Prova scritta di Logica Matematica
26 febbraio 2019

Cognome Nome Matricola

Indicate su ogni foglio che consegnate cognome, nome e numero di matricola.

Nella prima parte ogni riposta corretta vale 1, ogni risposta sbagliata -1, ogni risposta non data 0. Il punteggio minimo per superare questa parte è 6. Il punteggio che eccede 6 viene sommato al risultato della seconda parte per ottenere il voto dello scritto.

Nella seconda parte per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

a. $p \to ((p \wedge q \to \neg r) \to r \wedge \neg q) \equiv (\neg r \vee q \to \neg p) \vee (p \wedge q \wedge r)$. **V** **F**

b. Se $F \models G$ e $\neg F \models H$ allora $G \vee H$ è valida. **V** **F**

c. Quante delle seguenti sostituzioni sono ammissibili in $\neg \forall x\, \exists y\, r(x, f(y,z)) \vee r(u,z)$?
$\{x/y\}$, $\{z/f(y,y)\}$, $\{z/u\}$, $\{u/f(x,y)\}$. **0** **1** **2** **3** **4**

d. Sia I l'interpretazione normale con $D^I = \{0,1,2,3\}$, $f^I(0) = 2$, $f^I(1) = 0$, $f^I(2) = 0$, $f^I(3) = 3$, $p^I = \{0,1\}$, $r^I = \{(0,0),(1,0),(1,2),(1,3),(2,1),(3,3)\}$.
Allora $I \models \forall z(p(z) \vee \exists y\,(y \neq z \wedge r(f(y), f(z))))$. **V** **F**

e. $\forall z\, p(z) \vee \forall x\, r(x,x) \equiv \forall z(p(z) \vee r(z,z))$. **V** **F**

f. Ogni interpretazione che soddisfa gli assiomi dell'uguaglianza $\mathsf{Eq}_{\mathcal{L}}$ è normale. **V** **F**

g. Se $\sim$ è una relazione di congruenza su I, $d_0 \sim d_1$ e $(d_0, d_1) \in r^I$
allora $I, \sigma[x/d_1, y/d_0] \models r(x,y)$. **V** **F**

h. Se un tableau sistematico per l'enunciato F è aperto
allora nessun tableau (anche non sistematico) per F è chiuso. **V** **F**

i. Esiste un insieme di Hintikka che contiene gli enunciati $\neg q(c)$,
$\forall x(\neg p(x) \vee q(x))$ e $\exists y\, p(y)$. **V** **F**

j. Questo albero rappresenta una deduzione naturale corretta: **V** **F**

$$\dfrac{\dfrac{\exists x\, p(f(x)) \qquad \dfrac{[p(f(x))]^1 \qquad \dfrac{\forall x\, q(x)}{q(x)}}{p(f(x)) \wedge q(x)}}{p(f(x)) \wedge q(x)}\,{\scriptstyle 1}}{\forall x(p(f(x)) \wedge q(x))}$$

k. Scrivete nel riquadro l'enunciato del lemma che stabilisce la relazione tra una γ-formula e le sue istanze.

SECONDA PARTE

Usate il retro del foglio per svolgere tutti gli esercizi salvo il numero 2.

1. Usando l'algoritmo di Fitting mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$\neg(\neg r \vee \neg(\neg s \to p)) \to ((t \to \neg q \wedge v) \to w).$$

2. Sia $\mathcal{L} = \{b, m, f, a, c\}$ un linguaggio dove b è un simbolo di costante, m un simbolo di funzione unario, f è un simbolo di relazione unario e a e c sono simboli di relazione binari. Interpretando b come "Beatrice", $m(x)$ come "la miglior amica di x", $f(x)$ come "x è invitato alla festa", $a(x, y)$ come "x è amico di y", $c(x, y)$ come "x conosce y", traducete la frase:

tutti gli invitati alla festa conoscono almeno un amico della miglior amica di Beatrice non invitato alla festa. 3pt

3. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$(\neg r \to \neg s) \to (p \vee (\neg q \wedge \neg r) \to \neg(p \wedge \neg q \to s)) \vee p$$

è valida. Se la formula non è valida definite una valutazione che lo testimoni.

4. Mettete in forma prenessa la formula 2pt

$$\neg\forall x\, \exists y\, r(x, f(y)) \to \neg\exists y\, \forall z\, \neg r(f(y), z) \vee \neg\forall v\, p(v).$$

Se riuscite, usate il minimo numero di quantificatori possibili. 1pt

5. Dimostrate che 4pt

$$\forall x(\forall y\, r(f(y), f(x)) \to p(x)), \neg p(c), \forall u(\forall v\, r(f(v), u) \vee p(u)) \vDash p(f(c)).$$

6. Dimostrate che l'insieme di enunciati 4pt

$$\{p(a) \wedge \neg p(b), \forall w\, f(w) \neq w, \forall x\, \forall y(p(x) \wedge \neg p(y) \to r(f(x), f(y))), \forall z\, \forall u(r(z, u) \to p(z) \wedge \neg p(u))\}$$

è soddisfacibile nella logica con uguaglianza.

