Prova scritta di Logica Matematica
14 febbraio 2017

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $(\neg p \vee q) \wedge r \equiv \neg(r \to \neg(\neg q \to \neg p))$. **V** | **F** 1pt

2. Se $F \to G$ è valida allora F è insoddisfacibile oppure G è valida. **V** | **F** 1pt

3. Se F è in forma normale congiuntiva allora esiste G in forma normale disgiuntiva tale che $G \equiv F$. **V** | **F** 1pt

4. Esiste un insieme di Hintikka che contiene le formule p, $\neg(q \to r)$ e $q \to r \vee \neg p$. **V** | **F** 1pt

5. Se f è un simbolo di funzione unario e g un simbolo di funzione binario, quante delle seguenti espressioni sono termini?
$f(g(y))$, $g(y, f(x, a))$, $f(g(f(a), x))$, $\neg g(y, a)$. **0** | **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

6. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $p^I = \{0, 2, 3\}$, $r^I = \{(0, 1), (3, 3)\}$, $f^I(0) = 1$, $f^I(1) = 3$, $f^I(2) = 3$, $f^I(3) = 2$.
Allora $I \vDash \forall x(p(x) \to p(f(x)) \vee r(x, f(x)))$. **V** | **F** 1pt

7. L'algoritmo dei tableaux predicativi gode della proprietà della terminazione forte. **V** | **F** 1pt

8. Questo albero rappresenta una deduzione naturale corretta: **V** | **F** 1pt

$$\dfrac{\exists x\, p(x) \qquad \dfrac{\dfrac{[p(x)]^1 \qquad p(x) \to q(f(x))}{q(f(x))}}{\exists y\, q(f(y))}}{\exists y\, q(f(y))}\,1$$

9. Se φ è un omomorfismo forte di I in J allora $I \equiv_{\mathcal{L}} J$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x(x \neq f(x) \wedge \neg r(x, f(x))), \forall y\, \exists z\, r(y, z) \not\models_{=} \exists x\, \exists y(r(x, y) \wedge r(y, x)).$$

11. Sul retro del foglio dimostrate l'insoddisfacibilità dell'insieme di enunciati 4pt

$$\{\exists x(p(x) \wedge \neg p(f(x))), \forall y(\neg p(y) \to \exists z\, \neg r(y, f(z))), \forall u(\neg p(u) \vee \forall v\, r(f(u), v))\}.$$

12. Sia $\mathcal{L} = \{a, b, p, m, c\}$ un linguaggio dove a e b sono simboli di costante, p è un simbolo di funzione unario, m è un simbolo di relazione unario e c è un simbolo di relazione binario. Interpretando a come "Anna", b come "Bruno", $p(x)$ come "il padre di x", $m(x)$ come "x è un medico", $c(x, y)$ come "x conosce y" traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) il nonno paterno di Anna è un medico che non conosce il padre di Bruno; 3pt

(ii) ogni medico che conosce Anna conosce il padre di qualcuno che conosce Bruno. 3pt

13. Mostrate che 3pt

$$\neg G, \neg\neg K \vee (F \to G) \rhd F \to K.$$

Usate solo le regole della deduzione naturale proposizionale, comprese le quattro regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux stabilite sul retro del foglio che 5pt

$$\exists x \, \forall y \, r(x, y), \forall u (r(u, u) \to \neg p(u) \vee \neg r(u, c)) \models \exists z \, \neg p(z).$$

15. Utilizzando lo spazio qui sotto mettete in forma prenessa la formula 2pt

$$\neg \forall x \, p(x) \vee \exists y \, q(f(y)) \to \forall z \, \neg \forall w \, r(w, f(z)) \wedge \exists u \, \forall v \, r(u, v).$$

[Se si usa il minimo numero di quantificatori possibili, 1pt in più.]

Soluzioni

1. V come si verifica per esempio con le tavole di verità.

2. F ad esempio $p \to p$ è valida, ma p non è né insoddisfacibile né valida.

3. V è un caso particolare del teorema 3.9 delle dispense.

4. F supponiamo T sia un insieme di Hintikka. Se $\neg(q \to r) \in T$ allora $q \in T$ e $\neg r \in T$. Se $q \to r \vee \neg p \in T$ allora, dato che $\neg q \notin T$ (altrimenti T conterrebbe una coppia complementare di letterali), deve essere $r \vee \neg p \in T$. Se $r \in T$ avremmo di nuovo una coppia complementare di letterali in T; quindi $\neg p \in T$ e quindi $p \in T$ è impossibile.

