Prova scritta di Logica Matematica
26 luglio 2016

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $((p \to q) \to \neg(q \to p)) \wedge r \equiv (r \wedge q \to p) \to p \wedge \neg(r \to q)$. **V** | **F** 1pt

2. Se $G \models H$ allora $F \vee G \models H$ per ogni F. **V** | **F** 1pt

3. Una β-formula è logicamente equivalente ad almeno uno dei suoi ridotti. **V** | **F** 1pt

4. Quante delle seguenti formule sono δ-formule? $\exists x\, \forall y\, r(x, y)$, $\neg\forall x\, p(x) \to q(x)$, $\exists x \neg r(x, x)$, $\neg\forall x(p(x) \to q(x))$ **0** | **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

5. Sia I un'interpretazione con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $f^I(0) = f^I(2) = 2$, $f^I(1) = 0$, $f^I(3) = 1$, $p^I = \{0, 2\}$ e $r^I = \{(1, 0), (1, 2), (3, 2), (3, 3)\}$. Allora $I \models \forall x(p(f(x)) \vee \exists z(p(f(z)) \wedge \neg p(z) \wedge r(z, f(x))))$. **V** | **F** 1pt

6. $\exists x\, p(x) \wedge \neg\exists x\, q(f(x)) \equiv \exists z\, \forall v(p(z) \wedge \neg q(f(v)))$. **V** | **F** 1pt

7. Sia φ un omomorfismo forte non suriettivo di I in J e σ uno stato di I. Se $I, \sigma \models p(x) \wedge r(x, f(y, a))$ allora $J, \varphi \circ \sigma \models p(x) \wedge r(x, f(y, a))$. **V** | **F** 1pt

8. Esiste un insieme di Hintikka che contiene le formule $\forall x(p(x) \to \exists y\, \neg r(y, x))$ e $p(a) \wedge \forall z\, r(z, a)$. **V** | **F** 1pt

9. Se $T, p(x) \rhd q(x)$ allora $T, p(x) \rhd \forall x\, q(x)$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x(\exists y\, r(y, x) \to p(x) \vee q(g(x))), \forall z\, r(z, f(z)), \forall x(q(g(x)) \to p(x)) \models \forall y\, p(f(y)).$$

11. Sul retro del foglio dimostrate che l'insieme di enunciati 4pt

$$\{\forall x(\forall y\, r(y, x) \to \neg p(x)), \forall x\, \forall y(r(x, y) \vee (\neg p(x) \wedge p(y))), \exists x\, p(x)\}$$

è soddisfacibile.

12. Sia $\mathcal{L} = \{a, b, md, p, m, i\}$ un linguaggio dove a e b sono simboli di costante, md e p sono simboli di funzione unari, m è un simbolo di relazione unario e i è un simbolo di relazione binario. Interpretando a come "Arianna", b come "Bob", $md(x)$ e $p(x)$ come "la madre di x" e "il padre di x", $m(x)$ come "x è un musicista", $i(x, y)$ come "x è innamorato di y", traducete le seguenti frasi:

(i) Bob è un musicista innamorato di Arianna, la cui madre (di Arianna) è musicista; 3pt

(ii) Ogni musicista il cui padre è un musicista è innamorato di una musicista o della figlia di (almeno) un musicista. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$q \to p, p \to r, \neg r \wedge s \to q, \neg s \to \neg t \vee p \models t \to r.$$

Se la conseguenza logica non vale definite un'interpretazione che lo mostra. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\exists z(p(z) \wedge \neg q(g(z))), \forall x(p(x) \to q(f(x))) \rhd \exists y\, q(y) \wedge \exists y\, \neg q(y).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((\neg p \vee \neg(q \vee \neg r)) \wedge ((\neg s \to t) \to u)\big).$$

Soluzioni

1. V come si verifica per esempio con le tavole di verità.

2. F ad esempio se G e H sono p e F è $\neg p$ si ha $G \models H$ ma $F \vee G \not\models H$.

3. F una β-formula è logicamente equivalente alla disgiunzione dei suoi ridotti. Ad esempio $p \vee q$ non è logicamente equivalente né a p né a q.

4. 3 la seconda formula è una β-formula, le altre sono δ-formule.

5. F $I, \sigma[x/3] \not\models p(f(x)) \vee \exists z(p(f(z)) \wedge \neg p(z) \wedge r(z, f(x)))$.

6. V come segue dai lemmi 7.47 e 7.66 delle dispense (quest'ultimo va utilizzato due volte).

7. V dato che la formula è priva di quantificatori si può usare la seconda parte del Lemma 9.8 delle dispense.

8. F se un insieme di Hintikka T contiene $p(a) \wedge \forall z\, r(z, a)$ deve contenere sia $p(a)$ che $\forall z\, r(z, a)$. Inoltre $\forall x(p(x) \to \exists y\, \neg r(y, x)) \in T$ implica $p(a) \to \exists y\, \neg r(y, a) \in T$. Quindi, dato che $\neg p(a) \notin T$ (perché T non contiene coppie complementari di letterali) deve essere $\exists y\, \neg r(y, a) \in T$. Allora $\neg r(b, a) \in T$ per qualche simbolo di costante b (che potrebbe anche coincidere con a). Tornando a $\forall z\, r(z, a) \in T$ si ottiene $r(b, a) \in T$ che è impossibile.

9. F la regola $(\forall i)$ richiede che la variabile su cui si introduce il quantificatore universale (nel nostro caso x) non sia libera in nessuna delle ipotesi, mentre nel nostro caso è libera in $p(x)$. Per un esempio concreto sia $\forall x(p(x) \to q(x))$ l'unico elemento di T: allora $T, p(x) \rhd q(x)$, ma $T, p(x) \rhd \forall x\, q(x)$ violerebbe il teorema di correttezza, dato che $T, p(x) \not\models \forall x\, q(x)$ come si può mostrare per esempio con un'interpretazione con due elementi nel dominio.

