Prova scritta di Logica Matematica
27 giugno 2017

Cognome | Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $(p \vee \neg q) \wedge r \equiv (\neg q \to \neg r \vee p) \to (p \wedge \neg(q \to \neg r))$. **V** | **F** 1pt

2. Se $F \vDash \neg G$ e G è valida allora F è insoddisfacibile. **V** | **F** 1pt

3. L'algoritmo dei tableaux proposizionali gode della proprietà della terminazione forte. **V** | **F** 1pt

4. Quante delle seguenti formule sono enunciati?
$\forall x\, \neg r(x, f(x)) \to p(x)$, $\forall x(\neg r(x, f(x)) \to p(x))$,
$\forall x\, \neg r(x, f(x)) \to p(a)$, $\forall x(\neg r(x, f(y)) \to p(x))$. **0** | **1** | **2** | **3** | **4** 1pt

5. Sia I l'interpretazione normale con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$,
$f^I(0) = 3$, $f^I(1) = 3$, $f^I(2) = 1$, $f^I(3) = 2$,
$p^I = \{1, 2\}$, $r^I = \{(0, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 3)\}$.
Allora $I \vDash \forall x\, \forall y(r(x, y) \wedge x \neq y \to p(f(y)) \vee r(f(y), x))$. **V** | **F** 1pt

6. $\forall x(\neg p(x) \vee q(x)) \equiv \neg \exists x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)$. **V** | **F** 1pt

7. Se $\sim$ è una relazione di congruenza sull'interpretazione I, $d_0 \sim d_1$ e $I, \sigma[x/d_0] \vDash p(f(x))$ allora $I, \sigma[x/d_1] \vDash p(f(x))$. **V** | **F** 1pt

8. Se un insieme di Hintikka contiene gli enunciati $p(c) \vee \neg \exists x\, q(x)$ e $\forall x\, \neg p(x)$ allora deve contenere $\neg q(c)$. **V** | **F** 1pt

9. Se F è un enunciato e $\rhd F$ allora F è valido. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate l'insoddisfacibilità nella logica con uguaglianza dell'insieme di enunciati 4pt

$$\{\forall y(p(y) \to \exists z(\neg r(y, z) \wedge \neg p(z))), \forall x\, p(f(x)), \forall z(\exists x\, f(x) = z \vee \forall y\, r(y, z))\}.$$

11. Sia I l'interpretazione definita da $D^I = \mathbb{N}$, $f^I(n) = 2n + 1$ e $p^I = \{\, n : \exists k(n = 4k \vee n = 4k + 1)\,\}$. J è un'altra interpretazione per lo stesso linguaggio con $D^J = \{A, B, C, D\}$, $f^J(A) = f^J(B) = C$, $f^J(C) = f^J(D) = D$. 4pt

Sul retro del foglio definite p^J in modo tale che esista un omomorfismo forte suriettivo di I in J, e definite questo omomorfismo forte suriettivo.

12. Sia $\mathcal{L} = \{a, b, p, m, i, c, =\}$ un linguaggio con uguaglianza dove a e b sono simboli di costante, p, m sono simboli di funzione unari, i è un simbolo di relazione unario e c è un simbolo di relazione binario. Interpretando a come "Antonio", b come "Barbara", $p(x)$ come "il padre di x", $m(x)$ come "la madre di x", $i(x)$ come "x è un informatico" e $c(x, y)$ come "x conosce y" traducete le seguenti frasi utilizzando lo spazio sotto di esse:

(i) la madre di Barbara è una delle nonne di Antonio; 3pt

(ii) tutti gli informatici conosciuti dal padre di Barbara conoscono qualcuno che conosce Antonio. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$p \to \neg(q \to r), p \vee (r \wedge \neg s), \neg p \vee (s \to \neg q) \models r.$$

Se la conseguenza logica non vale definite una valutazione che lo mostri. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$p(f(a)) \vee \exists x\, r(x, f(x)), \forall y(\exists z\, r(z, y) \to p(f(y))) \rhd \exists u\, p(f(u)).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$(p \to q \wedge \neg r) \wedge \neg s \to \neg(t \to v \vee \neg u).$$

