Prova scritta di Logica Matematica 1
25 gennaio 2011

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $p \to (\neg q \to r) \equiv (q \to \neg p) \to r$. **V** | **F** 1pt

2. Quante sono le variabili libere nella seguente formula?
$\forall x\, r(x, f(x, y)) \to \exists z(p(f(z, f(z, z))) \land \exists y\, r(f(z, y), x))$. **0** | **1** | **2** | **3** 1pt

3. Se un tableau per l'enunciato proposizionale F è aperto, allora F è soddisfacibile. **V** | **F** 1pt

4. $\dfrac{\dfrac{[F]^1 \qquad F \to \perp}{\perp}}{\neg F}\,1$ è una deduzione naturale corretta. **V** | **F** 1pt

5. $\forall y\, \exists z\, q(x, y, z)$ è una chiusura universale di $\exists z\, q(x, y, z)$. **V** | **F** 1pt

6. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $p^I = \{0, 2\}$ e $r^I = \{(0, 3), (1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$.
Allora $I \models \forall x(p(x) \lor \exists y\, r(y, x) \to \exists z(r(x, z) \land \neg p(z)))$. **V** | **F** 1pt

7. Ogni interpretazione normale del linguaggio con uguaglianza $\mathcal{L}$ soddisfa $\mathsf{Eq}_{\mathcal{L}}$. **V** | **F** 1pt

8. Se φ è un omomorfismo forte da I in J e σ uno stato di I tale che $I, \sigma \models \neg p(x) \lor p(a)$ allora $J, \varphi \circ \sigma \models \neg p(x) \lor p(a)$. **V** | **F** 1pt

9. Se un insieme di Hintikka contiene sia $p(a)$ che $\exists x(p(x) \land q(x))$ allora contiene necessariamente anche $q(a)$. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sia $\mathcal{L} = \{f, p\}$ un linguaggio con f un simbolo di funzione unario e p un simbolo di relazione unario. Siano I e J le seguenti interpretazioni per $\mathcal{L}$: 4pt

$$D^I = \{A, B\}; \quad D^J = \{0, 1, 2\}; \qquad p^I = \{A\}; \quad p^J = \{1\};$$

$$f^I(A) = B; \quad f^I(B) = B; \quad f^J(0) = 2; \quad f^J(1) = 0; \quad f^J(2) = 0.$$

Sul retro del foglio dimostrate che $I \equiv_{\mathcal{L}} J$.

11. Sul retro del foglio dimostrate l'insoddisfacibilità dell'insieme 4pt

$$\{\forall x\, r(x, f(x)), \forall y(\exists z\, r(y, z) \to \forall z\, \neg r(z, y))\}.$$

12. Sia $\mathcal{L}$ il linguaggio con uguaglianza $\{a, b, p, m, s, c, =\}$ dove a e b sono simboli di costante, p, m sono simboli di funzione unari, s è un simbolo di relazione unario e c è un simbolo di relazione binario. Interpretando a come "Anna", b come "Bruno", $p(x)$ come "il padre di x", $m(x)$ come "la madre di x", $s(x)$ come "x è sereno" e $c(x, y)$ come "x conosce y" traducete le seguenti frasi utilizzando lo spazio sotto di esse:

(i) la madre di Anna è una delle nonne di Bruno; 3pt

(ii) tutti i padri conosciuti da almeno uno tra Anna e Bruno sono sereni. 3pt

13. Dimostrate che $\neg F, \neg G \to H \vee \neg K, H \to F, K \rhd \neg(G \to F)$. Usate solo le regole della deduzione naturale proposizionale, comprese le quattro regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio) 4pt

14. Usando il metodo dei tableaux stabilite che 4pt

$$\forall x(p(x) \to \forall y\, r(x, y)) \wedge \forall x\, \forall y(r(x, y) \to \neg r(y, x)) \to \forall z\, \neg p(z)$$

è valida. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$(p \to q \wedge \neg r) \wedge \neg s \to \neg(t \to p \vee \neg u).$$

Soluzioni

1. F come si verifica ad esempio con le tavole di verità.

2. 2 le uniche occorrenze libere sono la prima occorrenza di y e l'ultima di x.

3. V l'affermazione è conseguenza immediata del teorema di completezza (Teorema 4.24 delle dispense).

4. V la deduzione consiste in applicazioni corrette di $(\to e)$ e di $(\neg i)$.

5. F perché una chiusura universale si ottiene quantificando su tutte le variabili libere, in modo da ottenere un enunciato.

6. F perché $I, \sigma[x/3] \not\models p(x) \vee \exists y\, r(y, x) \to \exists z(r(x, z) \wedge \neg p(z))$. Infatti $(0, 3) \in r^I$, e quindi $I, \sigma[x/3] \models \exists y\, r(y, x)$, ma $I, \sigma[x/3] \not\models \exists z(r(x, z) \wedge \neg p(z))$.

