Prova scritta di Logica Matematica
23 luglio 2013

Cognome | Nome | Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Se $F, G \models H$ allora $F \vee G \to H$ è valida. **V** | **F** — 1pt

2. Ogni formula proposizionale è logicamente equivalente ad una congiunzione di letterali. **V** | **F** — 1pt

3. $q \to p \vee r, p \vee \neg q \to r \models r$. **V** | **F** — 1pt

4. Se F è una formula proposizionale valida allora qualunque tableau per $\neg F$ è chiuso. **V** | **F** — 1pt

5. Quante delle seguenti formule sono enunciati?
$\forall x\, \neg\exists y (r(x,y) \to \neg q(x))$, $\exists z\, p(y,z,w)$, $\exists x\, q(x) \wedge r(x, f(x))$. **0** | **1** | **2** | **3** — 1pt

6. Se I è un'interpretazione tale che per qualche simbolo di costante a si ha $I \models p(a)$ allora $I \models \exists x\, p(x)$. **V** | **F** — 1pt

7. Se Γ è un insieme di Hintikka di enunciati tale che $\neg\exists x\,(p(x) \wedge \neg r(c, f(x))) \in \Gamma$ e $p(b) \in \Gamma$, allora $r(c, f(b)) \in \Gamma$. **V** | **F** — 1pt

8. Se esiste un omomorfismo forte di I in J allora $I \equiv_{\mathcal{L}} J$. **V** | **F** — 1pt

9. Se t è un termine chiuso allora la sostituzione di x con t è ammissibile in qualunque formula. **V** | **F** — 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate la soddisfacibilità dell'insieme di enunciati — 4pt

$$\{\exists x(p(x) \wedge \neg p(f(x))), \forall x(p(x) \to \exists y\, r(x,y) \wedge \neg r(x, f(x))), \forall x(\exists y\, r(y,x) \to \neg p(x) \wedge p(f(x)))\}.$$

11. Sul retro del foglio dimostrate la conseguenza logica — 4pt

$$\forall x\, \forall y (r(x,y) \wedge p(x) \to \neg p(y)) \models \forall x (p(x) \to \neg r(x,x)).$$

12. Sia $\{a, b, m, c, n, i\}$ un linguaggio dove a e b sono simboli di costante, m un simbolo di funzione unario, c e n simboli di relazione unari, e i un simbolo di relazione binario. Interpretando a come "Alfa", b come "Bobi", $m(x)$ come "la madre di x", $c(x)$ come "x è un cane", $n(x)$ come "x è nero" e $i(x, y)$ come "x insegue y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) Alfa è un cane nero che insegue la madre di Bobi; 3pt

(ii) la madre di qualche cane nero insegue tutti i cani che inseguono Alfa. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se l'insieme 3pt

$$\{p \to q \lor \neg r, \neg q \to r, \neg(\neg q \to \neg p)\}$$

è soddisfacibile. Se la formula è soddisfacibile definite un'interpretazione che lo testimoni. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\forall x(p(x) \to \neg r(x, f(a))), \forall y(\exists z\, \neg r(z, y) \to \neg p(y)) \rhd p(c) \to \exists x\, \neg p(f(x)).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Utilizzando lo spazio qui sotto mettete in forma prenessa l'enunciato 2pt

$$\forall x\, \neg\forall y\, r(f(y), x) \lor (\neg\forall x\, \exists z\, \neg r(z, f(x)) \land \neg\exists z\, \neg p(f(z))) \to \exists x\, \neg\forall u\, q(x, u).$$

[Se si usa il minimo numero di quantificatori possibili, 1pt in più.]

Soluzioni

1. **F** Se $F, G \models H$ allora $F \wedge G \to H$, ma non $F \vee G \to H$, è valida. Un esempio si ottiene e quando G è $\neg F$ e H non è valida.

2. **F** una formula in forma normale congiuntiva è una congiunzione di disgiunzioni di letterali, e non una congiunzione di letterali.

3. **V** come si verifica per esempio con le tavole di verità.

4. **V** è parte del teorema 4.21 delle dispense.

5. **1** al prima formula è un enunciato, mentre nella seconda y e w sono libere, mentre nella terza le ultime due occorrenze di x sono libere.

6. **V** se $I \models p(a)$ allora, per il lemma di sostituzione, $I, \sigma[x/a^I] \models p(x)$.

7. **V** da $\neg\exists x\,(p(x) \wedge \neg r(c, f(x))) \in \Gamma$ segue $\neg(p(b) \wedge \neg r(c, f(b))) \in \Gamma$. Dato che $\neg p(b) \in \Gamma$ è impossibile perché $p(b) \in \Gamma$, deve essere $\neg\neg r(c, f(b)) \in \Gamma$ e quindi $r(c, f(b)) \in \Gamma$.

8. **F** perché la conclusione valga l'omomorfismo forte deve essere suriettivo. Si veda l'esempio 9.10 delle dispense.

9. **V** si veda l'osservazione dopo la definizione 6.52 delle dispense.

10. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfi i tre enunciati. Un esempio è l'interpretazione I definita da

$$D^I = \{0,1,2\}, \qquad f^I(0) = 1, \quad f^I(1) = f^I(2) = 0,$$
$$p^I = \{0\}, \qquad r^I = \{(0,2)\}.$$

11. Indichiamo con F e G gli enunciati a sinistra e a destra del simbolo di conseguenza logica. Dobbiamo dimostrare che se $I \models F$ allora $I \models G$, dove I è un'interpretazione arbitraria.

