Prova scritta di Logica Matematica
24 gennaio 2017

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $(p \to \neg q) \to r \equiv \neg(p \to \neg(r \vee q))$. **V** | **F** 1pt

2. Se $F \models H$ e $\neg G \models H$ allora $F \vee \neg G \models H$. **V** | **F** 1pt

3. Ogni formula proposizionale è logicamente equivalente a una formula in forma normale congiuntiva. **V** | **F** 1pt

4. Se esiste un tableau aperto per la formula proposizionale $\neg F$ allora F è soddisfacibile. **V** | **F** 1pt

5. Esiste un insieme di Hintikka che contiene gli enunciati $\forall x(p(x) \to q(x))$, $\neg q(c)$ e $\exists y\, p(y)$. **V** | **F** 1pt

6. Quante delle seguenti formule sono β-formule? $p \wedge \neg q \to \neg r$, $\neg\neg(p \vee r)$, $\neg(p \wedge \neg\neg q)$, $\neg p \to \neg r \wedge (q \to s)$. **0** | **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

7. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{0,1,2,3\}$, $p^I = \{0,3\}$, $f^I(0) = 1$, $f^I(1) = 3$, $f^I(2) = 3$, $f^I(3) = 2$. Allora $I \models \forall x(p(x) \to \neg p(f(x)) \wedge p(f(f(x))))$. **V** | **F** 1pt

8. $\neg\forall x\, p(x) \to \exists x\, q(x) \equiv \exists x(\neg p(x) \to q(x))$. **V** | **F** 1pt

9. Se $T \rhd F$ allora $T \rhd_= F$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sia $\mathcal{L} = \{f, r\}$ un linguaggio in cui f è un simbolo di funzione unario e r è un simbolo di relazione binario. Sia I l'interpretazione per $\mathcal{L}$ definita da 4pt

$$D^I = \{0,1,2,3,4,5\};$$

$$f^I(0) = 3; \quad f^I(1) = 0; \quad f^I(2) = 5; \quad f^I(3) = 5; \quad f^I(4) = 1; \quad f^I(5) = 5;$$

$$r^I = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(4,0),(4,3),(4,5)\}.$$

Sul retro del foglio definite una relazione di congruenza $\sim$ su I che abbia tre classi d'equivalenza, giustificando la vostra risposta. Descrivete l'interpretazione quoziente $I/{\sim}$.

11. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x(p(x) \to \neg r(x, f(a))), \forall y(\forall z\, r(z,y) \vee \neg p(y)) \models p(c) \to \exists x\, \neg p(f(x)).$$

12. Sia $\mathcal{L} = \{b, p, a, \ell, f, c\}$ un linguaggio dove b è un simbolo di costante, p è un simbolo di funzione unario, a e ℓ sono simboli relazionali unari e f e c sono simboli di relazione binari. Interpretando b come "Bruna", $p(x)$ come "il padre di x", $a(x)$ come "x è un artista", $\ell(x)$ come "x è un letterato", $f(x, y)$ come "x è più famoso di y", $c(x, y)$ come "x conosce y" traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) Bruna è un'artista, ma suo nonno paterno era un letterato; 3pt

(ii) qualche letterato non conosce artisti più famosi di lui. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$\neg\big((p \wedge (q \to r)) \vee \neg(s \to r)\big) \wedge \neg\big(s \to \neg p \wedge \neg(q \wedge \neg r)\big)$$

è soddisfacibile. Se la formula è soddisfacibile definite una valutazione che la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$r(g(a)) \vee \exists x\, \neg s(x) \rhd \exists x(s(x) \to r(g(x))).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((p \to \neg(\neg q \vee r)) \vee ((\neg s \to t) \wedge \neg u)\big).$$

Soluzioni

1. **F** come si verifica per esempio con le tavole di verità (se $v(p) = \mathbf{F}$ e $v(r) = \mathbf{V}$ allora la prima formula è vera e la seconda falsa).

2. **V** se $v(F \vee \neg G) = \mathbf{V}$ allora $v(F) = \mathbf{V}$ oppure $v(\neg G) = \mathbf{V}$, ed in entrambi i casi $v(H) = \mathbf{V}$. Si tratta essenzialmente di un'applicazione della regola $(\vee e)$ della deduzione naturale.

3. **V** è parte del teorema 3.9 delle dispense.

4. **F** per il teorema 4.18 delle dispense sotto le ipotesi F non è valida, ma nulla sappiamo riguardo alla sua soddisfacibilità (si ricordi la definizione 2.32). Infatti se F è insoddisfacibile qualunque tableau per $\neg F$ sarà aperto.