7. Sia $\mathcal{L} = \{p, r\}$ il linguaggio con un simbolo di relazione unario ed uno binario. Siano I e J le seguenti interpretazioni per $\mathcal{L}$: 3pt

$$D^I = \{0, 1, 2, 3\}, \quad p^I = \{0, 2\}, \quad r^I = \{(0, 1), (2, 1), (2, 2)\};$$

$$D^J = \{A, B, C, D, E, F, G\}, \quad p^J = \{A, D, E\}, \quad r^J = \{(A, B), (D, B), (E, B), (E, E)\}.$$

Definite un omomorfismo forte suriettivo di J in I.

Scrivete una formula nel linguaggio $\mathcal{L}$ a cui sia aggiunta l'uguaglianza che sia vera in I ma non in J (consideriamo I e J interpretazioni normali).

8. Usando il metodo dei tableaux stabilite che l'insieme di enunciati 4pt

$$\{\exists z\, r(a, z), \forall x(p(x) \to \forall u\, \neg r(u, x)), p(a), \forall y(p(y) \vee r(y, a))\}$$

è insoddisfacibile.

9. Dimostrate, usando solo le regole della deduzione naturale predicativa (comprese le sei regole derivate) che 5pt

$$\forall x(\exists y\, r(y, x) \to \forall v\, \neg r(f(x), v)), \exists z(\neg p(z) \vee r(f(z), z)), \forall u(r(u, u) \to p(u)) \rhd \exists w\, \neg r(w, w).$$

Soluzioni

a. V come si verifica per esempio con le tavole di verità.

b. V sia v un'interpretazione qualsiasi: se $v(F) = \mathbf{V}$ allora $v(G) = \mathbf{V}$, mentre se $v(F) = \mathbf{F}$ allora $v(\neg F) = \mathbf{V}$ e quindi $v(H) = \mathbf{V}$; in ogni caso $v(G \vee H) = \mathbf{V}$.

c. 3 la seconda sostituzione non è ammissibile, perché la prima occorrenza libera di z è nel raggio d'azione di un quantificatore su y. La prima sostituzione è ammissibile perché x non ha occorrenze libere, la terza perché non ci sono quantificatori su u, la quarta perché l'unica occorrenza libera di u non è nel raggio d'azione di nessun quantificatore.

d. F perché $I, \sigma[z/3] \not\models p(z) \vee \exists y\,(y \neq z \wedge r(f(y), f(z)))$.

e. F analogamente a quanto fatto nella seconda parte dell'Esercizio 7.77 delle dispense, non è difficile dimostrare che $\forall z(p(z) \vee r(z,z)) \not\models \forall z\, p(z) \vee \forall x\, r(x,x)$.

f. F come mostrato nell'Esempio 7.105 delle dispense.

g. V per definizione di relazione di congruenza $d_0 \sim d_1$ e $(d_0, d_1) \in r^I$ implicano $(d_1, d_0) \in r^I$, che significa $I, \sigma[x/d_1, y/d_0] \models r(x,y)$.

h. V l'ipotesi e il Teorema di completezza (10.37 delle dispense) implicano che F è soddisfacibile; allora il Teorema di correttezza (10.29 delle dispense) ci assicura che tutti i tableaux per F sono aperti.

i. V $\{\neg q(c), \forall x(\neg p(x) \vee q(x)), \exists y\, p(y), p(b), \neg p(c) \vee q(c), \neg p(c), \neg p(b) \vee q(b), q(b)\}$ è un insieme di Hintikka.

j. F la presunta applicazione di $(\exists i)$ nel passo contrassegnato da 1 non è corretta, perché x è libera in $p(f(x)) \wedge q(x)$.

k. se G è una γ-formula e H una sua istanza allora $G \models H$ (Lemma 10.6 delle dispense).

1. Utilizziamo l'Algoritmo 3.18 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.30:

$$\langle[\neg(\neg r \vee \neg(\neg s \to p)) \to ((t \to \neg q \wedge v) \to w)]\rangle$$
$$\langle[\neg r \vee \neg(\neg s \to p), (t \to \neg q \wedge v) \to w]\rangle$$
$$\langle[\neg r, \neg(\neg s \to p), (t \to \neg q \wedge v) \to w]\rangle$$
$$\langle[\neg r, \neg(\neg s \to p), \neg(t \to \neg q \wedge v), w]\rangle$$
$$\langle[\neg r, \neg s, \neg(t \to \neg q \wedge v), w], [\neg r, \neg p, \neg(t \to \neg q \wedge v), w]\rangle$$
$$\langle[\neg r, \neg s, t, w], [\neg r, \neg s, \neg(\neg q \wedge v), w], [\neg r, \neg p, t, w], [\neg r, \neg p, \neg(\neg q \wedge v), w]\rangle$$
$$\langle[\neg r, \neg s, t, w], [\neg r, \neg s, q, \neg v, w], [\neg r, \neg p, t, w], [\neg r, \neg p, q, \neg v, w]\rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(\neg r \vee \neg s \vee t \vee w) \wedge (\neg r \vee \neg s \vee q \vee \neg v \vee w) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee t \vee w) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee q \vee \neg v \vee w).$$

2. $\forall x(f(x) \to \exists y(c(x,y) \wedge a(y, m(b)) \wedge \neg f(y)))$.

