Prova scritta di Logica Matematica
20 febbraio 2013

Cognome   Nome
                                                               Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $p \to r \wedge q$ è una α-formula o una β-formula? $\boxed{\alpha \mid \beta}$ 1pt

2. Se l'insieme $\{F, G\}$ è soddisfacibile allora sia F che G sono soddisfacibili. **V** | **F** 1pt

3. $p \to (\neg q \to p)$ è valida. **V** | **F** 1pt

4. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $p^I = \{0, 3\}$, $q^I = \{0, 1\}$ e $r^I = \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$.
Allora $I \models \forall x(p(x) \vee \neg q(x) \to \exists y(q(y) \wedge r(x, y)))$. **V** | **F** 1pt

5. $\exists x\, p(x) \vee \exists y\, q(y) \equiv \exists x(p(x) \vee q(x))$. **V** | **F** 1pt

6. Se φ è un omomorsmo forte (non necessariamente suriettivo) di I in J e $J \models \exists x\, p(x)$ allora $I \models \exists x\, p(x)$. **V** | **F** 1pt

7. Un tableau per una formula predicativa soddisfacibile che non sia sistematico può essere chiuso. **V** | **F** 1pt

8. Esiste un insieme di Hintikka Γ con $\neg(p \to q) \in \Gamma$ e $\neg p \in \Gamma$. **V** | **F** 1pt

9. Se $\Gamma \rhd p(f(x))$ allora $\Gamma \rhd \exists x\, p(x)$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x(\exists y\, r(f(y), x) \to \neg r(x, f(x))) \models_{=} \forall x(r(x, x) \to x \neq f(x)).$$

11. Sia $\mathcal{L} = \{p, r\}$ il linguaggio con p simbolo di relazione unario e r simbolo di relazione binario. Siano I e J le seguenti interpretazioni per $\mathcal{L}$:

$D^I = \{A, B\}$, $p^I = \{A\}$, $r^I = \{(A, B), (B, B)\}$; $D^J = \{0, 1, 2, 3\}$, $p^J = \{2\}$,
$r^J = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 3)\}$.

Sul retro del foglio dimostrate:

(i) che I e J sono elementarmente equivalenti; 4pt

(ii) che I e J non sono elementarmente equivalenti nella logica con uguaglianza (ovviamente nel linguaggio ottenuto aggiungendo $=$ a $\mathcal{L}$). 1pt

12. Sia $\{b, d, c, t, a\}$ un linguaggio dove b e d sono simboli di costante, c e t sono simboli di relazione unari e a è un simbolo di relazione binario. Interpretando b come “Barbara”, d come “Donatella”, $c(x)$ come “x ama il cinema”, $t(x)$ come “x ama il teatro” e $a(x, y)$ come “x è amico di y”, traducete le seguenti frasi:

(i) Barbara è amica di Donatella e ama il cinema, ma non il teatro; 3pt

(ii) Chi è amico di qualcuno che ama il cinema, ama il cinema e non è amico di chi ama il teatro. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$\neg\big((\neg p \to \neg(q \to \neg r)) \to (p \vee (r \wedge q))\big)$$

è soddisfacibile. Se la formula è soddisfacibile definite un'interpretazione che lo testimoni. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\forall x(p(x) \to \neg r(x, f(x))), \exists x\, \forall y\, r(x, y) \rhd \neg\forall x\, p(x).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$\neg(p \wedge \neg q) \to (r \to \neg s \wedge t) \wedge \neg(\neg u \vee v \to \neg w).$$

Soluzioni

1. β è un'implicazione.

2. V un'interpretazione che soddisfa $\{F, G\}$ soddisfa sia F che G.

3. V si verifica con le tavole di verità, oppure notando che se p è vera il conseguente dell'implicazione è vera, mentre se p è falsa l'antecedente è falso: in ogni caso l'implicazione è vera.

4. F si ha $I, \sigma[x/3] \models p(x) \vee \neg q(x)$ ma $I, \sigma[x/3] \not\models \exists y(q(y) \wedge r(x, y))$.

5. V per il Lemma 7.55 delle dispense.

6. F si veda l'Esempio 9.10 delle dispense. Un controesempio si ottiene ponendo $D^I = \{0\}$, $p^I = \{0\}$, $D^J = \{0, 1\}$, $p^J = \{0\}$. L'identità è un omomorfismo forte, $I \models \forall x\, p(x)$ e $J \not\models \forall x\, p(x)$.

7. F il teorema di correttezza (Teorema 10.28 delle dispense) non richiede che il tableau sia sistematico.

8. F se $\neg(p \to q) \in \Gamma$ deve essere (tra l'altro) $p \in \Gamma$ e quindi $\neg p \notin \Gamma$.

9. V la nuova deduzione naturale si ottiene da quella di partenza con un'applicazione di $(\exists i)$ (la sostituzione $\{x/f(x)\}$ è ammissibile in $p(x)$).

