Prova scritta di Logica Matematica
6 febbraio 2013

Cognome Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $p \vee \neg q \to \neg r \equiv (p \to \neg r) \wedge (r \to q)$. **V** **F** 1pt

2. Quante sono le variabili libere nella seguente formula?
$\forall x \neg \exists y (r(x, y) \to \neg q(x) \vee \exists z\, p(y, z, w)) \wedge p(z, w, f(w, z))$. **0** **1** **2** **3** **4** 1pt

3. Sia I l'interpretazione con $D^I = \mathbb{N}$, $a^I = 8$, $c^I = 7$, $f^I(n) = n + 2$ e
$r^I = \{\, (n, m) : n > m \,\}$. Allora $I \models \forall x(r(c, x) \to r(a, f(x)))$. **V** **F** 1pt

4. $\exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x) \models \exists x(p(x) \wedge q(x))$. **V** **F** 1pt

5. Se $F \models G$ e $\neg F \models \neg G$ allora $F \equiv G$. **V** **F** 1pt

6. Se φ è un omomorsmo forte (non necessariamente suriettivo) di I in J
e $I \models p(c) \vee \neg p(f(c))$ allora $J \models p(c) \vee \neg p(f(c))$. **V** **F** 1pt

7. Se Γ è un insieme di Hintikka cui appartiene $\forall x(r(x, c) \to \neg q(x))$
allora si ha necessariamente $q(c) \notin \Gamma$. **V** **F** 1pt

8. Se esiste un tableau chiuso (non necessariamente sistematico)
per l'enunciato predicativo F allora F è insoddisfacibile. **V** **F** 1pt

9. Se $\Gamma \rhd p(x)$ allora $\Gamma \rhd \forall x\, p(x)$. **V** **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate la soddisfacibilità di 4pt

$$\exists x\, \forall y\, \neg r(x, f(y)) \wedge \exists x\, \forall y\, r(y, x) \wedge \forall x\, r(x, x).$$

11. Sul retro del foglio dimostrate l'insoddisfacibilità dell'insieme 4pt

$$\{\exists x\, \forall y\, r(x, y), \forall x(p(x) \vee \neg r(x, c)), \forall x(r(x, f(x)) \to \neg p(x))\}.$$

12. Sia $\{a, b, p, c, g, =\}$ un linguaggio con uguaglianza dove a e b sono simboli di costante, p è un simbolo di funzione unario e c e g sono simboli di relazione unari. Interpretando a come "Alfa", b come "Bobi", $p(x)$ come "il padrone di x", $c(x)$ come "x è un cane" e $g(x)$ come "x è un gatto", traducete le seguenti frasi:

(i) Bobi è un cane che ha lo stesso padrone del gatto Alfa; 3pt

(ii) Bobi è un cane il cui padrone non ha altri cani. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$p \to r \land \neg t, q \to s, p \lor q \models \neg r \to s \land t.$$

Se la conseguenza logica non vale definite un'interpretazione che lo testimoni. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\forall x (\exists y\, r(x, y) \to \forall y\, \neg r(y, x)) \rhd \neg \exists x\, r(x, x).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Utilizzando lo spazio qui sotto mettete in forma prenessa l'enunciato 2pt

$$\neg \exists x\, \forall y\, \neg r(x, y) \land (\forall x\, \neg \forall y\, r(y, f(x)) \lor \neg \forall z\, p(f(z))) \to \forall u\, \neg \forall x\, \neg q(x, u).$$

[Se si usa il minimo numero di quantificatori possibili, 1pt in più.]

Soluzioni

1. **V** si verifica con le tavole di verità, oppure notando che $p \vee \neg q \to \neg r \equiv \neg(p \vee \neg q) \vee \neg r \equiv (\neg p \wedge q) \vee \neg r \equiv (\neg p \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg r) \equiv (p \to \neg r) \wedge (r \to q)$.

2. **2** z e w sono le variabili libere.

3. **F** si ha $I, \sigma[x/6] \models r(c, x)$ ma $I, \sigma[x/6] \not\models r(a, f(x))$.

4. **F** se $D^I = \{0, 1\}$, $p^I = \{0\}$, $q^I = \{1\}$ si ha $I \models \exists x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)$ e $I \not\models \exists x(p(x) \wedge q(x))$.

5. **V** $F \equiv G$ è equivalente a $F \models G$ e $G \models F$. La prima conseguenza logica è nelle ipotesi. Per la seconda osservate che se v è una interpretazione che soddisfa G, non può essere $v(\neg F) = \mathbf{V}$ perché altrimenti, per la seconda ipotesi, avremmo $v(\neg G) = \mathbf{V}$. Quindi $v(\neg F) = \mathbf{F}$, cioè $v(F) = \mathbf{V}$.

