Prova scritta di Logica Matematica
5 settembre 2022

Cognome Nome Matricola

Indicate su ogni foglio che consegnate cognome, nome e numero di matricola.
Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio.

1. Usando l'algoritmo di Fitting mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$\neg p \wedge \neg(q \to r) \to (s \vee \neg t) \wedge \neg(\neg u \to \neg v).$$

2. Sia $\{a, i, p, c, =\}$ un linguaggio con uguaglianza dove a è un simbolo di costante, i è un simbolo di relazione unario e p e c sono simboli di relazione binari. Interpretando a come "Agata", $i(x)$ come "x è invitato alla festa", $p(x, y)$ come "x è parente di y", $c(x, y)$ come "x conosce y", traducete la frase: 3pt

ogni parente di Agata non conosce al massimo un invitato alla festa.

3. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$(p \vee (r \to q)) \wedge s \to (q \wedge \neg(r \wedge \neg s)) \vee \neg(q \vee (s \to \neg p))$$

è valida. Se la formula non è valida definite un'interpretazione che non la soddisfa.

4. Usando l'algoritmo presentato nel corso mettete in forma prenessa l'enunciato 2pt

$$(\forall x\, \neg\forall y\, \neg r(x, y) \to \neg\exists u\, \forall v\, q(u, v)) \wedge (\exists z\, \forall w\, p(w, z) \vee \neg\forall u\, r(u, u)).$$

Se riuscite, usate il minimo numero di quantificatori possibili. 1pt

5. Dimostrate che 4pt

$$\forall x\big(\exists y\, r(x, g(y)) \vee \forall y\, r(y, g(x))\big), \forall y\, \neg r(c, y) \vDash \exists z\, r(z, z).$$

6. Dimostrate la soddisfacibilità dell'insieme di enunciati 4pt

$$\{\exists x\, \forall y\, \neg r(f(y), x), \exists z\, \forall u\, r(z, u), \forall w\, r(w, w)\}.$$

7. Sia $\mathcal{L} = \{r\}$ un linguaggio con un simbolo di relazione binario. Siano I e J le seguenti interpretazioni per $\mathcal{L}$: 3pt

$$D^I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad r^I = \{(0, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 1), (4, 1)\};$$

$$D^J = \{A, B, C, D\}, \quad r^J = \{(C, A), (D, C)\}.$$

- Definite un omomorfismo forte di I in J;
- Esiste un omomorfismo forte suriettivo di I in J?

8. Usando il metodo dei tableaux dimostrate che 4pt

$$\forall x(p(x) \to \forall y\, r(x, c, y)) \vDash \forall x\, \neg p(x) \vee \exists x\, \exists y(r(y, x, x) \wedge r(y, x, y)).$$

9. Dimostrate, usando solo le regole della deduzione naturale predicativa (comprese le sei regole derivate) che 5pt

$$\exists x\, p(x), \forall y\, \neg r(y, y) \rhd \neg\forall z(p(z) \to \forall u\, r(u, f(z))).$$

