Prova scritta di Logica Matematica 1
15 luglio 2010

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $\neg(p \vee (q \to \neg(q \to p)))$ è una α-formula o una β-formula? $\boxed{\alpha}\boxed{\beta}$ 1pt

2. Se $F \to G$ è valida e $G \models H$ allora $F \models H$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

3. La negazione di un letterale è logicamente equivalente ad un letterale. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

4. Se $F \models G$ allora $F \rhd G$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

5. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $p^I = \{1, 2\}$ e $r^I = \{(0, 0), (0, 2), (1, 1), (1, 3), (2, 0), (3, 2)\}$.
Allora $I \models \forall x(\neg p(x) \vee \neg r(x, x) \to \exists y(r(y, x) \wedge p(y)))$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

6. $\forall x\, \neg F \vee \forall x\, G \equiv \forall x(F \to G)$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

7. Se $F\{x/a\}$ è insoddisfacibile allora $\exists x\, F$ è insoddisfacibile. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

8. Quante delle seguenti formule sono in forma prenessa?
$\forall x\, \neg\forall y(r(x, y) \to r(y, x))$, $\forall x\, (\exists y\, r(x, y) \to r(y, x))$,
$\forall x\, \exists y\, r(x, y) \to r(y, x)$, $\forall x\, \exists y\, r(x, y)$. $\boxed{\mathbf{0}}\boxed{\mathbf{1}}\boxed{\mathbf{2}}\boxed{\mathbf{3}}\boxed{\mathbf{4}}$ 1pt

9. Se $I \models \mathsf{Eq}_{\mathcal{L}}$ allora I è un'interpretazione normale. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x\, \exists y\, r(x, y), \forall y\, \neg r(a, f(y)) \models_{=} \exists z\, \forall y\, f(y) \neq z.$$

11. Sia $\mathcal{L} = \{c, f, p\}$ un linguaggio in cui c è un simbolo di costante, f un simbolo di funzione binario e p un simbolo di relazione unario. Sia I l'interpretazione per $\mathcal{L}$ definita da 4pt

$$D^I = \mathbb{N}; \quad c^I = 11; \quad f^I(n, m) = n + m; \quad p^I = \{\, n : n \text{ è pari}\,\}.$$

Definite un'interpretazione J per $\mathcal{L}$ con $D^J = \{A, B\}$ tale che $I \equiv_{\mathcal{L}} J$, giustificando la vostra risposta.

12. Sia $\mathcal{L} = \{a, c, m, s, o, =\}$ un linguaggio con uguaglianza, dove a e c sono simboli di costante, m è un simbolo di funzione unario, e s e o sono simboli di relazione binari. Interpretando a come "Andrea", c come "Carlo", $m(x)$ come "il maestro di x", $s(x, y)$ come "x è severo con y" e $o(x, y)$ come "x obbedisce ad y" (e intendendo che "x è un alunno di y" è equivalente a "y è il maestro di x"), traducete le seguenti frasi:

(i) Andrea e Carlo hanno lo stesso maestro, che è severo con almeno uno dei due; 3pt

(ii) chi non è severo con se stesso non è severo con qualche suo alunno che non gli obbedisce. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$\neg\big((\neg p \to \neg q \wedge \neg r) \to (q \vee r \to p \wedge \neg s)\big) \wedge \neg(r \wedge s)$$

è soddisfacibile. Se la formula è soddisfacibile definite una valutazione che la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\forall x\, p(x), \forall x(\neg r(x, f(x)) \to \neg p(x)) \rhd \exists x\, r(a, x).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((\neg p \to \neg(q \vee r)) \to s \vee \neg(t \to u)\big).$$

Soluzioni

1. α: è la negazione di una disgiunzione.

2. **V** se un'interpretazione I soddisfa F allora, per la validità di $F \to G$, soddisfa anche G. Usando la seconda ipotesi si ottiene $I \models H$.

3. **V** la negazione di una formula atomica è essa stessa un letterale, mentre la negazione della negazione di una formula atomica è logicamente equivalente alla formula atomica stessa.