5. 1 sotto le ipotesi su f e g solo la terza espressione è un termine. Perché la prima sia un termine è necessario che g sia unario, perché la seconda sia un termine è necessario che f sia binaria. La quarta espressione non è mai un termine (sarebbe una formula se g fosse un simbolo di relazione binario).

6. V perché si verifica che $I, \sigma[x/d] \nvDash p(x) \to p(f(x)) \wedge r(x, f(x))$ per ogni $d \in D^I$.

7. F si veda la nota 10.14 delle dispense.

8. F l'applicazione di $(\exists e)$ non rispetta le condizioni perché x è libero in $p(x) \to q(f(x))$.

9. F non possiamo applicare il corollario 9.14 delle dispense perché non sappiamo se φ è suriettivo (si veda l'esempio 9.10 delle dispense).

10. Dobbiamo definire un'interpretazione normale che soddisfa i primi due enunciati ma non quello a destra di $\nvDash_=$. Un'interpretazione normale con queste caratteristiche è definita da

$$D^I = \{0, 1, 2\}, \quad f^I(0) = 1, f^I(1) = 2, f^I(2) = 0 \quad r^I = \{(0, 2), (1, 0), (2, 1)\}.$$

Dato che I è normale non abbiamo bisogno di specificare $=^I$.

11. Supponiamo per assurdo che I un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati, che chiamiamo F, G e H nell'ordine. Vogliamo ottenere una contraddizione.

Dato che $I \vDash F$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $d_0 \in p^I$ e $f^I(d_0) \notin p^I$.

Da $I \vDash G$ segue in particolare che $I, \sigma[y/f^I(d_0)] \vDash \neg p(y) \to \exists z\, \neg r(y, f(z))$ e quindi, per quanto ottenuto in precedenza, che $I, \sigma[y/f^I(d_0)] \vDash \exists z\, \neg r(y, f(z))$. Allora esiste $d_1 \in D^I$ tale che $(f^I(d_0), f^I(d_1)) \notin r^I$.

Da $I \vDash H$ segue in particolare che $I, \sigma[u/d_0] \vDash p(u) \vee \forall v\, r(f(u), v)$. Dato che abbiamo ottenuto che $I, \sigma[u/d_0] \nvDash \neg p(u)$ si ha $I, \sigma[u/d_0] \vDash \forall v\, r(f(u), v)$. Ma questo implica in particolare $(f^I(d_0), f^I(d_1)) \in r^I$, contraddicendo quanto ottenuto in precedenza.

12. (i) $m(p(p(a))) \wedge \neg c(p(p(a)), p(b))$;
(ii) $\forall x(m(x) \wedge c(x, a) \to \exists y(c(x, p(y)) \wedge c(y, b)))$.

13. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg K \vee (F \to G) \qquad \dfrac{[\neg\neg K]^1}{K} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[F]^2 \qquad [F \to G]^1}{G} \qquad \neg G}{\bot}}{K}}{K}\,{\scriptstyle 1}}{F \to K}\,{\scriptstyle 2}$$

14. Per stabilire la conseguenza logica utilizziamo l'algoritmo 10.49 delle dispense e costruiamo un tableau chiuso con la radice etichettata dagli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione di quello sulla destra. Indichiamo con F, G e H le γ-formule $\forall u(r(u,u) \to \neg p(u) \vee \neg r(u,c))$, $\neg\exists z\, \neg p(z)$ e $\forall y\, r(a,y)$. Utilizziamo la convenzione 10.22 delle dispense e in ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\begin{array}{c}
\underline{\exists x\, \forall y\, r(x,y),} F, G \\
| \\
H, \underline{F}, G \\
| \\
H, F, r(a,a) \to \neg p(a) \vee \neg r(a,c), G
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c}
\underline{H}, F, \neg r(a,a), G \\
| \\
H, r(a,a), F, \neg r(a,a), G \\
\otimes
\end{array}
& \qquad &
\begin{array}{c}
H, F, \neg p(a) \vee \neg r(a,c), G \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
H, F, \neg p(a), \underline{G} \\
| \\
H, F, \neg p(a), G, p(a) \\
\otimes
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\underline{H}, F, \neg r(a,c), G \\
| \\
H, r(a,c), F, \neg r(a,c), G \\
\otimes
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Si noti che in due nodi diversi del tableau abbiamo istanziato la γ-formula H su due costanti diverse.

15. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\neg\forall x\, p(x) \vee \exists y\, q(f(y)) \to \forall z\, \neg\forall w\, r(w, f(z)) \wedge \exists u\, \forall v\, r(u,v)$$
$$\exists x\, \neg p(x) \vee \exists y\, q(f(y)) \to \forall z\, \exists w\, \neg r(w, f(z)) \wedge \exists u\, \forall v\, r(u,v)$$
$$\exists x(\neg p(x) \vee q(f(x))) \to \exists u(\forall z\, \exists w\, \neg r(w, f(z)) \wedge \forall v\, r(u,v))$$
$$\exists x(\neg p(x) \vee q(f(x))) \to \exists u\, \forall z(\exists w\, \neg r(w, f(z)) \wedge r(u,z))$$
$$\exists x(\neg p(x) \vee q(f(x))) \to \exists u\, \forall z\, \exists w\, (\neg r(w, f(z)) \wedge r(u,z))$$
$$\forall x(\neg p(x) \vee q(f(x)) \to \exists u\, \forall z\, \exists w\, (\neg r(w, f(z)) \wedge r(u,z)))$$
$$\forall x\, \exists u\, \forall z\, \exists w(\neg p(x) \vee q(f(x)) \to \neg r(w, f(z)) \wedge r(u,z))$$

Prova scritta di Logica Matematica
14 febbraio 2017

Cognome Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $(p \vee \neg q) \wedge \neg r \equiv \neg(\neg r \to \neg(q \to p))$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

2. Se $\neg(F \to G)$ è insoddisfacibile allora
F è insoddisfacibile oppure G è valida. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

3. Se F è in forma normale disgiuntiva allora
esiste G in forma normale congiuntiva tale che $G \equiv F$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

4. L'algoritmo dei tableaux proposizionali
gode della proprietà della terminazione forte. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

5. Esiste un insieme di Hintikka che contiene le formule
$\neg(p \to \neg q)$, $p \to \neg q \vee r$ e $\neg r$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

6. Se f è un simbolo di funzione unario e g un simbolo di funzione binario, quante delle seguenti espressioni sono termini?
$f(g(f(a), x))$, $f(g(y))$, $\neg g(a, a)$, $g(a, f(x, y))$. $\boxed{\mathbf{0}}\boxed{\mathbf{1}}\boxed{\mathbf{2}}\boxed{\mathbf{3}}\boxed{\mathbf{4}}$ 1pt

7. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $p^I = \{0, 2, 3\}$,
$r^I = \{(0, 1), (3, 3)\}$, $f^I(0) = 1$, $f^I(1) = 3$, $f^I(2) = 3$, $f^I(3) = 1$.
Allora $I \models \forall x(p(x) \to p(f(x)) \vee r(x, f(x)))$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

8. Se φ è un omomorfismo forte di I in J allora $I \equiv_{\mathcal{L}} J$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

9. Questo albero rappresenta una deduzione naturale corretta: $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ 1pt

$$\dfrac{\exists x\, p(x) \qquad \dfrac{[p(x)]^1 \qquad \dfrac{\forall x(p(x) \to q(f(x)))}{p(x) \to q(f(x))}}{q(f(x))}}{q(f(x))}\,{\scriptstyle 1}$$

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall y\, \exists z\, r(z, y), \forall x(x \neq f(x) \wedge \neg r(f(x), x)) \not\models_{=} \exists x\, \exists y(r(x, y) \wedge r(y, x)).$$

11. Sul retro del foglio dimostrate l'insoddisfacibilità dell'insieme di enunciati 4pt

$$\{\exists x(p(f(x)) \wedge \neg p(x)), \forall y(p(y) \to \exists z\, r(f(z), y)), \forall u(p(u) \vee \forall v\, \neg r(v, f(u)))\}.$$