3. Per stabilire se la formula è valida applichiamo l'Algoritmo 4.5 delle dispense alla negazione della formula. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{\neg((\neg r \to \neg s) \to (p \vee (\neg q \wedge \neg r) \to \neg(p \wedge \neg q \to s)) \vee p)}$$

$$|$$

$$\neg r \to \neg s, \underline{\neg((p \vee (\neg q \wedge \neg r) \to \neg(p \wedge \neg q \to s)) \vee p)}$$

$$|$$

$$\neg r \to \neg s, \underline{\neg(p \vee (\neg q \wedge \neg r) \to \neg(p \wedge \neg q \to s))}, \neg p$$

$$|$$

$$\neg r \to \neg s, \underline{p \vee (\neg q \wedge \neg r)}, p \wedge \neg q \to s, \neg p$$

$$\begin{array}{cc} \diagup & \diagdown \\ \neg r \to \neg s, p, p \wedge \neg q \to s, \neg p & \neg r \to \neg s, \underline{\neg q \wedge \neg r}, p \wedge \neg q \to s, \neg p \\ \otimes & | \\ & \underline{\neg r \to \neg s}, \neg q, \neg r, p \wedge \neg q \to s, \neg p \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \diagup & \diagdown \\ r, \neg q, \neg r, p \wedge \neg q \to s, \neg p & \neg s, \neg q, \neg r, \underline{p \wedge \neg q \to s}, \neg p \\ \otimes & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \diagup & \diagdown \\ \neg s, \neg q, \neg r, \underline{\neg(p \wedge \neg q)}, \neg p & \neg s, \neg q, \neg r, s, \neg p \\ & \otimes \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \diagup & \diagdown \\ \neg s, \neg q, \neg r, \neg p, \neg p & \neg s, \neg q, \neg r, q, \neg p \\ \bigcirc & \otimes \end{array}$$

Il tableau è aperto e quindi la formula di partenza non è valida. La foglia aperta ci permette di definire un'interpretazione che non la soddisfa: $v(p) = \mathbf{F}$, $v(q) = \mathbf{F}$, $v(r) = \mathbf{F}$, $v(s) = \mathbf{F}$.

4. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\neg\forall x\, \exists y\, r(x, f(y)) \to \neg\exists y\, \forall z\, \neg r(f(y), z) \vee \neg\forall v\, p(v)$$
$$\exists x\, \forall y\, \neg r(x, f(y)) \to \forall y\, \exists z\, r(f(y), z) \vee \exists v\, \neg p(v)$$
$$\exists x\, \forall y\, \neg r(x, f(y)) \to \forall y(\exists z\, r(f(y), z) \vee \exists v\, \neg p(v))$$
$$\exists x\, \forall y\, \neg r(x, f(y)) \to \forall y\, \exists z(r(f(y), z) \vee \neg p(z))$$
$$\forall x\, \forall y(\forall y\, \neg r(x, f(y)) \to \exists z(r(f(y), z) \vee \neg p(z)))$$
$$\forall x\, \forall y\, \exists z(\neg r(x, f(z)) \to r(f(y), z) \vee \neg p(z)).$$

5. Sia I sia un'interpretazione: dobbiamo dimostrare che I soddisfa i tre enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, che indichiamo con F, G e H, allora soddisfa anche $p(f(c))$.

Dato che $I \vDash G$ si ha $c^I \notin p^I$. Da $I \vDash F$ segue in particolare che $I, \sigma[x/c^I] \vDash \forall y\, r(f(y), f(x)) \to p(x)$. Se fosse $I, \sigma[x/c^I] \vDash \forall y\, r(f(y), f(x))$ dovremmo avere $c^I \in p^I$, in contraddizione con quanto osservato in precedenza. Quindi $I, \sigma[x/c^I] \nvDash \forall y\, r(f(y), f(x))$, cioè per qualche $d_0 \in D^I$ si ha $I, \sigma[x/c^I, y/d_0] \nvDash r(f(y), f(x))$. In altre parole, abbiamo $(f^I(d_0), f^I(c^I)) \notin r^I$.

Dall'ultima osservazione segue che $I, \sigma[u/f^I(c^I)] \nvDash \forall v\, r(f(v), u)$. Ma da $I \vDash H$ segue in particolare $I, \sigma[u/f^I(c^I)] \vDash \forall v\, r(f(v), u) \vee p(u)$ e quindi deve per forza essere $I, \sigma[u/f^I(c^I)] \vDash p(u)$, ovvero $f^I(c^I) \in p^I$. Abbiamo dunque ottenuto $I \vDash p(f(c))$, come volevamo.