Soluzioni

1. Utilizziamo l'Algoritmo 3.18 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.30:

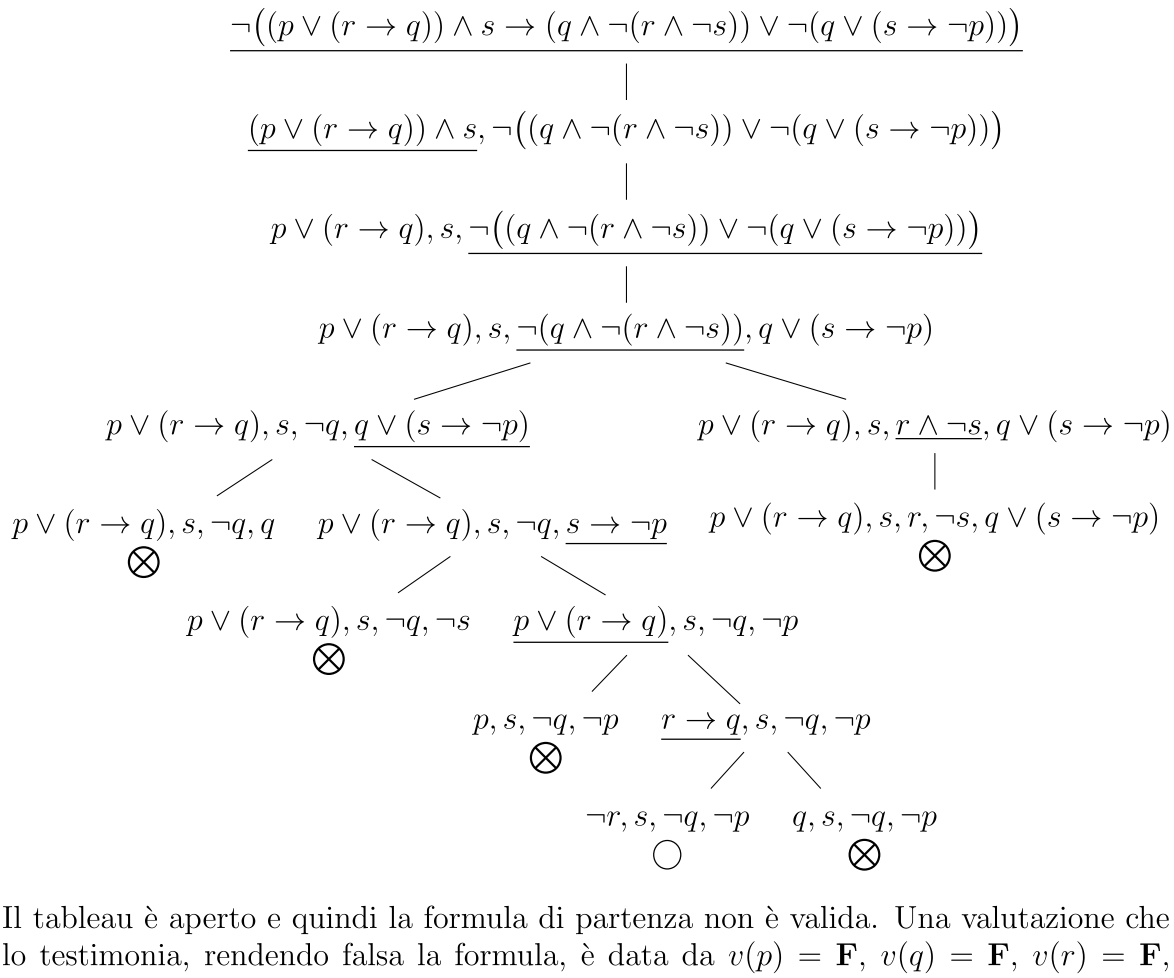
$$\langle[\neg p \wedge \neg(q \to r) \to (s \vee \neg t) \wedge \neg(\neg u \to \neg v)]\rangle$$
$$\langle[\neg(\neg p \wedge \neg(q \to r)), (s \vee \neg t) \wedge \neg(\neg u \to \neg v)]\rangle$$
$$\langle[p, q \to r, (s \vee \neg t) \wedge \neg(\neg u \to \neg v)]\rangle$$
$$\langle[p, \neg q, r, (s \vee \neg t) \wedge \neg(\neg u \to \neg v)]\rangle$$
$$\langle[p, \neg q, r, s \vee \neg t], [p, \neg q, r, \neg(\neg u \to \neg v)]\rangle$$
$$\langle[p, \neg q, r, s, \neg t], [p, \neg q, r, \neg u], [p, \neg q, r, v]\rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(p \vee \neg q \vee r \vee s \vee \neg t) \wedge (p \vee \neg q \vee r \vee \neg u) \wedge (p \vee \neg q \vee r \vee v).$$

2. $\forall x(p(x,a) \to \neg\exists y\, \exists z(y \neq z \wedge i(y) \wedge i(z) \wedge \neg c(x,y) \wedge \neg c(x,z)))$ oppure $\forall x(p(x,a) \to \forall y\, \forall z(i(y) \wedge i(z) \wedge \neg c(x,y) \wedge \neg c(x,z) \to x = y))$, o altri enunciati logicamente equivalenti a questi.

