Prova scritta di Logica Matematica
2 settembre 2021

Cognome Nome Matricola

Indicate su ogni foglio che consegnate cognome, nome e numero di matricola.

Nella prima parte ogni riposta corretta vale 1, ogni risposta sbagliata -1, ogni risposta non data 0. Il punteggio minimo per superare questa parte è 6. Il punteggio della prima parte viene sommato a quello della seconda per ottenere il voto dello scritto.

Nella seconda parte per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

a. $(p \wedge q \to \neg r) \to \neg(p \vee \neg s \vee r) \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge s)$. **V** **F**

b. Se $F \vDash \neg(G \to H)$ allora $\neg G \vDash \neg F$. **V** **F**

c. Esiste un insieme di Hintikka che contiene le formule $\exists x(p(x) \wedge \neg q(x))$ e $\forall y(p(y) \to q(y))$. **V** **F**

d. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{A, B, C, D, E\}$, $p^I = \{A, D, E\}$, $q^I = \{B, C, D\}$ e $r^I = \{(A, B), (B, A), (B, D), (B, E), (C, D), (D, A), (D, E), (E, D)\}$. Allora $I \models \exists x(p(x) \wedge \forall y(q(y) \to r(y, x)))$. **V** **F**

e. Quante delle seguenti formule sono enunciati?
$\forall x\, \neg \exists y\, r(x, y)$, $\forall y(p(y) \vee r(x, y))$, $\forall z(\exists u\, r(z, u) \vee r(u, z))$, $p(c) \wedge r(c, y)$. **0** **1** **2** **3** **4**

f. $\exists z(p(z) \to r(z, f(z))) \equiv \forall x\, p(x) \to \exists y\, r(y, f(y))$. **V** **F**

g. Sia F un enunciato e φ un omomorfismo forte suriettivo di I in J. Se $J \vDash F$ allora $I \vDash F$. **V** **F**

h. Quando nell'algoritmo di Fitting per la trasformazione in forma normale disgiuntiva si opera su una β-formula il numero di disgiunti resta lo stesso. **V** **F**

i. Per stabilire se $F, G \vDash H$ costruiamo un tableau la cui radice è etichettata con $\{F, G, H\}$. **V** **F**

j. Questo albero rappresenta una deduzione naturale corretta: **V** **F**

$$\dfrac{\exists x\, p(x) \qquad \dfrac{[p(x)]^1 \qquad p(x) \to q(a)}{q(a)}}{q(a)}\,1$$

k. Nel riquadro scrivete l'enunciato del Lemma di Sostituzione per formule.

SECONDA PARTE

Usate il retro del foglio per svolgere tutti gli esercizi salvo il primo e l'ultimo, per cui c'è spazio sufficiente sotto l'esercizio stesso.

1. Sia $\mathcal{L} = \{c, m, a, s, u\}$ un linguaggio dove c è un simbolo di costante, m è un simbolo di funzione unario, a è un simbolo di relazione unario e s e u sono simboli di relazione binari. Interpretando c come "Camilla", $m(x)$ come "il maestro di x", $a(x)$ come "x è un alunno", $s(x, y)$ come "x è severo con y" e $u(x, y)$ come "x ubbidisce ad y", traducete la frase: 3pt
"il maestro di Camilla non è severo con Camilla, ma è severo con tutti gli alunni che non ubbidiscono al loro maestro."

2. Dimostrate che 5pt

$$\forall x\, r(f(x), x), \forall x\, \forall y(\neg r(x, y) \vee \neg r(y, x)) \not\models \forall z\, \exists w\, r(z, w).$$

3. Dimostrate che 5pt

$$\{\exists x(p(x) \wedge \neg p(g(x))), \forall y(p(y) \rightarrow p(g(y)) \vee \exists z\, f(z) = y), \forall w\, \neg p(f(w))\}$$

è insoddisfacibile nella logica con uguaglianza.

