettivo è mostrare che $I \models F$.

Se $I \not\models \forall x f(f(x)) \neq x$ allora $I \models F$, quindi possiamo supporre che $I \models \forall x f(f(x)) \neq x$.

Fissiamo $d_0 \in D^I$ e notiamo che se $f^I(d_0) = d_0$ si avrebbe anche $f^I(f^I(d_0)) = f^I(d_0) = d_0$ e quindi $I, \sigma[x/d_0] \not\models f(f(x)) = x$ (qui, e ripetutamente più avanti, utilizziamo la normalità di I), che non è possibile. Dunque $f^I(d_0) \neq d_0$, e anche $f^I(f^I(d_0)) \neq d_0$. Similmente, se $f^I(f^I(d_0)) = f^I(d_0)$ si avrebbe $f^I(f^I(f^I(d_0))) = f^I(d_0)$ contro $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \models f(f(x)) \neq x$.

Abbiamo quindi mostrato che

$$I, \sigma[u/d_0, v/f^I(d_0), z/f^I(f^I(d_0))] \models u \neq v \wedge u \neq z \wedge v \neq z.$$

Perciò $I, \models \exists u\, \exists v\, \exists z(u \neq v \wedge u \neq z \wedge v \neq z)$ e quindi $I \models F$.

12. (i) $p(m(a), d(b)) \wedge d(b) = d(a)$;
(ii) $\exists x(p(x,b) \wedge \forall y(p(y,a) \to d(y) = x))$.

13. Per stabilire la validità della formula utilizziamo l'Algoritmo 4.5 delle dispense e costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.30 e 4.31) un tableau con la radice etichettata dalla negazione della formula. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$\underline{\neg((p \to \neg(q \to r)) \wedge (\neg q \vee (s \wedge p \to r)) \to \neg(p \wedge \neg s))}$$
$$|$$
$$\underline{(p \to \neg(q \to r)) \wedge (\neg q \vee (s \wedge p \to r))}, p \wedge \neg s$$
$$|$$
$$p \to \neg(q \to r), \neg q \vee (s \wedge p \to r), \underline{p \wedge \neg s}$$
$$|$$
$$\underline{p \to \neg(q \to r)}, \neg q \vee (s \wedge p \to r), p, \neg s$$
$$/ \qquad \backslash$$
$$\underset{\otimes}{\neg p, \neg q \vee (s \wedge p \to r), p, \neg s} \qquad \underline{\neg(q \to r)}, \neg q \vee (s \wedge p \to r), p, \neg s$$
$$|$$
$$q, \neg r, \underline{\neg q \vee (s \wedge p \to r)}, p, \neg s$$
$$/ \qquad \backslash$$
$$\underset{\otimes}{q, \neg r, \neg q, p, \neg s} \qquad q, \neg r, \underline{s \wedge p \to r}, p, \neg s$$
$$/ \qquad \backslash$$
$$q, \neg r, \underline{\neg(s \wedge p)}, p, \neg s \qquad \underset{\otimes}{q, \neg r, r, p, \neg s}$$
$$/ \qquad \backslash$$
$$\underset{\bigcirc}{q, \neg r, \neg s, p, \neg s} \qquad \underset{\otimes}{q, \neg r, \neg p, p, \neg s}$$

Il tableau è aperto e quindi la formula non è valida. Un'interpretazione v che la falsifica è definita da $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{F}$, $v(s) = \mathbf{F}$.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\exists x(p(x) \wedge \forall y\, r(x,y)) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[p(x) \wedge \forall y\, r(x,y)]^2}{p(x)} \qquad \dfrac{\forall y(p(y) \to \exists z\, \neg r(f(z),y))}{p(x) \to \exists z\, \neg r(f(z),x)}}{\exists z\, \neg r(f(z),x)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p(x) \wedge \forall y\, r(x,y)]^2}{\forall y\, r(x,y)}}{r(x,f(z))} \qquad [\neg r(f(z),x)]^1}{r(x,f(z)) \wedge \neg r(f(z),x)}}{\exists v(r(x,v) \wedge \neg r(v,x))}}{\exists u\, \exists v(r(u,v) \wedge \neg r(v,u))}}{\exists u\, \exists v(r(u,v) \wedge \neg r(v,u))}\;{}_1}{\exists u\, \exists v(r(u,v) \wedge \neg r(v,u))}\;{}_2$$

15. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\neg\forall x\, p(x) \wedge \forall y\, \exists z\, r(y,z) \rightarrow \exists w\, q(w) \vee \neg\forall v\, r(v,f(v))$$

$$\exists x\, \neg p(x) \wedge \forall y\, \exists z\, r(y,z) \rightarrow \exists w\, q(w) \vee \exists v\, \neg r(v,f(v))$$

$$\forall y\, \exists z\, \exists x(\neg p(x) \wedge r(y,z)) \rightarrow \exists w(q(w) \vee \neg r(w,f(w)))$$

$$\exists y\big(\exists z\, \exists x(\neg p(x) \wedge r(y,z)) \rightarrow (q(y) \vee \neg r(y,f(y)))\big)$$

$$\exists y\, \forall z\, \forall x\big(\neg p(x) \wedge r(y,z) \rightarrow q(y) \vee \neg r(y,f(y))\big)$$