5. **V** $\{\forall x(p(x) \to q(x)), \neg q(c), \exists y\, p(y), p(c) \to q(c), \neg p(c), p(b), p(b) \to q(b), q(b)\}$ è un insieme di Hintikka.

6. **3** la seconda formula è una doppia negazione, mentre le altre tre sono β-formule.

7. **V** se d è 1 o 2 si ha facilmente che $I, \sigma[x/d] \nvDash p(x) \to \neg p(f(x)) \wedge p(f(f(x)))$ perché $d \notin p^I$; negli altri due casi (cioè se d è 0 o 4) si verifica che $f^I(d) \notin p^I$ e $f^I(f^I(d)) \in p^I$.

8. **F** non si può applicare il lemma 7.56 delle dispense, che richiede che l'antecedente dell'implicazione sia una formula universale (non è difficile costruire un'interpretazione in cui il primo enunciato sia soddisfatto ed il secondo no).

9. **V** se $T \rhd F$ c'è una deduzione naturale che non usa le regole per l'uguaglianza le cui ipotesi sono in T e la cui conclusione è F: la stessa deduzione mostra che $T \rhd_= F$.

10. Definiamo $\sim$ in modo che le sue classi d'equivalenza siano $\{0,3,5\}$, $\{1,2\}$ e $\{4\}$. Bisogna verificare le condizioni della definizione di relazione di congruenza.

Inoltre $D^I/\sim = \{[0],[1],[4]\}$, $f^{I/\sim}([0]) = [0]$, $f^{I/\sim}([1]) = [0]$, $f^{I/\sim}([4]) = [1]$, $r^{I/\sim} = \{([1],[1]),([1],[4]),([4],[0])\}$.

11. Sia I un'interpretazione per il linguaggio dei tre enunciati, che chiamiamo F, G e H nell'ordine. L'obiettivo è mostrare che se $I \vDash F, G$ allora $I \vDash H$.

Supponiamo dunque che $I \vDash F, G$. Se $I \nvDash p(c)$ allora $I \vDash H$ e non c'è più nulla da dimostrare. Quindi d'ora in poi supponiamo anche che $I \vDash p(c)$.

Da $I \vDash F$ segue che $I, \sigma[x/c^I] \vDash p(x) \to \neg r(x, f(a))$ e quindi, per la nostra ipotesi, che $(c^I, f^I(a^I)) \notin r^I$.

Da $I \vDash G$ segue che $I, \sigma[y/f^I(a^I)] \vDash \forall z\, r(z,y) \vee \neg p(y)$. Dato che abbiamo ottenuto che $I, \sigma[y/f^I(a^I), z/c^I] \vDash \neg r(z,y)$ si ha $I, \sigma[y/f^I(a^I)] \nvDash \forall z\, r(y,z)$ e quindi deve valere $I, \sigma[y/f^I(a^I)] \vDash \neg p(y)$, cioè $f^I(a^I) \notin p^I$. Ma allora $I \vDash \exists x\, \neg p(f(x))$ e perciò $I \vDash H$, come volevamo.

12. (i) $a(b) \wedge \ell(p(p(b)))$;

(ii) $\exists x(\ell(x) \wedge \neg \exists y(c(x,y) \wedge a(y) \wedge f(y,x)))$.

13. Per stabilire la soddisfacibilità della formula utilizziamo l'Algoritmo 4.5 delle dispense e costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.31 e 4.32) un tableau con la radice etichettata dalla formula. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

- $\underline{\neg\big((p \land (q \to r)) \lor \neg(s \to r)\big) \land \neg\big(s \to \neg p \land \neg(q \land \neg r)\big)}$
  - $\underline{\neg\big((p \land (q \to r)) \lor \neg(s \to r)\big)}, \neg\big(s \to \neg p \land \neg(q \land \neg r)\big)$
    - $\neg(p \land (q \to r)), s \to r, \underline{\neg\big(s \to \neg p \land \neg(q \land \neg r)\big)}$
      - $\neg(p \land (q \to r)), \underline{s \to r}, s, \neg(\neg p \land \neg(q \land \neg r))$
        - $\neg(p \land (q \to r)), \neg s, s, \neg(\neg p \land \neg(q \land \neg r))$ $\otimes$
        - $\neg(p \land (q \to r)), r, s, \underline{\neg(\neg p \land \neg(q \land \neg r))}$
          - $\underline{\neg(p \land (q \to r))}, r, s, p$
            - $\neg p, r, s, p$ $\otimes$
            - $\underline{\neg(q \to r)}, r, s, p$
              - $q, \neg r, r, s, p$ $\otimes$
          - $\neg(p \land (q \to r)), r, s, \underline{q \land \neg r}$
            - $\neg(p \land (q \to r)), r, s, q, \neg r$ $\otimes$

