Prova scritta di Logica Matematica
25 luglio 2017

Cognome	Nome
	Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $(q \to p) \wedge (p \vee \neg r) \equiv (\neg r \to q) \to p$. **V** | **F** 1pt

2. Se $F \wedge G \vDash H$ allora $F \vDash H$ e $G \vDash H$. **V** | **F** 1pt

3. Se applichiamo l'algoritmo di Fitting per la forma normale congiuntiva alla formula F otteniamo una formula G tale che certamente $F \vDash G$, ma non sempre $G \vDash F$. **V** | **F** 1pt

4. Esiste un insieme di Hintikka che contiene le tre formule $p \vee \neg q$, $\neg(p \wedge \neg r)$ e $\neg(\neg q \to r)$. **V** | **F** 1pt

5. Sia I l'interpretazione normale con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $f^I(0) = 3$, $f^I(1) = 3$, $f^I(2) = 1$, $f^I(3) = 2$, $p^I = \{1, 2\}$, $r^I = \{(0, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$. Allora $I \vDash \forall x(r(x, x) \to p(f(x)) \vee r(f(x), x))$. **V** | **F** 1pt

6. $\forall x(\neg p(x) \wedge q(x)) \equiv \neg\exists x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x)$. **V** | **F** 1pt

7. Quante delle seguenti formule sono β-formule?
$\neg\forall x\, \neg r(x, f(x)) \to p(x)$, $\neg(\forall x\, \neg r(x, f(x)) \to p(x))$,
$\exists x\, \neg r(x, f(x)) \to p(a)$, $\forall x(\neg r(x, f(y)) \to p(x))$. **0** | **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

8. Se φ è un omomorfismo forte di I in J e $I \vDash \forall x\, p(f(x))$ allora $J \vDash \forall x\, p(f(x))$. **V** | **F** 1pt

9. Se F è un enunciato e un tableau sistematico per F è aperto allora F è valido. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\exists x\,(p(x) \wedge \neg p(f(x))), \forall y(p(y) \to \forall z\,(r(y, z) \to p(z))) \vDash \exists u\,(\neg p(u) \wedge \exists v\, \neg r(v, u)).$$

11. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\{\forall x(x \neq f(x) \wedge \neg r(f(x), x) \wedge \neg r(x, x)), \forall x\, \exists y\, r(y, x), \exists z\, \forall u(u \neq z \to r(z, u))\}$$

è soddisfacibile nella logica con uguaglianza.

12. Sia $\mathcal{L} = \{a, b, p, m, i, c, =\}$ un linguaggio con uguaglianza dove a e b sono simboli di costante, p, m sono simboli di funzione unari, i è un simbolo di relazione unario e c è un simbolo di relazione binario. Interpretando a come "Alessia", b come "Boris", $p(x)$ come "il padre di x", $m(x)$ come "la madre di x", $i(x)$ come "x è un informatico/a" e $c(x, y)$ come "x conosce y" traducete le seguenti frasi utilizzando lo spazio sotto di esse:

(i) la madre di Boris è un'informatica che ha la stessa madre del padre di Alessia; 3pt

(ii) un informatico che conosce il padre di Boris non conosce nessun informatico che conosce Alessia. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilite se l'insieme di formule 3pt

$$\{p \to \neg(\neg q \wedge r), \neg p \to q, \neg(s \vee (r \to q))\}$$

è soddisfacibile. Se l'insieme è soddisfacibile definite una valutazione che lo testimoni. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\forall x(\neg p(f(x)) \vee \forall y\, r(x, y)), \forall y(\neg \forall z\, r(z, y) \to p(y)) \rhd \forall x\, r(x, f(x)).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Utilizzando lo spazio qui sotto mettete in forma prenessa la formula 2pt

$$\forall x\, p(x) \wedge \neg \forall y\, \exists z\, r(y, z) \to (\neg \forall u\, q(u) \to \exists v\, \exists w\, r(w, v)).$$

[Se si usa il minimo numero di quantificatori possibili, 1pt in più.]

Soluzioni

1. V come si verifica per esempio con le tavole di verità.

2. F per esempio se F, G e H sono rispettivamente p, q e p si ha $F \wedge G \models H$ ma $G \not\models H$.

3. F la formula G ottenuta è tale che $G \equiv F$ e quindi in particolare $G \models F$ (altrimenti non avremmo dimostrato il teorema 3.9 delle dispense).

4. V $\{p \vee \neg q, \neg(p \wedge \neg r), \neg(\neg q \to r), \neg p, \neg q, \neg r\}$ è un insieme di Hintikka.

5. V perché si verifica che se $d \in D^I$ è tale che $(d, d) \in r^I$ allora $I, \sigma[x/d] \models p(f(x)) \vee r(f(x), x)$: il primo disgiunto risulta vero quando d è 2 oppure 3, il secondo disgiunto quando d è 1.

6. V per i lemmi 7.56 e 7.47 delle dispense.

7. 2 la prima e la terza formula sono β-formule; la seconda e la quarta formula sono rispettivamente una α-formula e una γ-formula.

8. F Per esempio se $D^I = \{0\}$, $D^J = \{0, 1\}$, f^I e f^J sono la funzione identica, $p^I = p^J = \{0\}$, e $\varphi(0) = 0$ si ha che φ è un omomorfismo forte di I in J e $I \models \forall x\, p(f(x))$ ma $J \not\models \forall x\, p(f(x))$.

9. F sotto le ipotesi enunciate il teorema di completezza 10.36 conclude solamente che F è soddisfacibile. Il tableaux con un solo nodo per l'enunciato $p(c)$ mostra che la validità in generale non vale.

