Prova scritta di Logica Matematica
29 gennaio 2016

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $\neg(p \to q \wedge \neg r) \equiv (p \to q) \to r$. **V** | **F** 1pt

2. Se F è insoddisfacibile allora per qualunque G la formula $\neg F \vee G$ è valida. **V** | **F** 1pt

3. Esiste un insieme di Hintikka che contiene le formule $\neg(\neg p \vee (r \to q))$ e $r \to \neg(p \wedge \neg q)$. **V** | **F** 1pt

4. Se $T, \neg F \rhd F$ allora $T \rhd F$. **V** | **F** 1pt

5. Sia I l'interpretazione normale con $D^I = \{0,1,2,3\}$, $p^I = \{1,3\}$ e $r^I = \{(0,0),(0,1),(1,1),(1,2),(2,0),(2,3),(3,1)\}$. Allora $I \models_= \forall x\, \exists y (x \neq y \wedge \neg p(y) \wedge (r(y,x) \vee r(x,y)))$. **V** | **F** 1pt

6. $\neg\forall x\, \neg p(x) \equiv \forall x\, p(x)$. **V** | **F** 1pt

7. Se un enunciato in un linguaggio con uguaglianza è soddisfacibile allora è soddisfacibile nella logica con uguaglianza. **V** | **F** 1pt

8. Qual è il p-grado dell'enunciato $\forall x(\neg\exists y\, r(x,y) \to \neg\exists z\, q(z,x))$? **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

9. L'algoritmo dei tableaux per la logica predicativa non ha la proprietà della terminazione forte. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sia $\mathcal{L} = \{p, q, r\}$ il linguaggio con tre simboli di relazione unari. Siano I e J le seguenti interpretazioni per $\mathcal{L}$: 4pt

$$D^I = \{0,1,2,3\}, \quad p^I = \{0,2,3\}, \quad q^I = \{0,1\}, \quad r^I = \{1,2\};$$

$$D^J = \{A,B,C,D,E,F\}, \quad p^J = \{B,C,D,E,F\}, \quad q^J = \{A,C,D\}, \quad r^J = \{A\}.$$

Sul retro del foglio definite un omomorfismo forte di J in I.

Dimostrate che I e J non sono elementarmente equivalenti (e quindi non esiste un omomorfismo forte suriettivo di J in I).

11. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\{\forall x\big((\neg q(x) \to q(f(x))) \wedge (q(x) \to \neg q(f(x)))\big), \exists y\, f(f(f(y))) = y\}$$

è insoddisfacibile nella logica con uguaglianza.

12. Sia $\{b, m, p, c, g, a\}$ un linguaggio dove b e m sono simboli di costante, p è un simbolo di funzione unario, c e g sono simboli di relazione unari e a è un simbolo di relazione binario. Interpretando b come "Bobi", m come "Micio", $p(x)$ come "il padrone di x", $c(x)$ come "x è un cane", $g(x)$ come "x è un gatto" e $a(x, y)$ come "x ama y", traducete le seguenti frasi:

(i) Micio ama sia il suo padrone che quello di Bobi; 3pt

(ii) i cani che amano qualche gatto hanno padroni che non amano tutti i cani. 3pt

13. Mostrate che 3pt

$$\neg F \vee G, \neg G \to K \rhd F \vee \neg K \to G.$$

Usate solo le regole della deduzione naturale proposizionale, comprese le quattro regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux stabilite sul retro del foglio che 5pt

$$\forall x (p(x) \vee \exists y\, r(y, x)), \forall z (\exists u\, r(z, u) \to p(z)) \models \exists v\, p(v).$$

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((\neg p \to \neg(q \vee r)) \wedge \neg(s \to \neg(t \to u))\big).$$

Soluzioni

1. F come si verifica per esempio con le tavole di verità, oppure notando che se $v(p) = \mathbf{F}$ e $v(r) = \mathbf{V}$ allora la prima formula è falsa e la seconda vera.

