# Prova scritta di Logica Matematica
## 27 luglio 2021

Cognome Nome Matricola

Indicate su ogni foglio che consegnate cognome, nome e numero di matricola.

Nella prima parte ogni riposta corretta vale 1, ogni risposta sbagliata $-1$, ogni risposta non data 0. Il punteggio minimo per superare questa parte è 6. Il punteggio della prima parte viene sommato a quello della seconda per ottenere il voto dello scritto.

Nella seconda parte per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio.

### PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

**a.** $\neg(\neg p \to \neg q) \vee (\neg s \wedge t) \vDash \neg((p \wedge \neg t) \vee \neg(s \to q))$. **V** **F**

**b.** Se $F \vDash \neg G$ e $G \vDash \neg F$ allora $F$ e $\neg G$ sono logicamente equivalenti. **V** **F**

**c.** Esiste un insieme di Hintikka che contiene le formule $\neg(p \to \neg q)$, $\neg q \vee r$ e $r \to s$. **V** **F**

**d.** Sia $I$ l'interpretazione con $D^I = \{A, B, C, D, E\}$, $f^I(A) = C$, $f^I(B) = D$, $f^I(C) = A$, $f^I(D) = E$, $f^I(E) = C$, $p^I = \{A, D, E\}$ e $r^I = \{(A, B), (A, E), (B, B), (B, D), (C, C), (D, D), (E, A), (E, D)\}$.
Allora $I \models \forall x\big(r(x, f(x)) \to \exists y(p(y) \wedge r(f(x), y))\big)$. **V** **F**

**e.** Quante sono le variabili libere nella seguente formula?
$\forall x\, \neg\exists y(r(x, y) \to p(y) \vee r(x, y)) \to \forall z(\exists u\, r(z, u) \vee r(u, z))$ **0** **1** **2** **3** **4**

**f.** $\exists z(p(z) \to r(z, f(z))) \equiv \exists x\, p(x) \to \exists y\, r(y, f(y))$. **V** **F**

**g.** La formula $\exists z(z = a \wedge p(a) \wedge \neg p(z))$ è soddisfacibile nella logica con uguaglianza. **V** **F**

**h.** Se $\sim$ è una relazione di congruenza su $I$ è possibile che $d \sim d'$ e $f^I(d) \nsim f^I(d')$. **V** **F**

**i.** Se $F$ è un enunciato soddisfacibile allora qualunque tableaux sistematico per $F$ è aperto. **V** **F**

**j.** Questo albero rappresenta una deduzione naturale corretta: **V** **F**

$$\dfrac{\exists y\, p(y) \qquad \dfrac{[p(c)]^1 \qquad p(c) \to q(a)}{q(a)}}{q(a)}\,1$$

**k.** Nel riquadro scrivete l'enunciato del Lemma di Sostituzione per termini.

## SECONDA PARTE

Usate il retro del foglio per svolgere tutti gli esercizi salvo il primo e l'ultimo, per cui c'è spazio sufficiente sotto l'esercizio stesso.

**1.** Sia $\mathcal{L} = \{c, m, s, u, =\}$ un linguaggio con uguaglianza, dove $c$ è un simbolo di costante, $m$ è un simbolo di funzione unario, e $s$ e $u$ sono simboli di relazione binari. Interpretando $c$ come "Chiara", $m(x)$ come "la maestra di $x$", $s(x, y)$ come "$x$ è severo con $y$" e $u(x, y)$ come "$x$ ubbidisce ad $y$", traducete la frase: 3pt
"qualcuno che ubbidisce alla maestra di Chiara è severo con tutti quelli che hanno la stessa maestra di Chiara ma non le ubbidiscono."

**2.** Sia $\mathcal{L} = \{f, p\}$ il linguaggio con un simbolo di funzione unario ed un simbolo di relazione unario. Siano $I$ e $J$ le seguenti interpretazioni per $\mathcal{L}$: 5pt

$$D^I = \{A, B, C, D\}, \quad f^I(A) = C, f^I(B) = A, f^I(C) = D, f^I(D) = B, \quad p^I = \{B, C\};$$

$$D^J = \mathbb{Z}, \quad f^J(n) = n + 3, \quad p^J = \{\, n \,:\, n \text{ è dispari} \,\}.$$

- Definite un omomorfismo forte di $J$ in $I$;
- $I$ e $J$ sono elementarmente equivalenti?
- Consideriamo il linguaggio $\mathcal{L} \cup \{=\}$ e espandiamo $I$ e $J$ a due interpretazioni normali. Scrivete un enunciato del nuovo linguaggio che sia soddisfatto da $I$ ma non da $J$.