6. Dobbiamo definire un'interpretazione normale che soddisfa i quattro enunciati dell'insieme. Due interpretazioni normali con queste caratteristiche sono definite da

$$D^I = \{0,1,2,3\}, \quad a^I = 0, \quad b^I = 1, \quad f^I(0) = 2, f^I(1) = 3, f^I(2) = 0, f^I(3) = 1,$$
$$p^I = \{0,2\}, \quad r^I = \{(0,1),(0,3),(2,1),(2,3)\};$$
$$D^J = \mathbb{N}, \quad a^J = 0, \quad b^J = 1, \quad f^J(n) = n+2,$$
$$p^J = \{\, n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari}\,\}, \quad r^J = \{\,(n,m) : n \text{ è pari e } m \text{ è dispari}\,\}.$$

Dato che le interpretazioni sono normali non abbiamo bisogno di specificare $=^I$ e $=^J$.

7. Sia φ l'omomorfismo forte di J in I che cerchiamo di costruire. Visto che $A \in p^J$ e $(A,A) \notin r^J$ deve essere $\varphi(A) = 0$, dato che 0 è l'unico elemento di D^I che sta in p^I ma tale che la coppia che lo ripete non sta in r^I. Per la stessa ragione deve essere $\varphi(D) = 0$. Invece $E \in p^J$ e $(E,E) \in r^J$ impongono che $\varphi(E) = 2$. Dato che $(A,B) \in r^J$ deve essere $(\varphi(A),\varphi(B)) \in r^I$, ovvero $(0,\varphi(B)) \in r^I$: l'unica scelta possibile è $\varphi(B) = 1$. Notiamo invece che C, F e G non appartengono a nessuna coppia che sta in r^J: dato che 3 è l'unico elemento di D^I con queste caratteristiche (rispetto a r^I) deve essere $\varphi(C) = \varphi(F) = \varphi(G) = 3$.

Si verifica che la φ così definita è effettivamente un omomorfismo forte suriettivo.

Estendendo il linguaggio con l'uguaglianza e considerando I e J come interpretazioni normali si può osservare che $I \vDash \exists x\, \exists y (p(x) \land p(y) \land \forall z (p(z) \to x = z \lor y = z))$, mentre J non soddisfa questo enunciato.

8. Per mostrare l'insoddisfacibilità del nostro insieme dobbiamo costruire (utilizzando l'Algoritmo 10.50 e le Convenzioni 10.21 e 10.23 delle dispense) un tableau chiuso con la radice etichettata dall'insieme. Indichiamo con F, G, H e K le γ-formule $\forall x(p(x) \to \forall u \neg r(u,x))$, $\forall y(p(y) \vee r(y,a))$, $\forall u \neg r(u,a)$ e $\forall u \neg r(u,b)$. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

- $\underline{\exists z\, r(a,z)}, F, p(a), G$
  - $r(a,b), \underline{F}, p(a), G$
    - $r(a,b), F, \underline{p(a) \to H}, p(a), G$
      - $r(a,b), F, \neg p(a), p(a), G$ $\otimes$
      - $r(a,b), F, H, p(a), \underline{G}$
        - $r(a,b), F, H, p(a), G, \underline{p(b) \vee r(b,a)}$
          - $r(a,b), \underline{F}, H, p(a), G, p(b)$
            - $r(a,b), F, \underline{p(b) \to K}, H, p(a), G, p(b)$
              - $r(a,b), F, \neg p(b), H, p(a), G, p(b)$ $\otimes$
              - $r(a,b), F, \underline{K}, H, p(a), G, p(b)$
                - $r(a,b), F, K, \neg r(a,b), H, p(a), G, p(b)$ $\otimes$
          - $r(a,b), F, \underline{H}, p(a), G, r(b,a)$
            - $r(a,b), F, H, \neg r(b,a), p(a), G, r(b,a)$ $\otimes$

Si noti la necessità di istanziare per due volte la γ-formula F.

9. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\exists z(\neg p(z) \vee r(f(z),z)) \qquad \dfrac{[\neg p(z) \vee r(f(z),z)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall u(r(u,u) \to p(u))}{r(z,z) \to p(z)} \quad [\neg p(z)]^1}{\neg r(z,z)}}{\exists w \neg r(w,w)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[r(f(z),z)]^1}{\exists y\, r(y,z)} \quad \dfrac{\forall x(\exists y\, r(y,x) \to \forall v \neg r(f(x),v))}{\exists y\, r(y,z) \to \forall v \neg r(f(z),v)}}{\forall v \neg r(f(z),v)}}{\neg r(f(z),f(z))}}{\exists w \neg r(w,w)}}{\exists w \neg r(w,w)}\,{}_1}{\exists w \neg r(w,w)}\,{}_2$$

Si noti l'utilizzo di (MT) per ottenere $\neg r(z,z)$.

Prova scritta di Logica Matematica
26 febbraio 2019

Cognome Nome Matricola

Indicate su ogni foglio che consegnate cognome, nome e numero di matricola.