Il tableau è chiuso e quindi la formula non è soddisfacibile.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$r(g(a)) \lor \exists x\, \neg s(x)$}
\AxiomC{$[r(g(a))]^3$}
\UnaryInfC{$s(a) \to r(g(a))$}
\UnaryInfC{$\exists x(s(x) \to r(g(x)))$}
\AxiomC{$[\exists x\, \neg s(x)]^3$}
\AxiomC{$[s(x)]^1$}
\AxiomC{$[\neg s(x)]^2$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\UnaryInfC{$r(g(x))$}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$s(x) \to r(g(x))$}
\UnaryInfC{$\exists x(s(x) \to r(g(x)))$}
\RightLabel{2}
\BinaryInfC{$\exists x(s(x) \to r(g(x)))$}
\RightLabel{3}
\TrinaryInfC{$\exists x(s(x) \to r(g(x)))$}
\end{prooftree}
$$

15. Utilizziamo l'Algoritmo 3.20 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.28:

$$[\big\langle \neg\big((p \to \neg(\neg q \vee r)) \vee ((\neg s \to t) \wedge \neg u)\big)\big\rangle]$$
$$[\langle \neg(p \to \neg(\neg q \vee r)), \neg((\neg s \to t) \wedge \neg u)\rangle]$$
$$[\langle p, \neg q \vee r, \neg((\neg s \to t) \wedge \neg u)\rangle]$$
$$[\langle p, \neg q, \neg((\neg s \to t) \wedge \neg u)\rangle, \langle p, r, \neg((\neg s \to t) \wedge \neg u)\rangle]$$
$$[\langle p, \neg q, \neg(\neg s \to t)\rangle, \langle p, \neg q, u\rangle, \langle p, r, \neg(\neg s \to t)\rangle, \langle p, r, u\rangle]$$
$$[\langle p, \neg q, \neg s, \neg t\rangle, \langle p, \neg q, u\rangle, \langle p, r, \neg s, \neg t\rangle, \langle p, r, u\rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(p \wedge \neg q \wedge \neg s \wedge \neg t) \vee (p \wedge \neg q \wedge u) \vee (p \wedge r \wedge \neg s \wedge \neg t) \vee (p \wedge r \wedge u).$$

Prova scritta di Logica Matematica
24 gennaio 2017

Cognome Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $\neg(p \to \neg(q \vee \neg r)) \equiv (p \to r) \to q$. **V** | **F** 1pt

2. Se $\neg F \models H$ e $G \models H$ allora $\neg F \vee G \models H$. **V** | **F** 1pt

3. Quante delle seguenti formule sono β-formule?
$p \wedge \neg q \to \neg r$, $\neg(p \wedge \neg\neg q)$, $\neg\neg(p \vee r)$, $(\neg p \to \neg r) \wedge (q \to s)$. **0** | **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

4. Ogni formula proposizionale è logicamente equivalente a una formula in forma normale disgiuntiva. **V** | **F** 1pt

5. Se esiste un tableau chiuso per la formula proposizionale $\neg F$ allora F è soddisfacibile. **V** | **F** 1pt

6. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $p^I = \{0, 2\}$, $f^I(0) = 1$, $f^I(1) = 3$, $f^I(2) = 3$, $f^I(3) = 2$.
Allora $I \models \forall x(p(x) \to \neg p(f(x)) \wedge p(f(f(x))))$. **V** | **F** 1pt

7. $\exists x\, p(x) \to \neg\forall x\, q(x) \equiv \exists x(p(x) \to \neg q(x))$. **V** | **F** 1pt

8. Esiste un insieme di Hintikka che contiene gli enunciati $\forall x(p(x) \to q(x))$, $p(a)$ e $\exists y\, \neg q(y)$. **V** | **F** 1pt

9. Se $T \rhd_= F$ allora $T \rhd F$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x(\neg p(x) \to r(f(a), x)), \forall y(\forall z\, \neg r(y, z) \vee p(y)) \models \neg p(c) \to \exists x\, p(f(x)).$$

11. Sia $\mathcal{L} = \{f, r\}$ un linguaggio in cui f è un simbolo di funzione unario e r è un simbolo di relazione binario. Sia I l'interpretazione per $\mathcal{L}$ definita da 4pt

$$D^I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$f^I(0) = 3; \quad f^I(1) = 1; \quad f^I(2) = 0; \quad f^I(3) = 4; \quad f^I(4) = 1; \quad f^I(5) = 1;$$

$$r^I = \{(0, 0), (0, 2), (0, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (5, 0), (5, 2), (5, 5)\}.$$

Sul retro del foglio definite una relazione di congruenza $\sim$ su I che abbia tre classi d'equivalenza, giustificando la vostra risposta. Descrivete l'interpretazione quoziente $I/{\sim}$.