Soluzioni

1. **F** come si verifica per esempio con le tavole di verità.
2. **V** se F fosse vera in qualche interpretazione, anche $\neg G$ lo sarebbe, contraddicendo la validità di G.
3. **V** è il teorema 4.11 delle dispense.
4. **2** la seconda e la terza formula sono enunciati; nella prima e nella quarta sono libere rispettivamente x e y.
5. **V** perché si verifica che se $d, d' \in D^I$ sono distinti e $(d, d') \in r^I$ allora $I, \sigma[x/d, y/d'] \vDash p(f(y)) \vee r(f(y), x)$.
6. **F** si veda la nota 7.60 delle dispense; nello specifico un controesempio all'equivalenza logica è fornito dall'interpretazione I con $D^I = \{0, 1\}$ e $p^I = q^I = \{0\}$.
7. **V** $I, \sigma[x/d_0] \vDash p(f(x))$ significa che $f^I(d_0) \in p^I$; dato che $f^I(d_0) \sim f^I(d_1)$ per la seconda clausola della definizione 9.20 delle dispense, per la terza clausola si ha anche $f^I(d_1) \in p^I$, cioè $I, \sigma[x/d_1] \vDash p(f(x))$.
8. **V** supponiamo T sia un insieme di Hintikka. Se $p(c) \vee \neg\exists x\, q(x) \in T$ allora $p(c) \in T$ oppure $\neg\exists x\, q(x) \in T$. Se $\forall x\, \neg p(x) \in T$ allora $\neg p(c) \in T$ e quindi $p(c) \notin T$ (altrimenti T conterrebbe una coppia complementare di letterali). Perciò deve essere $\neg\exists x\, q(x) \in T$, che implica $\neg q(c) \in T$.
9. **V** è il caso particolare del teorema 11.10 delle dispense (teorema di correttezza per la deduzione naturale predicativa) in cui T è vuoto.
10. Supponiamo per assurdo che I sia un'interpretazione normale che soddisfa i tre enunciati, che chiamiamo F, G e H nell'ordine. Vogliamo ottenere una contraddizione.

    Sia $d \in D^I$: dato che $I \vDash G$ si ha $f^I(d) \in p^I$. Da $I \vDash F$ segue in particolare $I, \sigma[y/f^I(d)] \vDash p(y) \to \exists z(\neg r(y, z) \wedge \neg p(z))$ e quindi $I, \sigma[y/f^I(d)] \vDash \exists z(\neg r(y, z) \wedge \neg p(z))$. Sia $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[y/f^I(d), z/d_0] \vDash \neg r(y, z) \wedge \neg p(z)$: si ha $(f^I(d), d_0) \notin r^I$ e $d_0 \notin p^I$.

    Dato che $I \vDash H$ si ha in particolare $I, \sigma[z/d_0] \vDash \exists x\, f(x) = z \vee \forall y\, r(y, z)$. Allora o esiste $d_1 \in D^I$ tale che $f^I(d_1) = d_0$ (qui stiamo usando la normalità di I) oppure $I, \sigma[z/d_0] \vDash \forall y\, r(y, z)$, cioè $(d', d_0) \in r^I$ per ogni $d' \in D^I$. La seconda possibilità è esclusa dal fatto che $(f^I(d), d_0) \notin r^I$. Se $f^I(d_1) = d_0$, dato che $I \vDash G$ implica $f^I(d_1) \in p^I$, avremmo $d_0 \in p^I$ che contraddice quanto ottenuto in precedenza.
11. Sia φ un omomorfismo forte di I in J. Per ogni n si ha $f^I(n)$ dispari e quindi C e D (che sono gli elementi della forma $f^J(d)$ per qualche $d \in D^J$) devono essere le immagini dei dispari secondo φ. Viceversa A e B saranno l'immagine dei pari.

    Se $\varphi(0) = A$ deve essere $A \in p^J$ (perché $0 \in p^I$). Dato che $2 \notin p^I$ deve essere $\varphi(2) = B$ e quindi $B \notin p^J$. A questo punto deve essere $\varphi(n) = A$ per tutti gli $n \in p^I$ pari e $\varphi(n) = B$ per tutti gli $n \notin p^I$ pari.