Nella prima parte ogni riposta corretta vale 1, ogni risposta sbagliata -1, ogni risposta non data 0. Il punteggio minimo per superare questa parte è 6. Il punteggio che eccede 6 viene sommato al risultato della seconda parte per ottenere il voto dello scritto.

Nella seconda parte per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

a. Quante delle seguenti sostituzioni sono ammissibili in $\neg\forall y\,\exists x\, r(x, f(y,u)) \vee r(v,u)$?
$\{u/f(y,y)\}$, $\{u/v\}$, $\{x/y\}$, $\{v/f(y,x)\}$. **0 | 1 | 2 | 3 | 4**

b. Sia I l'interpretazione normale con $D^I = \{0,1,2,3\}$, $f^I(0) = 2$, $f^I(2) = 0$, $f^I(1) = 2$, $f^I(3) = 3$, $p^I = \{1,2\}$, $r^I = \{(0,1),(1,2),(1,0),(1,3),(2,2),(3,3)\}$.
Allora $I \vDash \forall z(p(z) \vee \exists y\,(y \neq z \wedge r(f(y), f(z))))$. **V | F**

c. Se un tableau (anche non sistematico) per l'enunciato F è chiuso allora nessun tableau sistematico per F è aperto. **V | F**

d. Questo albero rappresenta una deduzione naturale corretta: **V | F**

$$
\dfrac{\exists x\, p(g(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x\,\neg q(x)}{\neg q(x)} \qquad [p(g(x))]^1}{\neg q(x) \wedge p(g(x))}}{\dfrac{\neg q(x) \wedge p(g(x))}{\forall x(\neg q(x) \wedge p(g(x)))}}\,1
$$

e. $(p \vee q \to \neg r) \vee (r \wedge q \wedge \neg p) \equiv r \to ((r \wedge q \to p) \to \neg p \wedge \neg q)$. **V | F**

f. Se $F \vDash H$ e $G \vDash \neg H$ allora $F \wedge G$ è insoddisfacibile. **V | F**

g. Esiste un insieme di Hintikka che contiene gli enunciati $\neg p(a)$, $\forall x(p(x) \vee q(x))$ e $\exists y\,\neg q(y)$. **V | F**

h. $\exists z\, p(z) \wedge \exists x\, r(x,x) \equiv \exists z(p(z) \wedge r(z,z))$. **V | F**

i. Esiste un'interpretazione che soddisfa gli assiomi dell'uguaglianza $\mathsf{Eq}_{\mathcal{L}}$ ma non è normale. **V | F**

j. Se $\sim$ è una relazione di congruenza su I, $d_0 \sim d_1$ e $(d_0, d_1) \in r^I$ allora $I, \sigma[x/d_0, y/d_1] \vDash r(y,x)$. **V | F**

k. Scrivete nel riquadro l'enunciato del lemma che stabilisce la relazione tra una γ-formula e le sue istanze.

SECONDA PARTE

Usate il retro del foglio per svolgere tutti gli esercizi salvo il numero 2.

1. Usando l'algoritmo di Fitting mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$\neg(\neg p \vee \neg(q \to r)) \to ((s \to \neg t \wedge u) \to \neg v).$$

2. Sia $\mathcal{L} = \{a, m, i, p, c\}$ un linguaggio dove a è un simbolo di costante, m un simbolo di funzione unario, i è un simbolo di relazione unario e p e c sono simboli di relazione binari. Interpretando a come "Andrea", $m(x)$ come "il miglior amico di x", $i(x)$ come "x è invitato alla festa", $p(x, y)$ come "x è parente di y", $c(x, y)$ come "x conosce y", traducete la frase:

tutti gli invitati alla festa conoscono almeno un parente del miglior amico di Andrea non invitato alla festa. 3pt

3. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$(\neg p \to \neg q) \to r \vee ((s \wedge \neg p) \vee r \to \neg(r \wedge s \to q))$$

è valida. Se la formula non è valida definite una valutazione che lo testimoni.

4. Mettete in forma prenessa la formula 2pt

$$\neg\forall y\, \exists x\, \neg r(x, f(y)) \to \neg\exists x\, \forall z\, r(f(x), z) \vee \neg\forall u\, p(u).$$

Se riuscite, usate il minimo numero di quantificatori possibili. 1pt

5. Dimostrate che 4pt

$$\forall x(\forall y\, r(f(x), f(y)) \to \neg p(x)), \forall u(\forall v\, r(u, f(v)) \vee \neg p(u)), p(c) \vDash \neg p(f(c)).$$

6. Dimostrate che l'insieme di enunciati 4pt

$$\{\neg p(a) \wedge p(c), \forall x\, \forall y(\neg p(x) \wedge p(y) \to r(f(x), f(y))), \forall w\, f(w) \neq w, \forall z\, \forall u(r(z, u) \to \neg p(z) \wedge p(u))\}$$

è soddisfacibile nella logica con uguaglianza.