12. Sia $\mathcal{L} = \{a, m, s, g, i, c\}$ un linguaggio dove a è un simbolo di costante, m è un simbolo di funzione unario, s e g sono simboli relazionali unari e i e c sono simboli di relazione binari. Interpretando a come "Anna", $m(x)$ come "la madre di x", $s(x)$ come "x è uno scienziato", $g(x)$ come "x è un giornalista", $i(x, y)$ come "x è più istruito di y", $c(x, y)$ come "x conosce y" traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) Anna è una giornalista, ma sua nonna materna era una scienziata; 3pt

(ii) qualche scienziato non conosce giornalisti più istruiti di lui. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$\neg\big(s \to p \wedge \neg(q \wedge \neg r)\big) \wedge \neg\big((\neg p \wedge (q \to r)) \vee \neg(s \to r)\big)$$

è soddisfacibile. Se la formula è soddisfacibile definite una valutazione che la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\exists x\, \neg p(x) \vee q(f(c)) \rhd \exists x(p(x) \to q(f(x))).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big(((p \to \neg q) \wedge r) \vee (\neg s \to \neg(\neg t \vee u))\big).$$

Soluzioni

1. **F** come si verifica per esempio con le tavole di verità (se $v(p) = \mathbf{F}$ e $v(q) = \mathbf{V}$ allora la prima formula è falsa e la seconda vera).
2. **V** se $v(\neg F \vee G) = \mathbf{V}$ allora $v(\neg F) = \mathbf{V}$ oppure $v(G) = \mathbf{V}$, ed in entrambi i casi $v(H) = \mathbf{V}$. Si tratta essenzialmente di un'applicazione della regola ($\vee e$) della deduzione naturale.
3. **2** le prime due formule sono β-formule, mentre le successive sono una doppia negazione ed una α-formula.
4. **V** è parte del teorema 3.9 delle dispense.
5. **V** per il teorema 4.18 delle dispense sotto le ipotesi F è valida, e quindi in particolare soddisfacibile (si ricordi la definizione 2.32).
6. **F** $I, \sigma[x/0] \not\models p(x) \to \neg p(f(x)) \wedge p(f(f(x)))$ perché $0 \in p^I$ ma $f^I(f^I(0)) = 3 \notin p^I$.
7. **F** non si può applicare il lemma 7.56 delle dispense, che richiede che l'antecedente dell'implicazione sia una formula universale (non è difficile costruire un'interpretazione in cui il primo enunciato sia soddisfatto ed il secondo no).
8. **V** $\{\forall x(p(x) \to q(x)), p(a), \exists y\, \neg q(y), p(a) \to q(a), q(a), \neg q(b), p(b) \to q(b), \neg p(b)\}$ è un insieme di Hintikka.
9. **F** se la deduzione naturale che mostra $T \rhd_= F$ usa le regole per l'uguaglianza non c'è nessun motivo per cui debba valere $T \rhd F$. Ad esempio $\rhd_= x = x$ ma $\not\rhd\, x = x$.
10. Sia I un'interpretazione per il linguaggio dei tre enunciati, che chiamiamo F, G e H nell'ordine. L'obiettivo è mostrare che se $I \models F, G$ allora $I \models H$.

    Supponiamo dunque che $I \models F, G$. Se $I \models p(c)$ allora $I \models H$ e non c'è più nulla da dimostrare. Quindi d'ora in poi supponiamo anche che $I \models \neg p(c)$.

    Da $I \models F$ segue che $I, \sigma[x/c^I] \models \neg p(x) \to r(f(a), x)$ e quindi, per la nostra ipotesi, che $(f^I(a^I), c^I) \in r^I$.