10. Supponiamo che I sia un'interpretazione che soddisfa i due enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, che chiamiamo F e G. Vogliamo dimostrare che I soddisfa anche l'enunciato sulla destra.

Dato che $I \models F$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $d_0 \in p^I$ e $f^I(d_0) \notin p^I$. Da $I \models G$ segue in particolare $I, \sigma[y/d_0] \models p(y) \to \forall z\, (r(y, z) \to p(z))$ e quindi $I, \sigma[y/d_0] \models \forall z\, (r(y, z) \to p(z))$. Allora $I, \sigma[y/d_0, z/f^I(d_0)] \models r(y, z) \to p(z)$: da $f^I(d_0) \notin p^I$ segue $(d_0, f^I(d_0)) \notin r^I$.

Allora $I, \sigma[u/f^I(d_0)] \models \neg p(u) \wedge \exists v\, \neg r(v, u)$ e dunque $I \models \exists u\, (\neg p(u) \wedge \exists v\, \neg r(v, u))$, come richiesto.

11. Dobbiamo definire un'interpretazione normale che soddisfa i tre enunciati. Un'interpretazione normale con queste caratteristiche è definita da

$$D^I = \{0, 1, 2\}, \quad f^I(0) = 1, f^I(1) = 2, f^I(2) = 1 \quad r^I = \{(0, 1), (0, 2), (2, 0)\}.$$

Dato che I è normale non abbiamo bisogno di specificare $=^I$.

12. (i) $i(m(b)) \wedge m(m(b)) = m(p(a))$;

(ii) $\exists x(i(x) \wedge c(x, p(b)) \wedge \neg\exists y(c(x, y) \wedge i(y) \wedge c(y, a)))$ oppure
$\exists x(i(x) \wedge c(x, p(b)) \wedge \forall y(i(y) \wedge c(y, a) \to \neg c(x, y)))$, che è logicamente equivalente.
La frase italiana è però ambigua, e può essere interpretata anche come
$\forall x(i(x) \wedge c(x, p(b)) \to \neg\exists y(c(x, y) \wedge i(y) \wedge c(y, a)))$ oppure
$\forall x(i(x) \wedge c(x, p(b)) \to \forall y(i(y) \wedge c(y, a) \to \neg c(x, y)))$ che è logicamente equivalente.

13. Per stabilire se l'insieme di formule è soddisfacibile utilizziamo l'Algoritmo 4.39 delle dispense e costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.31 e 4.32) un tableau con la radice etichettata dalle formule. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

- $p \to \neg(\neg q \wedge r), \neg p \to q, \underline{\neg(s \vee (r \to q))}$
  - $p \to \neg(\neg q \wedge r), \neg p \to q, \neg s, \underline{\neg(r \to q)}$
    - $p \to \neg(\neg q \wedge r), \underline{\neg p \to q}, \neg s, r, \neg q$
      - $\underline{p \to \neg(\neg q \wedge r)}, p, \neg s, r, \neg q$
        - $\neg p, p, \neg s, r, \neg q$ $\otimes$
        - $\underline{\neg(\neg q \wedge r)}, p, \neg s, r, \neg q$
          - $q, p, \neg s, r, \neg q$ $\otimes$
          - $\neg r, p, \neg s, r, \neg q$ $\otimes$
      - $p \to \neg(\neg q \wedge r), q, \neg s, r, \neg q$ $\otimes$

Il tableau è chiuso e quindi l'insieme è insoddisfacibile.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\forall x(\neg p(f(x)) \vee \forall y\, r(x,y)), \forall y(\neg \forall z\, r(z,y) \to p(y)) \rhd \forall x\, r(x, f(x)).$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\neg p(f(x)) \vee \forall y\, r(x,y))}{\neg p(f(x)) \vee \forall y\, r(x,y)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg p(f(x))]^1 \qquad \dfrac{\forall y(\neg \forall z\, r(z,y) \to p(y))}{\neg \forall z\, r(z, f(x)) \to p(f(x))}}{\neg\neg \forall z\, r(z, f(x))}}{\forall z\, r(z, f(x))}}{r(x, f(x))} \qquad \dfrac{[\forall y\, r(x,y)]^1}{r(x, f(x))}}{r(x, f(x))}\,{}^{1}}{\forall x\, r(x, f(x))}$$

Si noti l'uso di (MT) e di $(\neg\neg e)$, ed inoltre la necessità di utilizzare $(\vee e)$ prima di $(\forall i)$.

15. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\forall x\, p(x) \land \neg\forall y\, \exists z\, r(y,z) \to (\neg\forall u\, q(u) \to \exists v\, \exists w\, r(w,v))$$
$$\forall x\, p(x) \land \exists y\, \forall z\, \neg r(y,z) \to (\exists u\, \neg q(u) \to \exists v\, \exists w\, r(w,v))$$
$$\exists y(\forall x\, p(x) \land \forall z\, \neg r(y,z)) \to \exists v\, \exists w(\exists u\, \neg q(u) \to r(w,v))$$
$$\exists y \forall x(p(x) \land \neg r(y,x)) \to \exists v\, \exists w\, \forall u(\neg q(u) \to r(w,v))$$
$$\forall y(\forall x(p(x) \land \neg r(y,x)) \to \exists v\, \exists w\, \forall u(\neg q(u) \to r(w,v)))$$
$$\forall y\, \exists x(p(x) \land \neg r(y,x) \to \exists w\, \forall u(\neg q(u) \to r(w,x)))$$
$$\forall y\, \exists x\, \exists w\, \forall u(p(x) \land \neg r(y,x) \to (\neg q(u) \to r(w,x)))$$