# Prova scritta di Logica Matematica
## 18 febbraio 2020

Cognome Nome Matricola

Indicate su ogni foglio che consegnate cognome, nome e numero di matricola.

Nella prima parte ogni riposta corretta vale 1, ogni risposta sbagliata $-1$, ogni risposta non data 0. Il punteggio minimo per superare questa parte è 6. Il punteggio che eccede 6 viene sommato al risultato della seconda parte per ottenere il voto dello scritto.

Nella seconda parte per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio.

### PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

**a.** $\neg p \vee \neg r \rightarrow q \wedge (r \rightarrow p) \equiv (p \wedge (q \vee r)) \vee \neg(\neg p \wedge q \rightarrow r)$. **V** **F**

**b.** Se $F \not\models G$ allora $F \models \neg G$. **V** **F**

**c.** Esiste un insieme di Hintikka che contiene le formule
$\neg(\neg q \rightarrow p \vee \neg r)$ e $\neg p \rightarrow q \vee \neg r$. **V** **F**

**d.** Se $F \rhd H$ e $G \rhd H$ allora $F \vee G \rhd H$. **V** **F**

**e.** Quante sono le variabili libere nella seguente formula?
$\neg\forall x\, \exists y(r(v,x,y) \rightarrow p(y) \vee r(x,y,z)) \rightarrow \forall z(\exists y\, r(x,z,y) \vee r(y,z,y))$ **0** **1** **2** **3** **4**

**f.** Se $F$ è un enunciato e $I, \sigma \not\models F$ allora $I, \tau \models \neg F$ per ogni stato $\tau$ di $I$. **V** **F**

**g.** Sia $I$ l'interpretazione con $D^I = \{A, B, C, D, E\}$,
$f^I(A) = E$, $f^I(B) = D$, $f^I(C) = B$, $f^I(D) = B$, $f^I(E) = C$,
$p^I = \{A, B\}$ e $r^I = \{(A,E), (B,C), (B,D), (B,E), (D,C), (D,E), (E,C)\}$.
Allora $I \models \exists x((p(x) \vee r(x, f(x))) \wedge \forall y(\neg p(y) \rightarrow r(f(x), y)))$. **V** **F**

**h.** $\exists x(p(x) \vee r(x, f(x))) \equiv \exists x\, p(x) \vee \exists y\, r(y, f(y))$. **V** **F**

**i.** Se $\sim$ è una relazione di congruenza su $I$ e $g^I(d) \nsim g^I(d')$ allora $d \nsim d'$. **V** **F**

**j.** L'algoritmo dei tableaux sistematici per gli enunciati predicativi
ha la proprietà della terminazione forte. **V** **F**

**k.** Nel riquadro scrivete l'enunciato del teorema di terminazione per la trasformazione in forma prenessa.

## SECONDA PARTE

Usate il retro del foglio per svolgere tutti gli esercizi salvo il numero 2.

**1.** Usando l'algoritmo di Fitting mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((\neg p \to \neg(q \vee r)) \to s \vee \neg(t \to u)\big).$$

**2.** Sia $\mathcal{L} = \{m, p, a, s\}$ un linguaggio dove $m$ è un simbolo di funzione unario, $p$ è un simbolo di relazione unario e $a$ e $s$ sono simboli di relazione binari. Interpretando $m(x)$ come "il medico di $x$", $p(x)$ come "$x$ è un paziente", $a(x, y)$ come "$x$ è amico di $y$" e $s(x, y)$ come "$x$ stima $y$", traducete la frase: 3pt

qualche paziente che non stima il proprio medico
stima il medico di qualche suo amico.

**3.** Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$\neg\big((p \to \neg q \wedge \neg r) \to (q \vee r \to \neg p \wedge s)\big) \vDash r \wedge \neg s.$$

Se la conseguenza logica non vale definite una valutazione che lo testimoni.

**4.** Mettete in forma prenessa l'enunciato 2pt

$$\forall x\, \exists y\, r(x, y) \vee \exists z\, p(z) \to \neg\exists y\, \forall v\, \neg(\forall w\, r(f(v, w), y) \wedge \neg\exists x\, r(f(y, v), f(x, y))).$$

Se riuscite, usate il minimo numero di quantificatori possibili. 1pt

**5.** Dimostrate che l'insieme di enunciati 4pt

$$\{\forall x\, \exists y\, r(x, y), \forall x\, \forall y \neg(r(x, y) \wedge r(y, x)), \forall u\, \forall v(\exists w(r(u, w) \wedge r(w, v)) \to \neg r(v, u))\}$$

è soddisfacibile.

