Prova scritta di Logica Matematica
3 luglio 2018

Cognome Nome Matricola

Indicate su ogni foglio che consegnate cognome, nome e numero di matricola.

Nella prima parte ogni riposta corretta vale 1, ogni risposta sbagliata -1, ogni risposta non data 0. Il punteggio minimo per superare questa parte è 6. Il punteggio che eccede 6 viene sommato al risultato della seconda parte per ottenere il voto dello scritto.

Nella seconda parte per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

a. Quante delle formule seguenti sono in forma normale disgiuntiva?
$(p \wedge \neg q \wedge s) \vee (r \wedge \neg t)$, $(p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge s)$, $\neg p \wedge s \wedge \neg r$, $p \vee \neg r \vee q$. **0 | 1 | 2 | 3 | 4**

b. $r \vee (p \rightarrow \neg q) \equiv (p \wedge q \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg q \vee r$. **V | F**

c. Se $F \rightarrow G \models H$ allora $F \models G \wedge H$. **V | F**

d. Se un insieme di formule proposizionali è insoddisfacibile allora contiene almeno una coppia complementare. **V | F**

e. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{A, B, C, D, E\}$, $p^I = \{A, B, E\}$, $f^I(A) = C$, $f^I(B) = B$, $f^I(C) = B$, $f^I(D) = C$, $f^I(E) = D$.
Allora $I \models \exists z(p(z) \wedge \neg p(f(z)) \wedge p(f(f(z))))$. **V | F**

f. $\forall x\, p(x) \rightarrow \exists y\, q(y) \equiv \exists z(\neg p(z) \vee q(z))$. **V | F**

g. $p(c), \exists x\, f(x) = c \models_{=} \exists y\, p(f(y))$. **V | F**

h. Questo albero rappresenta una deduzione naturale corretta: **V | F**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y\, r(a, f(y))}{r(a, f(y))}}{\exists v\, r(a, v)} \qquad \dfrac{\forall x(\exists v\, r(x, v) \rightarrow q(x))}{\exists v\, r(a, v) \rightarrow q(a)}}{q(a)}$$

i. Esiste un insieme di Hintikka che contiene le formule $q \rightarrow \neg r$, $\neg(r \rightarrow p \wedge \neg q)$ e p. **V | F**

j. Siano φ un omomorfismo forte suriettivo di I in J, σ e τ stati di I e J, $d \in D^I$ e F una formula in cui x è l'unica variabile libera.
Allora $I, \sigma[x/d] \models F$ se e solo se $J, \tau[x/\varphi(d)] \models F$. **V | F**

k. Scrivete nel riquadro un'importante proprietà dell'algoritmo dei tableaux proposizionali che l'algoritmo dei tableaux predicativi non ha.

SECONDA PARTE

Usate il retro del foglio per svolgere tutti gli esercizi salvo il numero 2.

1. Usando l'algoritmo di Fitting mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big(\neg(p \vee q) \vee (r \to \neg s \wedge t) \to \neg u \vee v\big).$$

2. Sia $\mathcal{L} = \{a, m, p, =\}$ un linguaggio con uguaglianza dove a è un simbolo di costante, m è un simbolo di funzione unario e p è un simbolo di relazione binario. Interpretando a come "Anna", $m(x)$ come "il medico di x" e $p(x, y)$ come "x è parente di y", traducete le seguenti frasi:

(i) il medico di Anna è il medico di almeno due parenti di Anna; 3pt

(ii) c'è un parente di Anna che non ha lo stesso medico di nessun altro parente di Anna. 3pt

3. Mettete in forma prenessa la formula 2pt

$$\big(\neg\forall z\, \neg p(z) \to \neg\exists x\, \forall y\, \neg r(x, y)\big) \vee \big(\neg\exists x\, \forall y\, \neg r(y, x) \to \exists u\, q(u) \vee \neg\forall v\, \neg p(g(v))\big).$$

Se riuscite, usate il minimo numero di quantificatori possibili. 1pt

4. Dimostrate che l'insieme di enunciati 4pt

$$\{p(a) \wedge \neg p(b) \wedge \neg r(a, b), \forall x\, \neg r(x, x), \forall x\, \forall y(r(x, y) \wedge p(y) \to r(y, x)), \exists u(r(u, a) \wedge r(b, u) \wedge p(u))\}$$

è soddisfacibile.

5. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$(p \to q \wedge \neg r) \wedge (\neg q \vee s) \to \neg p \vee \neg(\neg s \to r).$$

è valida. Se la formula non è valida definite una valutazione che lo testimoni.

6. Dimostrate che 4pt

$$\forall x(p(x) \to \exists z\, \neg r(z, f(x))), \exists y(p(y) \wedge \forall z\, r(f(z), f(y))) \vDash_{=} \exists u\, \forall z\, f(z) \neq u.$$

7. Sia $\mathcal{L} = \{f, r\}$ un linguaggio in cui f è un simbolo di funzione unario e r è un simbolo di relazione binario. Sia I l'interpretazione per $\mathcal{L}$ definita da 3pt

$$D^I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \qquad r^I = \{(1, 3), (2, 0), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (4, 3), (6, 3)\}$$

$$f^I(0) = 3; \quad f^I(1) = 4; \quad f^I(2) = 1; \quad f^I(3) = 3; \quad f^I(4) = 6; \quad f^I(5) = 3; \quad f^I(6) = 4.$$

Definite una relazione di congruenza $\sim$ su I che abbia quattro classi d'equivalenza, giustificando la vostra risposta. Descrivete l'interpretazione quoziente $I/\sim$.

8. Usando il metodo dei tableaux stabilite che 4pt

$$\forall x(\forall y\, \neg r(x, y) \to p(x)), \forall z(r(z, c) \vee \neg p(z)) \vDash \forall u\, \exists v\, r(u, v).$$

9. Dimostrate, usando solo le regole della deduzione naturale predicativa (comprese le sei regole derivate) che 5pt

$$\exists x\, q(f(x)), \forall y(q(y) \to r(a, y) \vee r(g(y), y)) \rhd \exists z\, \exists v\, r(z, v).$$

Soluzioni

a. **4** tutte le formule sono in forma normale disgiuntiva: per le ultime due si veda la terza formula dell'Esempio 3.7 delle dispense.

b. **F** come si verifica per esempio con le tavole di verità.

c. **F** un controesempio si ottiene scegliendo $\neg p$, p e p come F, G e H; infatti $\neg p \to p \vDash p$ ma $\neg p \nvDash p \wedge p$.

d. **F** come discusso nella Nota 3.4 delle dispense; ad esempio $\{p \wedge \neg p\}$ è insoddisfacibile ma non contiene coppie complementari.

e. **V** perché $I, \sigma[z/A] \vDash p(z) \wedge \neg p(f(z)) \wedge p(f(f(z)))$.

f. **V** per i Lemmi 7.95 e 2.24.3 delle dispense.

g. **V** perché se I è normale e $I, \sigma[x/d_0] \vDash f(x) = c$ allora $f^I(d_0)$ coincide con c^I; da $c^I \in p^I$ segue quindi $f^I(d_0) \in p^I$, cioè $I, \sigma[y/d_0] \vDash p(f(y))$ che conduce a $I \vDash \exists y\, p(f(y))$.

h. **V** tutte le regole sono usate correttamente.

i. **F** se $\mathcal{H}$ è un insieme di Hintikka con $\neg(r \to p \wedge \neg q) \in \mathcal{H}$ allora $r \in \mathcal{H}$ e $\neg(p \wedge \neg q) \in \mathcal{H}$; allora $\neg p \in \mathcal{H}$ (che è incompatibile con $p \in \mathcal{H}$) oppure $\neg\neg q \in \mathcal{H}$, che implica $q \in \mathcal{H}$, e contraddice $q \to \neg r \in \mathcal{H}$, perché sia $\neg q \in \mathcal{H}$ che $\neg r \in \mathcal{H}$ sono impossibili.

j. **V** è un caso particolare del Teorema 9.12 delle dispense.

k. La proprietà è la terminazione forte: si vedano il Teorema 4.11 e la Nota 10.14 delle dispense.