7. Sia $\mathcal{L} = \{p, r\}$ il linguaggio con un simbolo di relazione unario ed uno binario. Siano I e J le seguenti interpretazioni per $\mathcal{L}$: 3pt

$$D^I = \{0, 1, 2, 3\}, \quad p^I = \{1, 3\}, \quad r^I = \{(1, 2), (3, 2), (3, 3)\};$$

$$D^J = \{A, B, C, D, E, F, G\}, \quad p^J = \{B, C, G\}, \quad r^J = \{(B, E), (C, E), (G, E), (G, G)\}.$$

Definite un omomorfismo forte suriettivo di J in I.

Scrivete una formula nel linguaggio $\mathcal{L}$ a cui sia aggiunta l'uguaglianza che sia vera in I ma non in J (consideriamo I e J interpretazioni normali).

8. Usando il metodo dei tableaux stabilite che l'insieme di enunciati 4pt

$$\{\exists z\, \neg r(z, c), \forall x(p(x) \to \forall u\, r(x, u)), \forall y(p(y) \vee \neg r(c, y)), p(c)\}$$

è insoddisfacibile.

9. Dimostrate, usando solo le regole della deduzione naturale predicativa (comprese le sei regole derivate) che 5pt

$$\forall v(r(v, v) \to p(v)), \exists y(r(y, f(y)) \vee \neg p(y)), \forall x(\exists z\, r(x, z) \to \forall u\, \neg r(u, f(x))) \rhd \exists w\, \neg r(w, w).$$

Soluzioni

a. 3 la prima sostituzione non è ammissibile, perché la prima occorrenza libera di u è nel raggio d'azione di un quantificatore su y. La seconda sostituzione è ammissibile perché non ci sono quantificatori su v, la terza perché x non ha occorrenze libere, la quarta perché l'unica occorrenza libera di v non è nel raggio d'azione di nessun quantificatore.

b. F perché $I, \sigma[z/3] \not\models p(z) \vee \exists y\, (y \neq z \wedge r(f(y), f(z)))$.

c. V l'ipotesi e il Teorema di correttezza (10.29 delle dispense) implicano che F è insoddisfacibile; allora il Teorema di completezza (10.37 delle dispense) ci assicura che nessun tableaux sistematico per F è aperto.

d. F la presunta applicazione di $(\exists i)$ nel passo contrassegnato da 1 non è corretta, perché x è libera in $\neg q(x) \wedge p(g(x))$.

e. V come si verifica per esempio con le tavole di verità.

f. V sia v un'interpretazione qualsiasi: se $v(F) = \mathbf{V}$ allora $v(H) = \mathbf{V}$, mentre se $v(G) = \mathbf{V}$ allora $v(\neg H) = \mathbf{V}$ e perciò $v(H) = \mathbf{F}$; quindi non può essere simultaneamente sia $v(F) = \mathbf{V}$ che $v(G) = \mathbf{V}$, cioè deve essere $v(F \wedge G) = \mathbf{F}$.

g. V $\{\neg p(a), \forall x(p(x) \vee q(x)), \exists y\, \neg q(y), \neg q(b), p(a) \vee q(a), q(a), p(b) \vee q(b), p(b)\}$ è un insieme di Hintikka.

h. F analogamente a quanto fatto nella seconda parte dell'Esercizio 7.77 delle dispense, non è difficile dimostrare che $\exists z\, p(z) \wedge \exists x\, r(x, x) \not\models \exists z(p(z) \wedge r(z, z))$.

i. V come mostrato nell'Esempio 7.105 delle dispense.

j. V per definizione di relazione di congruenza $d_0 \sim d_1$ e $(d_0, d_1) \in r^I$ implicano $(d_1, d_0) \in r^I$, che significa $I, \sigma[x/d_0, y/d_1] \models r(y, x)$.

k. se G è una γ-formula e H una sua istanza allora $G \models H$ (Lemma 10.6 delle dispense).

1. Utilizziamo l'Algoritmo 3.18 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.30:

$$\langle [\neg(\neg p \vee \neg(q \to r)) \to ((s \to \neg t \wedge u) \to \neg v)] \rangle$$
$$\langle [\neg p \vee \neg(q \to r), (s \to \neg t \wedge u) \to \neg v] \rangle$$
$$\langle [\neg p, \neg(q \to r), (s \to \neg t \wedge u) \to \neg v] \rangle$$
$$\langle [\neg p, \neg(q \to r), \neg(s \to \neg t \wedge u), \neg v] \rangle$$
$$\langle [\neg p, q, \neg(s \to \neg t \wedge u), \neg v], [\neg p, \neg r, \neg(s \to \neg t \wedge u), \neg v] \rangle$$
$$\langle [\neg p, q, s, \neg v], [\neg p, q, \neg(\neg t \wedge u), \neg v], [\neg p, \neg r, s, \neg v], [\neg p, \neg r, \neg(\neg t \wedge u), \neg v] \rangle$$
$$\langle [\neg p, q, s, \neg v], [\neg p, q, t, \neg u, \neg v], [\neg p, \neg r, s, \neg v], [\neg p, \neg r, t, \neg u, \neg v] \rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \vee q \vee s \vee \neg v) \wedge (\neg p \vee q \vee t \vee \neg u \vee \neg v) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s \vee \neg v) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee t \vee \neg u \vee \neg v).$$

2. $\forall x(i(x) \to \exists y(c(x, y) \wedge p(y, m(a)) \wedge \neg i(y)))$.