**6.** Dimostrate che 4pt

$$\forall u\, q(g(u), u), \exists x\, \neg q(x, c), \forall y(\exists z\, \neg q(z, y) \to p(g(y)) \vee \neg q(g(c), y)) \vDash \exists v\, p(v).$$

**7.** Sia $\mathcal{L} = \{f, p\}$ il linguaggio con un simbolo di funzione unario ed un simbolo di relazione unario. Siano $I$ e $J$ le seguenti interpretazioni per $\mathcal{L}$: 3pt

$$D^I = \{0, 1, 2, 3\}, \quad f^I(0) = 1, f^I(1) = 2, f^I(2) = 0, f^I(3) = 3, \quad p^I = \{1, 2\};$$

$$D^J = \{A, B, C, D, E, F\}, \quad p^J = \{B, D\},$$

$$f^J(A) = B, f^J(B) = D, f^J(C) = B, f^J(D) = E, f^J(E) = B, f^J(F) = F.$$

- Definite un omomorfismo forte di $J$ in $I$;
- $I$ e $J$ sono elementarmente equivalenti?
- Scrivete un enunciato del linguaggio $\mathcal{L} \cup \{=\}$ che sia soddisfatto da $I$ ma non da $J$ (consideriamo $I$ e $J$ interpretazioni normali).

**8.** Usando il metodo dei tableaux dimostrate che 4pt

$$\forall x\, \exists y(\neg r(x, y) \vee \neg r(y, x)), \exists z\, \forall u\, r(u, z) \vDash \exists v\, \exists w(r(v, w) \wedge \neg r(w, v)).$$

**9.** Dimostrate, usando solo le regole della deduzione naturale predicativa (comprese le sei regole derivate) che 5pt

$$\forall v(r(f(v), v) \to \neg p(v)) \rhd \forall x(p(x) \to \exists y\, \neg r(y, x)).$$

## Soluzioni

**a. V** come si verifica per esempio con le tavole di verità.

**b. F** se ad esempio $F$ è $p$ e $G$ è $q$ si ha sia $F \not\models G$ che $F \not\models \neg G$.

**c. F** Se $\mathcal{H}$ è un insieme di Hintikka con $\neg(\neg q \to p \vee \neg r) \in \mathcal{H}$ allora devono appartenere a $\mathcal{H}$ anche $\neg q$, $\neg(p \vee \neg r)$, $\neg p$, $\neg\neg r$ e $r$. Se fosse anche $\neg p \to q \vee \neg r \in \mathcal{H}$ almeno uno tra $p$, $q$ e $\neg r$ dovrebbe appartenere a $\mathcal{H}$, che contraddice la prima condizione nella definizione di insieme di Hintikka.

**d. V** questa è essenzialmente la descrizione della regola ($\vee e$), dato che esprime la deduzione naturale

$$\dfrac{F \vee G \qquad \begin{matrix}[F]^1 \\ \triangledown \\ H\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[G]^1 \\ \triangledown \\ H\end{matrix}}{H}\,1$$

**e. 4** infatti sono libere l'occorrenza di $v$, la prima occorrenza di $z$, l'ultima occorrenza di $x$ e le ultime due occorrenze di $y$.

**f. V** perché se $I, \sigma \not\models F$ allora $I, \sigma \models \neg F$ e quindi, dato che $F$ è un enunciato, $I, \tau \models \neg F$ per il Corollario 7.13 delle dispense.

**g. F** perché per nessun $d_0 \in D^I$ si ha $I, \sigma[x/d_0] \models (p(x) \vee r(x, f(x))) \wedge \forall y(\neg p(y) \to r(f(x), y))$: l'unico $d'$ tale che $(d', d) \in r^I$ per ogni $d \notin p^I$ è $B$ e quindi gli unici $d_0$ per cui vale il secondo congiunto sono $C$ e $D$; per questi $d_0$ però non vale $I, \sigma[x/d_0] \models p(x) \vee r(x, f(x))$.

**h. V** per il Lemma 7.99 delle dispense.

**i. V** segue immediatamente dalla seconda condizione della Definizione 9.20 delle dispense.

**j. F** vedere la Nota 10.15 delle dispense.

**k.** è il Lemma 7.97 delle dispense, che asserisce che l'algoritmo per la trasformazione in forma prenessa gode della proprietà della terminazione forte, cioè termina qualunque sia la formula su cui si decide di operare ad ogni singolo passo.