1. Utilizziamo l'Algoritmo 3.22 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.29:

$$[\langle \neg\big(\neg(p \vee q) \vee (r \to \neg s \wedge t) \to \neg u \vee v\big)\rangle]$$
$$[\langle \neg(p \vee q) \vee (r \to \neg s \wedge t), \neg(\neg u \vee v)\rangle]$$
$$[\langle \neg(p \vee q) \vee (r \to \neg s \wedge t), u, \neg v\rangle]$$
$$[\langle \neg(p \vee q), u, \neg v\rangle\,, \langle r \to \neg s \wedge t, u, \neg v\rangle]$$
$$[\langle \neg p, \neg q, u, \neg v\rangle\,, \langle \neg r, u, \neg v\rangle\,, \langle \neg s \wedge t, u, \neg v\rangle]$$
$$[\langle \neg p, \neg q, u, \neg v\rangle\,, \langle \neg r, u, \neg v\rangle\,, \langle \neg s, t, u, \neg v\rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge u \wedge \neg v) \vee (\neg r \wedge u \wedge \neg v) \vee (\neg s \wedge t \wedge u \wedge \neg v).$$

2. (i) $\exists x\, \exists y (p(x,a) \wedge p(y,a) \wedge x \neq y \wedge m(x) = m(a) \wedge m(y) = m(a))$;
(ii) $\exists x (p(x,a) \wedge \neg\exists y (p(y,a) \wedge x \neq y \wedge m(y) = m(x)))$.

3. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\big(\neg\forall z\, \neg p(z) \to \neg\exists x\, \forall y\, \neg r(x,y)\big) \vee \big(\neg\exists x\, \forall y\, \neg r(y,x) \to \exists u\, q(u) \vee \neg\forall v\, \neg p(g(v))\big)$$
$$\big(\exists z\, p(z) \to \forall x\, \exists y\, r(x,y)\big) \vee \big(\forall x\, \exists y\, r(y,x) \to \exists u\, q(u) \vee \exists v\, p(g(v))\big)$$
$$\forall x\, \exists y\, \forall z (p(z) \to r(x,y)) \vee \big(\forall x\, \exists y\, r(y,x) \to \exists u (q(u) \vee p(g(u)))\big)$$
$$\forall x\, \exists y\, \forall z (p(z) \to r(x,y)) \vee \exists u \big(\exists y\, r(y,u) \to q(u) \vee p(g(u))\big)$$
$$\forall x\, \exists y\, \forall z (p(z) \to r(x,y)) \vee \exists u\, \forall y (r(y,u) \to q(u) \vee p(g(u)))$$
$$\forall x\, \exists u \big(\forall z (p(z) \to r(x,u)) \vee \forall y (r(y,u) \to q(u) \vee p(g(u)))\big)$$
$$\forall x\, \exists u\, \forall z\, \forall y \big((p(z) \to r(x,u)) \vee (r(y,u) \to q(u) \vee p(g(u)))\big)$$

4. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati. Un'interpretazione con queste caratteristiche è definita da

$$D^I = \{0,1,2\}, \quad a^I = 0, \quad b^I = 1, \quad p^I = \{0,2\}, \quad r^I = \{(0,2),(1,2),(2,0),(2,1)\}.$$

5. Per stabilire la validità della formula applichiamo l'Algoritmo 4.5 delle dispense alla sua negazione. Costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.31 e 4.32) un tableau e in ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$\underline{\neg\big((p \to q \wedge \neg r) \wedge (\neg q \vee s) \to \neg p \vee \neg(\neg s \to r)\big)}$$

$$\underline{(p \to q \wedge \neg r) \wedge (\neg q \vee s)}, \neg(\neg p \vee \neg(\neg s \to r))$$

$$p \to q \wedge \neg r, \neg q \vee s, \underline{\neg(\neg p \vee \neg(\neg s \to r))}$$

$$\underline{p \to q \wedge \neg r}, \neg q \vee s, p, \neg s \to r$$

$$\begin{array}{cc} \neg p, \neg q \vee s, p, \neg s \to r & \underline{q \wedge \neg r}, \neg q \vee s, p, \neg s \to r \\ \otimes & \end{array}$$

$$q, \neg r, \underline{\neg q \vee s}, p, \neg s \to r$$

$$\begin{array}{cc} q, \neg r, \neg q, p, \neg s \to r & q, \neg r, s, p, \underline{\neg s \to r} \\ \otimes & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} q, \neg r, s, p, s & q, \neg r, s, p, r \\ \bigcirc & \otimes \end{array}$$

Il tableau è aperto e quindi la formula non è valida. Un'interpretazione che lo testimonia è data da $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{F}$, $v(s) = \mathbf{V}$.

6. Supponiamo che I sia un'interpretazione normale che soddisfa i due enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, che chiamiamo F e G.