6. **V** segue dal Lemma 9.9 delle dispense.

7. **F** $\{\forall x(r(x, c) \to \neg q(x)), r(c, c) \to \neg q(c), \neg r(c, c), q(c)\}$ è un insieme di Hintikka.

8. **V** il teorema di correttezza (Teorema 10.28 delle dispense) non richiede che il tableau sia sistematico.

9. **F** non si può applicare la regola $(\forall i)$ perché x può essere libera in Γ. Per mostrare che l'affermazione può essere falsa scegliamo per esempio $\Gamma = \{p(x)\}$, in modo che banalmente si abbia $\Gamma \rhd p(x)$. Dato che $\Gamma \not\models \forall x\, p(x)$ per il teorema di correttezza abbiamo $\Gamma \not\rhd \forall x\, p(x)$.

10. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfi i tre congiunti. L'interpretazione I definita da

$$D^I = \{0, 1\}, \qquad f^I(0) = 1, \quad f^I(1) = 1,$$
$$r^I = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}$$

ha questa caratteristica.

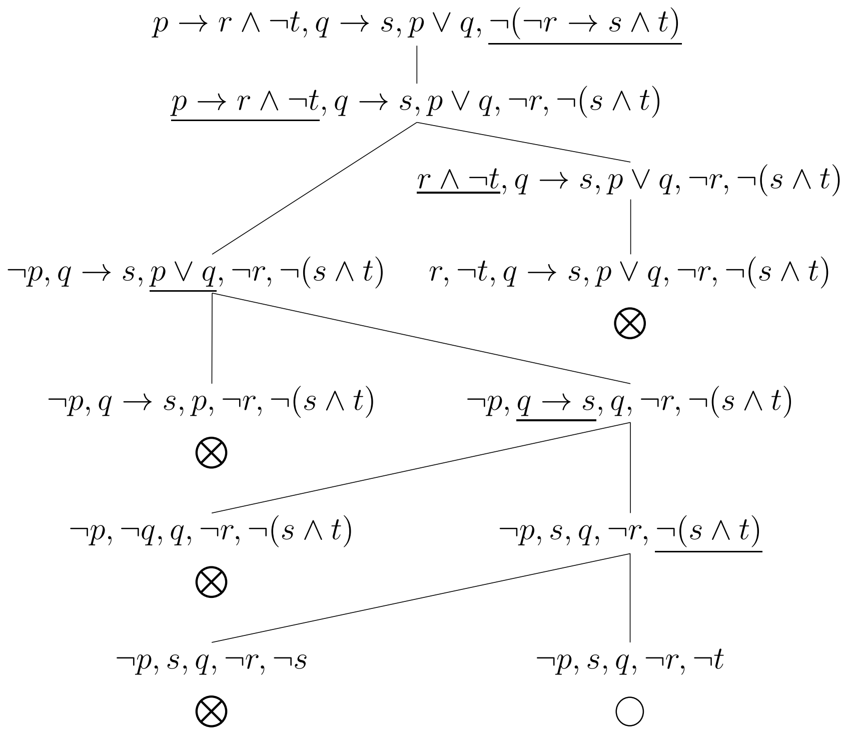
11. Dobbiamo mostrare che non esiste un'interpretazione I che soddisfa tutti i tre enunciati, che indichiamo con F, G e H. Supponiamo per assurdo che I abbia questa proprietà.

Dato che $I \models F$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d_0] \models \forall y\, r(x, y)$. Da $I \models G$ segue in particolare che $I, \sigma[x/d_0] \models p(x) \vee \neg r(x, c)$. Per quanto ottenuto prima si ha $(d_0, c^I) \in r^I$ e quindi deve essere $d_0 \in p^I$.

Dato che $I \models H$ abbiamo $I, \sigma[x/d_0] \models r(x, f(x)) \to \neg p(x)$. Da quest'ultimo fatto e da $d_0 \in p^I$ segue che vale $(d_0, f^I(d_0)) \notin r^I$ che contraddice $I, \sigma[x/d_0] \models \forall y\, r(x, y)$.

12. (i) $c(b) \wedge p(b) = p(a) \wedge g(a)$;
(ii) $c(b) \wedge \forall x(c(x) \wedge p(x) = p(b) \to x = b)$.

13. Per stabilire se la conseguenza logica vale costruiamo un tableau con la radice etichettata dalle formule a sinistra di $\models$ e dalla negazione della formula a destra di $\models$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. Utilizziamo ripetutamente la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.