**1.** Utilizziamo l'Algoritmo 3.22 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.30:

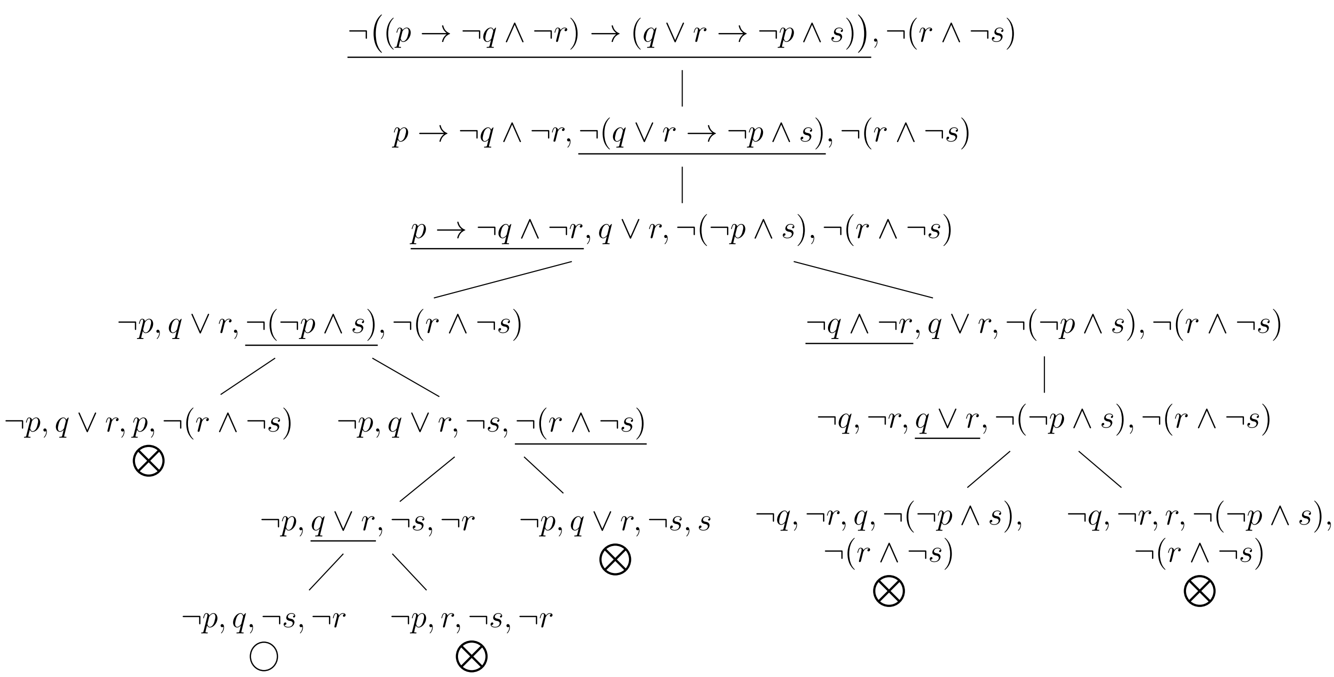
$$[\langle \neg\big((\neg p \to \neg(q \lor r)) \to s \lor \neg(t \to u)\big) \rangle]$$
$$[\langle \neg p \to \neg(q \lor r), \neg(s \lor \neg(t \to u)) \rangle]$$
$$[\langle \neg p \to \neg(q \lor r), \neg s, t \to u \rangle]$$
$$[\langle p, \neg s, t \to u \rangle, \langle \neg(q \lor r), \neg s, t \to u \rangle]$$
$$[\langle p, \neg s, \neg t \rangle, \langle p, \neg s, u \rangle, \langle \neg q, \neg r, \neg s, t \to u \rangle]$$
$$[\langle p, \neg s, \neg t \rangle, \langle p, \neg s, u \rangle, \langle \neg q, \neg r, \neg s, \neg t \rangle, \langle \neg q, \neg r, \neg s, u \rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(p \land \neg s \land \neg t) \lor (p \land \neg s \land u) \lor (\neg q \land \neg r \land \neg s \land \neg t) \lor (\neg q \land \neg r \land \neg s \land u).$$

**2.** $\exists x(p(x) \land \neg s(x, m(x)) \land \exists y(a(y, x) \land s(x, m(y))))$.

**3.** Per stabilire se la conseguenza logica vale applichiamo l'Algoritmo 4.40 delle dispense, etichettando la radice con la formula a sinistra e la negazione di quella a destra del simbolo di conseguenza logica. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.




Il tableau è aperto e quindi la conseguenza logica non vale. Una valutazione che lo testimonia è data da $v(p) = \mathbf{F}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{F}$, $v(s) = \mathbf{F}$.

**4.** Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\forall x\,\exists y\, r(x,y) \lor \exists z\, p(z) \to \neg\exists y\,\forall v\,\neg(\forall w\, r(f(v,w),y) \land \neg\exists x\, r(f(y,v),f(x,y)))$$
$$\forall x\,\exists y\, r(x,y) \lor \exists z\, p(z) \to \forall y\,\exists v(\forall w\, r(f(v,w),y) \land \forall x\,\neg r(f(y,v),f(x,y)))$$
$$\forall x(\exists y\, r(x,y) \lor \exists z\, p(z)) \to \forall y\,\exists v\,\forall w(r(f(v,w),y) \land \neg r(f(y,v),f(w,y)))$$
$$\forall x\,\exists z(r(x,z) \lor p(z)) \to \forall y\,\exists v\,\forall w(r(f(v,w),y) \land \neg r(f(y,v),f(w,y)))$$
$$\forall y(\forall x\,\exists z(r(x,z) \lor p(z)) \to \exists v\,\forall w(r(f(v,w),y) \land \neg r(f(y,v),f(w,y))))$$
$$\forall y\,\exists v(\exists z(r(v,z) \lor p(z)) \to \forall w(r(f(v,w),y) \land \neg r(f(y,v),f(w,y))))$$
$$\forall y\,\exists v\,\forall w\,\forall z(r(v,z) \lor p(z) \to r(f(v,w),y) \land \neg r(f(y,v),f(w,y)))$$

**5.** Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfi tutti gli enunciati dell'insieme. Due interpretazioni con queste caratteristiche sono definite da

$$D^I = \{0,1,2,3\}, \quad r^I = \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,0)\};$$
$$D^J = \mathbb{N}, \quad r^J = \{\,(n,m) \in \mathbb{N}^2 \,:\, n < m\,\}.$$

**6.** Supponiamo che $I$ sia un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, che indichiamo con $F$, $G$ e $H$. Il nostro obiettivo è mostrare che $I \vDash \exists v\, p(v)$.