Dato che $I \vDash G$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $d_0 \in p^I$ e, per ogni $d \in D^I$, $(f^I(d), f^I(d_0)) \in r^I$. Da $I \vDash H$ segue in particolare che $I, \sigma[x/d_0] \vDash p(x) \to \exists z\, \neg r(z, f(x))$ e, dato che $d_0 \in p^I$, esiste $d_1 \in D^I$ tale che $(d_1, f^I(d_0)) \notin r^I$. Per quanto osservato in precedenza, per ogni $d \in D^I$ $f^I(d)$ non può essere d_1. Per la normalità di I questo significa che $I, \sigma[u/d_1] \vDash \forall z\, f(z) \neq u$, e quindi $I \vDash \exists u \forall z\, f(z) \neq u$.

7. 2 è l'unico elemento di D^I che compare insieme a 0 negli elementi di r^I, e quindi non può essere in relazione di congruenza con nessun altro elemento di D^I. Analogamente 3 è l'unico elemento collegato a 1 da r^I e non è congruente a nessun altro elemento. Notiamo anche che 1, 4 e 6 sono in relazione r^I con 3, mentre 0 e 5 non lo sono. Perciò le quattro classi d'equivalenza rispetto a $\sim$ non possono che essere $\{0, 5\}$ $\{1, 4, 6\}$, $\{2\}$ e $\{3\}$. Inoltre $\sim$ verifica anche la condizione che riguarda f, perché $f^I(0) \sim f^I(5)$ e $f^I(1) \sim f^I(4) \sim f^I(6)$.

Si ha $D^I/{\sim} = \{[0], [1], [2], [3]\}$, $f^{I/\sim}([0]) = [3]$, $f^{I/\sim}([1]) = [1]$, $f^{I/\sim}([2]) = [1]$, $f^{I/\sim}([3]) = [3]$, $r^{I/\sim} = \{([1], [3]), ([2], [0]), ([2], [2]), ([3], [2])\}$.

8. Per mostrare la validità dell'enunciato utilizziamo l'Algoritmo 10.49 delle dispense e costruiamo (utilizzando le convenzioni 10.20 e 10.22) un tableau chiuso con la radice etichettata dagli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione dell'enunciato a destra. Indichiamo con F, G e H le γ-formule $\forall x(\forall y\, \neg r(x,y) \to p(x))$, $\forall z(r(z,c) \vee \neg p(z))$ e $\neg \exists v\, r(a,v)$. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

- $F, G, \underline{\neg \forall u\, \exists v\, r(u,v)}$
  - $F, \underline{G}, H$
    - $F, G, r(a,c) \vee \neg p(a), H$
      - $F, G, r(a,c), \underline{H}$
        - $F, G, r(a,c), H, \neg r(a,c)$ $\otimes$
      - $\underline{F}, G, \neg p(a), H$
        - $F, \forall y\, \neg r(a,y) \to p(a), G, \neg p(a), H$
          - $F, \underline{\neg \forall y\, \neg r(a,y)}, G, \neg p(a), H$
            - $F, r(a,b), G, \neg p(a), \underline{H}$
              - $F, r(a,b), G, \neg p(a), H, \neg r(a,b)$ $\otimes$
          - $F, p(a), G, \neg p(a), H$ $\otimes$

Si noti l'importanza di scegliere in modo opportuno le istanze delle γ-formule (con altre scelte il tableaux cresce rapidamente di dimensione).

9. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\exists x\, q(f(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{[q(f(x))]^2 \qquad \dfrac{\forall y(q(y) \to r(a,y) \vee r(g(y),y))}{q(f(x)) \to r(a,f(x)) \vee r(g(f(x)),f(x))}}{r(a,f(x)) \vee r(g(f(x)),f(x))} \qquad \dfrac{\dfrac{[r(a,f(x))]^1}{\exists v\, r(a,v)}}{\exists z\, \exists v\, r(z,v)} \qquad \dfrac{\dfrac{[r(g(f(x)),f(x))]^1}{\exists v\, r(g(f(x)),v)}}{\exists z\, \exists v\, r(z,v)}}{\exists z\, \exists v\, r(z,v)}\,{}_1}{\exists z\, \exists v\, r(z,v)}\,{}_2$$

Prova scritta di Logica Matematica
3 luglio 2018

Cognome Nome Matricola

Indicate su ogni foglio che consegnate cognome, nome e numero di matricola.