    Per i dispari osserviamo che $1 \in p^I$ ma $f^I(1) = 3 \notin p^I$. Allora $\varphi(1) \neq \varphi(f^I(1)) = f^J(\varphi(1))$ e quindi deve essere $\varphi(1) = C$. Questo significa che

$\varphi(n) = C$ per tutti gli $n \in p^I$ dispari e $\varphi(n) = D$ per tutti gli $n \notin p^I$ dispari.

In conclusione si pone $p^J = \{A, C\}$ e si definisce $\varphi(4k) = A$, $\varphi(4k+1) = C$, $\varphi(4k+2) = B$, $\varphi(4k+3) = D$.

12. (i) $m(b) = m(m(a)) \vee m(b) = m(p(a))$;
(ii) $\forall x(i(x) \wedge c(p(b), x) \to \exists y(c(x, y) \wedge c(y, a)))$.

13. Per stabilire se vale la conseguenza logica utilizziamo l'Algoritmo 4.40 delle dispense e costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.31 e 4.32) un tableau con la radice etichettata dalle formule a sinistra del simbolo $\models$ e dalla negazione di quella a destra. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$p \to \neg(q \to r), \underline{p \vee (r \wedge \neg s)}, \neg p \vee (s \to \neg q), \neg r$$

$$\underline{p \to \neg(q \to r)}, p, \neg p \vee (s \to \neg q), \neg r \qquad\qquad p \to \neg(q \to r), \underline{r \wedge \neg s}, \neg p \vee (s \to \neg q), \neg r$$

$$\underset{\otimes}{\neg p, p, \neg p \vee (s \to \neg q), \neg r} \qquad \underline{\neg(q \to r)}, p, \neg p \vee (s \to \neg q), \neg r \qquad \underset{\otimes}{p \to \neg(q \to r), r, \neg s, \neg p \vee (s \to \neg q), \neg r}$$

$$q, \neg r, p, \underline{\neg p \vee (s \to \neg q)}, \neg r$$

$$\underset{\otimes}{q, \neg r, p, \neg p, \neg r} \qquad q, \neg r, p, \underline{s \to \neg q}, \neg r$$

$$\underset{\bigcirc}{q, \neg r, p, \neg s, \neg r} \qquad \underset{\otimes}{q, \neg r, p, \neg q, \neg r}$$

Il tableau è aperto e quindi la conseguenza logica non sussiste. Una valutazione che lo mostra è data da $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{F}$, $v(s) = \mathbf{F}$.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{p(f(a)) \vee \exists x\, r(x, f(x)) \qquad \dfrac{[p(f(a))]^2}{\exists u\, p(f(u))} \qquad \dfrac{[\exists x\, r(x, f(x))]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[r(x, f(x))]^1}{\exists z\, r(z, f(x))} \qquad \dfrac{\forall y(\exists z\, r(z, y) \to p(f(y)))}{\exists z\, r(z, f(x)) \to p(f(f(x)))}}{p(f(f(x)))}}{\exists u\, p(f(u))}}{\exists u\, p(f(u))}\,{\scriptstyle 1}}{\exists u\, p(f(u))}\,{\scriptstyle 2}$$

15. Utilizziamo l'Algoritmo 3.16 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.28:

$$\langle[(p \to q \land \neg r) \land \neg s \to \neg(t \to v \lor \neg u)]\rangle$$
$$\langle[\neg((p \to q \land \neg r) \land \neg s), \neg(t \to v \lor \neg u)]\rangle$$
$$\langle[\neg(p \to q \land \neg r), s, \neg(t \to v \lor \neg u)]\rangle$$
$$\langle[p, s, \neg(t \to v \lor \neg u)], [\neg(q \land \neg r), s, \neg(t \to v \lor \neg u)]\rangle$$
$$\langle[p, s, \neg(t \to v \lor \neg u)], [\neg q, r, s, \neg(t \to v \lor \neg u)]\rangle$$
$$\langle[p, s, t], [p, s, \neg(v \lor \neg u)], [\neg q, r, s, t], [\neg q, r, s, \neg(v \lor \neg u)]\rangle$$
$$\langle[p, s, t], [p, s, \neg v], [p, s, u], [\neg q, r, s, t], [\neg q, r, s, \neg v], [\neg q, r, s, u]\rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(p\lor s\lor t)\land(p\lor s\lor\neg v)\land(p\lor s\lor u)\land(\neg q\lor r\lor s\lor t)\land(\neg q\lor r\lor s\lor\neg v)\land(\neg q\lor r\lor s\lor u).$$