10. Dobbiamo mostrare che ogni interpretazione normale I che soddisfa tutti l'enunciato a sinistra, che indichiamo con F, soddisfa anche quello di destra, che chiamiamo con G. Supponiamo per assurdo che $I \models F$ ma $I \not\models G$.

Dato che $I \not\models G$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d_0] \not\models r(x, x) \to x \neq f(x)$, ovvero $(d_0, d_0) \in r^I$ e $f^I(d_0) = d^0$ (qui usiamo la normalità di I). Allora $I, \sigma[x/d_0, y/d_0] \models r(f(y), x)$ e quindi $I, \sigma[x/d_0] \models \exists y\, r(f(y), x)$. Dato che $I \models F$ deve essere $I, \sigma[x/d_0] \models \neg r(x, f(x))$, cioè $(d_0, d_0) \notin r^I$, una contraddizione.

11. (i) Basta definire un omomorfismo forte suriettivo di J in I (nell'altra direzione è impossibile, vista la cardinalità dei domini) e applicare il Corollario 9.14 delle dispense. Se $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi(3) = B$ e $\varphi(2) = A$ le condizioni della definizione di omomorfismo forte sono soddisfatte.

(ii) Basta indicare un enunciato del linguaggio con uguaglianza vero in I e falso in J (o viceversa): $\forall x\, \forall y(\neg p(x) \wedge \neg p(y) \to x = y)$ va bene.

12. (i) $a(b, d) \wedge c(b) \wedge \neg t(b)$;

(ii) $\forall x(\exists y(a(x, y) \wedge c(y)) \to c(x) \wedge \forall z(t(z) \to \neg a(x, z)))$.

13. Per stabilire se la formula è soddisfacibile costruiamo un tableau per essa. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. Utilizziamo la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.

$$\underline{\neg\big((\neg p \to \neg(q \to \neg r)) \to (p \vee (r \wedge q))\big)}$$

$$\neg p \to \neg(q \to \neg r), \underline{\neg(p \vee (r \wedge q))}$$

$$\underline{\neg p \to \neg(q \to \neg r)}, \neg p, \neg(r \wedge q)$$

$$\begin{array}{cc} p, \neg p, \neg(r \wedge q) & \underline{\neg(q \to \neg r)}, \neg p, \neg(r \wedge q) \\ \otimes & \\ & q, r, \neg p, \underline{\neg(r \wedge q)} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} q, r, \neg p, \neg r & q, r, \neg p, \neg q \\ \otimes & \otimes \end{array}$$

Il tableau è chiuso e quindi la formula di partenza è insoddisfacibile.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\exists x\, \forall y\, r(x,y) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall y\, r(x,y)]^2}{r(x,f(x))} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall x\, p(x)]^1}{p(x)} \qquad \dfrac{\forall x(p(x) \to \neg r(x,f(x)))}{p(x) \to \neg r(x,f(x))}}{\neg r(x,f(x))}}{\bot}}{\neg \forall x\, p(x)}\,1}{\neg \forall x\, p(x)}\,2$$

15.

$$\langle[\neg(p \wedge \neg q) \to (r \to \neg s \wedge t) \wedge \neg(\neg u \vee v \to \neg w)]\rangle$$
$$\langle[p \wedge \neg q, (r \to \neg s \wedge t) \wedge \neg(\neg u \vee v \to \neg w)]\rangle$$
$$\langle[p, (r \to \neg s \wedge t) \wedge \neg(\neg u \vee v \to \neg w)], [\neg q, (r \to \neg s \wedge t) \wedge \neg(\neg u \vee v \to \neg w)]\rangle$$
$$\langle[p, r \to \neg s \wedge t], [p, \neg(\neg u \vee v \to \neg w)], [\neg q, r \to \neg s \wedge t], [\neg q, \neg(\neg u \vee v \to \neg w)]\rangle$$
$$\langle[p, \neg r, \neg s \wedge t], [p, \neg u \vee v], [p, w], [\neg q, \neg r, \neg s \wedge t], [\neg q, \neg u \vee v], [\neg q, w]\rangle$$
$$\langle[p, \neg r, \neg s], [p, \neg r, t], [p, \neg u, v], [p, w], [\neg q, \neg r, \neg s], [\neg q, \neg r, t], [\neg q, \neg u, v], [\neg q, w]\rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee t) \wedge (p \vee \neg u \vee v) \wedge (p \vee w) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \neg s) \wedge$$
$$\wedge (\neg q \vee \neg r \vee t) \wedge (\neg q \vee \neg u \vee v) \wedge (\neg q \vee w).$$