Dato che $I \vDash G$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $(d_0, c^I) \notin q^I$. Dato che $I \vDash H$ si ha in particolare $I, \sigma[y/c^I] \vDash \exists z\,\neg q(z,y) \to p(g(y)) \lor \neg q(g(c),y)$ da cui, dato che $I, \sigma[y/c^I] \vDash \exists z\,\neg q(z,y)$ per quanto ottenuto in precedenza, segue che $g^I(c^I) \in p^I$ oppure $(g^I(c^I), c^I) \notin q^I$. Nel primo caso abbiamo ottenuto $I \vDash \exists v\, p(v)$, come volevamo. Il secondo caso contraddice $I \vDash F$ (in particolare $I, \sigma[u/c^I] \vDash q(g(u),u)$) ed è quindi impossibile.

**7.**
- Sia $\varphi$ l'omomorfismo forte di $J$ in $I$ che cerchiamo di costruire. Visto che $B, D \in p^J$ deve essere $\varphi(B), \varphi(D) \in p^I = \{1,2\}$. D'altra parte $f^J(B) \in p^J$ e $f^J(D) \notin p^J$ e questo ci obbliga a definire (dato che $f^I(1) \in p^I$ e $f^I(2) \notin p^I$) $\varphi(B) = 1$ e $\varphi(D) = 2$.
  Con un ragionamento analogo, osservando che se $d \in \{A,C,E\}$ si ha $d \notin p^J$ e $f^J(d) \in p^J$, definiamo $\varphi(A) = \varphi(C) = \varphi(E) = 0$. Infine, dato che $F \notin p^J$ e $f^J(3) \notin p^J$, deve per forza essere $\varphi(F) = 3$.
  Si verifica che la $\varphi$ così definita è effettivamente un omomorfismo forte.
- Dato che l'omomorfismo forte di $J$ in $I$ definito nel punto precedente è suriettivo, possiamo utilizzare il Corollario 9.14 delle dispense e concludere che $I$ e $J$ sono elementarmente equivalenti.
- L'enunciato $\forall x\,\exists y\, f(y) = x$ è soddisfatto da $I$ ma non da $J$.

**8.** Per mostrare la conseguenza logica dobbiamo costruire (utilizzando l'Algoritmo 10.51 e le Convenzioni 10.21 e 10.23 delle dispense) un tableau chiuso con la radice etichettata dai due enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione dell'enunciato sulla destra.

Indichiamo con $F$, $G$, $H$ e $K$ le $\gamma$-formule $\forall x\,\exists y(\neg r(x,y)\vee\neg r(y,x))$, $\neg\exists v\,\exists w(r(v,w)\wedge \neg r(w,v))$, $\forall u\, r(u,c)$ e $\neg\exists w(r(b,w)\wedge\neg r(w,b))$. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$F, \underline{\exists z\,\forall u\, r(u,z)}, G$$
$$|$$
$$\underline{F}, H, G$$
$$|$$
$$F, \underline{\exists y(\neg r(c,y)\vee\neg r(y,c))}, H, G$$
$$|$$
$$F, \underline{\neg r(c,b)\vee\neg r(b,c)}, H, G$$
$$\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
F, \neg r(c,b), H, \underline{G} & F, \neg r(b,c), \underline{H}, G \\
| & | \\
F, \neg r(c,b), H, G, \underline{K} & F, \neg r(b,c), H, r(b,c), G \\
| & \otimes \\
F, \neg r(c,b), H, G, K, \underline{\neg(r(b,c)\wedge\neg r(c,b))} & \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
F, \neg r(c,b), \underline{H}, G, K, \neg r(b,c) & F, \neg r(c,b), H, G, K, r(c,b) \\
| & \otimes \\
F, \neg r(c,b), H, r(b,c), G, K, \neg r(b,c) & \\
\otimes &
\end{array} &
\end{array}$$

Si noti l'importanza di scegliere in modo opportuno le istanze delle $\gamma$-formule. Con altre scelte il tableau cresce rapidamente di dimensione.

**9.** Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p(x)]^2 \qquad \dfrac{[r(f(x),x)]^1 \qquad \dfrac{\forall v(r(f(v),v)\to\neg p(v))}{r(f(x),x)\to\neg p(x)}}{\neg p(x)}}{\bot}}{\neg r(f(x),x)}\,{}^{1}}{\exists y\,\neg r(y,x)}}{p(x)\to\exists y\,\neg r(y,x)}\,{}^{2}}{\forall x(p(x)\to\exists y\,\neg r(y,x))}$$

# Prova scritta di Logica Matematica
## 18 febbraio 2020

Cognome Nome Matricola

Indicate su ogni foglio che consegnate cognome, nome e numero di matricola.