2. V perché per qualunque interpretazione v si ha $v(F) = \mathbf{F}$ e quindi $v(\neg F) = \mathbf{V}$, da cui segue $v(\neg F \vee G) = \mathbf{V}$.

3. F se T è un insieme di Hintikka tale che $\neg(\neg p \vee (r \to q)) \in T$ allora si ha $\neg\neg p, \neg(r \to q) \in T$ e quindi $p, r, \neg q \in T$; se $r \to \neg(p \wedge \neg q) \in T$, dato che $\neg r \notin T$ deve essere $\neg(p \wedge \neg q) \in T$; ma allora, visto che $\neg p \notin T$ deve essere $\neg\neg q \in T$ e quindi $q \in T$, che è nuovamente impossibile.

4. V Una deduzione naturale che mostra $T \rhd F$ si ottiene da una che mostra $T, \neg F \rhd F$ utilizzando $(\neg e)$ e (RAA) come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} T, [\neg F]^1 \\ \triangledown \\ F \end{matrix} \qquad [\neg F]^1}{\bot}}{F}\,1$$

In alternativa, si può ricorrere ai teoremi di correttezza e completezza per la deduzione naturale, oltre all'osservazione che se $T, \neg F \models F$ allora $T \models F$.

5. V come si verifica notando che per ogni $d \in D^I$ esiste $d_0 \in D^I$ con $d_0 \neq d$ (che, per la normalità di I, assicura che $I, \sigma[x/d, y/d_0] \models x \neq y$), $d_0 \notin p^I$ e $I, \sigma[x/d, y/d_0] \models r(y, x) \vee r(x, y)$.

6. F infatti $\neg\forall x\, \neg p(x) \equiv \exists x\, p(x)$.

7. F tutte le interpretazioni che soddisfano F possono non essere normali.

8. 4 il quantificatore universale ha p-grado 0 mentre i due quantificatori esistenziali hanno entrambi p-grado 2.

9. V come ribadito nella Nota 10.21 delle dispense.

10. Sia φ un omomorfismo forte di J in I. Dato che $A \in q^J \cap r^J$ deve essere $\varphi(A) = 1$. Dato che $B, E, F \notin q^J \cup r^J$ deve essere $\varphi(B) = \varphi(E) = \varphi(F) = 3$. Dato che $C, D \in p^J \cap q^J$ deve essere $\varphi(C) = \varphi(D) = 0$.

Per verificare che I e J non sono elementarmente equivalenti è necessario trovare un enunciato soddisfatto da un'interpretazione ma non dall'altra (non è sufficiente dimostrare che non esistono omomorfismi forti suriettivi). Ad esempio $\exists x(p(x) \wedge r(x))$ è vero in I ma non in J.

11. Supponiamo che un'interpretazione normale I soddisfi i due enunciati (che indichiamo con $\forall x\, F$ e G). L'obiettivo è trovare una contraddizione.

Dato che $I \models G$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $d_0 = f^I(f^I(f^I(d_0)))$ (qui usiamo la normalità di I).

Da $I \models \forall x\, F$ segue in particolare $I, \sigma[x/d_0] \models F$. Perciò se $d_0 \in q^I$ allora $f^I(d_0) \notin q^I$ e viceversa se $d_0 \notin q^I$ allora $f^I(d_0) \in q^I$. Sfruttando ora $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \models F$ si ottiene che se $d_0 \in q^I$ allora $f^I(f^I(d_0)) \in q^I$ mentre se $d_0 \notin q^I$ allora $f^I(f^I(d_0)) \notin q^I$. Infine usiamo $I, \sigma[x/f^I(f^I(d_0))] \models F$ per ottenere che se $d_0 \in q^I$ allora $f^I(f^I(f^I(d_0))) \notin q^I$ mentre se $d_0 \notin q^I$

allora $f^I(f^I(f^I(d_0))) \in q^I$. In ogni caso deve essere $d_0 \neq f^I(f^I(f^I(d_0)))$, contraddicendo quanto ottenuto in precedenza.