4. Usando il metodo dei tableaux dimostrate che 4pt

$$\forall x\, r(x, a), \exists y\, \neg r(b, y) \models \neg \forall x\, \forall y(\exists z(r(x, z) \wedge r(y, z)) \rightarrow r(x, y))$$

5. Dimostrate, usando solo le regole della deduzione naturale predicativa (comprese le sei regole derivate) che 5pt

$$\exists x\, r(x, f(x)), \forall y(\exists u\, r(u, y) \rightarrow p(y) \vee p(g(y))) \rhd \exists z\, p(z).$$

6. Nello spazio qui sotto, usando l'algoritmo di Fitting, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$(p \rightarrow \neg w) \wedge \neg(q \vee \neg r) \rightarrow \neg(s \vee \neg(t \rightarrow u)).$$

Soluzioni

a. **V** come si verifica per esempio con le tavole di verità.

b. **V** perché se $v(\neg G) = \mathbf{V}$ allora $v(G \to H) = \mathbf{V}$ e di conseguenza $v(\neg(G \to H)) = \mathbf{F}$. Deve quindi essere $v(F) = \mathbf{F}$ (cioè $v(\neg F) = \mathbf{V}$) perché $v(F) = \mathbf{V}$ implica $v(\neg(G \to H)) = \mathbf{V}$.

c. **F** perchè se $\mathcal{H}$ è un insieme di Hintikka con $\exists x(p(x) \wedge \neg q(x)) \in \mathcal{H}$ deve essere anche $p(c) \wedge \neg q(c) \in \mathcal{H}$ per qualche costante c; ma allora $p(c) \in \mathcal{H}$ e $\neg q(c) \in \mathcal{H}$. D'altra parte $\forall y(p(y) \to q(y)) \in \mathcal{H}$ implica $p(c) \to q(c) \in \mathcal{H}$ che richiede $\neg p(c) \in \mathcal{H}$ oppure $q(c) \in \mathcal{H}$, che sono entrambe incompatibili con quanto ottenuto in precedenza.

d. **F** perché per nessun $d \in D^I$ si ha $I, \sigma[x/d] \models p(x) \wedge \forall y(q(y) \to r(y,x))$. Quando $d \in \{B, C\}$ si ha $I, \sigma[x/d] \not\models p(x)$. Se invece $d \in \{A, D, E\}$ si ha $I, \sigma[x/d] \not\models \forall y(q(y) \to r(y,x))$: $I, \sigma[x/A, y/C] \not\models q(y) \to r(y,x)$, $I, \sigma[x/D, y/D] \not\models q(y) \to r(y,x)$, $I, \sigma[x/E, y/C] \not\models q(y) \to r(y,x)$.

e. **1** solo la prima formula è un enunciato (nella seconda formula è libera x, nella terza è libera l'ultima occorrenza di u, nella quarta è libera y).

f. **V** per il Lemma 8.35 delle dispense.

g. **V** per il Teorema 10.13 e il Corollario 7.13 delle dispense.

h. **F** per il punto (3) dell'Algoritmo 3.22 delle dispense.

i. **F** secondo l'Algoritmo 4.40 delle dispense bisogna costruire un tableau la cui radice è etichettata con $\{F, G, \neg H\}$.

j. **F** perché nelle applicazioni della regola $(\exists e)$ è necessario che la variabile su cui si opera (in questo caso x) non compaia libera nelle ipotesi (nel nostro caso compare libera in $p(x) \to q(a)$); si noti inoltre che $\exists x\, p(x), p(x) \to q(a) \not\models q(a)$.

k. Se la sostituzione $\{x/t\}$ è ammissibile in F, allora $I, \sigma \models F\{x/t\}$ se e solo se $I, \sigma[x/\sigma(t)] \models F$.

1. $\neg s(m(c), c) \wedge \forall x(a(x) \wedge \neg u(x, m(x)) \to s(m(c), x))$.

2. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfi i due enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, ma non quello a destra. Due interpretazioni con queste caratteristiche sono definite da

$$D^I = \{0,1,2,3\}, \qquad f^I(0) = 1, \quad f^I(1) = 2, \quad f^I(2) = 3, \quad f^I(3) = 1,$$
$$r^I = \{(1,0), (1,3), (2,1), (3,2)\};$$
$$D^J = \mathbb{N}, \quad f^J(n) = n+1, \quad r^J = \{\, (n,m) \,:\, n > m \,\}.$$

3. Supponiamo che I sia un'interpretazione normale che soddisfa i tre enunciati, che indichiamo con F, G e H. Il nostro obiettivo è ottenere una contraddizione.

Dato che $I \models F$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $d_0 \in p^I$ e $g^I(d_0) \notin p^I$. Dato che $I \models G$ si ha in particolare $I, \sigma[y/d_0] \models p(y) \to p(g(y)) \vee \exists z\, f(z) = y$ da cui, dato che $I, \sigma[y/d_0] \models p(y)$, segue che $I, \sigma[y/d_0] \models p(g(y)) \vee \exists z\, f(z) = y$. Dato che $I, \sigma[y/d_0] \not\models p(g(y))$ deve essere $I, \sigma[y/d_0] \models \exists z\, f(z) = y$. Esiste dunque $d_1 \in D^I$ tale che $(f^I(d_1), d_0) \in =^I$; per la normalità di I, questo significa che $f^I(d_1)$ e d_0 sono lo stesso elemento di D^I. Si ha dunque $f^I(d_1) \in p^I$ e perciò $I, \sigma[w/d_1] \not\models \neg p(f(w))$, contraddicendo $I \models H$.