3. Per stabilire se la formula è valida applichiamo l'Algoritmo 4.5 delle dispense, etichettando la radice del tableau con la negazione della formula. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.



Il tableau è aperto e quindi la formula di partenza non è valida. Una valutazione che lo testimonia, rendendo falsa la formula, è data da $v(p) = \mathbf{F}$, $v(q) = \mathbf{F}$, $v(r) = \mathbf{F}$, $v(s) = \mathbf{V}$.

4. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$(\forall x\, \neg\forall y\, \neg r(x,y) \to \neg\exists u\, \forall v\, q(u,v)) \wedge (\exists z\, \forall w\, p(w,z) \vee \neg\forall u\, r(u,u))$$
$$(\forall x\, \exists y\, r(x,y) \to \forall u\, \exists v\, \neg q(u,v)) \wedge (\exists z\, \forall w\, p(w,z) \vee \exists u\, \neg r(u,u))$$
$$\forall u(\forall x\, \exists y\, r(x,y) \to \exists v\, \neg q(u,v)) \wedge \exists z(\forall w\, p(w,z) \vee \neg r(z,z))$$
$$\forall u\, \exists x(\exists y\, r(x,y) \to \neg q(u,x)) \wedge \exists z\, \forall w(p(w,z) \vee \neg r(z,z))$$
$$\forall u\, \exists x\, \forall y(r(x,y) \to \neg q(u,x)) \wedge \exists z\, \forall w(p(w,z) \vee \neg r(z,z))$$
$$\exists z\big(\forall u\, \exists x\, \forall y(r(x,y) \to \neg q(u,x)) \wedge \forall w(p(w,z) \vee \neg r(z,z))\big)$$
$$\exists z\, \forall u\big(\exists x\, \forall y(r(x,y) \to \neg q(u,x)) \wedge (p(u,z) \vee \neg r(z,z))\big)$$
$$\exists z\, \forall u\, \exists x\, \forall y\big((r(x,y) \to \neg q(u,x)) \wedge (p(u,z) \vee \neg r(z,z))\big)$$

5. Dobbiamo dimostrare che se un'interpretazione soddisfa i due enunciati, che indichiamo con F e G, a sinistra del simbolo di conseguenza logica allora soddisfa anche quello a destra. Supponiamo allora che I soddisfi F e G.

Dato che $I \vDash F$ si ha in particolare $I, \sigma[x/c^I] \vDash \exists y\, r(x, g(y)) \vee \forall y\, r(y, g(x))$ e ci sono due possibilità. La prima è che $I, \sigma[x/c^I] \vDash \exists y\, r(x, g(y))$. In questo caso esiste $d_0 \in D^I$ tale che $(c^I, g^I(d_0)) \in r^I$; questo contraddice $I \vDash G$, che significa che per tutti i $d \in D^I$, compreso dunque $g^I(d_0)$, si ha $(c^I, d) \notin r^I$.

Deve allora valere $I, \sigma[x/c^I] \vDash \forall y\, r(y, g(x))$ e perciò per ogni $d \in D^I$ abbiamo $(d, g^I(c^I)) \in r^I$; in particolare questo vale per $g^I(c^I)$, e quindi $(g^I(c^I), g^I(c^I)) \in r^I$. Ma questo implica che $I \vDash \exists z\, r(z,z)$, che è precisamente ciò che volevamo dimostrare.

6. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfa tutti e tre gli enunciati.

Un'interpretazione con queste caratteristiche è definita da

$$D^I = \{0,1,2\}, \quad f^I(0) = f^I(1) = f^I(2) = 2, \quad r^I = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,1),(2,2)\};$$

In questo caso $I, \sigma[x/1] \vDash \forall y\, \neg r(f(y), x)$ e $I, \sigma[z/0] \vDash \forall u\, r(z,u)$.

Un'altra soluzione si ottiene ponendo $D^J = \mathbb{N}$ e $r^J = \{\, (n,m) : n \leq m \,\}$; chiaramente il terzo enunciato è soddisfatto e interpretando z come 0 si vede che anche il secondo lo è. Per soddisfare il primo enunciato basta porre $f^J(n) = n+1$ per ogni n, così che sia sufficiente interpretare x come 0.