12. (i) $a(m, p(m)) \wedge a(m, p(b))$;
(ii) $\forall x\big(c(x) \wedge \exists y(g(y) \wedge a(x,y)) \to \neg\forall z(c(z) \to a(p(x), z))\big)$.

13. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\neg F \vee G \qquad \dfrac{[F \vee \neg K]^3 \qquad \dfrac{\dfrac{[F]^1 \quad [\neg F]^2}{\bot}}{G} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg G \to K \quad [\neg K]^1}{\neg\neg G}}{G}}{G}\,{}^{1} \qquad [G]^2}{\dfrac{G}{F \vee \neg K \to G}\,{}^{3}}\,{}^{2}$$

Si noti l'uso di (*ex-falso*) nel passaggio in cui l'ipotesi è $\bot$ e di (MT) nel passaggio in cui una delle ipotesi è $\neg G \to K$.

14. Per stabilire la conseguenza logica utilizziamo l'algoritmo 10.48 delle dispense e costruiamo un tableau chiuso con la radice etichettata dagli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione di quello a destra. Indichiamo con F, G, H e K le γ-formule $\forall x(p(x) \vee \exists y\, r(y,x))$, $\forall z(\exists u\, r(z,u) \to p(z))$, $\neg\exists v\, p(v)$ e $\neg\exists u\, r(b,u)$. Utilizziamo la convenzione 10.22 delle dispense e in ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\begin{array}{c}
F, G, \underline{H} \\
| \\
\underline{F}, G, H, \neg p(a) \\
| \\
F, \underline{p(a) \vee \exists y\, r(y,a)}, G, H, \neg p(a) \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} F, p(a), G, H, \neg p(a) \\ \otimes \end{array} &
\begin{array}{c}
F, \underline{\exists y\, r(y,a)}, G, H, \neg p(a) \\
| \\
F, r(b,a), \underline{G}, H, \neg p(a) \\
| \\
F, r(b,a), G, \underline{\exists u\, r(b,u) \to p(b)}, H, \neg p(a)
\end{array}
\end{array} \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
F, r(b,a), G, \underline{K}, H, \neg p(a) \\
| \\
F, r(b,a), G, K, \neg r(b,a), H, \neg p(a) \\
\otimes
\end{array} &
\begin{array}{c}
F, r(b,a), G, p(b), \underline{H}, \neg p(a) \\
| \\
F, r(b,a), G, p(b), H, \neg p(b), \neg p(a) \\
\otimes
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Si noti l'importanza di aver conservato la γ-formula H per ottenerne una seconda istanza.

15. Utilizziamo l'Algoritmo 3.16 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.28:

$$\big\langle [\neg\big((\neg p \to \neg(q \vee r)) \wedge \neg(s \to \neg(t \to u))\big)] \big\rangle$$
$$\langle [\neg(\neg p \to \neg(q \vee r)), s \to \neg(t \to u)] \rangle$$
$$\langle [\neg(\neg p \to \neg(q \vee r)), \neg s, \neg(t \to u)] \rangle$$
$$\langle [\neg(\neg p \to \neg(q \vee r)), \neg s, t], [\neg(\neg p \to \neg(q \vee r)), \neg s, \neg u] \rangle$$
$$\langle [\neg p, \neg s, t], [q \vee r, \neg s, t], [\neg p, \neg s, \neg u], [q \vee r, \neg s, \neg u] \rangle$$
$$\langle [\neg p, \neg s, t], [q, r, \neg s, t], [\neg p, \neg s, \neg u], [q, r, \neg s, \neg u] \rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \vee \neg s \vee t) \wedge (q \vee r \vee \neg s \vee t) \wedge (\neg p \vee \neg s \vee \neg u) \wedge (q \vee r \vee \neg s \vee \neg u).$$