Nella prima parte ogni riposta corretta vale 1, ogni risposta sbagliata -1, ogni risposta non data 0. Il punteggio minimo per superare questa parte è 6. Il punteggio che eccede 6 viene sommato al risultato della seconda parte per ottenere il voto dello scritto.

Nella seconda parte per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

a. $p \vee (r \to q) \equiv (r \wedge \neg q \to \neg p) \to q \vee p$. **V** **F**

b. Se $F \vDash G \wedge H$ allora $F \to G \vDash H$. **V** **F**

c. Se un insieme di formule proposizionali **non** contiene nessuna coppia complementare allora è soddisfacibile. **V** **F**

d. Quante delle formule seguenti sono in forma normale disgiuntiva?
$(p \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg q \wedge t)$, $p \vee r \vee q$, $p \wedge q \wedge \neg r$, $(\neg p \wedge q) \vee (\neg t \wedge s)$. **0** **1** **2** **3** **4**

e. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{A, B, C, D, E\}$, $p^I = \{B, C, E\}$,
$f^I(A) = D$, $f^I(B) = B$, $f^I(C) = D$, $f^I(D) = B$, $f^I(E) = A$.
Allora $I \vDash \exists z(p(z) \wedge \neg p(f(z)) \wedge p(f(f(z))))$. **V** **F**

f. $\forall x\, q(x) \to \exists y\, p(y) \equiv \exists v(\neg q(v) \vee p(v))$. **V** **F**

g. $\exists x\, f(x) = a, q(a) \vDash_= \exists y\, q(f(y))$. **V** **F**

h. Siano φ un omomorfismo forte suriettivo di I in J, σ e τ stati di I e J, $d \in D^I$ e F una formula in cui x è l'unica variabile libera.
Allora $I, \sigma[x/d] \vDash F$ se e solo se $J, \tau[x/\varphi(d)] \vDash F$. **V** **F**

i. Esiste un insieme di Hintikka che contiene le formule q, $\neg(p \to q \wedge \neg r)$ e $r \to \neg p$. **V** **F**

j. Questo albero rappresenta una deduzione naturale corretta: **V** **F**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y\, q(f(y), c)}{q(f(y), c)}}{\exists v\, q(v, c)} \qquad \dfrac{\forall x(\exists v\, q(v, x) \to \neg p(x))}{\exists v\, q(v, c) \to \neg p(c)}}{\neg p(c)}$$

k. Scrivete nel riquadro un'importante proprietà dell'algoritmo dei tableaux proposizionali che l'algoritmo dei tableaux predicativi non ha.

SECONDA PARTE

Usate il retro del foglio per svolgere tutti gli esercizi salvo il numero 6.

1. Usando l'algoritmo di Fitting mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((p \to \neg q \wedge r) \vee \neg(s \vee u) \to v \vee t\big).$$

2. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$(\neg p \to q \wedge r) \wedge (\neg q \vee \neg s) \to p \vee \neg(s \to \neg r).$$

è valida. Se la formula non è valida definite una valutazione che lo testimoni.

3. Dimostrate che 4pt

$$\forall x(p(x) \to \exists z\, r(f(x), z)), \exists y(p(y) \wedge \forall z\, \neg r(f(y), f(z))) \models_{=} \exists u\, \forall z\, f(z) \neq u.$$

4. Dimostrate che l'insieme di enunciati 4pt

$$\{p(a) \wedge \neg p(b) \wedge \neg r(b, a), \forall x\, \neg r(x, x), \forall x\, \forall y(r(y, x) \wedge p(y) \to r(x, y)), \exists u(r(a, u) \wedge r(u, b) \wedge p(u))\}$$

è soddisfacibile.