Prova scritta di Logica Matematica
20 febbraio 2013

Cognome | Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Se l'insieme $\{F, G\}$ è insoddisfacibile allora almeno una tra F e G è insoddisfacibile. **V** | **F** 1pt

2. $p \to (q \to p)$ è valida. **V** | **F** 1pt

3. $p \wedge q \to r$ è una α-formula o una β-formula? α | β 1pt

4. Esiste un insieme di Hintikka Γ con $\neg(p \to q) \in \Gamma$ e $q \in \Gamma$. **V** | **F** 1pt

5. $\forall x\, p(x) \wedge \forall y\, q(y) \equiv \forall x(p(x) \wedge q(x))$. **V** | **F** 1pt

6. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $p^I = \{0, 3\}$, $q^I = \{0, 1\}$ e $r^I = \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$.
Allora $I \models \forall x(p(x) \vee \neg q(x) \to \exists y(q(y) \wedge r(x, y)))$. **V** | **F** 1pt

7. Se φ è un omomorsmo forte (non necessariamente suriettivo) di I in J e $I \models \forall x\, p(x)$ allora $J \models \forall x\, p(x)$. **V** | **F** 1pt

8. Se $\Gamma \rhd r(y, c)$ allora $\Gamma \rhd \exists x\, r(x, c)$. **V** | **F** 1pt

9. Un tableau per una formula predicativa insoddisfacibile che non sia sistematico può essere aperto. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x(\neg r(x, f(x)) \to \forall y\, r(f(y), x)) \models_{=} \forall x(x = f(x) \to r(x, x)).$$

11. Sia $\mathcal{L} = \{p, r\}$ il linguaggio con p simbolo di relazione unario e r simbolo di relazione binario. Siano I e J le seguenti interpretazioni per $\mathcal{L}$:

$D^I = \{A, B\}$, $\quad p^I = \{A\}$, $\quad r^I = \{(A, B)\}$;

$D^J = \{0, 1, 2, 3\}$, $\quad p^J = \{1, 2\}$, $\quad r^J = \{(1, 0), (1, 3), (2, 0), (2, 3)\}$.

Sul retro del foglio dimostrate:

(i) che I e J sono elementarmente equivalenti; 4pt

(ii) che I e J non sono elementarmente equivalenti nella logica con uguaglianza (ovviamente nel linguaggio ottenuto aggiungendo $=$ a $\mathcal{L}$). 1pt

12. Sia $\{b, d, c, t, a\}$ un linguaggio dove b e d sono simboli di costante, c e t sono simboli di relazione unari e a è un simbolo di relazione binario. Interpretando b come "Bruno", d come "Davide", $c(x)$ come "x ama il cinema", $t(x)$ come "x ama il teatro" e $a(x, y)$ come "x è amico di y", traducete le seguenti frasi:

(i) Davide è amico di Bruno e ama il teatro, ma non il cinema; 3pt

(ii) Chi è amico di qualcuno che ama il teatro, ama il teatro e non è amico di chi ama il cinema. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$(\neg p \to \neg(q \to \neg r)) \to (p \vee (r \wedge q))$$

è valida. Se la formula non è valida definite un'interpretazione che lo testimoni. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\forall x(p(x) \to r(f(x), x)), \exists x\, \forall y\, \neg r(y, x) \rhd \neg \forall x\, p(x).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$\neg(p \wedge q) \to (\neg r \to \neg t \wedge \neg s) \wedge \neg(u \vee v \to \neg z).$$

Soluzioni

1. **F** se F è p e G è $\neg p$ l'insieme $\{F, G\}$ è insoddisfacibile, ma ognuna delle due formule è soddisfacibile.
2. **V** si verifica con le tavole di verità, oppure notando che se p è vera il conseguente dell'implicazione è vera, mentre se p è falsa l'antecedente è falso: in ogni caso l'implicazione è vera.
3. β è un'implicazione.
4. **F** se $\neg(p \to q) \in \Gamma$ deve essere (tra l'altro) $\neg q \in \Gamma$ e quindi $q \notin \Gamma$.
5. **V** per il Lemma 7.55 delle dispense.
6. **F** si ha $I, \sigma[x/3] \models p(x) \vee \neg q(x)$ ma $I, \sigma[x/3] \not\models \exists y(q(y) \wedge r(x, y))$.
7. **F** si veda l'Esempio 9.10 delle dispense. Un controesempio si ottiene ponendo $D^I = \{0\}$, $p^I = \{0\}$, $D^J = \{0, 1\}$, $p^J = \{0\}$. L'identità è un omomorfismo forte, $I \models \forall x\, p(x)$ e $J \not\models \forall x\, p(x)$.
8. **V** la nuova deduzione naturale si ottiene da quella di partenza con un'applicazione di $(\exists i)$ (la sostituzione $\{x/y\}$ è ammissibile in $p(x)$).
9. **V** questo fenomeno (Esempio 10.15 delle dispense) è proprio il motivo dell'introduzione dei tableaux sistematici.
10. Dobbiamo mostrare che ogni interpretazione normale I che soddisfa tutti l'enunciato a sinistra, che indichiamo con F, soddisfa anche quello di destra, che chiamiamo con G. Supponiamo per assurdo che $I \models F$ ma $I \not\models G$.

