Prova scritta di Logica Matematica 1
22 giugno 2011

Cognome | Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $p \to q \wedge \neg r \equiv (p \to q) \wedge (r \to \neg p)$. **V** | **F** 1pt

2. Se F è valida allora tutti i tableaux per F sono chiusi. **V** | **F** 1pt

3. Se un insieme di Hintikka contiene una α-formula allora deve contenere entrambi i suoi ridotti. **V** | **F** 1pt

4. Sia $\mathcal{L}$ il linguaggio in cui a è un simbolo di costante, f e g simboli di funzione risp. unario e binario, p e r simboli di relazione risp. unario e binario. Quante delle seguenti stringhe di simboli di $\mathcal{L}$ sono formule?
$f(a) \to \neg r(x,x)$, $\neg f(g(a,x))$, $f(g(f(x),y))$, $\forall x\, p(f(a))$. **0** | **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

5. Se $I, \sigma \models \forall x(F \vee \neg G)$ allora $I, \sigma \models \forall x\, F$ oppure $I, \sigma \models \forall x\, \neg G$. **V** | **F** 1pt

6. Se I è un'interpretazione normale di un linguaggio con uguaglianza allora $I \models \forall x\, \forall y(x = y \wedge r(x,y) \to r(y,x))$. **V** | **F** 1pt

7. Trasformando in forma prenessa un enunciato F si ottiene un enunciato logicamente equivalente a F. **V** | **F** 1pt

8. Se I e J sono interpretazioni elementarmente equivalenti e F è un enunciato tale che $I \not\models F$, allora $J \not\models F$. **V** | **F** 1pt

9. $\dfrac{p(x)}{\forall x\, p(x)}$ è una deduzione naturale corretta. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Considerate il linguaggio $\mathcal{L} = \{c, f, p, r\}$ dove c è un simbolo di costante, f è un simbolo di funzione unario, p è un simbolo di relazione unario e r è un simbolo di relazione binario. Sia I l'interpretazione per $\mathcal{L}$ definita da

$$D^I = \{A, B, C, D\}; \quad c^I = C; \quad f^I(A) = f^I(B) = B; \quad f^I(C) = C; \quad f^I(D) = A;$$
$$p^I = \{C\}; \quad r^I = \{(C, A), (C, B), (C, C), (C, D)\}.$$

Definite una relazione di congruenza $\sim$ su I con due classi d'equivalenza e un'interpretazione J con $D^J = \{0, 1\}$ tale che $J \cong I/\!\sim$. 4pt

11. Sul retro del foglio dimostrate l'insoddisfacibilità di 4pt

$$\{\exists x(\forall y\, r(x,y) \wedge \neg r(f(x),x)), \forall x\, \forall y(r(x,y) \to r(y,x))\}.$$

12. Sia $\mathcal{L} = \{a, m, i, p, c\}$ un linguaggio dove a è un simbolo di costante, m un simbolo di funzione unario, i è un simbolo di relazione unario e p e c sono simboli di relazione binari. Interpretando a come "Andrea", $m(x)$ come "il miglior amico di x", $i(x)$ come "x è invitato alla festa", $p(x, y)$ come "x è parente di y", $c(x, y)$ come "x conosce y", traducete le seguenti frasi utilizzando lo spazio sotto di esse:

(i) né Andrea né il suo miglior amico sono invitati alla festa; 3pt

(ii) tutti gli invitati alla festa conoscono almeno un parente di Andrea non invitato alla festa. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$(\neg p \vee (r \to q)) \wedge s \to (q \wedge \neg(r \wedge \neg s)) \vee \neg(q \vee (s \to p))$$

è valida. Se la formula non è valida definite un'interpretazione che non la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\exists x\, p(x), \forall x(p(x) \to \forall y\, q(f(x), y)) \rhd \exists z\, q(z, z).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((p \to q) \wedge \neg(\neg r \to s)\big) \vee \neg\big(\neg(t \wedge u) \to \neg w\big).$$