Nella prima parte ogni riposta corretta vale 1, ogni risposta sbagliata $-1$, ogni risposta non data 0. Il punteggio minimo per superare questa parte è 6. Il punteggio che eccede 6 viene sommato al risultato della seconda parte per ottenere il voto dello scritto.

Nella seconda parte per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio.

### PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

**a.** Quante sono le variabili libere nella seguente formula?
$\neg\forall x\,\exists y(r(x,v,y) \to p(y) \vee r(x,z,y)) \to \forall z(\exists y\, r(y,y,z) \vee r(z,z,y))$ **0 | 1 | 2 | 3 | 4**

**b.** $p \vee \neg q \to r \wedge (q \to \neg p) \equiv (\neg p \wedge (q \vee r)) \vee \neg(p \wedge r \to q)$. **V | F**

**c.** Esiste un insieme di Hintikka che contiene le formule
$\neg(\neg p \to q \vee s)$ e $\neg q \to p \vee s$. **V | F**

**d.** Se $F \rhd H$ e $G \rhd H$ allora $F \vee G \rhd H$. **V | F**

**e.** $\forall x(p(x) \wedge r(x, f(x))) \equiv \forall x\, p(x) \wedge \forall y\, r(y, f(y))$. **V | F**

**f.** Sia $I$ l'interpretazione con $D^I = \{0,1,2,3,4\}$, $f^I(0) = 2$, $f^I(1) = 3$, $f^I(2) = 1$, $f^I(3) = 4$, $f^I(4) = 3$, $p^I = \{0,3\}$, e $r^I = \{(0,2),(2,1),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2)\}$.
Allora $I \models \exists x((p(x) \vee r(x,f(x))) \wedge \forall y(\neg p(y) \to r(f(x),y)))$. **V | F**

**g.** Se $F$ è un enunciato e $I,\sigma \models \neg F$ allora $I,\tau \not\models F$ per ogni stato $\tau$ di $I$. **V | F**

**h.** Se $\sim$ è una relazione di congruenza su $I$ e $f^I(d_0) \nsim f^I(d_1)$ allora $d_0 \nsim d_1$. **V | F**

**i.** L'algoritmo dei tableaux sistematici per gli enunciati predicativi ha la proprietà della terminazione forte. **V | F**

**j.** Se $F \not\models G$ allora $F \models \neg G$. **V | F**

**k.** Nel riquadro scrivete l'enunciato del teorema di terminazione per la trasformazione in forma prenessa.

## SECONDA PARTE

Usate il retro del foglio per svolgere tutti gli esercizi salvo il numero 2.

**1.** Usando l'algoritmo di Fitting mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((p \to \neg(q \vee \neg r)) \to \neg s \vee \neg(u \to v)\big).$$

**2.** Sia $\mathcal{L} = \{d, i, c, s\}$ un linguaggio dove $d$ è un simbolo di funzione unario, $i$ è un simbolo di relazione unario e $c$ e $s$ sono simboli di relazione binari. Interpretando $d(x)$ come "il dentista di $x$", $i(x)$ come "$x$ è un informatico", $c(x,y)$ come "$x$ è conoscente di $y$" e $s(x,y)$ come "$x$ stima $y$", traducete la frase: 3pt

qualche informatico che non stima il proprio dentista
stima il dentista di qualche suo conoscente.

**3.** Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$\neg\big((t \to p \wedge \neg r) \to (\neg p \vee r \to \neg t \wedge \neg q)\big) \models r \wedge q.$$

Se la conseguenza logica non vale definite una valutazione che lo testimoni.

**4.** Mettete in forma prenessa l'enunciato 2pt

$$\forall x\, \exists y\, r(x,y) \vee \exists z\, q(z) \to \neg\exists y\, \forall v\, \neg(\forall w\, r(y, f(v,w)) \wedge \neg\exists x\, r(f(y,v), f(x,y))).$$

Se riuscite, usate il minimo numero di quantificatori possibili. 1pt

**5.** Dimostrate che l'insieme di enunciati 4pt

$$\{\forall x\, \forall y(\exists z(r(x,z) \wedge r(z,y)) \to \neg r(y,x)), \forall u\, \forall v(\neg r(u,v) \vee \neg r(v,u)), \forall x\, \exists y\, r(x,y)\}$$

è soddisfacibile.