3. Per stabilire se la formula è valida applichiamo l'Algoritmo 4.5 delle dispense alla negazione della formula. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{\neg((\neg p \to \neg q) \to r \vee ((s \wedge \neg p) \vee r \to \neg(r \wedge s \to q)))}$$

$$\neg p \to \neg q, \underline{\neg(r \vee ((s \wedge \neg p) \vee r \to \neg(r \wedge s \to q)))}$$

$$\neg p \to \neg q, \neg r, \underline{\neg((s \wedge \neg p) \vee r \to \neg(r \wedge s \to q))}$$

$$\neg p \to \neg q, \neg r, \underline{(s \wedge \neg p) \vee r}, r \wedge s \to q$$

$$\neg p \to \neg q, \neg r, \underline{s \wedge \neg p}, r \wedge s \to q \qquad \neg p \to \neg q, \neg r, r, r \wedge s \to q \;\; \otimes$$

$$\underline{\neg p \to \neg q}, \neg r, s, \neg p, r \wedge s \to q$$

$$p, \neg r, s, \neg p, r \wedge s \to q \;\; \otimes \qquad \neg q, \neg r, s, \neg p, \underline{r \wedge s \to q}$$

$$\neg q, \neg r, s, \neg p, \underline{\neg(r \wedge s)} \qquad \neg q, \neg r, s, \neg p, r \wedge s \to q \;\; \otimes$$

$$\neg q, \neg r, s, \neg p, \neg r \;\; \bigcirc \qquad \neg q, \neg r, s, \neg p, \neg s \;\; \otimes$$

Il tableau è aperto e quindi la formula di partenza non è valida. La foglia aperta ci permette di definire un'interpretazione che non la soddisfa: $v(p) = \mathbf{F}$, $v(q) = \mathbf{F}$, $v(r) = \mathbf{F}$, $v(s) = \mathbf{V}$.

4. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\neg \forall y \, \exists x \, \neg r(x, f(y)) \to \neg \exists x \, \forall z \, r(f(x), z) \vee \neg \forall u \, p(u)$$
$$\exists y \, \forall x \, r(x, f(y)) \to \forall x \, \exists z \, \neg r(f(x), z) \vee \exists u \, \neg p(u)$$
$$\exists y \, \forall x \, r(x, f(y)) \to \forall x (\exists z \, \neg r(f(x), z) \vee \exists u \, \neg p(u))$$
$$\exists y \, \forall x \, r(x, f(y)) \to \forall x \, \exists z (\neg r(f(x), z) \vee \neg p(z))$$
$$\forall y \, \forall x (\forall x \, r(x, f(y)) \to \exists z (\neg r(f(x), z) \vee \neg p(z)))$$
$$\forall y \, \forall x \, \exists z (r(z, f(y)) \to \neg r(f(x), z) \vee \neg p(z)).$$

5. Sia I sia un'interpretazione: dobbiamo dimostrare che I soddisfa i tre enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica, che indichiamo con F, G e H, allora soddisfa anche $\neg p(f(c))$.

Dato che $I \models H$ si ha $c^I \in p^I$. Da $I \models F$ segue in particolare che $I, \sigma[x/c^I] \models \forall y \, r(f(x), f(y)) \to \neg p(x)$. Se fosse $I, \sigma[x/c^I] \models \forall y \, r(f(x), f(y))$ dovremmo avere $c^I \notin p^I$, in contraddizione con quanto osservato in precedenza. Quindi $I, \sigma[x/c^I] \not\models \forall y \, r(f(x), f(y))$, cioè per qualche $d_0 \in D^I$ si ha $I, \sigma[x/c^I, y/d_0] \not\models r(f(x), f(y))$. In altre parole, abbiamo $(f^I(c^I), f^I(d_0)) \notin r^I$.

Dall'ultima osservazione segue che $I, \sigma[u/f^I(c^I)] \not\models \forall v \, r(u, f(v))$. Ma da $I \models H$ segue in particolare $I, \sigma[u/f^I(c^I)] \models \forall v \, r(u, f(v)) \vee \neg p(u)$ e quindi deve per forza essere $I, \sigma[u/f^I(c^I)] \models \neg p(u)$, ovvero $f^I(c^I) \notin p^I$. Abbiamo dunque ottenuto $I \models \neg p(f(c))$, come volevamo.