4. Per mostrare la conseguenza logica dobbiamo costruire (utilizzando l'Algoritmo 11.51 e le Convenzioni 11.19 e 11.21 delle dispense) un tableau chiuso con la radice etichettata dagli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione dell'enunciato a destra.

Indichiamo con F, G, H e K le γ-formule $\forall x\, r(x,a)$, $\forall x\, \forall y(\exists z(r(x,z) \wedge r(y,z)) \to r(x,y))$, $\forall y(\exists z(r(b,z) \wedge r(y,z)) \to r(b,y))$ e $\neg\exists z(r(b,z) \wedge r(c,z))$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$
\begin{array}{c}
F, \exists y\, \neg r(b,y), \underline{\neg\neg G} \\
\mid \\
F, \underline{\exists y\, \neg r(b,y)}, G \\
\mid \\
F, \neg r(b,c), \underline{G} \\
\mid \\
F, \neg r(b,c), G, \underline{H} \\
\mid \\
F, \neg r(b,c), G, H, \underline{\exists z(r(b,z) \wedge r(c,z)) \to r(b,c)} \\
\swarrow \qquad \searrow
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
F, \neg r(b,c), G, H, \underline{K} & F, \neg r(b,c), G, H, r(b,c) \\
\mid & \otimes \\
F, \neg r(b,c), G, H, K, \underline{\neg(r(b,a) \wedge r(c,a))} & \\
\swarrow \qquad \searrow &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\underline{F}, \neg r(b,c), G, H, K, \neg r(b,a) & \underline{F}, \neg r(b,c), G, H, K, \neg r(c,a) \\
\mid & \mid \\
F, r(b,a), \neg r(b,c), G, H, K, \neg r(b,a) & F, r(c,a), \neg r(b,c), G, H, K, \neg r(c,a) \\
\otimes & \otimes
\end{array}
$$

Si noti l'importanza di scegliere in modo opportuno le istanze delle γ-formule; con altre scelte il tableau cresce rapidamente di dimensione.

5. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$
\dfrac{\exists x\, r(x,f(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[r(x,f(x))]^2}{\exists u\, r(u,f(x))} \quad \dfrac{\forall y(\exists u\, r(u,y) \to p(y) \vee p(g(y)))}{\exists u\, r(u,f(x)) \to p(f(x)) \vee p(g(f(x)))}}{p(f(x)) \vee p(g(f(x)))} \quad \dfrac{[p(f(x))]^1}{\exists z\, p(z)} \quad \dfrac{[p(g(f(x)))]^1}{\exists z\, p(z)}}{\exists z\, p(z)}{\scriptstyle 1}}{\exists z\, p(z)}{\scriptstyle 2}
$$

6. Utilizziamo l'Algoritmo 3.18 delle dispense, con le semplificazioni della Nota 3.30:

$$
\begin{array}{c}
\langle [(p \to \neg w) \wedge \neg(q \vee \neg r) \to \neg(s \vee \neg(t \to u))] \rangle \\
\langle [\neg((p \to \neg w) \wedge \neg(q \vee \neg r)), \neg(s \vee \neg(t \to u))] \rangle \\
\langle [\neg(p \to \neg w), q \vee \neg r, \neg(s \vee \neg(t \to u))] \rangle \\
\langle [\neg(p \to \neg w), q, \neg r, \neg(s \vee \neg(t \to u))] \rangle \\
\langle [p, q, \neg r, \neg(s \vee \neg(t \to u))], [w, q, \neg r, \neg(s \vee \neg(t \to u))] \rangle \\
\langle [p, q, \neg r, \neg s], [p, q, \neg r, t \to u], [w, q, \neg r, \neg s], [w, q, \neg r, t \to u] \rangle \\
\langle [p, q, \neg r, \neg s], [p, q, \neg r, \neg t, u], [w, q, \neg r, \neg s], [w, q, \neg r, \neg t, u] \rangle
\end{array}
$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è
$(p \vee q \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg r \vee \neg t \vee u) \wedge (w \vee q \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (w \vee q \vee \neg r \vee \neg t \vee u)$.