Supponiamo dunque $I \models F$ e sia $d \in D^I$ arbitrario. Se $d \notin p^I$ allora $I, \sigma[x/d] \models p(x) \to \neg r(x,x)$. Se invece $d \in p^I$ ma $(d,d) \in r^I$ avremmo che $I, \sigma[x/d, y/d] \models r(x,y) \wedge p(x)$. Dato che $I \models F$ si ha anche $I, \sigma[x/d, y/d] \models r(x,y) \wedge p(x) \to \neg p(y)$, e quindi $I, \sigma[x/d, y/d] \models \neg p(y)$, cioè $d \notin p^I$, che è una contraddizione. Perciò $(d,d) \notin r^I$, ovvero $I, \sigma[x/d] \models \neg r(x,x)$ e $I, \sigma[x/d] \models p(x) \to \neg r(x,x)$ anche in questo caso.

Abbiamo dunque dimostrato che per ogni $d \in D^I$ abbiamo $I, \sigma[x/d] \models p(x) \to \neg r(x,x)$, cioè $I \models G$.

12. (i) $c(a) \wedge n(a) \wedge i(a, m(b))$;
(ii) $\exists x\big(c(x) \wedge n(x) \wedge \forall y(c(y) \wedge i(y,a) \to i(m(x), y))\big)$.

13. Per stabilire se l'insieme di formule è soddisfacibile costruiamo un tableau con l'insieme di formule alla radice. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. Utilizziamo la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.

- $p \to q \vee \neg r, \neg q \to r, \underline{\neg(\neg q \to \neg p)}$
  - $p \to q \vee \neg r, \underline{\neg q \to r}, \neg q, p$
    - $p \to q \vee \neg r, q, \neg q, p$ $\otimes$
    - $\underline{p \to q \vee \neg r}, r, \neg q, p$
      - $\neg p, r, \neg q, p$ $\otimes$
      - $\underline{q \vee \neg r}, r, \neg q, p$
        - $q, r, \neg q, p$ $\otimes$
        - $\neg r, r, \neg q, p$ $\otimes$

Il tableau è chiuso e quindi l'insieme di formule di partenza è insoddisfacibile.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p(c)]^1 \quad \dfrac{\forall x(p(x) \to \neg r(x, f(a)))}{p(c) \to \neg r(c, f(a))}}{\neg r(c, f(a))}}{\exists z\, \neg r(z, f(a))} \quad \dfrac{\forall y(\exists z\, \neg r(z, y) \to \neg p(y))}{\exists z\, \neg r(z, f(a)) \to \neg p(f(a))}}{\neg p(f(a))}}{\exists x\, \neg p(f(x))}}{p(c) \to \exists x\, \neg p(f(x))}\,{}^{1}$$

15. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quanticatori è:

$$\forall x\, \neg \forall y\, r(f(y), x) \vee (\neg \forall x\, \exists z\, \neg r(z, f(x)) \wedge \neg \exists z\, \neg p(f(z))) \to \exists x\, \neg \forall u\, q(x, u)$$
$$\forall x\, \exists y\, \neg r(f(y), x) \vee (\exists x\, \forall z\, r(z, f(x)) \wedge \forall z\, p(f(z))) \to \exists x\, \exists u\, \neg q(x, u)$$
$$\forall x\, \exists y\, \neg r(f(y), x) \vee \exists x(\forall z\, r(z, f(x)) \wedge \forall z\, p(f(z))) \to \exists x\, \exists u\, \neg q(x, u)$$
$$\forall x\, \exists y\, \neg r(f(y), x) \vee \exists x\, \forall z(r(z, f(x)) \wedge p(f(z))) \to \exists x\, \exists u\, \neg q(x, u)$$
$$\forall x(\exists y\, \neg r(f(y), x) \vee \exists x\, \forall z(r(z, f(x)) \wedge p(f(z)))) \to \exists x\, \exists u\, \neg q(x, u)$$
$$\forall x(\exists y\, \neg r(f(y), x) \vee \exists y\, \forall z(r(z, f(y)) \wedge p(f(z)))) \to \exists x\, \exists u\, \neg q(x, u)$$
$$\forall x\, \exists y(\neg r(f(y), x) \vee \forall z(r(z, f(y)) \wedge p(f(z)))) \to \exists x\, \exists u\, \neg q(x, u)$$
$$\forall x\, \exists y\, \forall z(\neg r(f(y), x) \vee (r(z, f(y)) \wedge p(f(z)))) \to \exists x\, \exists u\, \neg q(x, u)$$
$$\exists x\big(\exists y\, \forall z(\neg r(f(y), x) \vee (r(z, f(y)) \wedge p(f(z)))) \to \exists u\, \neg q(x, u)\big)$$
$$\exists x\, \forall y\big(\forall z(\neg r(f(y), x) \vee (r(z, f(y)) \wedge p(f(z)))) \to \exists u\, \neg q(x, u)\big)$$
$$\exists x\, \forall y\big(\forall z(\neg r(f(y), x) \vee (r(z, f(y)) \wedge p(f(z)))) \to \exists z\, \neg q(x, z)\big)$$
$$\exists x\, \forall y\, \exists z\big(\neg r(f(y), x) \vee (r(z, f(y)) \wedge p(f(z))) \to \neg q(x, z)\big)$$