**6.** Dimostrate che 4pt

$$\forall u\, \neg r(f(u), u), \exists x\, r(x,a), \forall y(\exists z\, r(z,y) \to p(f(y)) \vee r(f(a), y)) \models \exists v\, p(v).$$

**7.** Sia $\mathcal{L} = \{f, p\}$ il linguaggio con un simbolo di funzione unario ed un simbolo di relazione unario. Siano $I$ e $J$ le seguenti interpretazioni per $\mathcal{L}$: 3pt

$$D^I = \{0,1,2,3\}, \quad f^I(0) = 2, f^I(1) = 1, f^I(2) = 3, f^I(3) = 0, \quad p^I = \{0,2\};$$

$$D^J = \{A,B,C,D,E,F\}, \quad p^J = \{A,E\},$$

$$f^J(A) = D, f^J(B) = B, f^J(C) = E, f^J(D) = E, f^J(E) = A, f^J(F) = E.$$

- Definite un omomorfismo forte di $J$ in $I$;
- $I$ e $J$ sono elementarmente equivalenti?
- Scrivete un enunciato del linguaggio $\mathcal{L} \cup \{=\}$ che sia soddisfatto da $I$ ma non da $J$ (consideriamo $I$ e $J$ interpretazioni normali).

**8.** Usando il metodo dei tableaux dimostrate che 4pt

$$\forall x\, \exists y(r(x,y) \vee r(y,x)), \exists u\, \forall v\, \neg r(u,v) \models \exists z\, \exists w(r(z,w) \wedge \neg r(w,z)).$$

**9.** Dimostrate, usando solo le regole della deduzione naturale predicativa (comprese le sei regole derivate) che 5pt

$$\forall v(r(v, g(v)) \to \neg p(v)) \rhd \forall x(p(x) \to \exists y\, \neg r(x,y)).$$

## Soluzioni

**a.** **3** infatti sono libere l'occorrenza di $v$, la prima occorrenza di $z$ e l'ultima occorrenza di $y$.

**b.** **V** come si verifica per esempio con le tavole di verità.

**c.** **F** Se $\mathcal{H}$ è un insieme di Hintikka con $\neg(\neg p \to q \vee s) \in \mathcal{H}$ allora devono appartenere a $\mathcal{H}$ anche $\neg p$, $\neg(q \vee s)$, $\neg q$ e $\neg s$. Se fosse anche $\neg q \to p \vee s \in \mathcal{H}$ almeno uno tra $q$, $p$ e $s$ dovrebbe appartenere a $\mathcal{H}$, che contraddice la prima condizione nella definizione di insieme di Hintikka.

**d.** **V** questa è essenzialmente la descrizione della regola $(\vee e)$, dato che esprime la deduzione naturale

$$\dfrac{F \vee G \qquad \begin{array}{c}[F]^1\\ \triangledown\\ H\end{array} \qquad \begin{array}{c}[G]^1\\ \triangledown\\ H\end{array}}{H}\;1$$

**e.** **V** per il Lemma 7.99 delle dispense.

**f.** **F** perché per nessun $d_0 \in D^I$ si ha $I, \sigma[x/d_0] \models (p(x) \vee r(x, f(x))) \wedge \forall y(\neg p(y) \to r(f(x), y))$: l'unico $d'$ tale che $(d', d) \in r^I$ per ogni $d \notin p^I$ è 3 e quindi gli unici $d_0$ per cui vale il secondo congiunto sono 1 e 4; per questi $d_0$ però non vale $I, \sigma[x/d_0] \models p(x) \vee r(x, f(x))$.

**g.** **V** perché se $I, \sigma \models \neg F$ allora, dato che $\neg F$ è un enunciato, $I, \tau \models \neg F$ per il Corollario 7.13 delle dispense; quindi $I, \tau \not\models F$.

**h.** **V** segue immediatamente dalla seconda condizione della Definizione 9.20 delle dispense.

**i.** **F** vedere la Nota 10.15 delle dispense.

**j.** **F** se ad esempio $F$ è $p$ e $G$ è $q$ si ha sia $F \not\models G$ che $F \not\models \neg G$.

**k.** è il Lemma 7.97 delle dispense, che asserisce che l'algoritmo per la trasformazione in forma prenessa gode della proprietà della terminazione forte, cioè termina qualunque sia la formula su cui si decide di operare ad ogni singolo passo.