6. Dobbiamo definire un'interpretazione normale che soddisfa i quattro enunciati dell'insieme. Due interpretazioni normali con queste caratteristiche sono definite da

$$D^I = \{0,1,2,3\}, \quad a^I = 0, \quad c^I = 1, \quad f^I(0) = 2, f^I(1) = 3, f^I(2) = 0, f^I(3) = 1,$$
$$p^I = \{1,3\}, \quad r^I = \{(0,1),(0,3),(2,1),(2,3)\};$$
$$D^J = \mathbb{N}, \quad a^J = 0, \quad c^J = 1, \quad f^J(n) = n+2,$$
$$p^J = \{\, n \in \mathbb{N} : n \text{ è dispari} \,\}, \quad r^J = \{\, (n,m) : n \text{ è pari e } m \text{ è dispari} \,\}.$$

Dato che le interpretazioni sono normali non abbiamo bisogno di specificare $=^I$ e $=^J$.

7. Sia φ l'omomorfismo forte di J in I che cerchiamo di costruire. Visto che $B \in p^J$ e $(B,B) \notin r^J$ deve essere $\varphi(B) = 1$, dato che 1 è l'unico elemento di D^I che sta in p^I ma tale che la coppia che lo ripete non sta in r^I. Per la stessa ragione deve essere $\varphi(C) = 1$. Invece $G \in p^J$ e $(G,G) \in r^J$ impongono che $\varphi(G) = 3$. Dato che $(B,E) \in r^J$ deve essere $(\varphi(B), \varphi(E)) \in r^I$, ovvero $(1, \varphi(E)) \in r^I$: l'unica scelta possibile è $\varphi(E) = 2$. Notiamo invece che A, D e F non appartengono a nessuna coppia che sta in r^J: dato che 0 è l'unico elemento di D^I con queste caratteristiche (rispetto a r^I) deve essere $\varphi(A) = \varphi(D) = \varphi(F) = 0$.

Si verifica che la φ così definita è effettivamente un omomorfismo forte suriettivo.

Estendendo il linguaggio con l'uguaglianza e considerando I e J come interpretazioni normali si può osservare che $I \vDash \exists x\, \exists y (p(x) \wedge p(y) \wedge \forall z (p(z) \to x = z \vee y = z))$, mentre J non soddisfa questo enunciato.

8. Per mostrare l'insoddisfacibilità del nostro insieme dobbiamo costruire (utilizzando l'Algoritmo 10.50 e le Convenzioni 10.21 e 10.23 delle dispense) un tableau chiuso con la radice etichettata dall'insieme. Indichiamo con F, G, H e K le γ-formule $\forall x(p(x) \to \forall u\, r(x,u))$, $\forall y(p(y) \vee \neg r(c,y)))$, $\forall u\, r(c,u)$ e $\forall u\, r(a,u)$. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

- $\underline{\exists z\, \neg r(z,c)}, F, G, p(c)$
  - $\neg r(a,c), \underline{F}, G, p(c)$
    - $\neg r(a,c), F, \underline{p(c) \to H}, G, p(c)$
      - $\neg r(a,c), F, \neg p(c), G, p(c)$ $\otimes$
      - $\neg r(a,c), F, H, \underline{G}, p(c)$
        - $\neg r(a,c), F, H, G, \underline{p(a) \vee \neg r(c,a)}, p(c)$
          - $\neg r(a,c), \underline{F}, H, G, p(a), p(c)$
            - $\neg r(a,c), F, \underline{p(a) \to K}, H, G, p(a), p(c)$
              - $\neg r(a,c), F, \neg p(a), H, G, p(a), p(c)$ $\otimes$
              - $\neg r(a,c), F, \underline{K}, H, G, p(a), p(c)$
                - $\neg r(a,c), F, K, r(a,c), H, G, p(a), p(c)$ $\otimes$
          - $\neg r(a,c), F, \underline{H}, G, \neg r(c,a), p(c)$
            - $\neg r(a,c), F, H, r(c,a), G, \neg r(c,a), p(c)$ $\otimes$

Si noti la necessità di istanziare per due volte la γ-formula F.

9. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$\forall v(r(v,v) \to p(v)), \exists y(r(y,f(y)) \vee \neg p(y)), \forall x(\exists z\, r(x,z) \to \forall u\, \neg r(u,f(x))) \rhd \exists w\, \neg r(w,w)$.

$$\dfrac{\exists y(r(y,f(y)) \vee \neg p(y)) \qquad \dfrac{[r(y,f(y)) \vee \neg p(y)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[r(y,f(y))]^1}{\exists z\, r(y,z)} \qquad \dfrac{\forall x(\exists z\, r(x,z) \to \forall u\, \neg r(u,f(x)))}{\exists z\, r(y,z) \to \forall u\, \neg r(u,f(y))}}{\forall u\, \neg r(u,f(y))}}{\neg r(f(y),f(y))}}{\exists w\, \neg r(w,w)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall v(r(v,v) \to p(v))}{r(y,y) \to p(y)} \qquad [\neg p(y)]^1}{\neg r(y,y)}}{\exists w\, \neg r(w,w)}}{} }{\exists w\, \neg r(w,w)}\,{}_1}{\exists w\, \neg r(w,w)}\,{}_2$$

Si noti l'utilizzo di (MT) per ottenere $\neg r(y,y)$.