Il tableau è aperto e quindi la conseguenza logica non vale. Un'interpretazione che lo testimonia è definita da $v(p) = \mathbf{F}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{F}$, $v(s) = \mathbf{V}$, $v(t) = \mathbf{F}$.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\, r(x,x)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[r(x,x)]^1}{\exists y\, r(x,y)} \qquad \dfrac{\forall x(\exists y\, r(x,y) \to \forall y\, \neg r(y,x))}{\exists y\, r(x,y) \to \forall y\, \neg r(y,x)}}{\forall y\, \neg r(y,x)}}{\neg r(x,x)} \qquad [r(x,x)]^1}{\bot}\,{}^{1}}{\bot}}{\neg \exists x\, r(x,x)}\,{}^{2}$$

15. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\neg \exists x\, \forall y\, \neg r(x,y) \wedge (\forall x\, \neg \forall y\, r(y, f(x)) \vee \neg \forall z\, p(f(z))) \to \forall u\, \neg \forall x\, \neg q(x,u)$$
$$\forall x\, \exists y\, r(x,y) \wedge (\forall x\, \exists y\, \neg r(y, f(x)) \vee \exists z\, \neg p(f(z))) \to \forall u\, \exists x\, q(x,u)$$
$$\forall x\, \exists y\, r(x,y) \wedge \forall x(\exists z\, \neg r(z, f(x)) \vee \exists z\, \neg p(f(z))) \to \forall u\, \exists x\, q(x,u)$$
$$\forall x(\exists y\, r(x,y) \wedge \exists z(\neg r(z, f(x)) \vee \neg p(f(z)))) \to \forall u\, \exists x\, q(x,u)$$
$$\forall x\, \exists y\, \exists z(r(x,y) \wedge (\neg r(z, f(x)) \vee \neg p(f(z)))) \to \forall u\, \exists x\, q(x,u)$$
$$\forall u\, \exists x(\exists y\, \exists z(r(x,y) \wedge (\neg r(z, f(x)) \vee \neg p(f(z)))) \to q(x,u))$$
$$\forall u\, \exists x\, \forall y\, \forall z(r(x,y) \wedge (\neg r(z, f(x)) \vee \neg p(f(z))) \to q(x,u))$$

Prova scritta di Logica Matematica
6 febbraio 2013

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Se $F \models \neg G$ e $\neg F \models G$ allora $F \equiv \neg G$. **V** | **F** 1pt

2. $(p \to \neg r) \wedge (r \to q) \equiv p \vee \neg q \to \neg r$. **V** | **F** 1pt

3. Quante sono le variabili libere nella seguente formula?
$\forall x(r(x, y) \to \neg q(x) \vee \exists z\, p(y, z, f(x, w))) \wedge p(z, w, f(w, z))$. **0** | **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

4. Sia I l'interpretazione con $D^I = \mathbb{N}$, $a^I = 8$, $c^I = 10$, $f^I(n) = n + 3$ e $r^I = \{\, (n, m) \,:\, n \leq m \,\}$. Allora $I \models \forall x(r(x, a) \to r(f(x), c))$. **V** | **F** 1pt

5. $\forall x(p(x) \vee q(x)) \models \forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)$. **V** | **F** 1pt

6. Se φ è un omomorsmo forte (non necessariamente suriettivo) di I in J e $I \models p(c) \to p(f(c))$ allora $J \models p(c) \to p(f(c))$. **V** | **F** 1pt

7. Se $\Gamma \rhd p(x)$ allora $\Gamma \rhd \forall x\, p(x)$. **V** | **F** 1pt

8. Se esiste un tableau aperto (non necessariamente sistematico) per l'enunciato predicativo F allora F è soddisfacibile. **V** | **F** 1pt

9. Se Γ è un insieme di Hintikka cui appartiene $\forall x(p(x) \vee r(x, c))$ allora si ha necessariamente $\neg p(c) \notin \Gamma$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate l'insoddisfacibilità dell'insieme 4pt

$$\{\forall x(\neg p(x) \vee r(x, c)), \exists x\, \forall y\, \neg r(x, y), \forall x(\neg r(x, f(x)) \to p(x))\}.$$

11. Sul retro del foglio dimostrate la soddisfacibilità di 4pt

$$\forall x\, r(x, x) \wedge \exists x\, \forall y\, r(x, y) \wedge \exists x\, \forall y\, \neg r(f(y), x).$$