Prova scritta di Logica Matematica
29 gennaio 2016

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Se F è soddisfacibile allora per qualunque G la formula $\neg F \wedge G$ non è valida. **V** | **F** 1pt

2. $(p \to q) \to \neg r \equiv \neg(p \to q \wedge r)$. **V** | **F** 1pt

3. Esiste un insieme di Hintikka che contiene le formule $\neg(p \vee (q \to \neg r))$ e $q \to \neg(\neg p \wedge r)$. **V** | **F** 1pt

4. Se $T, F \rhd \neg F$ allora $T \rhd \neg F$. **V** | **F** 1pt

5. Qual è il p-grado dell'enunciato $\forall x (\exists y\, r(x, y) \to \neg \exists z\, q(z, x))$? **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

6. Sia I l'interpretazione normale con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $p^I = \{1, 3\}$ e $r^I = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 0), (2, 3), (3, 1)\}$. Allora $I \models_= \forall x\, \exists y (x \neq y \wedge p(y) \wedge (r(y, x) \vee r(x, y)))$. **V** | **F** 1pt

7. $\neg \exists x\, \neg p(x) \equiv \exists x\, p(x)$. **V** | **F** 1pt

8. L'algoritmo dei tableaux per la logica predicativa ha la proprietà della terminazione forte. **V** | **F** 1pt

9. Se un enunciato in un linguaggio con uguaglianza è soddisfacibile nella logica con uguaglianza allora è soddisfacibile. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sia $\mathcal{L} = \{p, q, r\}$ il linguaggio con tre simboli di relazione unari. Siano I e J le seguenti interpretazioni per $\mathcal{L}$: 4pt

$$D^I = \{0, 1, 2, 3\}, \quad p^I = \{1, 2, 3\}, \quad q^I = \{0, 3\}, \quad r^I = \{0, 2\};$$

$$D^J = \{A, B, C, D, E, F\}, \quad p^J = \{A, C, D, E, F\}, \quad q^J = \{A, B, D\}, \quad r^J = \{B\}.$$

Sul retro del foglio definite un omomorfismo forte di J in I.
Dimostrate che I e J non sono elementarmente equivalenti (e quindi non esiste un omomorfismo forte suriettivo di J in I).

11. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\{\forall x \big((p(x) \to \neg p(f(x))) \wedge (\neg p(x) \to p(f(x)))\big), \exists y\, f(f(f(y))) = y\}$$

è insoddisfacibile nella logica con uguaglianza.

12. Sia $\{b, m, p, c, g, a\}$ un linguaggio dove b e m sono simboli di costante, p è un simbolo di funzione unario, c e g sono simboli di relazione unari e a è un simbolo di relazione binario. Interpretando b come "Bobi", m come "Micio", $p(x)$ come "il padrone di x", $c(x)$ come "x è un cane", $g(x)$ come "x è un gatto" e $a(x, y)$ come "x ama y", traducete le seguenti frasi:

(i) Bobi ama il suo padrone, ma non quello di Micio; 3pt

(ii) i gatti che amano qualche cane hanno padroni che non amano tutti i cani. 3pt

13. Mostrate che 3pt

$$F \vee \neg G, \neg H \to G \rhd \neg F \vee H \to H.$$

Usate solo le regole della deduzione naturale proposizionale, comprese le quattro regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux stabilite sul retro del foglio che 5pt

$$\forall x(p(x) \vee \exists y\, r(x, y)), \forall z(\exists v\, r(v, z) \to p(z)) \models \exists x\, p(x).$$

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((q \to \neg(r \vee p)) \wedge \neg(\neg t \to \neg(s \to u))\big).$$

Soluzioni

1. **V** perché esiste un'interpretazione v tale che $v(F) = \mathbf{V}$ e quindi $v(\neg F) = \mathbf{F}$, da cui segue $v(\neg F \vee G) = \mathbf{F}$.