Prova scritta di Logica Matematica
27 giugno 2017

Cognome | Nome
Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il tesserino universitario sul banco. Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale). Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. $(p \to q \vee r) \to (\neg(\neg p \to q) \wedge r) \equiv \neg q \wedge (p \vee r)$. **V** **F** 1pt

2. L'algoritmo dei tableaux proposizionali non gode della proprietà della terminazione forte. **V** **F** 1pt

3. Sia I l'interpretazione normale con $D^I = \{0, 1, 2, 3\}$, $f^I(0) = 1$, $f^I(1) = 3$, $f^I(2) = 3$, $f^I(3) = 2$, $p^I = \{2, 3\}$, $r^I = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$. Allora $I \vDash \forall x \forall y(r(x, y) \wedge x \neq y \to p(f(x)) \vee r(f(x), y))$. **V** **F** 1pt

4. $\exists x(\neg p(x) \wedge q(x)) \equiv \neg\forall x\, p(x) \wedge \exists x\, q(x)$. **V** **F** 1pt

5. Se $F \vDash \neg G$ e F è valida allora G è insoddisfacibile. **V** **F** 1pt

6. Quante delle seguenti formule sono enunciati?
$\forall x\, r(x, f(x)) \to \neg p(a)$, $\forall x\, r(x, f(x)) \to \neg p(x)$,
$\forall x(r(x, f(y)) \to \neg p(x))$, $\forall x(r(x, f(x)) \to \neg p(x))$. **0** **1** **2** **3** **4** 1pt

7. Se $\sim$ è una relazione di congruenza sull'interpretazione I, $d_0 \sim d_1$ e $I, \sigma[x/d_0] \vDash p(f(x))$ allora $I, \sigma[x/d_1] \vDash p(f(x))$. **V** **F** 1pt

8. Se un insieme di Hintikka contiene gli enunciati $p(a) \vee \forall x\, q(x)$ e $\neg\exists x\, p(x)$ allora deve contenere $q(a)$. **V** **F** 1pt

9. Se F è un enunciato valido allora $\rhd F$. **V** **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sia I l'interpretazione definita da $D^I = \mathbb{N}$, $f^I(n) = 2n$ e $p^I = \{\, n : \exists k(n = 4k \vee n = 4k + 3)\,\}$. J è un'altra interpretazione per lo stesso linguaggio con $D^J = \{A, B, C, D\}$, $f^J(A) = f^J(C) = C$, $f^J(B) = f^J(D) = A$. 4pt

Sul retro del foglio definite p^J in modo tale che esista un omomorfismo forte suriettivo di I in J, e definite questo omomorfismo forte suriettivo.

11. Sul retro del foglio dimostrate l'insoddisfacibilità nella logica con uguaglianza dell'insieme di enunciati 4pt

$$\{\forall x\, p(f(x)), \forall y(p(y) \to \exists z(r(y, z) \wedge \neg p(z))), \forall z(\exists x\, f(x) = z \vee \forall y\, \neg r(y, z))\}.$$

12. Sia $\mathcal{L} = \{a, b, p, m, i, c, =\}$ un linguaggio con uguaglianza dove a e b sono simboli di costante, p, m sono simboli di funzione unari, i è un simbolo di relazione unario e c è un simbolo di relazione binario. Interpretando a come "Anna", b come "Bruno", $p(x)$ come "il padre di x", $m(x)$ come "la madre di x", $i(x)$ come "x è un insegnante" e $c(x, y)$ come "x conosce y" traducete le seguenti frasi utilizzando lo spazio sotto di esse:

(i) il padre di Anna è uno dei nonni di Bruno; 3pt

(ii) tutti gli insegnanti conosciuti dalla madre di Bruno conoscono qualcuno che conosce Anna. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$(p \to r) \to \neg s, s \vee (r \wedge q), (p \to q) \vee \neg s \models r.$$

Se la conseguenza logica non vale definite una valutazione che lo mostri. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\exists x\, r(f(x), x) \vee p(f(c)), \forall y(\exists z\, r(y, z) \to p(f(y))) \rhd \exists v\, p(f(v)).$$

Usate solo le regole della deduzione naturale predicativa, comprese le sei regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$(p \to \neg q \wedge r) \wedge s \to \neg(\neg t \to v \vee \neg u).$$

Soluzioni

1. **F** come si verifica per esempio con le tavole di verità.