4. **V** l'affermazione segue dalla completezza della deduzione naturale: Teoremi 5.18 (caso proposizionale) e 11.11 (caso predicativo) delle dispense.

5. **F** $I, \sigma[x/2] \not\models \neg p(x) \vee \neg r(x,x) \to \exists y(r(y,x) \wedge p(y))$.

6. **F** per esempio se F e G sono entrambe $p(x)$, $\forall x(F \to G)$ è valida, mentre è facile costruire un'interpretazione che non soddisfa $\forall x\, \neg F \vee \forall x\, G$.

7. **F** per esempio se F è $p(a) \wedge \neg p(x)$, $F\{x/a\}$ è insoddisfacibile, mentre è facile costruire un'interpretazione che soddisfa $\exists x\, F$.

8. **1** solo l'ultima formula è in forma prenessa.

9. **F** si veda l'Esempio 7.97 delle dispense.

10. Dobbiamo mostrare che se un'interpretazione normale soddisfa le prime due formule, che indichiamo con F e G, allora soddisfa anche la terza, indicata da H. Sia dunque I un'interpretazione normale che soddisfa F e G.

Dato che $I \models F$ esiste $d_0 \in D^I$ tali che $(a^I, d_0) \in r^I$. Sia $d_1 \in D^I$ arbitrario: dato che $I \models G$ deve essere $(a^I, f^I(d_1)) \notin r^I$ e quindi deve essere $d_0 \neq f^I(d_1)$. Perciò $I, \sigma[z/d_0] \models \forall y\, f(y) \neq z$ (qui si usa la normalità di I) e quindi $I \models H$.

11. Poniamo $c^J = A$, $f^J(A,A) = f^J(B,B) = B$, $f^J(A,B) = f^J(B,A) = A$ e $p^J = \{B\}$. La funzione $\varphi : D^I \to D^J$ definita da

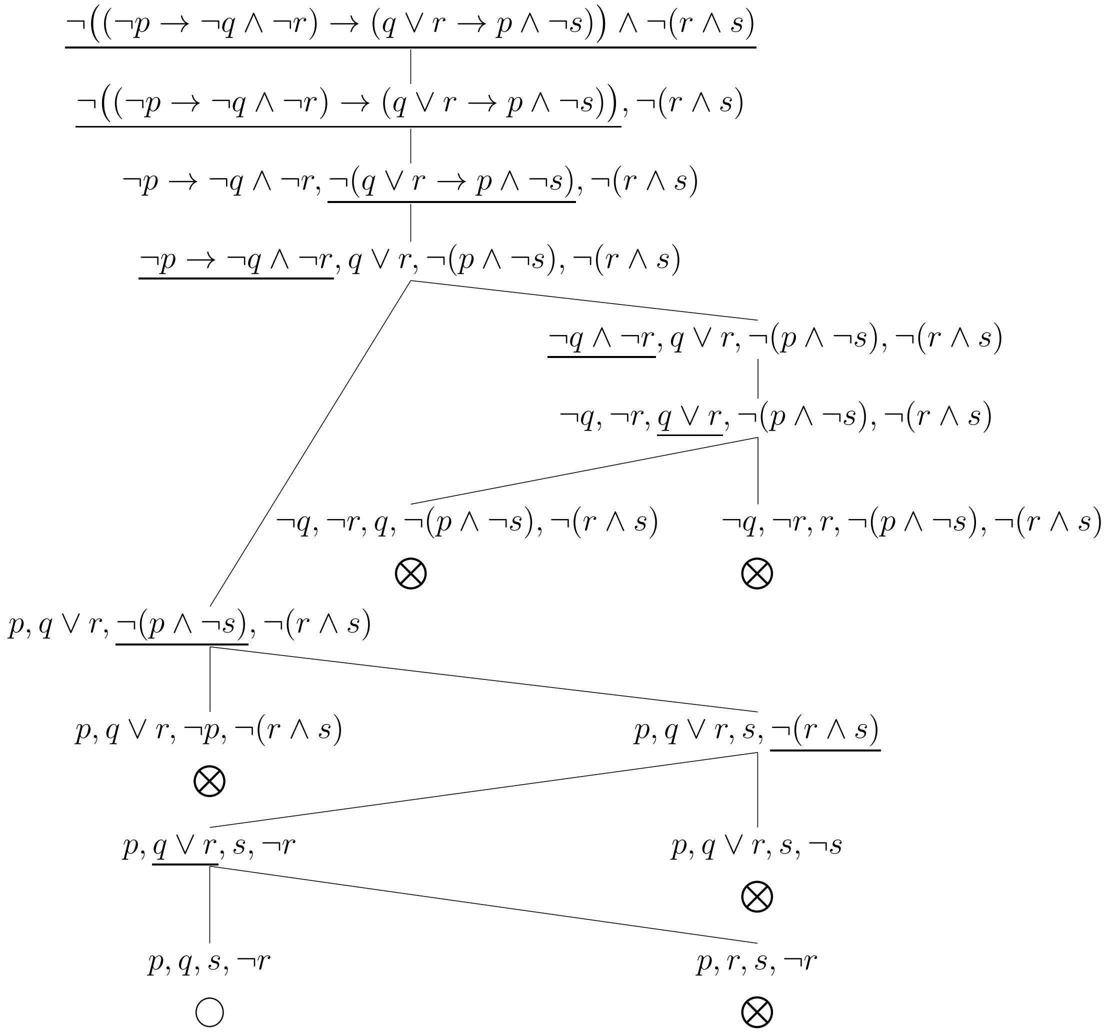
$$\varphi(n) = \begin{cases} A & \text{se } n \text{ è dispari;} \\ B & \text{se } n \text{ è pari;} \end{cases}$$

