Prova scritta di Logica Matematica
7 luglio 2015

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Se F e G sono i ridotti della β-formula H allora $\neg F \wedge \neg G \equiv \neg H$. **V** | **F** 1pt

2. $\neg(p \rightarrow (\neg r \rightarrow q)) \equiv ((p \rightarrow q) \rightarrow \neg p \wedge q) \wedge \neg r$. **V** | **F** 1pt

3. Esiste un insieme di Hintikka che contiene $\forall x(r(x,x) \rightarrow \neg q(x))$, $p(a)$ e $\forall y(p(y) \wedge q(y) \rightarrow r(y,a))$. **V** | **F** 1pt

4. Se un tableau la cui radice è etichettata con $\{F, G\}$ è chiuso allora $F \models G$. **V** | **F** 1pt

5. Quante delle seguenti formule sono in forma normale disgiuntiva? $(p \wedge q) \vee (\neg r \wedge s) \vee \neg t$, $p \vee \neg q$, $p \wedge \neg q$. **0** | **1** | **2** | **3** 1pt

6. Sia I l'interpretazione normale con $D^I = \{0,1,2,3\}$, $f^I(d,d') = \max\{d,d'\}$ e $p^I = \{1,3\}$. Allora $I \models_{=} \forall x \forall y(x \neq y \wedge \neg p(f(x,y)) \rightarrow \neg p(x))$. **V** | **F** 1pt

7. $\forall x\, p(x) \rightarrow \neg \forall y\, q(y) \equiv \exists z(p(z) \rightarrow \neg q(z))$. **V** | **F** 1pt

8. Siano φ un omomorfismo forte di I in J e σ uno stato di I. Se $I, \sigma \models p(x) \rightarrow \neg q(x)$ allora $J, \varphi \circ \sigma \models p(x) \rightarrow \neg q(x)$. **V** | **F** 1pt

9. Esistono enunciati F e G tali che $\{F, \neg G\}$ è insoddisfacibile e $F \ntriangleleft G$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x(p(x) \rightarrow r(x, f(x))), \exists x(p(x) \wedge \neg q(f(x))), \forall x \forall y(r(x,y) \rightarrow q(y) \vee \neg r(g(x),y)) \models \exists x\, \neg r(g(x), f(x)).$$

11. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x(\exists y\, r(x,y) \wedge \exists z\, r(z,x)), \forall x\, \forall y\, \forall z\, (r(x,y) \wedge r(z,x) \rightarrow \neg r(y,z)) \not\models \exists x\, \exists y(r(x,y) \wedge r(y,x)).$$

12. Sia $\mathcal{L} = \{a, c, m, s, u, =\}$ un linguaggio con uguaglianza, dove a e c sono simboli di costante, m è un simbolo di funzione unario, e s e u sono simboli di relazione binari. Interpretando a come "Anna", c come "Carlo", $m(x)$ come "la maestra di x", $s(x, y)$ come "x è severo con y" e $u(x, y)$ come "x ubbidisce ad y", traducete le seguenti frasi:

(i) Anna e Carlo hanno la stessa maestra, e almeno uno dei due le ubbidisce; 3pt

(ii) chi non è severo con una persona di cui è la maestra non è severo neppure con qualcuno che non gli ubbidisce. 3pt

13. Mostrate che 3pt

$$\neg F \to G, \neg(G \land F) \rhd \neg F \lor G \to \neg F \land G.$$

Usate solo le regole della deduzione naturale proposizionale, comprese le quattro regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux stabilite sul retro del foglio che 5pt

$$p(c), \forall x\, \forall y(p(x) \land p(y) \to r(x, y)), \forall z(\neg p(z) \to \forall v\, r(v, z)) \models \forall x\, r(c, x).$$

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((p \to \neg(\neg q \lor r)) \to (s \to \neg(\neg t \to u))\big).$$

Soluzioni

1. **V** per il Lemma 3.11 delle dispense si ha $H \equiv F \vee G$, e quindi (usando il Lemma 2.23.2) $\neg H \equiv \neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$.
2. **F** come si verifica per esempio con le tavole di verità: se $v(p) = \mathbf{F}$, $v(q) = \mathbf{V}$ e $v(r) = \mathbf{F}$ la prima formula è falsa ma la seconda è vera.
3. **V** un insieme di Hintikka che contiene i tre enunciati è

$$\{p(a), \forall x(r(x,x) \to \neg q(x)), r(a,a) \to \neg q(a), \neg r(a,a),$$
$$\forall y(p(y) \wedge q(y) \to r(y,a)), p(a) \wedge q(a) \to r(a,a), \neg(p(a) \wedge q(a)), \neg q(a)\}.$$

