Prova scritta di Logica Matematica 1
7 settembre 2011

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Se $F \to G$ è valida e $\neg G$ è soddisfacibile allora $\neg F$ è soddisfacibile. **V** | **F** 1pt

2. Se Γ è un insieme di Hintikka cui appartiene $\neg(p \vee q \to r)$ allora si ha necessariamente $\neg p \notin \Gamma$. **V** | **F** 1pt

3. Se $F \rhd G$ allora $\rhd F \to G$. **V** | **F** 1pt

4. Quante delle seguenti formule sono in forma prenessa?
$\exists x\, r(a,x) \to \neg p(a)$, $\forall x\, \exists y (r(x,y) \to \neg r(y,x))$,
$\exists x \big(\neg r(a,x) \vee (r(a,b) \wedge \neg r(x,b))\big)$, $\forall x (p(x) \to \exists y\, r(x,y))$. **0** | **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

5. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{0,1,2,3\}$, $p^I = \{0,1,3\}$ e $r^I = \{(0,0),(1,0),(1,2),(2,0),(2,3),(3,0),(3,2)\}$.
Allora $I \models \forall x(p(x) \to \exists y\, r(y,x) \vee \exists z(r(x,z) \wedge \neg p(z)))$. **V** | **F** 1pt

6. $\forall x\, p(x) \to \exists x\, q(x) \equiv \exists x(\neg p(x) \vee q(x))$. **V** | **F** 1pt

7. Se $\sim$ è una relazione di congruenza sull'interpretazione I nel linguaggio $\mathcal{L}$ allora $I \equiv_{\mathcal{L}} I/\!\sim$. **V** | **F** 1pt

8. Se F è una δ-formula e G un'istanza di F allora $F \models G$. **V** | **F** 1pt

9. Quando si agisce su una δ-formula in un tableaux predicativo essa continua a comparire nelle etichette dei nodi successivi. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate l'insoddisfacibilità di 4pt

$$\{\forall x(p(x) \to r(x,f(x)) \wedge \neg p(f(x))), \exists x(p(x) \wedge \neg q(f(x))), \forall x\, \forall y(r(x,y) \to q(f(x)) \vee p(y))\}.$$

11. Sul retro del foglio dimostrate che 4pt

$$\forall x\big((p(x) \to \neg p(f(x))) \wedge (\neg p(x) \to p(f(x)))\big) \not\models_{=} \exists x\, f(f(x)) = x.$$

12. Sia $\{b, m, p, c, g, a\}$ un linguaggio dove b e m sono simboli di costante, p è un simbolo di funzione unario, c e g sono simboli di relazione unari e a è un simbolo di relazione binario. Interpretando b come "Bobi", m come "Micio", $p(x)$ come "il padrone di x", $c(x)$ come "x è un cane", $g(x)$ come "x è un gatto" e $a(x, y)$ come "x ama y", traducete le seguenti frasi:

(i) il padrone di Bobi ama Bobi, ma non il padrone di Micio; 3pt

(ii) i cani che amano qualche gatto hanno padroni che amano tutti i gatti. 3pt

13. Mostrate che $F \vee G, G \to H, F \to K \rhd \neg H \to K.$ 3pt

Usate solo le regole della deduzione naturale proposizionale, comprese le quattro regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Usando il metodo dei tableaux stabilite che 5pt

$$\exists x\, p(x), \forall x(p(x) \to \forall y\, q(x, y, a)) \models \exists x\, \exists y(q(x, x, y) \wedge q(x, y, y)).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$(\neg p \to \neg q \wedge r) \to \neg(s \to u \wedge \neg v) \wedge \neg(w \vee t)$$

