Prova scritta di Logica Matematica
18 giugno 2015

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $(p \to q) \wedge (\neg q \vee p) \equiv p \vee q \to p \wedge q$. **V** | **F** 1pt

2. Se $F \models G$ e $\neg F \models G$ allora G è insoddisfacibile. **V** | **F** 1pt

3. Se un insieme di Hintikka che contiene $p \to q \wedge r$ e $\neg(r \wedge s)$ allora non contiene p. **V** | **F** 1pt

4. Se $F \rhd \perp$ allora F è insoddisfacibile. **V** | **F** 1pt

5. Quante delle seguenti formule sono enunciati?
$\exists x(\forall z\, \exists y\, r(x, f(z, y)) \to r(z, x))$, $\exists x\, \forall z\, \exists y(r(x, f(z, y)) \to \neg r(z, x))$,
$\exists x\, \forall z(\exists y\, r(x, f(z, y)) \wedge r(z, x))$. **0** | **1** | **2** | **3** 1pt

6. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $f^I(0) = f^I(1) = 2$, $f^I(2) = 0$, $f^I(3) = 1$, $p^I = \{0, 3\}$ e $r^I = \{(0, 0), (0, 2), (1, 2), (1, 3), (3, 1)\}$.
Allora $I \models \forall x(r(x, f(x)) \to p(x) \vee \neg p(f(x)))$. **V** | **F** 1pt

7. $\forall x(p(x) \vee r(f(x), x)) \equiv \forall x\, p(x) \vee \forall y\, r(f(y), y)$. **V** | **F** 1pt

8. Se I è un'interpretazione per il linguaggio $\mathcal{L}$ e $\sim$ è una relazione di congruenza su I allora $I \equiv_{\mathcal{L}} I/\!\sim$. **V** | **F** 1pt

9. Se F è una formula predicativa soddisfacibile, allora ogni tableau (sistematico o meno) per F è aperto. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sia $\mathcal{L} = \{f, p\}$ il linguaggio con f simbolo di funzione unario e p simbolo di relazione unario. Siano I e J le seguenti interpretazioni per $\mathcal{L}$: 4pt

$$D^I = \mathbb{Z}, \quad f^I(n) = n - 4 \text{ per ogni } n \in \mathbb{Z}, \quad p^I = \{\, n \in \mathbb{Z} : n \text{ è un multiplo di } 3 \,\};$$

$$D^J = \{A, B, C\}, \quad f^J(A) = B, \quad f^J(B) = C, \quad f^J(C) = A, \quad p^J = \{B\}.$$

Sul retro del foglio dimostrate che $I \equiv_{\mathcal{L}} J$.

11. Sul retro del foglio dimostrate l'insoddisfacibilità dell'insieme di enunciati 4pt

$$\{\forall x(p(x) \to \forall y\, r(f(x), y)), \forall x(r(x, f(x)) \to p(x)), \neg\forall z(\neg p(z) \vee p(f(z)))\}.$$

12. Sia $\{b, c, m, a, i\}$ un linguaggio dove b e c sono simboli di costante, m un simbolo di funzione unario, a e i simboli di relazione binari. Interpretando b come "Bruno", c come "Cloe", $m(x)$ come "la madre di x", $a(x, y)$ come "x è amico di y" e $i(x, y)$ come "x è insegnante di y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) la madre di Bruno non è amica di Cloe, ma di un insegnante di Cloe; 3pt

(ii) tutti gli amici di Cloe sono amici della madre di qualche amico di Bruno. 3pt

13. Mostrate che 3pt

$$F \vee (H \to G), F \to G \vee \neg H, \neg G \rhd \neg H.$$

Usate solo le regole della deduzione naturale proposizionale, comprese le quattro regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux stabilite sul retro del foglio che 5pt

$$\forall x (q(x) \to \neg p(x) \vee \exists y\, r(x, y)), \exists x (q(x) \wedge p(x)), \forall x (\exists y\, r(y, x) \to r(x, c)) \models \exists x\, r(x, c).$$

15. Utilizzando lo spazio qui sotto mettete in forma prenessa l'enunciato 2pt

$$\forall x\, \exists y\, p(f(x, y)) \vee \exists z\, q(z) \to \neg \exists x\, \forall y\, \neg q(f(y, x)) \wedge \exists u\, \forall v\, r(v, u).$$

[Se si usa il minimo numero di quantificatori possibili, 1pt in più.]