    Da $I \models G$ segue che $I, \sigma[y/f^I(a^I)] \models \forall z\, \neg r(y, z) \vee p(y)$. Dato che abbiamo ottenuto che $I, \sigma[y/f^I(a^I), z/c^I] \models r(y, z)$ si ha $I, \sigma[y/f^I(a^I)] \not\models \forall z\, \neg r(y, z)$ e quindi deve valere $I, \sigma[y/f^I(a^I)] \models p(y)$, cioè $f^I(a^I) \in p^I$. Ma allora $I \models \exists x\, p(f(x))$ e perciò $I \models H$, come volevamo.
11. Definiamo $\sim$ in modo che le sue classi d'equivalenza siano $\{0, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$ e $\{2\}$. Bisogna verificare le condizioni della definizione di relazione di congruenza.

    Inoltre $D^I/\!\sim\, = \{[0], [1], [2]\}$, $f^{I/\sim}([0]) = [1]$, $f^{I/\sim}([1]) = [1]$, $f^{I/\sim}([2]) = [0]$, $r^{I/\sim} = \{([0], [0]), ([0], [2]), ([2], [1])\}$.
12. (i) $g(a) \wedge s(m(m(a)))$;

    (ii) $\exists x(s(x) \wedge \neg \exists y(c(x, y) \wedge g(y) \wedge i(y, x)))$.

13. Per stabilire la soddisfacibilità della formula utilizziamo l'Algoritmo 4.5 delle dispense e costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.31 e 4.32) un tableau con la radice etichettata dalla formula. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

- $\underline{\neg\big(s \to p \land \neg(q \land \neg r)\big) \land \neg\big((\neg p \land (q \to r)) \lor \neg(s \to r)\big)}$
  - $\underline{\neg\big(s \to p \land \neg(q \land \neg r)\big)}, \neg\big((\neg p \land (q \to r)) \lor \neg(s \to r)\big)$
    - $s, \neg(p \land \neg(q \land \neg r)), \underline{\neg\big((\neg p \land (q \to r)) \lor \neg(s \to r)\big)}$
      - $s, \neg(p \land \neg(q \land \neg r)), \neg(\neg p \land (q \to r)), \underline{s \to r}$
        - $s, \neg(p \land \neg(q \land \neg r)), \neg(\neg p \land (q \to r)), \neg s$ $\otimes$
        - $s, \underline{\neg(p \land \neg(q \land \neg r))}, \neg(\neg p \land (q \to r)), r$
          - $s, \neg p, \underline{\neg(\neg p \land (q \to r))}, r$
            - $s, \neg p, p, r$ $\otimes$
            - $s, \neg p, \underline{\neg(q \to r)}, r$
              - $s, \neg p, q, \neg r, r$ $\otimes$
          - $s, \underline{q \land \neg r}, \neg(\neg p \land (q \to r)), r$
            - $s, q, \neg r, \neg(\neg p \land (q \to r)), r$ $\otimes$

Il tableau è chiuso e quindi la formula non è soddisfacibile.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\exists x\,\neg p(x) \lor q(f(c)) \qquad \dfrac{[\exists x\,\neg p(x)]^3 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p(x)]^1 \qquad [\neg p(x)]^2}{\bot}}{q(f(x))}}{p(x) \to q(f(x))}\,{\scriptstyle 1}}{\exists x(p(x) \to q(f(x)))}}{\exists x(p(x) \to q(f(x)))}\,{\scriptstyle 2} \qquad \dfrac{\dfrac{[q(f(c))]^3}{p(c) \to q(f(c))}}{\exists x(p(x) \to q(f(x)))}}{\exists x(p(x) \to q(f(x)))}\,{\scriptstyle 3}$$

15. Utilizziamo l'Algoritmo 3.20 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.28:

$$[\big\langle \neg\big(((p \to \neg q) \land r) \lor (\neg s \to \neg(\neg t \lor u))\big)\big\rangle]$$
$$[\langle \neg((p \to \neg q) \land r), \neg(\neg s \to \neg(\neg t \lor u))\rangle]$$
$$[\langle \neg((p \to \neg q) \land r), \neg s, \neg t \lor u\rangle]$$
$$[\langle \neg(p \to \neg q), \neg s, \neg t \lor u\rangle , \langle \neg r, \neg s, \neg t \lor u\rangle]$$
$$[\langle p, q, \neg s, \neg t \lor u\rangle , \langle \neg r, \neg s, \neg t\rangle , \langle \neg r, \neg s, u\rangle]$$
$$[\langle p, q, \neg s, \neg t\rangle , \langle p, q, \neg s, u\rangle , \langle \neg r, \neg s, \neg t\rangle , \langle \neg r, \neg s, u\rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(p \land q \land \neg s \land \neg t) \lor (p \land q \land \neg s \land u) \lor (\neg r \land \neg s \land \neg t) \lor (\neg r \land \neg s \land u).$$