2. **F** come si verifica per esempio con le tavole di verità, oppure notando che se $v(p) = \mathbf{F}$ e $v(r) = \mathbf{F}$ allora la prima formula è vera e la seconda falsa.

3. **F** se T è un insieme di Hintikka tale che $\neg(p \vee (q \to \neg r)) \in T$ allora si ha $\neg p, \neg(q \to \neg r) \in T$ e quindi $\neg p, q, r \in T$; se $q \to \neg(\neg p \wedge r) \in T$, dato che $\neg q \notin T$ deve essere $\neg(\neg p \wedge r) \in T$; ma allora, visto che $\neg r \notin T$ deve essere $\neg\neg p \in T$ e quindi $p \in T$, che è nuovamente impossibile.

4. **V** Una deduzione naturale che mostra $T \rhd \neg F$ si ottiene da una che mostra $T, F \rhd \neg F$ utilizzando $(\neg e)$ e $(\neg i)$ come segue:

$$\dfrac{\dfrac{[F]^1 \qquad \begin{array}{c} T, [F]^1 \\ \triangledown \\ \neg F \end{array}}{\bot}}{\neg F}\;1$$

In alternativa, si può ricorrere ai teoremi di correttezza e completezza per la deduzione naturale, oltre all'osservazione che se $T, F \models \neg F$ allora $T \models \neg F$.

5. **3** il quantificatore universale ha p-grado 0 mentre i due quantificatori esistenziali hanno p-grado rispettivamente 1 e 2.

6. **V** come si verifica notando che per ogni $d \in D^I$ esiste $d_0 \in D^I$ con $d \neq d_0$ (che, per la normalità di I, assicura che $I, \sigma[x/d, y/d_0] \models x \neq y$), $d_0 \in p^I$ e $I, \sigma[x/d, y/d_0] \models r(y, x) \vee r(x, y)$.

7. **F** infatti $\neg\exists x\, \neg p(x) \equiv \forall x\, p(x)$.

8. **F** come ribadito nella Nota 10.21 delle dispense.

9. **V** l'interpretazione normale che soddisfa F è un'interpretazione.

10. Sia φ un omomorfismo forte di J in I. Dato che $A, D \in p^J \cap q^J$ deve essere $\varphi(A) = \varphi(D) = 3$. Dato che $B \in q^J \cap r^J$ deve essere $\varphi(B) = 0$. Dato che $C, E, F \notin q^J \cup r^J$ deve essere $\varphi(C) = \varphi(E) = \varphi(F) = 1$.

Per verificare che I e J non sono elementarmente equivalenti è necessario trovare un enunciato soddisfatto da un'interpretazione ma non dall'altra (non è sufficiente dimostrare che non esistono omomorfismi forti suriettivi). Ad esempio $\exists x(p(x) \wedge r(x))$ è vero in I ma non in J.

11. Supponiamo che un'interpretazione normale I soddisfi i due enunciati (che indichiamo con $\forall x\, F$ e G). L'obiettivo è trovare una contraddizione.

Dato che $I \models G$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $d_0 = f^I(f^I(f^I(d_0)))$ (qui usiamo la normalità di I).

Da $I \models \forall x\, F$ segue in particolare $I, \sigma[x/d_0] \models F$. Perciò se $d_0 \in p^I$ allora $f^I(d_0) \notin p^I$ e viceversa se $d_0 \notin p^I$ allora $f^I(d_0) \in p^I$. Sfruttando ora $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \models F$ si ottiene che se $d_0 \in p^I$ allora $f^I(f^I(d_0)) \in p^I$ mentre se $d_0 \notin p^I$ allora $f^I(f^I(d_0)) \notin p^I$. Infine usiamo $I, \sigma[x/f^I(f^I(d_0))] \models F$ per ottenere che se $d_0 \in p^I$ allora $f^I(f^I(f^I(d_0))) \notin p^I$ mentre se $d_0 \notin p^I$

allora $f^I(f^I(f^I(d_0))) \in p^I$. In ogni caso deve essere $d_0 \neq f^I(f^I(f^I(d_0)))$, contraddicendo quanto ottenuto in precedenza.