Soluzioni

1. **V** come si verifica per esempio con le tavole di verità.

2. **F** le ipotesi implicano che G è valida (e quindi certamente soddisfacibile): infatti per ogni interpretazione v si ha $v(F) = \mathbf{V}$ o $v(\neg F) = \mathbf{V}$ e quindi $v(G) = \mathbf{V}$ per la prima o la seconda conseguenza logica.

3. **F** un insieme di Hintikka che contiene sia p che le due formule è

$$\{p, p \to q \wedge r, q \wedge r, q, r, \neg(r \wedge s), \neg s\}.$$

4. **V** se $F \rhd \bot$, per il teorema di correttezza (teorema 5.17 delle dispense), si ha $F \models \bot$, che per l'esercizio 5.4.12 significa che F è insoddisfacibile.

5. **2** la seconda e la terza formula sono enunciati, mentre z è libera nella prima formula.

6. **V** verifichiamo che $I, \sigma[x/d] \models r(x, f(x)) \to p(x) \vee \neg p(f(x))$ vale per ogni $d \in D^I$: se $d = 2$ è vero perché $I, \sigma[x/d] \not\models r(x, f(x))$, se $d = 0$ oppure $d = 3$ perché $I, \sigma[x/d] \models p(x)$, se $d = 1$ perché $I, \sigma[x/d] \models \neg p(f(x))$.

7. **F** non c'è equivalenza logica perché non si può estrarre simultaneamente due quantificatori universali da una disgiunzione (si veda la Nota 7.60 delle dispense); nello specifico, non è difficile costruire un'interpretazione in cui $\forall x(p(x) \vee r(f(x), x))$ è soddisfatta ma $\forall x\, p(x) \vee \forall y\, r(f(y), y)$ è falsa.

8. **V** l'affermazione è contenuta nel Corollario 9.27 delle dispense.

9. **V** per il teorema di correttezza (Teorema 10.28 delle dispense), che non fa riferimento alla sistematicità del tableau.

10. Per il corollario 9.13 delle dispense è sufficiente definire un omomorfismo forte suriettivo φ di I in J. Sia $\varphi(3m) = B$, $\varphi(3m+1) = A$ e $\varphi(3m+2) = C$ per ogni $m \in \mathbb{Z}$. È facile verificare che φ ha le caratteristiche richieste.

11. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che I sia un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati (che indichiamo nell'ordine con F, G e H), con l'obiettivo di ottenere una contraddizione.

Dato che $I \models H$ si ha che $I \not\models \forall z(\neg p(z) \vee p(f(z)))$ e quindi esiste $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[z/d_0] \not\models \neg p(z) \vee p(f(z))$, cioè $d_0 \in p^I$ e $f^I(d_0) \notin p^I$.

Dato che $I \models F$ si ha in particolare $I, \sigma[x/d_0] \models p(x) \to \forall y\, r(f(x), y)$. Visto che $d_0 \in p^I$ si ha $I, \sigma[x/d_0] \models \forall y\, r(f(x), y)$ che significa che per ogni $d \in D^I$ abbiamo $(f^I(d_0), d) \in r^I$. In particolare $(f^I(d_0), f^I(f^I(d_0))) \in r^I$.

Dato che $I \models G$ si ha in particolare $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \models r(x, f(x)) \to p(x)$, e quindi, usando $(f^I(d_0), f^I(f^I(d_0))) \in r^I$, otteniamo $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \models p(x)$. Ma questo significa che $f^I(d_0) \in p^I$, contraddicendo quanto ottenuto in precedenza.

12. (i) $\neg a(m(b), c) \wedge \exists x(i(x, c) \wedge a(m(b), x))$;

(ii) $\forall x\big(a(x, c) \to \exists y(a(y, b) \wedge a(x, m(y)))\big)$.

13. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$
\dfrac{F \lor (H \to G) \qquad \dfrac{\dfrac{[F]^2 \qquad F \to G \lor \neg H}{G \lor \neg H} \qquad \dfrac{\dfrac{[G]^1 \qquad \neg G}{\bot}}{\neg H} \qquad [\neg H]^1}{\neg H}\,{\scriptstyle 1} \qquad \dfrac{[H \to G]^2 \qquad \neg G}{\neg H}}{\neg H}\,{\scriptstyle 2}
$$

Si noti l'uso di (*ex-falso*) nel passaggio in cui l'ipotesi è $\bot$ e di (MT) nel passaggio in cui una delle ipotesi è $H \to G$.

14. Per stabilire la conseguenza logica utilizziamo l'algoritmo 10.48 delle dispense e costruiamo un tableau chiuso con la radice etichettata dagli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione di quello a destra. Indichiamo con F, G, H e K le quattro γ-formule $\forall x(q(x) \to \neg p(x) \lor \exists y\, r(x,y))$, $\forall x(\exists y\, r(y,x) \to r(x,c))$, $\neg\exists x\, r(x,c)$ e $\neg\exists y\, r(y,b)$. Utilizziamo la convenzione 10.22 delle dispense e in ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$F, \underline{\exists x(q(x) \land p(x))}, G, H$$

$$F, \underline{q(a) \land p(a)}, G, H$$

$$\underline{F}, q(a), p(a), G, H$$

$$F, \underline{q(a) \to \neg p(a) \lor \exists y\, r(a,y)}, q(a), p(a), G, H$$

- $F, \neg q(a), q(a), p(a), G, H$
  - $\otimes$
- $F, \underline{\neg p(a) \lor \exists y\, r(a,y)}, q(a), p(a), G, H$
  - $F, \neg p(a), q(a), p(a), G, H$
    - $\otimes$
  - $F, \underline{\exists y\, r(a,y)}, q(a), p(a), G, H$
    - $F, r(a,b), q(a), p(a), \underline{G}, H$
    - $F, r(a,b), q(a), p(a), G, \underline{\exists y\, r(y,b) \to r(b,c)}, H$
      - $F, r(a,b), q(a), p(a), G, \underline{K}, H$
        - $F, r(a,b), q(a), p(a), G, K, \neg r(a,b), H$
        - $\otimes$
      - $F, r(a,b), q(a), p(a), G, r(b,c), \underline{H}$
        - $F, r(a,b), q(a), p(a), G, r(b,c), H, \neg r(b,c)$
        - $\otimes$

15. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\forall x\,\exists y\, p(f(x,y)) \vee \exists z\, q(z) \to \neg\exists x\,\forall y\,\neg q(f(y,x)) \wedge \exists u\,\forall v\, r(v,u)$$
$$\forall x(\exists y\, p(f(x,y)) \vee \exists z\, q(z)) \to \forall x\,\exists y\,\neg\neg q(f(y,x)) \wedge \exists u\,\forall v\, r(v,u)$$
$$\forall x\,\exists y(p(f(x,y)) \vee q(y)) \to \exists u(\forall x\,\exists y\, q(f(y,x)) \wedge \forall v\, r(v,u))$$
$$\forall x\,\exists y(p(f(x,y)) \vee q(y)) \to \exists u\,\forall v(\exists y\, q(f(y,v)) \wedge r(v,u))$$
$$\forall x\,\exists y(p(f(x,y)) \vee q(y)) \to \exists u\,\forall v\,\exists y(q(f(y,v)) \wedge r(v,u))$$
$$\exists x\big(\exists y(p(f(x,y)) \vee q(y)) \to \forall v\,\exists y(q(f(y,v)) \wedge r(v,x))\big)$$
$$\exists x\,\forall y\big(p(f(x,y)) \vee q(y) \to \forall v\,\exists y(q(f(y,v)) \wedge r(v,x))\big)$$
$$\exists x\,\forall y\,\forall v\big(p(f(x,y)) \vee q(y) \to \exists y(q(f(y,v)) \wedge r(v,x))\big)$$
$$\exists x\,\forall y\,\forall v\,\exists w\big(p(f(x,y)) \vee q(y) \to q(f(w,v)) \wedge r(v,x)\big)$$