    Dato che $I \not\models G$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d_0] \not\models x = f(x) \to r(x, x)$, ovvero $d^0 = f^I(d_0)$ (qui usiamo la normalità di I) e $(d_0, d_0) \notin r^I$. Allora $I, \sigma[x/d_0] \models \neg r(x, f(x))$. Dato che $I \models F$ deve essere $I, \sigma[x/d_0] \models \forall y\, r(f(y), x)$ e quindi in particolare $I, \sigma[x/d_0, y/d_0] \models r(f(y), x)$, cioè $(d_0, d_0) \in r^I$, una contraddizione.
11. (i) Basta definire un omomorfismo forte suriettivo di J in I (nell'altra direzione è impossibile, vista la cardinalità dei domini) e applicare il Corollario 9.14 delle dispense. Se $\varphi(0) = \varphi(3) = B$ e $\varphi(1) = \varphi(2) = A$ le condizioni della definizione di omomorfismo forte sono soddisfatte.

    (ii) Basta indicare un enunciato del linguaggio con uguaglianza vero in I e falso in J (o viceversa): $\forall x\, \forall y(p(x) \wedge p(y) \to x = y)$ va bene.
12. (i) $a(d, b) \wedge t(d) \wedge \neg c(d)$;

    (ii) $\forall x(\exists y(a(x, y) \wedge t(y)) \to t(x) \wedge \forall z(c(z) \to \neg a(x, z)))$.

13. Per stabilire se la formula è valida costruiamo un tableau per la sua negazione. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. Utilizziamo la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.

- $\underline{\neg\big((\neg p \to \neg(q \to \neg r)) \to (p \lor (r \land q))\big)}$
  - $\neg p \to \neg(q \to \neg r), \underline{\neg(p \lor (r \land q))}$
    - $\underline{\neg p \to \neg(q \to \neg r)}, \neg p, \neg(r \land q)$
      - $p, \neg p, \neg(r \land q)$
        $\otimes$
      - $\underline{\neg(q \to \neg r)}, \neg p, \neg(r \land q)$
        - $q, r, \neg p, \underline{\neg(r \land q)}$
          - $q, r, \neg p, \neg r$
            $\otimes$
          - $q, r, \neg p, \neg q$
            $\otimes$

Il tableau è chiuso e quindi la formula di partenza è valida.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{\exists x\,\forall y\,\neg r(x,y) \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall y\,\neg r(x,y)]^1}{\neg r(x,f(x))} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall x\,p(x)]^2}{p(x)} \qquad \dfrac{\forall x(p(x) \to r(x,f(x)))}{p(x) \to r(x,f(x))}}{r(x,f(x))}}{\bot}}{\bot}\,{}^{1}}{\neg\forall x\,p(x)}\,{}^{2}$$

15.

$$\langle[\neg(p \land q) \to (\neg r \to \neg t \land \neg s) \land \neg(u \lor v \to \neg z)]\rangle$$
$$\langle[p \land q, (\neg r \to \neg t \land \neg s) \land \neg(u \lor v \to \neg z)]\rangle$$
$$\langle[p \land q, \neg r \to \neg t \land \neg s], [p \land q, \neg(u \lor v \to \neg z)]\rangle$$
$$\langle[p \land q, r, \neg t \land \neg s], [p \land q, u \lor v], [p \land q, z]\rangle$$
$$\langle[p, r, \neg t \land \neg s], [q, r, \neg t \land \neg s], [p \land q, u, v], [p, z], [q, z]\rangle$$
$$\langle[p, r, \neg t], [p, r, \neg s], [q, r, \neg t], [q, r, \neg s], [p, u, v], [q, u, v], [p, z], [q, z]\rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(p \lor r \lor \neg t) \land (p \lor r \lor \neg s) \land (q \lor r \lor \neg t) \land (q \lor r \lor \neg s) \land (p \lor u \lor v) \land (q \lor u \lor v) \land (p \lor z) \land (q \lor z).$$