**1.** Utilizziamo l'Algoritmo 3.22 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.30:

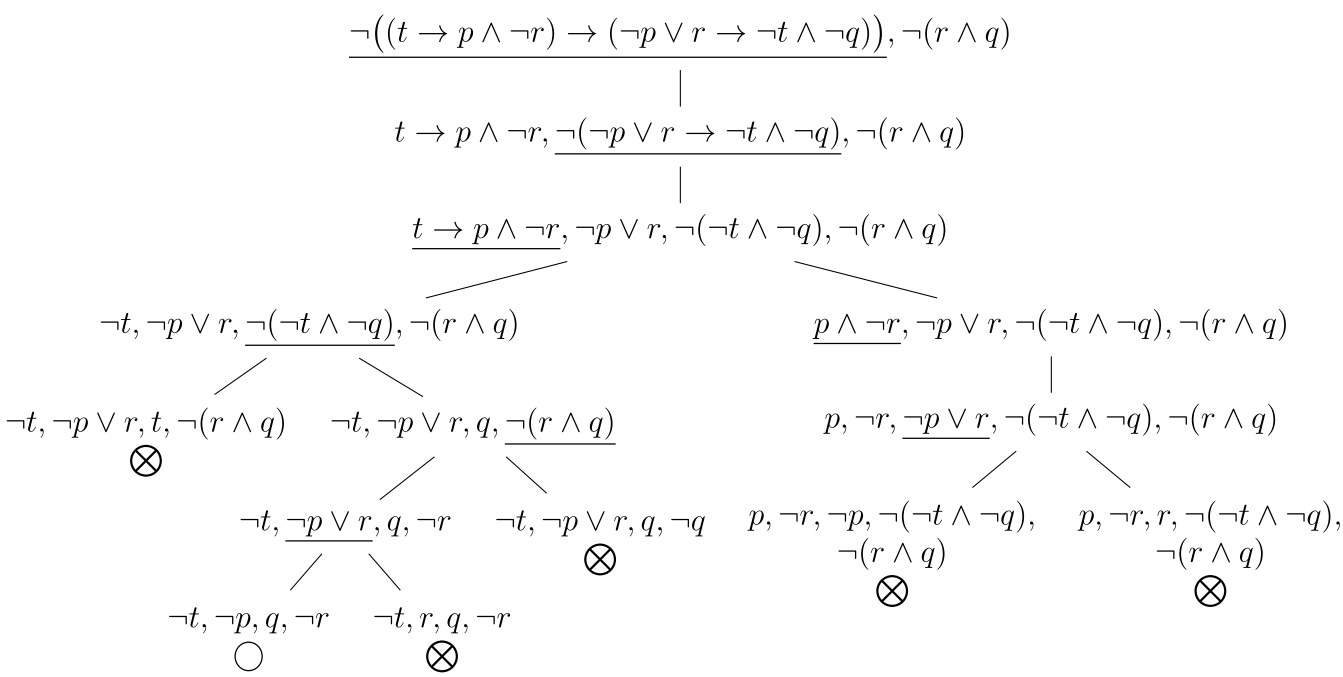
$$[\langle \neg\big((p \to \neg(q \vee \neg r)) \to \neg s \vee \neg(u \to v)\big) \rangle]$$
$$[\langle p \to \neg(q \vee \neg r), \neg(\neg s \vee \neg(u \to v)) \rangle]$$
$$[\langle p \to \neg(q \vee \neg r), s, u \to v \rangle]$$
$$[\langle \neg p, s, u \to v \rangle\,, \langle \neg(q \vee \neg r), s, u \to v \rangle]$$
$$[\langle \neg p, s, \neg u \rangle\,, \langle \neg p, s, v \rangle\,, \langle \neg q, r, s, u \to v \rangle]$$
$$[\langle \neg p, s, \neg u \rangle\,, \langle \neg p, s, v \rangle\,, \langle \neg q, r, s, \neg u \rangle\,, \langle \neg q, r, s, v \rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \wedge s \wedge \neg u) \vee (\neg p \wedge s \wedge v) \vee (\neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (\neg q \wedge r \wedge s \wedge v).$$

**2.** $\exists x(i(x) \wedge \neg s(x, d(x)) \wedge \exists y(c(y, x) \wedge s(x, d(y))))$.

**3.** Per stabilire se la conseguenza logica vale applichiamo l'Algoritmo 4.40 delle dispense, etichettando la radice con la formula a sinistra e la negazione di quella a destra del simbolo di conseguenza logica. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.




Il tableau è aperto e quindi la conseguenza logica non vale. Una valutazione che lo testimonia è data da $v(p) = \mathbf{F}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{F}$, $v(t) = \mathbf{F}$.

**4.** Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\forall x\, \exists y\, r(x,y) \lor \exists z\, q(z) \to \neg\exists y\, \forall v\, \neg(\forall w\, r(y, f(v,w)) \land \neg\exists x\, r(f(y,v), f(x,y)))$$
$$\forall x\, \exists y\, r(x,y) \lor \exists z\, q(z) \to \forall y\, \exists v(\forall w\, r(y, f(v,w)) \land \forall x\, \neg r(f(y,v), f(x,y)))$$
$$\forall x(\exists y\, r(x,y) \lor \exists z\, q(z)) \to \forall y\, \exists v\, \forall w(r(y, f(v,w)) \land \neg r(f(y,v), f(w,y)))$$
$$\forall x\, \exists z(r(x,z) \lor q(z)) \to \forall y\, \exists v\, \forall w(r(y, f(v,w)) \land \neg r(f(y,v), f(w,y)))$$
$$\forall y(\forall x\, \exists z(r(x,z) \lor q(z)) \to \exists v\, \forall w(r(y, f(v,w)) \land \neg r(f(y,v), f(w,y))))$$
$$\forall y\, \exists v(\exists z(r(v,z) \lor q(z)) \to \forall w(r(y, f(v,w)) \land \neg r(f(y,v), f(w,y))))$$
$$\forall y\, \exists v\, \forall w\, \forall z(r(v,z) \lor q(z) \to r(y, f(v,w)) \land \neg r(f(y,v), f(w,y)))$$

**5.** Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfi tutti gli enunciati dell'insieme. Due interpretazioni con queste caratteristiche sono definite da

$$D^I = \{0,1,2,3\}, \quad r^I = \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,0)\};$$
$$D^J = \mathbb{N}, \quad r^J = \{\, (n,m) \in \mathbb{N}^2 \,:\, n < m \,\}.$$

**6.** Supponiamo che $I$ sia un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, che indichiamo con $F$, $G$ e $H$. Il nostro obiettivo è mostrare che $I \vDash \exists v\, p(v)$.