5. Mettete in forma prenessa la formula 2pt

$$\big(\neg\forall z\, \neg q(z) \to \neg\exists x\, \forall y\, \neg r(x, y)\big) \vee \big(\neg\exists x\, \forall y\, \neg r(y, x) \to \exists u\, p(u) \vee \neg\forall v\, \neg q(g(v))\big).$$

Se riuscite, usate il minimo numero di quantificatori possibili. 1pt

6. Sia $\mathcal{L} = \{e, d, p, =\}$ un linguaggio con uguaglianza dove e è un simbolo di costante, d è un simbolo di funzione unario e p è un simbolo di relazione binario. Interpretando e come "Eva", $d(x)$ come "il dentista di x" e $p(x, y)$ come "x è parente di y", traducete le seguenti frasi:

(i) il dentista di Eva è il dentista di almeno due parenti di Eva; 3pt

(ii) c'è un parente di Eva che non ha lo stesso dentista di nessun altro parente di Eva. 3pt

7. Sia $\mathcal{L} = \{f, r\}$ un linguaggio in cui f è un simbolo di funzione unario e r è un simbolo di relazione binario. Sia I l'interpretazione per $\mathcal{L}$ definita da 3pt

$$D^I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \qquad r^I = \{(0, 2), (2, 5), (3, 2), (4, 2), (5, 1), (5, 5), (5, 6)\}$$

$$f^I(0) = 3; \quad f^I(1) = 2; \quad f^I(2) = 2; \quad f^I(3) = 0; \quad f^I(4) = 0; \quad f^I(5) = 4; \quad f^I(6) = 2.$$

Definite una relazione di congruenza $\sim$ su I che abbia quattro classi d'equivalenza, giustificando la vostra risposta. Descrivete l'interpretazione quoziente $I/\sim$.

8. Usando il metodo dei tableaux stabilite che 4pt

$$\forall x(\forall y\, r(y, x) \to \neg p(x)), \forall z(\neg r(a, z) \vee p(z)) \models \forall u\, \exists v\, \neg r(v, u).$$

9. Dimostrate, usando solo le regole della deduzione naturale predicativa (comprese le sei regole derivate) che 5pt

$$\exists x\, p(g(x)), \forall y(p(y) \to r(y, f(y)) \vee r(y, c)) \rhd \exists z\, \exists w\, r(z, w).$$

Soluzioni

a. **F** come si verifica per esempio con le tavole di verità.

b. **F** un controesempio si ottiene scegliendo $p \wedge q$, p e q come F, G e H; infatti $p \wedge q \models p \wedge q$ ma $p \wedge q \to p \not\models q$.

c. **F** come discusso nella Nota 3.4 delle dispense; ad esempio $\{p \wedge \neg p\}$ non contiene coppie complementari ma è insoddisfacibile.

d. **4** tutte le formule sono in forma normale disgiuntiva: per la seconda e la terza si veda la terza formula dell'Esempio 3.7 delle dispense.

e. **V** perché $I, \sigma[z/C] \models p(z) \wedge \neg p(f(z)) \wedge p(f(f(z)))$.

f. **V** per i Lemmi 7.95 e 2.24.3 delle dispense.

g. **V** perché se I è normale e $I, \sigma[x/d_0] \models f(x) = a$ allora $f^I(d_0)$ coincide con a^I; da $a^I \in q^I$ segue quindi $f^I(d_0) \in q^I$, cioè $I, \sigma[y/d_0] \models q(f(y))$ che conduce a $I \models \exists y\, q(f(y))$.

h. **V** è un caso particolare del Teorema 9.12 delle dispense.

i. **F** se $\mathcal{H}$ è un insieme di Hintikka con $\neg(p \to q \wedge \neg r) \in \mathcal{H}$ allora $p \in \mathcal{H}$ e $\neg(q \wedge \neg r) \in \mathcal{H}$; allora $\neg q \in \mathcal{H}$ (che è incompatibile con $q \in \mathcal{H}$) oppure $\neg\neg r \in \mathcal{H}$, che implica $r \in \mathcal{H}$, e contraddice $r \to \neg p \in \mathcal{H}$, perché sia $\neg r \in \mathcal{H}$ che $\neg p \in \mathcal{H}$ sono impossibili.

j. **V** tutte le regole sono usate correttamente.

k. La proprietà è la terminazione forte: si vedano il Teorema 4.11 e la Nota 10.14 delle dispense.