12. (i) $a(b, p(b)) \land \neg a(b, p(m))$;
(ii) $\forall x\big(g(x) \land \exists y(c(y) \land a(x,y)) \to \neg \forall z(c(z) \to a(p(x), z))\big)$.

13. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{[\neg F \lor H]^3 \qquad \dfrac{F \lor \neg G \qquad \dfrac{\dfrac{[F]^1 \qquad [\neg F]^2}{\bot}}{H} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg H \to G \qquad [\neg G]^1}{\neg\neg H}}{H}}{H}\,{}^{1} \qquad [H]^2}{H}\,{}^{2}}{\neg F \lor H \to H}\,{}^{3}$$

Si noti l'uso di (*ex-falso*) nel passaggio in cui l'ipotesi è $\bot$ e di (MT) nel passaggio in cui una delle ipotesi è $\neg H \to G$.

14. Per stabilire la conseguenza logica utilizziamo l'algoritmo 10.48 delle dispense e costruiamo un tableau chiuso con la radice etichettata dagli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione di quello a destra. Indichiamo con F, G, H e K le γ-formule $\forall x(p(x) \lor \exists y\, r(x,y))$, $\forall z(\exists v\, r(v,z) \to p(z))$, $\neg \exists x\, p(x)$ e $\neg \exists v\, r(v,b)$. Utilizziamo la convenzione 10.22 delle dispense e in ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$F, G, \underline{H}$$
$$|$$
$$\underline{F}, G, H, \neg p(a)$$
$$|$$
$$F, \underline{p(a) \lor \exists y\, r(a,y)}, G, H, \neg p(a)$$

$$\begin{array}{cc}
F, p(a), G, H, \neg p(a) & F, \underline{\exists y\, r(a,y)}, G, H, \neg p(a) \\
\otimes & | \\
 & F, r(a,b), \underline{G}, H, \neg p(a) \\
 & | \\
 & F, r(a,b), G, \underline{\exists v\, r(v,b) \to p(b)}, H, \neg p(a)
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
F, r(a,b), G, \underline{K}, H, \neg p(a) & F, r(a,b), G, p(b), \underline{H}, \neg p(a) \\
| & | \\
F, r(a,b), G, K, \neg r(a,b), H, \neg p(a) & F, r(a,b), G, p(b), H, \neg p(b), \neg p(a) \\
\otimes & \otimes
\end{array}$$

Si noti l'importanza di aver conservato la γ-formula H per ottenerne una seconda istanza.

15. Utilizziamo l'Algoritmo 3.16 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.28:

$$\big\langle [\neg\big((q \to \neg(r \vee p)) \wedge \neg(\neg t \to \neg(s \to u))\big)] \big\rangle$$
$$\langle [\neg(q \to \neg(r \vee p)), \neg t \to \neg(s \to u)] \rangle$$
$$\langle [\neg(q \to \neg(r \vee p)), t, \neg(s \to u)] \rangle$$
$$\langle [\neg(q \to \neg(r \vee p)), t, s], [\neg(q \to \neg(r \vee p)), t, \neg u] \rangle$$
$$\langle [q, t, s], [r \vee p, t, s], [q, t, \neg u], [r \vee p, t, \neg u] \rangle$$
$$\langle [q, t, s], [r, p, t, s], [q, t, \neg u], [r, p, t, \neg u] \rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(q \vee t \vee s) \wedge (r \vee p \vee t \vee s) \wedge (q \vee t \vee \neg u) \wedge (r \vee p \vee t \vee \neg u).$$