12. Sia $\mathcal{L} = \{a, d, m, i, c\}$ un linguaggio dove a e d sono simboli di costante, m è un simbolo di funzione unario, i è un simbolo di relazione unario e c è un simbolo di relazione binario. Interpretando a come "Angelo", d come "Donatella", $m(x)$ come "la madre di x", $i(x)$ come "x è un ingegnere", $c(x, y)$ come "x conosce y" traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) la nonna materna di Donatella è un ingegnere che non conosce la madre di Angelo; 3pt

(ii) ogni ingegnere che conosce Angelo conosce la madre di qualcuno che conosce Donatella. 3pt

13. Mostrate che 3pt

$$\neg\neg F \vee (G \to H), \neg H \rhd G \to F.$$

Usate solo le regole della deduzione naturale proposizionale, comprese le quattro regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux stabilite sul retro del foglio che 5pt

$$\exists x\, \forall y\, \neg r(y, x), \forall u(\neg r(u, u) \to p(u) \vee r(a, u)) \vDash \exists z\, p(z).$$

15. Utilizzando lo spazio qui sotto mettete in forma prenessa la formula 2pt

$$\exists x\, p(x) \vee \neg\forall y\, q(y) \to \exists u\, \forall v\, r(u, f(v)) \wedge \forall z\, \neg\forall w\, r(f(w), z).$$

[Se si usa il minimo numero di quantificatori possibili, 1pt in più.]

Soluzioni

1. V come si verifica per esempio con le tavole di verità.

2. F ad esempio $\neg(p \to p)$ è insoddisfacibile, ma p non è né insoddisfacibile né valida.

3. V è un caso particolare del teorema 3.9 delle dispense.

4. V è il teorema 4.11 delle dispense.

5. F supponiamo T sia un insieme di Hintikka. Se $\neg(p \to q) \in T$ allora $p \in T$ e $\neg q \in T$. Se $p \to \neg q \vee r \in T$ allora, dato che $\neg p \notin T$ (altrimenti T conterrebbe una coppia complementare di letterali), deve essere $\neg q \vee r \in T$. Se $\neg\neg q \in T$ avremmo anche $q \in T$ e di nuovo una coppia complementare di letterali; quindi $r \in T$ e $\neg r \in T$ è impossibile.

6. 1 sotto le ipotesi su f e g solo la prima espressione è un termine. Perché la seconda sia un termine è necessario che g sia unario, perché la quarta sia un termine è necessario che f sia binaria. La terza espressione non è mai un termine (sarebbe una formula se g fosse un simbolo di relazione binario).

7. F perché $I, \sigma[x/3] \not\models p(x) \to p(f(x)) \wedge r(x, f(x))$.

8. F non possiamo applicare il corollario 9.14 delle dispense perché non sappiamo se φ è suriettivo (si veda l'esempio 9.10 delle dispense).

9. F l'applicazione di $(\exists e)$ non rispetta le condizioni perché x è libero in $q(f(x))$.

10. Dobbiamo definire un'interpretazione normale che soddisfa i primi due enunciati ma non quello a destra di $\not\models_=$. Un'interpretazione normale con queste caratteristiche è definita da

$$D^I = \{0,1,2\}, \quad f^I(0) = 1, f^I(1) = 2, f^I(2) = 0 \quad r^I = \{(0,1),(1,2),(2,0)\}.$$

Dato che I è normale non abbiamo bisogno di specificare $=^I$.

11. Supponiamo per assurdo che I un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati, che chiamiamo F, G e H nell'ordine. Vogliamo ottenere una contraddizione.

Dato che $I \models F$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $d_0 \notin p^I$ e $f^I(d_0) \in p^I$.

Da $I \models G$ segue in particolare che $I, \sigma[y/f^I(d_0)] \models p(y) \to \exists z\, r(f(z), y)$ e quindi, per quanto ottenuto in precedenza, che $I, \sigma[y/f^I(d_0)] \models \exists z\, r(f(z), y)$. Allora esiste $d_1 \in D^I$ tale che $(f^I(d_1), f^I(d_0)) \in r^I$.