1. Utilizziamo l'Algoritmo 3.22 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.29:

$$[\big\langle \neg\big((p \to \neg q \wedge r) \vee \neg(s \vee u) \to v \vee t\big)\big\rangle]$$
$$[\langle (p \to \neg q \wedge r) \vee \neg(s \vee u), \neg(v \vee t)\rangle]$$
$$[\langle (p \to \neg q \wedge r) \vee \neg(s \vee u), \neg v, \neg t\rangle]$$
$$[\langle p \to \neg q \wedge r, \neg v, \neg t\rangle, \langle \neg(s \vee u), \neg v, \neg t\rangle]$$
$$[\langle \neg p, \neg v, \neg t\rangle, \langle \neg q \wedge r, \neg v, \neg t\rangle, \langle \neg s, \neg u, \neg v, \neg t\rangle]$$
$$[\langle \neg p, \neg v, \neg t\rangle, \langle \neg q, r, \neg v, \neg t\rangle, \langle \neg s, \neg u, \neg v, \neg t\rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \wedge \neg v \wedge \neg t) \vee (\neg q \wedge r \wedge \neg v \wedge \neg t) \vee (\neg s \wedge \neg u \wedge \neg v \wedge \neg t).$$

2. Per stabilire la validità della formula applichiamo l'Algoritmo 4.5 delle dispense alla sua negazione. Costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.31 e 4.32) un tableau e in ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$\underline{\neg\big((\neg p \to q \wedge r) \wedge (\neg q \vee \neg s) \to p \vee \neg(s \to \neg r)\big)}$$

$$\underline{(\neg p \to q \wedge r) \wedge (\neg q \vee \neg s)}, \neg(p \vee \neg(s \to \neg r))$$

$$\neg p \to q \wedge r, \neg q \vee \neg s, \underline{\neg(p \vee \neg(s \to \neg r))}$$

$$\underline{\neg p \to q \wedge r}, \neg q \vee \neg s, \neg p, s \to \neg r$$

$$\begin{array}{cc} p, \neg q \vee \neg s, \neg p, s \to \neg r & \underline{q \wedge r}, \neg q \vee \neg s, \neg p, s \to \neg r \\ \otimes & \end{array}$$

$$q, r, \underline{\neg q \vee \neg s}, \neg p, s \to \neg r$$

$$\begin{array}{cc} q, r, \neg q, \neg p, s \to \neg r & q, r, \neg s, \neg p, \underline{s \to \neg r} \\ \otimes & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} q, r, \neg s, \neg p, \neg s & q, \neg r, \neg s, \neg p, r \\ \bigcirc & \otimes \end{array}$$

Il tableau è aperto e quindi la formula non è valida. Un'interpretazione che lo testimonia è data da $v(p) = \mathbf{F}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{V}$, $v(s) = \mathbf{F}$.

3. Supponiamo che I sia un'interpretazione normale che soddisfa i due enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, che chiamiamo F e G.

Dato che $I \vDash G$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $d_0 \in p^I$ e, per ogni $d \in D^I$, $(f^I(d_0), f^I(d)) \notin r^I$. Da $I \vDash H$ segue in particolare che $I, \sigma[x/d_0] \vDash p(x) \to \exists z\, r(f(x), z)$ e, dato che $d_0 \in p^I$, esiste $d_1 \in D^I$ tale che $(f^I(d_0), d_1) \in r^I$. Per quanto osservato in precedenza, per ogni $d \in D^I$ $f^I(d)$ non può essere d_1. Per la normalità di I questo significa che $I, \sigma[u/d_1] \vDash \forall z\, f(z) \neq u$, e quindi $I \vDash \exists u \forall z\, f(z) \neq u$.

4. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati. Un'interpretazione con queste caratteristiche è definita da

$$D^I = \{0, 1, 2\}, \quad a^I = 0, \quad b^I = 1, \quad p^I = \{0, 2\}, \quad r^I = \{(0, 2), (1, 2), (2, 0), (2, 1)\}.$$

5. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\big(\neg\forall z\, \neg q(z) \to \neg\exists x\, \forall y\, \neg r(x, y)\big) \vee \big(\neg\exists x\, \forall y\, \neg r(y, x) \to \exists u\, p(u) \vee \neg\forall v\, \neg q(g(v))\big)$$

$$\big(\exists z\, q(z) \to \forall x\, \exists y\, r(x, y)\big) \vee \big(\forall x\, \exists y\, r(y, x) \to \exists u\, p(u) \vee \exists v\, q(g(v))\big)$$

$$\forall x\, \exists y\, \forall z(q(z) \to r(x, y)) \vee \big(\forall x\, \exists y\, r(y, x) \to \exists u(p(u) \vee q(g(u)))\big)$$

$$\forall x\, \exists y\, \forall z(q(z) \to r(x, y)) \vee \exists u\big(\exists y\, r(y, u) \to p(u) \vee q(g(u))\big)$$

$$\forall x\, \exists y\, \forall z(q(z) \to r(x, y)) \vee \exists u\, \forall y(r(y, u) \to p(u) \vee q(g(u)))$$

$$\forall x\, \exists u\big(\forall z(q(z) \to r(x, u)) \vee \forall y(r(y, u) \to p(u) \vee q(g(u)))\big)$$

$$\forall x\, \exists u\, \forall z\, \forall y\big((q(z) \to r(x, u)) \vee (r(y, u) \to p(u) \vee q(g(u)))\big)$$