10. Supponiamo che un'interpretazione I soddisfi i tre enunciati (che indichiamo con F, G e H) a sinistra del simbolo di conseguenza logica. L'obiettivo è mostrare che I soddisfa anche l'enunciato sulla destra, che è universale. Fissato uno stato σ e un arbitrario $d \in D^I$ basta mostrare che $I, \sigma[y/d] \models p(f(y))$.

Dato che $I \models G$ si ha $(d, f^I(d)) \in r^I$ e quindi $I, \sigma[x/f^I(d)] \models \exists y\, r(y, x)$. Perciò, da $I \models F$, segue che $I, \sigma[x/f^I(d)] \models p(x) \vee q(g(x))$. Se $f^I(d) \in p^I$ abbiamo già ottenuto $I, \sigma[y/d] \models p(f(y))$.

Altrimenti $g^I(f^I(d)) \in q^I$ e possiamo sfruttare $I \models H$: dato che $I, \sigma[x/f^I(d)] \models q(g(x)) \to p(x)$ si ha anche in questo caso $f^I(d) \in p^I$ e quindi $I, \sigma[y/d] \models p(f(y))$.

11. Dobbiamo definire un'interpretazione che soddisfa i tre enunciati dell'insieme. Ecco un'interpretazione con queste caratteristiche:

$$D^I = \{0, 1\}, \quad p^I = \{0\}, \quad r^I = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}.$$

12. (i) $m(b) \wedge i(b, a) \wedge m(md(a))$;

(ii) $\forall x\big(m(x) \wedge m(p(x)) \to \exists y(i(x, y) \wedge (m(y) \vee m(p(y)) \vee m(md(y))))\big)$.

13. Per stabilire se la conseguenza logica vale utilizziamo l'Algoritmo 4.39 delle dispense e costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.30 e 4.31) un tableau con la radice etichettata dalle formule a sinistra e dalla negazione della formula a destra del simbolo di conseguenza logica. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$q \to p, p \to r, \neg r \land s \to q, \neg s \to \neg t \lor p, \underline{\neg(t \to r)}$$

$$q \to p, \underline{p \to r}, \neg r \land s \to q, \neg s \to \neg t \lor p, t, \neg r$$

$$\underline{q \to p}, \neg p, \neg r \land s \to q, \neg s \to \neg t \lor p, t, \neg r \qquad\qquad q \to p, r, \neg r \land s \to q, \neg s \to \neg t \lor p, t, \neg r \quad \otimes$$

$$\neg q, \neg p, \underline{\neg r \land s \to q}, \neg s \to \neg t \lor p, t, \neg r \qquad\qquad p, \neg p, \neg r \land s \to q, \neg s \to \neg t \lor p, t, \neg r \quad \otimes$$

$$\neg q, \neg p, \underline{\neg(\neg r \land s)}, \neg s \to \neg t \lor p, t, \neg r \qquad\qquad \neg q, \neg p, q, \neg s \to \neg t \lor p, t, \neg r \quad \otimes$$

$$\neg q, \neg p, r, \neg s \to \neg t \lor p, t, \neg r \quad \otimes \qquad\qquad \neg q, \neg p, \neg s, \underline{\neg s \to \neg t \lor p}, t, \neg r$$

$$\neg q, \neg p, \neg s, s, t, \neg r \quad \otimes \qquad\qquad \neg q, \neg p, \neg s, \underline{\neg t \lor p}, t, \neg r$$

$$\neg q, \neg p, \neg s, \neg t, t, \neg r \quad \otimes \qquad\qquad \neg q, \neg p, \neg s, p, t, \neg r \quad \otimes$$

Il tableau è chiuso e quindi la conseguenza logica vale.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\exists z(p(z) \land \neg q(g(z))) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(p(x) \to q(f(x)))}{p(z) \to q(f(z))} \qquad \dfrac{[p(z) \land \neg q(g(z))]^1}{p(z)}}{q(f(z))}}{\exists y\, q(y)} \qquad \dfrac{\dfrac{[p(z) \land \neg q(g(z))]^1}{\neg q(g(z))}}{\exists y\, \neg q(y)}}{\exists y\, q(y) \land \exists y\, \neg q(y)}}{\exists y\, q(y) \land \exists y\, \neg q(y)}\,{}_1$$

15. Utilizziamo l'Algoritmo 3.16 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.28:

$$\big\langle [\neg\big((\neg p \vee \neg(q \vee \neg r)) \wedge ((\neg s \to t) \to u)\big)] \big\rangle$$
$$\langle [\neg(\neg p \vee \neg(q \vee \neg r)), \neg((\neg s \to t) \to u)] \rangle$$
$$\langle [p, \neg((\neg s \to t) \to u)], [q \vee \neg r, \neg((\neg s \to t) \to u)] \rangle$$
$$\langle [p, \neg s \to t], [p, \neg u], [q, \neg r, \neg((\neg s \to t) \to u)] \rangle$$
$$\langle [p, s, t], [p, \neg u], [q, \neg r, \neg s \to t], [q, \neg r, \neg u] \rangle$$
$$\langle [p, s, t], [p, \neg u], [q, \neg r, s, t], [q, \neg r, \neg u] \rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(p \vee s \vee t) \wedge (p \vee \neg u) \wedge (q \vee \neg r \vee s \vee t) \wedge (q \vee \neg r \vee \neg u).$$