12. Sia $\{a, b, p, c, g, =\}$ un linguaggio con uguaglianza dove a e b sono simboli di costante, p è un simbolo di funzione unario e c e g sono simboli di relazione unari. Interpretando a come "Alfa", b come "Bobi", $p(x)$ come "il padrone di x", $c(x)$ come "x è un cane" e $g(x)$ come "x è un gatto", traducete le seguenti frasi:

(i) Alfa è un gatto che ha lo stesso padrone del cane Bobi; 3pt

(ii) Alfa è un gatto il cui padrone non ha altri gatti. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$p \vee q, q \to \neg r \wedge t, p \to s \models r \to s \wedge \neg t.$$

Se la conseguenza logica non vale definite un'interpretazione che lo testimoni. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\exists x\, \neg r(x, x) \rhd \neg \forall x(\exists y\, \neg r(y, x) \to \forall y\, r(x, y)).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Utilizzando lo spazio qui sotto mettete in forma prenessa l'enunciato 2pt

$$(\forall x\, \neg \forall y\, r(x, y) \vee \exists z\, p(z)) \wedge \neg \exists x\, \forall y\, \neg q(y, x) \to \neg \exists u\, \forall x\, q(x, f(u)).$$

[Se si usa il minimo numero di quantificatori possibili, 1pt in più.]

Soluzioni

1. **V** $F \equiv \neg G$ è equivalente a $F \models \neg G$ e $\neg G \models F$. La prima conseguenza logica è nelle ipotesi. Per la seconda osservate che se v è una interpretazione che soddisfa $\neg G$, non può essere $v(\neg F) = \mathbf{V}$ perché altrimenti, per la seconda ipotesi, avremmo $v(G) = \mathbf{V}$. Quindi $v(\neg F) = \mathbf{F}$, cioè $v(F) = \mathbf{V}$.

2. **V** si verifica con le tavole di verità, oppure notando che $(p \to \neg r) \wedge (r \to q) \equiv (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg r \vee q) \equiv (\neg p \wedge q) \vee \neg r \equiv \neg(\neg p \wedge q) \to \neg r \equiv p \vee \neg q \to \neg r$.

3. **3** y, z e w sono le variabili libere.

4. **F** si ha $I, \sigma[x/8] \models r(x, a)$ ma $I, \sigma[x/8] \not\models r(f(x), c)$.

5. **F** se $D^I = \{0, 1\}$, $p^I = \{0\}$, $q^I = \{1\}$ si ha $I \models \forall x(p(x) \vee q(x))$ e $I \not\models \forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)$.

6. **V** segue dal Lemma 9.9 delle dispense.

7. **F** non si può applicare la regola $(\forall i)$ perché x può essere libera in Γ. Per mostrare che l'affermazione può essere falsa scegliamo per esempio $\Gamma = \{p(x)\}$, in modo che banalmente si abbia $\Gamma \rhd p(x)$. Dato che $\Gamma \not\models \forall x\, p(x)$ per il teorema di correttezza abbiamo $\Gamma \not\rhd \forall x\, p(x)$.

8. **F** vedere l'Esempio 10.15 delle dispense. Sono proprio i controesempi all'affermazione a motivare l'introduzione dei tableaux sistematici.

9. **F** $\{\forall x(p(x) \vee r(x, c)), p(c) \vee r(c, c), r(c, c), \neg p(c)\}$ è un insieme di Hintikka.

10. Dobbiamo mostrare che non esiste un'interpretazione I che soddisfa tutti i tre enunciati, che indichiamo con F, G e H. Supponiamo per assurdo che I abbia questa proprietà.

Dato che $I \models G$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d_0] \models \forall y\, \neg r(x, y)$. Da $I \models F$ segue in particolare che $I, \sigma[x/d_0] \models \neg p(x) \vee r(x, c)$. Per quanto ottenuto prima si ha $(d_0, c^I) \notin r^I$ e quindi deve essere $d_0 \notin p^I$.

Dato che $I \models H$ abbiamo $I, \sigma[x/d_0] \models \neg r(x, f(x)) \to p(x)$. Da quest'ultimo fatto e da $d_0 \notin p^I$ segue che vale $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$ che contraddice $I, \sigma[x/d_0] \models \forall y\, \neg r(x, y)$.