6. (i) $\exists x\, \exists y(p(x, e) \wedge p(y, e) \wedge x \neq y \wedge d(x) = d(e) \wedge d(y) = d(e))$;
(ii) $\exists x(p(x, e) \wedge \neg\exists y(p(y, e) \wedge x \neq y \wedge d(y) = d(x)))$.

7. 2 è l'unico elemento di D^I che compare insieme a 0 negli elementi di r^I, e quindi non può essere in relazione di congruenza con nessun altro elemento di D^I. Analogamente 5 è l'unico elemento collegato a 1 da r^I e non è congruente a nessun altro elemento. Notiamo anche che 0, 3 e 4 sono in relazione r^I con 2, mentre 1 e 6 non lo sono. Perciò le quattro classi d'equivalenza rispetto a $\sim$ non possono che essere $\{0,3,4\}$ $\{1,6\}$, $\{2\}$ e $\{5\}$. Inoltre $\sim$ verifica anche la condizione che riguarda f, perché $f^I(0) \sim f^I(3) \sim f^I(4)$ e $f^I(1) \sim f^I(6)$.

Si ha $D^I/{\sim} = \{[0],[1],[2],[5]\}$, $f^{I/\sim}([0]) = [0]$, $f^{I/\sim}([1]) = [2]$, $f^{I/\sim}([2]) = [2]$, $f^{I/\sim}([5]) = [0]$, $r^{I/\sim} = \{([0],[2]),([2],[5]),([5],[1]),([5],[5])\}$.

8. Per mostrare la validità dell'enunciato utilizziamo l'Algoritmo 10.49 delle dispense e costruiamo (utilizzando le convenzioni 10.20 e 10.22) un tableau chiuso con la radice etichettata dagli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione dell'enunciato a destra. Indichiamo con F, G e H le γ-formule $\forall x(\forall y\, r(y,x) \to \neg p(x))$, $\forall z(\neg r(a,z) \vee p(z))$ e $\neg\exists v\, \neg r(v,c)$. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$
\begin{array}{c}
F, G, \underline{\neg\forall u\, \exists v\, r(v,u)} \\
| \\
F, \underline{G}, H \\
| \\
F, G, \neg r(a,c) \vee p(c), H \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
F, G, \neg r(a,c), \underline{H} \\
| \\
F, G, \neg r(a,c), H, r(a,c) \\
\otimes
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\underline{F}, G, p(c), H \\
| \\
F, \forall y\, r(y,c) \to \neg p(c), G, p(c), H \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
F, \underline{\neg\forall y\, r(y,c)}, G, p(c), H \\
| \\
F, \neg r(b,c), G, p(c), \underline{H} \\
| \\
F, \neg r(b,c), G, p(c), H, r(b,c) \\
\otimes
\end{array}
&
\begin{array}{c}
F, \neg p(c), G, p(c), H \\
\otimes
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Si noti l'importanza di scegliere in modo opportuno le istanze delle γ-formule (con altre scelte il tableaux cresce rapidamente di dimensione).

9. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$
\dfrac{\exists x\, p(g(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{[p(g(x))]^2 \qquad \dfrac{\forall y(p(y) \to r(y,f(y)) \vee r(y,c))}{p(g(x)) \to r(g(x),f(g(x))) \vee r(g(x),c)}}{r(g(x),f(g(x))) \vee r(g(x),c)} \qquad \dfrac{\dfrac{[r(g(x),f(g(x)))]^1}{\exists w\, r(g(x),w)}}{\exists z\, \exists w\, r(z,w)} \qquad \dfrac{\dfrac{[r(g(x),c)]^1}{\exists w\, r(g(x),w)}}{\exists z\, \exists w\, r(z,w)}}{\exists z\, \exists w\, r(z,w)}\,1}{\exists z\, \exists w\, r(z,w)}\,2
$$