**3.** Dimostrate che 5pt

$$\forall x(p(x) \vee \forall y(p(y) \to r(y, x))), \exists x(p(x) \wedge \neg p(h(x))) \vDash \exists z\, r(z, h(z)).$$

**4.** Usando il metodo dei tableaux dimostrate che l'insieme di enunciati 4pt

$$\{\exists z(p(z) \wedge \neg \exists y\, r(z, y)), \forall x\, \forall y(q(x) \wedge p(y) \to r(y, x)), \exists u\, q(u)\}$$

è insoddisfacibile.

**5.** Dimostrate, usando solo le regole della deduzione naturale predicativa (comprese le sei regole derivate) che 5pt

$$\forall x(p(x) \to \exists y\, r(x, f(y))), \forall w\, p(f(w)), \forall z(\exists u\, r(u, z) \to \neg p(z)) \rhd \neg p(c).$$

**6.** Nello spazio qui sotto, usando l'algoritmo di Fitting, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((p \wedge \neg w \to \neg(q \vee \neg r)) \to \neg(s \wedge \neg(t \to u))\big).$$

## Soluzioni

**a. V** come si verifica per esempio con le tavole di verità.

**b. F** per esempio quando $F$ è $p \wedge \neg q$ e $G$ è $q$.

**c. V** per esempio $\{\neg(p \to \neg q), \neg q \vee r, r \to s, p, \neg\neg q, q, r, s\}$ è un insieme di Hintikka.

**d. V** perché l'unico $d \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d] \models r(x, f(x))$ è $B$ e $I, \sigma[x/B, y/D] \models p(y) \wedge r(f(x), y)$.

**e. 1** l'ultima occorrenza di $u$ è l'unica occorrenza libera di una variabile in questa formula.

**f. F** è facile costruire un'interpretazione $I$ che soddisfa l'enunciato a sinistra del simbolo di equivalenza logica (ad esempio perché esiste $d \notin p^I$), ma non quello a sinistra.

**g. F** se $I$ è un'interpretazione normale e $d \in D^I$ è tale che $I, \sigma[z/d] \models z = a$ deve essere $d = a^I$ e quindi $a^I \in p^I$ e $d \notin p^I$ non possono essere entrambe vere.

**h. F** per il secondo punto nella definizione di relazione di congruenza (Definizione 10.20 delle dispense).

**i. V** per il teorema di correttezza (Teorema 11.29 delle dispense), che si applica a tutti i tableaux, anche quelli sistematici.

**j. F** perché nelle applicazioni della regola $(\exists e)^g$ si possono utilizzare solo variabili; si noti inoltre che $\exists y\, p(y), p(c) \to q(a) \not\models q(a)$.

**k.** Siano $\sigma$ uno stato di un'interpretazione $I$, $x$ una variabile e $s$ e $t$ due termini. Allora $\sigma(s\{x/t\}) = \sigma[x/\sigma(t)](s)$.

**1.** $\exists x(u(x, m(c)) \wedge \forall y(m(y) = m(c) \wedge \neg u(y, m(y)) \to s(x, y)))$.

**2.**
- Sia $\varphi$ l'omomorfismo forte di $J$ in $I$ che cerchiamo di costruire. Se $n \in \mathbb{Z}$ è tale che $n \equiv 0 \mod 4$ si ha $n \notin p^J$ e deve essere $\varphi(n) \in \{A, D\}$. Supponiamo $\varphi(n) = A$ in questo caso. Allora, $f^J(n) \equiv 3 \mod 4$ e perciò per gli $m \in \mathbb{Z}$ tali che $m \equiv 3 \mod 4$ deve essere $\varphi(m) = f^I(A) = C$ (notiamo che in questo caso $m \in p^J$ e $C \in p^I$). Ripetendo il ragionamento si ottiene che se $\ell \equiv 2 \mod 4$ si deve porre $\varphi(\ell) = f^I(C) = D$ (in questo caso $\ell \notin p^J$ e $D \notin p^I$). Infine se $k \equiv 1 \mod 4$ deve essere $\varphi(k) = f^I(D) = B$ (in questo caso $k \in p^J$ e $B \in p^I$).
  Riassumendo, definiamo
  $$\varphi(n) = \begin{cases} A, & \text{se } n \equiv 0 \mod 4; \\ B, & \text{se } n \equiv 1 \mod 4; \\ D, & \text{se } n \equiv 2 \mod 4; \\ C, & \text{se } n \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$
  Si verifica che la $\varphi$ così definita è effettivamente un omomorfismo forte.
- Dato che l'omomorfismo forte di $J$ in $I$ definito nel punto precedente è suriettivo, possiamo utilizzare il Corollario 10.14 delle dispense e concludere che $I$ e $J$ sono elementarmente equivalenti.
- L'enunciato $\exists x\, \exists y\, \forall z(p(z) \to z = x \vee z = y)$ è soddisfatto da $I$ ma non da $J$.