è un omomorfismo forte suriettivo da I in J. Per il Corollario 9.13 delle dispense si ha $I \equiv_{\mathcal{L}} J$.

12. (i) $m(a) = m(c) \wedge (s(m(a), a) \vee s(m(a), c))$;

(ii) $\forall x(\neg s(x,x) \to \exists y(\neg s(x,y) \wedge m(y) = x \wedge \neg o(y,x)))$.

13. Per stabilire se la formula è soddisfacibile costruiamo un tableau per essa. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. Utilizziamo ripetutamente la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.



Il tableau è aperto e quindi la formula originaria è soddisfacibile. Una valutazione che la soddisfa è data da $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{F}$, $v(s) = \mathbf{V}$.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$
\AxiomC{$[\neg r(a, f(a))]^1$}
\AxiomC{$\forall x(\neg r(x, f(x)) \to \neg p(x))$}
\UnaryInfC{$\neg r(a, f(a)) \to \neg p(a)$}
\BinaryInfC{$\neg p(a)$}
\AxiomC{$\forall x\, p(x)$}
\UnaryInfC{$p(a)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$r(a, f(a))$}
\UnaryInfC{$\exists x\, r(a, x)$}
\DisplayProof
$$

15.

$$[\big\langle\neg\big((\neg p \to \neg(q \vee r)) \to s \vee \neg(t \to u)\big)\big\rangle]$$
$$[\langle \neg p \to \neg(q \vee r), \neg(s \vee \neg(t \to u))\rangle]$$
$$[\langle \neg p \to \neg(q \vee r), \neg s, t \to u\rangle]$$
$$[\langle p, \neg s, t \to u\rangle\ , \langle \neg(q \vee r), \neg s, t \to u\rangle]$$
$$[\langle p, \neg s, \neg t\rangle\ , \langle p, \neg s, u\rangle\ , \langle \neg q, \neg r, \neg s, t \to u\rangle]$$
$$[\langle p, \neg s, \neg t\rangle\ , \langle p, \neg s, u\rangle\ , \langle \neg q, \neg r, \neg s, \neg t\rangle\ , \langle \neg q, \neg r, \neg s, u\rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è
$(p \wedge \neg s \wedge \neg t) \vee (p \wedge \neg s \wedge u) \vee (\neg q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge \neg t) \vee (\neg q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$.