7. V è il Lemma 7.96 delle dispense.

8. V visto che $\neg p(x) \vee p(a)$ è priva di quantificatori, basta applicare il Lemma 9.9 delle dispense.

9. F $\{\exists x(p(x) \wedge q(x)), p(b) \wedge q(b), p(b), q(b), p(a)\}$ è un insieme di Hintikka che contiene sia $p(a)$ che $\exists x(p(x) \wedge q(x))$, ma non $q(a)$.

10. Definiamo $\varphi : D^J \to D^I$ ponendo $\varphi(0) = B$, $\varphi(1) = A$ e $\varphi(2) = B$. Si tratta di verificare che φ è un omomorfismo forte suriettivo di J in I e applicare il Corollario 9.14 delle dispense.

11. Dobbiamo mostrare che nessuna interpretazione soddisfa entrambe le formule, che indichiamo con F e G. Supponiamo per assurdo che I sia un'interpretazione che soddisfa sia F che G.

Fissato $d_0 \in D^I$, dato che $I \models F$ si ha $(d_0^I, f^I(d_0)) \in r^I$ e anche $(f^I(d_0), f^I(f^I(d_0))) \in r^I$. Dato che $I \models G$ si ha in particolare che $I, \sigma[y/f^I(d_0)] \models \exists z\, r(y, z) \to \forall z\, \neg r(z, y)$. Visto che $(f^I(d_0), f^I(f^I(d_0))) \in r^I$ abbiamo $I, \sigma[y/f^I(d_0)] \models \exists z\, r(y, z)$ e perciò deve essere $I, \sigma[y/f^I(d_0)] \models \forall z\, \neg r(z, y)$. Da quest'ultima condizione segue in particolare che $(d_0^I, f^I(d_0)) \notin r^I$, che contraddice quanto osservato in precedenza.

12. (i) $m(a) = m(p(b)) \vee m(a) = m(m(b))$;

(ii) $\forall x(c(a, p(x)) \vee c(b, p(x)) \to s(p(x)))$,
oppure $\forall x(\exists y\, x = p(y) \wedge (c(a, x) \vee c(b, x)) \to s(x))$ (le due formule sono logicamente equivalenti nella logica con uguaglianza).

13. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg F \qquad [G \to F]^2}{\neg G} \qquad \neg G \to H \vee \neg K}{H \vee \neg K} \qquad \dfrac{\dfrac{[H]^1 \qquad H \to F}{F} \qquad \neg F}{\bot} \qquad \dfrac{K \qquad [\neg K]^1}{\bot}}{\bot}\,{\scriptstyle 1}}{\neg(G \to F)}\,{\scriptstyle 2}$$

14. Per stabilire che la formula è valida costruiamo un tableau chiuso per la sua negazione. Indichiamo con F, G, H e K le γ-formule $\forall x(p(x) \to \forall y\, r(x,y))$, $\forall x\, \forall y(r(x,y) \to \neg r(y,x))$, $\forall y\, r(a,y)$ e $\forall y(r(a,y) \to \neg r(y,a))$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{\neg(F \land G \to \forall z\, \neg p(z))}$$

$$\underline{F \land G}, \neg\forall z\, \neg p(z)$$

$$F, G, \underline{\neg\forall z\, \neg p(z)}$$

$$\underline{F}, G, p(a)$$

$$F, \underline{p(a) \to H}, G, p(a)$$

$$\begin{array}{cc}
F, \neg p(a), G, p(a) & F, \underline{H}, G, p(a) \\
\otimes & \\
& F, H, r(a,a), \underline{G}, p(a) \\
& F, H, r(a,a), G, \underline{K}, p(a) \\
& F, H, r(a,a), G, K, \underline{r(a,a) \to \neg r(a,a)}, p(a)
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
F, H, r(a,a), G, K, \neg r(a,a), p(a) & F, H, r(a,a), G, K, \neg r(a,a), p(a) \\
\otimes & \otimes
\end{array}$$

15.

$$[\langle (p \to q \land \neg r) \land \neg s \to \neg(t \to p \lor \neg u) \rangle]$$
$$[\langle \neg((p \to q \land \neg r) \land \neg s) \rangle, \langle \neg(t \to p \lor \neg u) \rangle]$$
$$[\langle \neg(p \to q \land \neg r) \rangle, \langle s \rangle, \langle \neg(t \to p \lor \neg u) \rangle]$$
$$[\langle p, \neg(q \land \neg r) \rangle, \langle s \rangle, \langle t, \neg(p \lor \neg u) \rangle]$$
$$[\langle p, \neg q \rangle, \langle p, r \rangle, \langle s \rangle, \langle t, \neg p, u \rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(p \land \neg q) \lor (p \land r) \lor s \lor (t \land \neg p \land u).$$