7.
- Sia φ l'omomorfismo forte di I in J che vogliamo definire.
  Visto che 0 è il primo elemento di una coppia in r^I ma non è il secondo elemento di nessuna coppia in r^I deve essere $\varphi(0) = D$. Per la stessa ragione $\varphi(2) = \varphi(4) = D$. Similmente, dal fatto che 3, 5, 6 e 7 sono il secondo elemento di una coppia in r^I ma non il primo elemento di nessuna coppia in r^I, si ottiene $\varphi(3) = \varphi(5) = \varphi(6) = \varphi(7) = A$.
  Infine, 1 occupa entrambe le posizioni nelle coppie di r^I e bisogna quindi porre $\varphi(1) = C$.
  Si può verificare che φ così definita è effettivamente un omomorfismo forte.
- L'omomorfismo forte definito nel punto precedente non è suriettivo (B non è nell'immagine di φ) e le scelte che abbiamo fatto sono obbligate e non permettono modifiche che ci permettano di ottenere la suriettività. Per essere certi della non esistenza dell'omomorfismo forte suriettivo si può mostrare che I e J non sono elementarmente equivalenti. A questo scopo si può notare che l'enunciato

  $$\forall x\, \exists y(r(x,y) \vee r(y,x))$$

  è soddisfatto da I ma non da J.

8. Per mostrare la conseguenza logica dobbiamo costruire (utilizzando l'Algoritmo 11.52 e le Convenzioni 11.19 e 11.21 delle dispense) un tableau chiuso con la radice etichettata dall'enunciato a sinistra del simbolo di conseguenza logica (che è una γ-formula che indichiamo con F) e la negazione dell'enunciato a destra. Indichiamo con G, H e K le γ-formule $\neg\exists x\,\exists y(r(y,x,x)\wedge r(y,x,y)))$, $\forall y\, r(a,c,y)$ e $\neg\exists y(r(y,c,c)\wedge r(y,c,y)))$.

In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$
\begin{array}{c}
F, \underline{\neg(\forall x\,\neg p(x)\vee\exists x\,\exists y(r(y,x,x)\wedge r(y,x,y)))} \\
| \\
F, \underline{\neg\forall x\,\neg p(x)}, G \\
| \\
\underline{F}, p(a), G \\
| \\
F, \underline{p(a)\to H}, p(a), G \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} F, \neg p(a), p(a), G \\ \otimes \end{array} &
\begin{array}{c}
F, H, p(a), \underline{G} \\
| \\
F, H, p(a), G, \underline{K} \\
| \\
F, H, p(a), G, K, \underline{\neg(r(a,c,c)\wedge r(a,c,a))}
\end{array}
\end{array} \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
F, \underline{H}, p(a), G, K, \neg r(a,c,c) \\
| \\
F, H, r(a,c,c), p(a), G, K, \neg r(a,c,c) \\
\otimes
\end{array} &
\begin{array}{c}
F, \underline{H}, p(a), G, K, \neg r(a,c,a) \\
| \\
F, H, r(a,c,a), p(a), G, K, \neg r(a,c,a) \\
\otimes
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Si noti l'importanza di scegliere in modo opportuno le istanze delle γ-formule. Con altre scelte il tableau cresce rapidamente di dimensione.

9. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$
\dfrac{\dfrac{\exists x\, p(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[p(x)]^1 \qquad \dfrac{[\forall z(p(z)\to\forall u\, r(u,f(z)))]^2}{p(x)\to\forall u\, r(u,f(x))}}{\forall u\, r(u,f(x))}}{r(f(x),f(x))} \qquad \dfrac{\forall y\,\neg r(y,y)}{\neg r(f(x),f(x))}}{\bot}}{\bot}\,{}_1}{\neg\forall z(p(z)\to\forall u\, r(u,f(z)))}\,{}^2
$$

Si noti che è possibile invertire l'ordine di applicazione delle ultime due regole della deduzione, usando $(\neg i)$ prima di $(\exists e)$.