Soluzioni

1. **V** come si può verificare ad esempio con le tavole di verità.
2. **F** Se F è valida non è certamente insoddisfacibile e quindi i tableaux per F sono tutti aperti.
3. **V** per la Definizione 4.25 delle dispense.
4. **1** solo l'ultima stringa è una formula: la terza è un termine, mentre le prime due non sono né formule né termini.
5. **F** quando F e G sono entrambe $p(x)$ l'affermazione è falsa (si veda anche l'Esercizio 7.57 delle dispense).
6. **V** dato che I è normale se $I, \sigma[x/d, y/d'] \models x = y$ deve essere $d = d'$ e quindi se $(d, d') \in r^I$ si ha anche $(d', d) \in r^I$.
7. **V** si veda il Teorema 7.61 delle dispense.
8. **V** per definizione di interpretazioni elementarmente equivalenti.
9. **F** in questa (erronea) applicazione della regola $(\forall i)$ la variabile x è libera nell'ipotesi $p(x)$.
10. Definiamo $\sim$ in modo che le sue classi d'equivalenza siano $\{A, B, D\}$ e $\{C\}$. Poniamo poi $c^J = 1$, $f^J(0) = 0$, $f^J(1) = 1$, $p^J = \{1\}$, $r^J = \{(1, 0), (1, 1)\}$, in modo che la funzione $\varphi : D^J \to D^{I/\sim}$ definita da $\varphi(0) = [A]$, $\varphi(1) = [C]$ sia un isomorfismo.
11. Dobbiamo mostrare che se nessuna interpretazione I soddisfa entrambi gli enunciati, che indichiamo con F e G. Se $I, \sigma \models F$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[x/d_0] \models \forall y\, r(x, y) \wedge \neg r(f(x), x)$. Questo significa che $(f^I(d_0), d_0) \notin r^I$ e che $I, \sigma[x/d_0] \models \forall y\, r(x, y)$. Da quest'ultimo fatto segue in particolare che $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$. Ma allora $I, \sigma[x/d_0, y/f^I(d_0)] \not\models r(x, y) \to r(y, x)$ e quindi $I \not\models G$.
12. (i) $\neg i(a) \wedge \neg i(m(a))$;
(ii) $\forall x(i(x) \to \exists y(c(x, y) \wedge p(y, a) \wedge \neg i(y)))$.

13. Per stabilire se la formula è valida costruiamo un tableau per la sua negazione. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. Utilizziamo ripetutamente la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.

$$\underline{\neg\big((\neg p \vee (r \to q)) \wedge s \to (q \wedge \neg(r \wedge \neg s)) \vee \neg(q \vee (s \to p))\big)}$$

$$\underline{(\neg p \vee (r \to q)) \wedge s}, \neg\big((q \wedge \neg(r \wedge \neg s)) \vee \neg(q \vee (s \to p))\big)$$

$$\neg p \vee (r \to q), s, \underline{\neg\big((q \wedge \neg(r \wedge \neg s)) \vee \neg(q \vee (s \to p))\big)}$$

$$\neg p \vee (r \to q), s, \underline{\neg(q \wedge \neg(r \wedge \neg s))}, q \vee (s \to p)$$

$$\neg p \vee (r \to q), s, \neg q, \underline{q \vee (s \to p)} \qquad\qquad \neg p \vee (r \to q), s, \underline{r \wedge \neg s}, q \vee (s \to p)$$

$$\neg p \vee (r \to q), s, r, \neg s, q \vee (s \to p) \quad \otimes$$

$$\neg p \vee (r \to q), s, \neg q, q \quad \otimes \qquad\qquad \neg p \vee (r \to q), s, \neg q, \underline{s \to p}$$

$$\neg p \vee (r \to q), s, \neg q, \neg s \quad \otimes \qquad\qquad \underline{\neg p \vee (r \to q)}, s, \neg q, p$$

$$\neg p, s, \neg q, p \quad \otimes \qquad\qquad \underline{r \to q}, s, \neg q, p$$

$$\neg r, s, \neg q, p \quad \bigcirc \qquad\qquad q, s, \neg q, p \quad \otimes$$

Il tableau è aperto e quindi la formula di partenza non è valida. Un'interpretazione che non la soddisfa è data da $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{F}$, $v(r) = \mathbf{F}$, $v(s) = \mathbf{V}$.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\exists x\, p(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[p(x)]^1 \qquad \dfrac{\forall x(p(x) \to \forall y\, q(f(x), y))}{p(x) \to \forall y\, q(f(x), y)}}{\forall y\, q(f(x), y)}}{q(f(x), f(x))}}{\exists z\, q(z, z)}}{\exists z\, q(z, z)}\,1$$

15.

$$\Big\langle \big[\neg\big((p \to q) \wedge \neg(\neg r \to s)\big) \vee \neg\big(\neg(t \wedge u) \to \neg w\big)\big] \Big\rangle$$
$$\Big\langle \big[\neg\big((p \to q) \wedge \neg(\neg r \to s)\big), \neg\big(\neg(t \wedge u) \to \neg w\big)\big] \Big\rangle$$
$$\Big\langle \big[\neg(p \to q), \neg r \to s, \neg\big(\neg(t \wedge u) \to \neg w\big)\big] \Big\rangle$$
$$\Big\langle \big[\neg(p \to q), r, s, \neg\big(\neg(t \wedge u) \to \neg w\big)\big] \Big\rangle$$
$$\Big\langle [p, r, s, \neg\big(\neg(t \wedge u) \to \neg w\big)], [\neg q, r, s, \neg\big(\neg(t \wedge u) \to \neg w\big)] \Big\rangle$$
$$\langle [p, r, s, \neg(t \wedge u)], [p, r, s, w], [\neg q, r, s, \neg(t \wedge u)], [\neg q, r, s, w] \rangle$$
$$\langle [p, r, s, \neg t, \neg u], [p, r, s, w], [\neg q, r, s, \neg t, \neg u], [\neg q, r, s, w] \rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è
$(p \vee r \vee s \vee \neg t \vee \neg u) \wedge (p \vee r \vee s \vee w) \wedge (\neg q \vee r \vee s \vee \neg t \vee \neg u) \wedge (\neg q \vee r \vee s \vee w)$.