4. **F** l'ipotesi significa che l'insieme $\{F, G\}$ è insoddisfacibile (Algoritmo 4.38 delle dispense), mentre $F \models G$ è equivalente all'insoddisfacibilità di $\{F, \neg G\}$ (Lemma 2.45.b delle dispense).
5. **3** tutte le formule sono in forma normale disgiuntiva; in particolare, la seconda formula è la disgiunzione di due formule che sono congiunzioni di un singolo letterale, mentre la terza formula consiste di un unico disgiunto che è la congiunzione di due letterali (si veda l'Esempio 3.6 delle dispense).
6. **F** perché $I, \sigma[x/1, y/2] \not\models_{=} x \neq y \wedge \neg p(f(x,y)) \to \neg p(x)$.
7. **V** è sufficiente applicare i Lemmi 7.47 e 7.78 delle dispense.
8. **V** è un caso particolare del Lemma 9.8 delle dispense.
9. **F** se $\{F, \neg G\}$ è insoddisfacibile allora $F \models G$ (si veda l'Esercizio 7.87 delle dispense) e quindi, per il teorema di completezza (Teorema 11.11 delle dispense), si ha $F \rhd G$.
10. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che I sia un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica (che indichiamo nell'ordine con F, G e H). L'obiettivo è quello di mostrare che $I \models \exists x \, \neg r(g(x), f(x))$.

    Dato che $I \models G$ si ha che esiste $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d_0] \models p(x) \wedge \neg q(f(x))$, cioè $d_0 \in p^I$ e $f^I(d_0) \notin q^I$. Dato che $I \models F$ si ha in particolare $I, \sigma[x/d_0] \models p(x) \to r(x, f(x))$. Visto che $d_0 \in p^I$ si ha $I, \sigma[x/d_0] \models r(x, f(x))$, cioè $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$.

    Dato che $I \models H$ si ha in particolare $I, \sigma[x/d_0, y/f^I(d_0)] \models r(x,y) \to q(y) \vee \neg r(g(x), y)$, e quindi, dato che $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$, otteniamo $I, \sigma[x/d_0, y/f^I(d_0)] \models q(y) \vee \neg r(g(x), y)$. Dato che $f^I(d_0) \notin q^I$ si ha $I, \sigma[x/d_0, y/f^I(d_0)] \not\models q(y)$ e quindi deve essere necessariamente $(g^I(d_0), f^I(d_0)) \notin r^I$. Questo significa che $I, \sigma[x/d_0] \models \neg r(g(x), f(x))$ e quindi otteniamo $I \models \exists x \, \neg r(g(x), f(x))$ come desiderato.
11. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfa i due enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica ma rende falso l'enunciato sulla destra (in questo caso nella seconda riga). Forniamo due esempi di interpretazioni con queste caratteristiche:

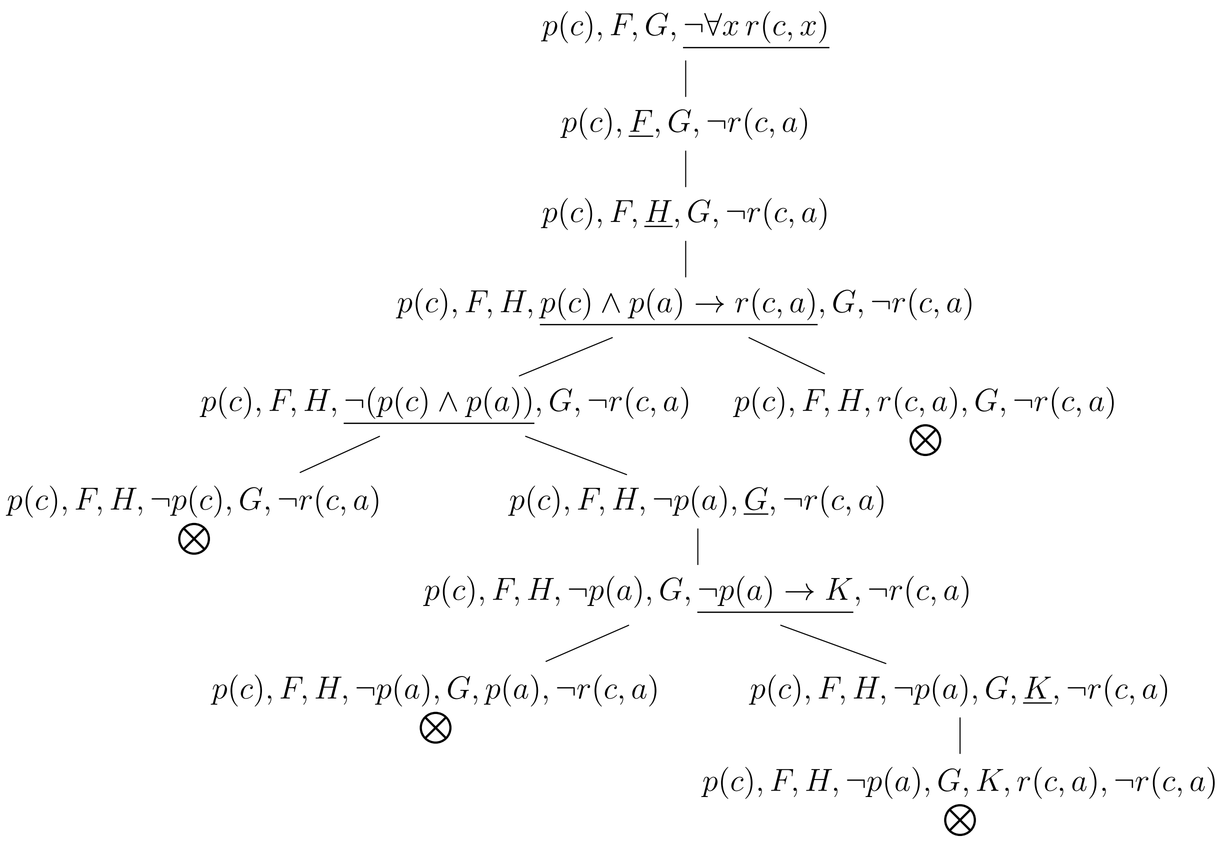
$$D^I = \{0,1,2,3\}, \quad r^I = \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,0)\};$$
$$D^J = \mathbb{Z}, \quad r^J = \{\, (n, n+1) \,:\, n \in \mathbb{Z} \,\}.$$

12. (i) $m(a) = m(c) \wedge (u(a, m(a)) \vee u(c, m(c)))$;
(ii) $\forall x \big(\exists y(m(y) = x \wedge \neg s(x, y)) \to \exists z(\neg s(x, z) \wedge \neg u(z, x))\big)$.

13. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{[\neg F \vee G]^3 \qquad \dfrac{[\neg F]^2 \qquad \dfrac{[\neg F]^2 \qquad \neg F \to G}{G}}{\neg F \wedge G} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[G]^2 \qquad [F]^1}{G \wedge F} \qquad \neg(G \wedge F)}{\bot}}{\neg F}\,{\scriptstyle 1} \qquad [G]^2}{\neg F \wedge G}}{\neg F \wedge G}\,{\scriptstyle 2}}{\neg F \vee G \to \neg F \wedge G}\,{\scriptstyle 3}$$

14. Per stabilire la conseguenza logica utilizziamo l'algoritmo 10.48 delle dispense e costruiamo un tableau chiuso con la radice etichettata dagli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione di quello a destra. Indichiamo con F, G, H e K le γ-formule $\forall x\, \forall y(p(x) \wedge p(y) \to r(x, y))$, $\forall z(\neg p(z) \to \forall v\, r(v, z))$, $\forall y(p(c) \wedge p(y) \to r(c, y))$ e $\forall v\, r(v, a)$. Utilizziamo la convenzione 10.22 delle dispense e in ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.



15. Utilizziamo l'Algoritmo 3.19 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.27:

$$[\big\langle \neg\big((p \to \neg(\neg q \vee r)) \to (s \to \neg(\neg t \to u))\big)\big\rangle]$$
$$[\langle p \to \neg(\neg q \vee r), \neg(s \to \neg(\neg t \to u))\rangle]$$
$$[\langle p \to \neg(\neg q \vee r), s, \neg t \to u\rangle]$$
$$[\langle \neg p, s, \neg t \to u\rangle, \langle \neg(\neg q \vee r), s, \neg t \to u\rangle]$$
$$[\langle \neg p, s, t\rangle, \langle \neg p, s, u\rangle, \langle q, \neg r, s, \neg t \to u\rangle]$$
$$[\langle \neg p, s, t\rangle, \langle \neg p, s, u\rangle, \langle q, \neg r, s, t\rangle, \langle q, \neg r, s, u\rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \wedge s \wedge t) \vee (\neg p \wedge s \wedge u) \vee (q \wedge \neg r \wedge s \wedge t) \vee (q \wedge \neg r \wedge s \wedge u).$$