Soluzioni

1. **V** Se v è una interpretazione che soddisfa $\neg G$, dato che $v(F \to G) = \mathbf{V}$ (per la validità di $F \to G$), deve essere $v(F) = \mathbf{F}$ e di conseguenza $v(\neg F) = \mathbf{V}$.
2. **F** $\{\neg(p \vee q \to r), p \vee q, \neg r, q, \neg p\}$ è un insieme di Hintikka.
3. **V** ogni deduzione che mostra $F \rhd G$ diventa una deduzione di $\rhd F \to G$ con un'applicazione della regola $(\to i)$.
4. **2** la seconda e la terza formula sono in forma prenessa.
5. **V** per ogni $d \in p^I$ si ha $I, \sigma[x/d] \models \exists y\, r(y,x) \vee \exists z(r(x,z) \wedge \neg p(z))$.
6. **V** usare i Lemmi 7.55 e 2.23.3 delle dispense.
7. **V** si veda il Corollario 9.28 delle dispense.
8. **F** ad esempio $\exists x\, p(x) \not\models p(a)$ (non farsi confondere dal Lemma 10.7 delle dispense).
9. **F** nella clausola 5 dell'Algoritmo 10.17 delle dispense la δ-formula non compare nell'etichetta del nuovo nodo.
10. Dobbiamo mostrare che non esiste un'interpretazione I che soddisfa tutti i tre enunciati, che indichiamo con F, G e H. Supponiamo per assurdo che I abbia questa proprietà. Dato che $I \models G$ esiste $d_0 \in D^I$ tale che $d_0 \in p^I$ e $f^I(d_0) \notin q^I$. Da $I \models F$ segue in particolare che $I, \sigma[x/d_0] \models p(x) \to r(x, f(x)) \wedge \neg p(f(x))$. Da quest'ultimo fatto e da $d_0 \in p^I$ seguono $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$ e $f^I(d_0) \notin p^I$. Dato che $I \models H$ abbiamo $I, \sigma[x/d_0, y/f^I(d_0)] \models r(x,y) \to q(f(x)) \vee p(y)$. Da quest'ultimo fatto e da $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$ segue che vale almeno uno tra $f^I(d_0) \in q^I$ e $f^I(d_0) \in p^I$. Entrambe le possibilità contraddicono quanto ottenuto in precedenza, ed abbiamo quindi l'assurdo cercato.
11. Dobbiamo definire un'interpretazione normale (visto che consideriamo la logica con uguaglianza) che soddisfi il primo enunciato, ma non il secondo. L'interpretazione I definita da
$$D^I = \{0,1,2,3\}, \quad p^I = \{0,2\}, \quad f^I(0) = 1, f^I(1) = 2, f^I(2) = 3, f^I(3) = 0$$
ha queste caratteristiche. Anche l'interpretazione J definita da
$$D^J = \mathbb{N}, \quad p^J = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari}\}, \quad f^J(n) = n+1$$
andrebbe bene.
12. (i) $a(p(b), b) \wedge \neg a(p(b), p(m))$;
(ii) $\forall x\Big(c(x) \wedge \exists y\big(g(y) \wedge a(x,y)\big) \to \forall z\big(g(z) \to a(p(x), z)\big)\Big)$.
13. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\cfrac{\cfrac{F \vee G \qquad \cfrac{[F]^1 \qquad F \to K}{K} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[G]^1 \qquad G \to H}{H} \qquad [\neg H]^2}{\bot}}{K}}{K}\;{}^{1}}{\neg H \to K}\;{}^{2}$$

14. Per stabilire la conseguenza logica utilizziamo l'Algoritmo 10.48 delle dispense e costruiamo un tableau chiuso con la radice etichettata dalle formule a sinistra del simbolo di conseguenza logica e la negazione della formula a destra. Indichiamo con F, G, H e K le γ-formule $\forall x(p(x) \to \forall y\, q(x,y,a))$, $\neg\exists x\, \exists y(q(x,x,y) \wedge q(x,y,y))$, $\forall y\, q(b,y,a)$ e $\neg\exists y(q(b,b,y) \wedge q(b,y,y))$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{\exists x\, p(x)}, F, G$$

$$p(b), \underline{F}, G$$

$$p(b), F, \underline{p(b) \to \forall y\, q(b,y,a)}, G$$

$$p(b), F, \neg p(b), G \qquad\qquad p(b), F, H, \underline{G}$$

$$\otimes$$

$$p(b), F, H, G, \underline{K}$$

$$p(b), F, H, G, K, \underline{\neg(q(b,b,a) \wedge q(b,a,a))}$$

$$p(b), F, \underline{H}, G, K, \neg q(b,b,a) \qquad\qquad p(b), F, \underline{H}, G, K, \neg q(b,a,a)$$

$$p(b), F, H, q(b,b,a), G, K, \neg q(b,b,a) \qquad p(b), F, H, q(b,a,a), G, K, \neg q(b,a,a)$$

$$\otimes \qquad\qquad\qquad\qquad \otimes$$

15.

$$[\langle(\neg p \to \neg q \wedge r) \to \neg(s \to u \wedge \neg v) \wedge \neg(w \vee t)\rangle]$$
$$[\langle\neg(\neg p \to \neg q \wedge r)\rangle, \langle\neg(s \to u \wedge \neg v) \wedge \neg(w \vee t)\rangle]$$
$$[\langle\neg p, \neg(\neg q \wedge r)\rangle, \langle\neg(s \to u \wedge \neg v), \neg(w \vee t)\rangle]$$
$$[\langle\neg p, q\rangle, \langle\neg p, \neg r\rangle, \langle s, \neg(u \wedge \neg v), \neg(w \vee t)\rangle]$$
$$[\langle\neg p, q\rangle, \langle\neg p, \neg r\rangle, \langle s, \neg(u \wedge \neg v), \neg w, \neg t\rangle]$$
$$[\langle\neg p, q\rangle, \langle\neg p, \neg r\rangle, \langle s, \neg u, \neg w, \neg t\rangle, \langle s, v, \neg w, \neg t\rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (s \wedge \neg u \wedge \neg w \wedge \neg t) \vee (s \wedge v \wedge \neg w \wedge \neg t).$$