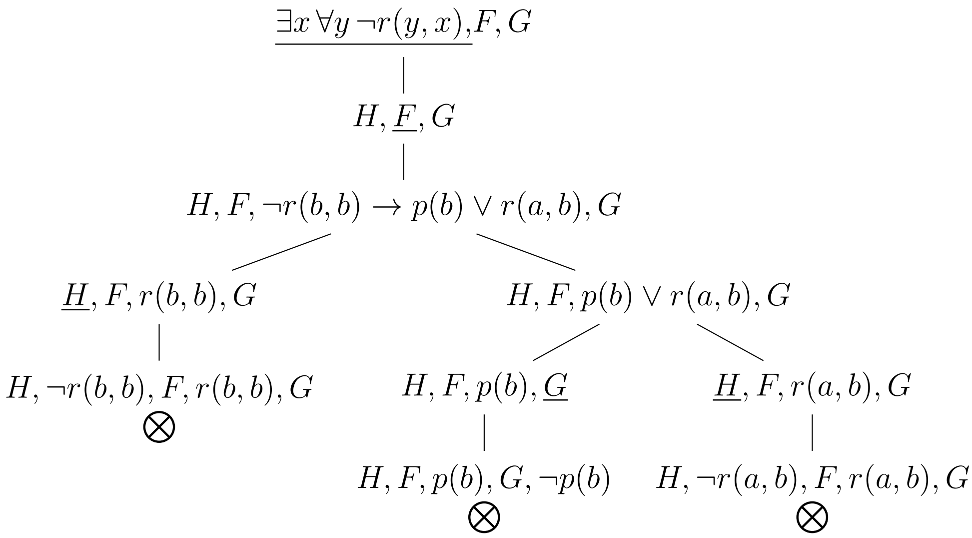
Da $I \models H$ segue in particolare che $I, \sigma[u/d_0] \models p(u) \vee \forall v\, \neg r(v, f(u))$. Dato che abbiamo ottenuto che $I, \sigma[u/d_0] \not\models p(u)$ si ha $I, \sigma[u/d_0] \models \forall v\, \neg r(v, f(u))$. Ma questo implica in particolare $(f^I(d_1), f^I(d_0)) \notin r^I$, contraddicendo quanto ottenuto in precedenza.

12. (i) $i(m(m(d))) \wedge \neg c(m(m(d)), m(a))$;
(ii) $\forall x(i(x) \wedge c(x,a) \to \exists y(c(x, m(y)) \wedge c(y,d)))$.

13. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg F \vee (G \to H) \qquad \dfrac{[\neg\neg F]^1}{F} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[G]^2 \qquad [G \to H]^1}{H} \qquad \neg H}{\bot}}{F}}{F}\,{}^{1}}{G \to F}\,{}^{2}$$

14. Per stabilire la conseguenza logica utilizziamo l'algoritmo 10.49 delle dispense e costruiamo un tableau chiuso con la radice etichettata dagli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione di quello sulla destra. Indichiamo con F, G e H le γ-formule $\forall u(\neg r(u,u) \to p(u) \vee r(a,u))$, $\neg\exists z\, p(z)$ e $\forall y\, \neg r(y,b)$. Utilizziamo la convenzione 10.22 delle dispense e in ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.



Si noti che in due nodi diversi del tableau abbiamo istanziato la γ-formula H su due costanti diverse.

15. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\exists x\, p(x) \vee \neg\forall y\, q(y) \to \exists u\, \forall v\, r(u, f(v)) \wedge \forall z\, \neg\forall w\, r(f(w), z)$$
$$\exists x\, p(x) \vee \exists y\, \neg q(y) \to \exists u\, \forall v\, r(u, f(v)) \wedge \forall z\, \exists w\, \neg r(f(w), z)$$
$$\exists x(p(x) \vee \neg q(x)) \to \exists u(\forall v\, r(u, f(v)) \wedge \forall z\, \exists w\, \neg r(f(w), z))$$
$$\exists x(p(x) \vee \neg q(x)) \to \exists u\, \forall v(r(u, f(v)) \wedge \exists w\, \neg r(f(w), v))$$
$$\exists x(p(x) \vee \neg q(x)) \to \exists u\, \forall v\, \exists w(r(u, f(v)) \wedge \neg r(f(w), v))$$
$$\exists u\, \forall v\, \exists w(\exists x(p(x) \vee \neg q(x)) \to r(u, f(v)) \wedge \neg r(f(w), v))$$
$$\exists u\, \forall v\, \exists w\, \forall x(p(x) \vee \neg q(x) \to r(u, f(v)) \wedge \neg r(f(w), v))$$