**3.** Supponiamo che $I$ sia un'interpretazione che soddisfa i due enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, che indichiamo con $F$ e $G$. Il nostro obiettivo è dedurre che $I$ soddisfa anche l'enunciato a destra.

Dato che $I \models G$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $d_0 \in p^I$ e $h^I(d_0) \notin p^I$. Dato che $I \models F$ si ha in particolare $I, \sigma[x/h^I(d_0)] \models p(x) \vee \forall y(p(y) \to r(y, x))$ da cui, dato che $I, \sigma[x/h^I(d_0)] \not\models p(x)$ per quanto ottenuto in precedenza, segue che $I, \sigma[x/h^I(d_0)] \models \forall y(p(y) \to r(y, x))$.

In particolare $I, \sigma[x/h^I(d_0), y/d_0] \models p(y) \to r(y, x)$. Dato che $I, \sigma[x/h^I(d_0), y/d_0] \models p(y)$ deve essere $(d_0, h^I(d_0)) \in r^I$. Perciò $I, \sigma[z/d_0] \models r(z, h(z))$, da cui si deduce che $I \models \exists z\, r(z, h(z))$ come richiesto.

**4.** Per mostrare l'insoddisfacibilità dell'insieme di enunciati dobbiamo costruire (utilizzando l'Algoritmo 11.50 e le Convenzioni 11.19 e 11.21 delle dispense) un tableau chiuso con la radice etichettata dall'insieme di enunciati.

Indichiamo con $F$, $G$ e $H$ le $\gamma$-formule $\forall x\,\forall y(q(x) \wedge p(y) \to r(y,x))$, $\neg\exists y\, r(a,y)$ e $\forall y(q(b) \wedge p(y) \to r(y,b))$.

$$\underline{\exists z(p(z) \wedge \neg\exists y\, r(z,y))}, F, \exists u\, q(u)$$
$$|$$
$$\underline{p(a) \wedge G}, F, \exists u\, q(u)$$
$$|$$
$$p(a), G, F, \underline{\exists u\, q(u)}$$
$$|$$
$$p(a), G, \underline{F}, q(b)$$
$$|$$
$$p(a), G, F, \underline{H}, q(b)$$
$$|$$
$$p(a), G, F, H, \underline{q(b) \wedge p(a) \to r(a,b)}, q(b)$$

$$\begin{array}{cc} p(a), G, F, H, \underline{\neg(q(b) \wedge p(a))}, q(b) & p(a), \underline{G}, F, H, r(a,b), q(b) \\ \begin{array}{cc} p(a), G, F, H, \neg q(b), q(b) & p(a), G, F, H, \neg p(a), q(b) \\ \otimes & \otimes \end{array} & \begin{array}{c} | \\ p(a), G, \neg r(a,b), F, H, r(a,b), q(b) \\ \otimes \end{array} \end{array}$$

Si noti l'importanza di scegliere in modo opportuno le istanze delle $\gamma$-formule. Con altre scelte il tableau cresce rapidamente di dimensione.

**5.** Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{[p(c)]^2 \qquad \dfrac{\forall x(p(x) \to \exists y\, r(x,f(y)))}{p(c) \to \exists y\, r(c,f(y))}}{\exists y\, r(c,f(y))} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[r(c,f(y))]^1}{\exists u\, r(u,f(y))} \qquad \dfrac{\forall z(\exists u\, r(u,z) \to \neg p(z))}{\exists u\, r(u,f(y)) \to \neg p(f(y))}}{\neg p(f(y))} \qquad \dfrac{\forall w\, p(f(w))}{p(f(y))}}{\bot}}{\dfrac{\bot}{\neg p(c)}\,2}\,1$$

**6.** Utilizziamo l'Algoritmo 3.22 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.30:

$$[\big\langle \neg\big((p \wedge \neg w \to \neg(q \vee \neg r)) \to \neg(s \wedge \neg(t \to u))\big)\big\rangle]$$
$$[\langle p \wedge \neg w \to \neg(q \vee \neg r), s \wedge \neg(t \to u)\rangle]$$
$$[\langle p \wedge \neg w \to \neg(q \vee \neg r), s, \neg(t \to u)\rangle]$$
$$[\langle p \wedge \neg w \to \neg(q \vee \neg r), s, t, \neg u\rangle]$$
$$[\langle \neg(p \wedge \neg w), s, t, \neg u\rangle, \langle \neg(q \vee \neg r), s, t, \neg u\rangle]$$
$$[\langle \neg p, s, t, \neg u\rangle, \langle w, s, t, \neg u\rangle, \langle \neg q, r, s, t, \neg u\rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \wedge s \wedge t \wedge \neg u) \vee (w \wedge s \wedge t \wedge \neg u) \vee (\neg q \wedge r \wedge s \wedge t \wedge \neg u).$$