Dato che $I \vDash G$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $(d_0, a^I) \in r^I$. Dato che $I \vDash H$ si ha in particolare $I, \sigma[y/a^I] \vDash \exists z\, r(z,y) \to p(f(y)) \lor r(f(a), y)$ da cui, dato che $I, \sigma[y/a^I] \vDash \exists z\, r(z,y)$ per quanto ottenuto in precedenza, segue che $f^I(a^I) \in p^I$ oppure $(f^I(a^I), a^I) \in r^I$. Nel primo caso abbiamo ottenuto $I \vDash \exists v\, p(v)$, come volevamo. Il secondo caso contraddice $I \vDash F$ (in particolare $I, \sigma[u/a^I] \vDash \neg r(f(u), u)$) ed è quindi impossibile.

**7.**
- Sia $\varphi$ l'omomorfismo forte di $J$ in $I$ che cerchiamo di costruire. Visto che $A, E \in p^J$ deve essere $\varphi(A), \varphi(E) \in p^I = \{0,2\}$. D'altra parte $f^J(A) \notin p^J$ e $f^J(E) \in p^J$ e questo ci obbliga a definire (dato che $f^I(0) \in p^I$ e $f^I(2) \notin p^I$) $\varphi(A) = 2$ e $\varphi(E) = 0$.
  Con un ragionamento analogo, osservando che se $d \in \{C, D, F\}$ si ha $d \notin p^J$ e $f^J(d) \in p^J$, definiamo $\varphi(C) = \varphi(D) = \varphi(F) = 3$. Infine, dato che $B \notin p^J$ e $f^J(B) \notin p^J$, deve per forza essere $\varphi(B) = 1$.
  Si verifica che la $\varphi$ così definita è effettivamente un omomorfismo forte.
- Dato che l'omomorfismo forte di $J$ in $I$ definito nel punto precedente è suriettivo, possiamo utilizzare il Corollario 9.14 delle dispense e concludere che $I$ e $J$ sono elementarmente equivalenti.
- L'enunciato $\forall x\, \exists y\, f(y) = x$ è soddisfatto da $I$ ma non da $J$.

**8.** Per mostrare la conseguenza logica dobbiamo costruire (utilizzando l'Algoritmo 10.51 e le Convenzioni 10.21 e 10.23 delle dispense) un tableau chiuso con la radice etichettata dai due enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica e dalla negazione dell'enunciato sulla destra.

Indichiamo con $F$, $G$, $H$ e $K$ le $\gamma$-formule $\forall x\, \exists y(r(x,y) \vee r(y,x))$, $\neg\exists z\, \exists w(r(z,w) \wedge \neg r(w,z))$, $\forall v\, \neg r(a,v)$ e $\neg\exists w(r(c,w) \wedge \neg r(w,c))$. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$\begin{array}{c}
F, \underline{\exists u\, \forall v\, \neg r(v,u)}, G \\
| \\
\underline{F}, H, G \\
| \\
F, \underline{\exists y(r(a,y) \vee r(y,a))}, H, G \\
| \\
F, \underline{r(a,c) \vee r(c,a)}, H, G
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
F, r(a,c), \underline{H}, G & F, r(c,a), H, \underline{G} \\
| & | \\
F, r(a,c), H, \neg r(a,c), G & F, r(c,a), H, G, \underline{K} \\
\otimes & | \\
 & F, r(c,a), H, G, K, \underline{\neg(r(c,a) \wedge \neg r(a,c))}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
F, r(c,a), H, G, K, \neg r(c,a) & F, r(c,a), \underline{H}, G, K, r(a,c) \\
\otimes & | \\
 & F, r(c,a), H, \neg r(a,c), G, K, r(a,c) \\
 & \otimes
\end{array}$$

Si noti l'importanza di scegliere in modo opportuno le istanze delle $\gamma$-formule. Con altre scelte il tableau cresce rapidamente di dimensione.

**9.** Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p(x)]^2 \qquad \dfrac{[r(x,g(x))]^1 \qquad \dfrac{\forall v(r(v,g(v)) \to \neg p(v))}{r(x,g(x)) \to \neg p(x)}}{\neg p(x)}}{\bot}}{\neg r(x,g(x))}\,1}{\exists y\, \neg r(x,y)}}{p(x) \to \exists y\, \neg r(x,y)}\,2}{\forall x(p(x) \to \exists y\, \neg r(x,y))}$$