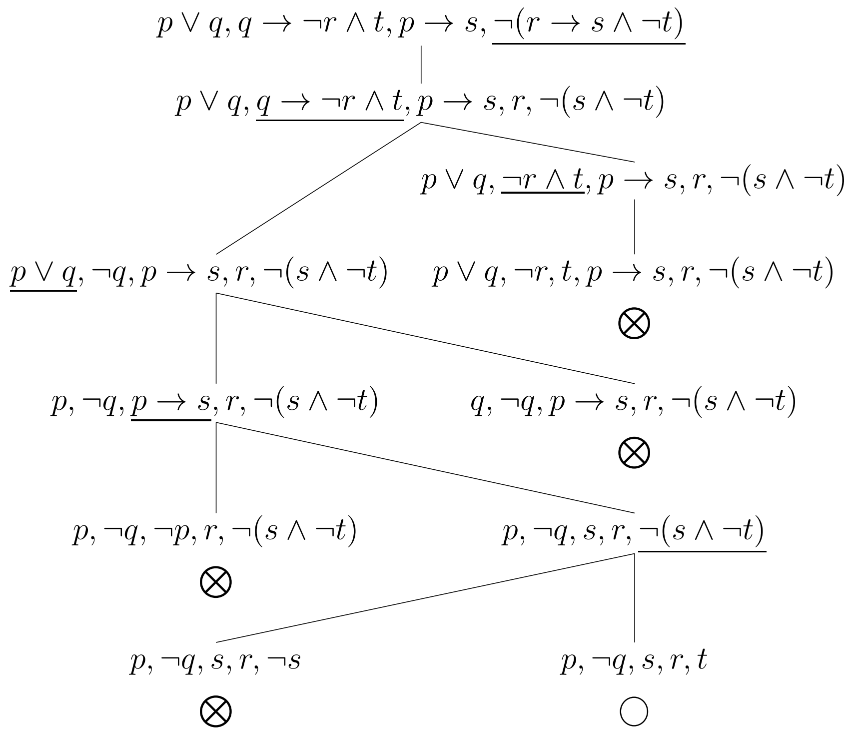
11. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfi i tre congiunti. L'interpretazione I definita da

$$D^I = \{0, 1\}, \qquad f^I(0) = 1, \quad f^I(1) = 1,$$
$$r^I = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$$

ha questa caratteristica.

12. (i) $g(a) \wedge p(a) = p(b) \wedge c(b)$;
(ii) $g(a) \wedge \neg\exists x(g(x) \wedge p(x) = p(a) \wedge x \neq a)$.

13. Per stabilire se la conseguenza logica vale costruiamo un tableau con la radice etichettata dalle formule a sinistra di $\models$ e dalla negazione della formula a destra di $\models$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. Utilizziamo ripetutamente la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.



Il tableau è aperto e quindi la conseguenza logica non vale. Un'interpretazione che lo testimonia è definita da $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{F}$, $v(s) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{V}$, $v(t) = \mathbf{V}$.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{\exists x\, \neg r(x,x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg r(x,x)]^1}{\exists y\, \neg r(y,x)} \qquad \dfrac{[\forall x(\exists y\, \neg r(y,x) \to \forall y\, r(x,y))]^2}{\exists y\, \neg r(y,x) \to \forall y\, r(x,y)}}{\forall y\, r(x,y)}}{r(x,x)} \qquad [\neg r(x,x)]^1}{\bot}}{\bot}\,1}{\neg \forall x(\exists y\, \neg r(y,x) \to \forall y\, r(x,y))}\,2$$

15. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$(\forall x\, \neg \forall y\, r(x,y) \vee \exists z\, p(z)) \wedge \neg \exists x\, \forall y\, \neg q(y,x) \to \neg \exists u\, \forall x\, q(x, f(u))$$
$$(\forall x\, \exists y\, \neg r(x,y) \vee \exists z\, p(z)) \wedge \forall x\, \exists y\, q(y,x) \to \forall u\, \exists x\, \neg q(x, f(u))$$
$$\forall x(\exists y\, \neg r(x,y) \vee \exists y\, p(y)) \wedge \forall x\, \exists y\, q(y,x) \to \forall u\, \exists x\, \neg q(x, f(u))$$
$$\forall x(\exists y\, (\neg r(x,y) \vee p(y)) \wedge \exists v\, q(v,x)) \to \forall u\, \exists x\, \neg q(x, f(u))$$
$$\forall x\, \exists y\, \exists v((\neg r(x,y) \vee p(y)) \wedge q(v,x)) \to \forall u\, \exists x\, \neg q(x, f(u))$$
$$\forall u(\forall x\, \exists y\, \exists v((\neg r(x,y) \vee p(y)) \wedge q(v,x)) \to \exists x\, \neg q(x, f(u)))$$
$$\forall u\, \exists x(\exists y\, \exists v((\neg r(x,y) \vee p(y)) \wedge q(v,x)) \to \neg q(x, f(u)))$$
$$\forall u\, \exists x\, \forall y\, \forall v(((\neg r(x,y) \vee p(y)) \wedge q(v,x)) \to \neg q(x, f(u)))$$