2. **F** il teorema 4.11 delle dispense afferma il contrario.

3. **V** perché si verifica che se $d, d' \in D^I$ sono distinti e $(d, d') \in r^I$ allora $I, \sigma[x/d, y/d'] \vDash p(f(x)) \vee r(f(x), y)$.

4. **F** si veda la nota 7.60 delle dispense; nello specifico un controesempio all'equivalenza logica è fornito dall'interpretazione I con $D^I = \{0, 1\}$ e $p^I = q^I = \{0\}$.

5. **V** dato che F è soddisfatta da ogni interpretazione, anche $\neg G$ lo è, e quindi G risulta essere falsa in ogni interpretazione.

6. **2** la prima e la quarta formula sono enunciati; nella seconda e nella terza sono libere rispettivamente x e y.

7. **V** $I, \sigma[x/d_0] \vDash p(f(x))$ significa che $f^I(d_0) \in p^I$; dato che $f^I(d_0) \sim f^I(d_1)$ per la seconda clausola della definizione 9.20 delle dispense, per la terza clausola si ha anche $f^I(d_1) \in p^I$, cioè $I, \sigma[x/d_1] \vDash p(f(x))$.

8. **V** supponiamo T sia un insieme di Hintikka. Se $p(a) \vee \forall x\, q(x) \in T$ allora $p(a) \in T$ oppure $\forall x\, q(x) \in T$. Se $\neg\exists x\, p(x) \in T$ allora $\neg p(a) \in T$ e quindi $p(a) \notin T$ (altrimenti T conterrebbe una coppia complementare di letterali). Perciò deve essere $\forall x\, q(x) \in T$, che implica $q(a) \in T$.

9. **V** è il caso particolare del teorema 11.12 delle dispense (teorema di completezza per la deduzione naturale predicativa) in cui T è vuoto.

10. Sia φ un omomorfismo forte di I in J. Per ogni n si ha $f^I(n)$ pari e quindi C e A (che sono gli elementi della forma $f^J(d)$ per qualche $d \in D^J$) devono essere le immagini dei pari secondo φ. Viceversa B e D saranno l'immagine dei dispari.

Dato che $f^I(0) = 0$ deve essere $\varphi(0) = \varphi(f^I(0)) = f^J(\varphi(0)) = C$. Invece $2 \notin p^I$ e quindi $C \in p^J$. Si avrà allora $\varphi(2) = A$ e $A \notin p^J$ (perché $2 \notin p^I$). Deve quindi essere $\varphi(n) = C$ per tutti gli $n \in p^I$ pari e $\varphi(n) = A$ per tutti gli $n \notin p^I$ pari.

Sui dispari abbiamo più libertà e possiamo per esempio porre $\varphi(n) = B$ per tutti gli $n \in p^I$ dispari e $\varphi(n) = D$ per tutti gli $n \notin p^I$ dispari.

In conclusione si pone $p^J = \{B, C\}$ e si definisce $\varphi(4k) = C$, $\varphi(4k+1) = D$, $\varphi(4k+2) = A$, $\varphi(4k+3) = B$.

11. Supponiamo per assurdo che I sia un'interpretazione normale che soddisfa i tre enunciati, che chiamiamo F, G e H nell'ordine. Vogliamo ottenere una contraddizione.

Sia $d \in D^I$: dato che $I \vDash F$ si ha $f^I(d) \in p^I$. Da $I \vDash G$ segue in particolare $I, \sigma[y/f^I(d)] \vDash p(y) \to \exists z(r(y, z) \wedge \neg p(z))$ e quindi $I, \sigma[y/f^I(d)] \vDash \exists z(r(y, z) \wedge \neg p(z))$. Sia $d_0 \in D^I$ tale che $I, \sigma[y/f^I(d), z/d_0] \vDash r(y, z) \wedge \neg p(z)$: si ha $(f^I(d), d_0) \in r^I$ e $d_0 \notin p^I$.

Dato che $I \vDash H$ si ha in particolare $I, \sigma[z/d_0] \vDash \exists x\, f(x) = z \vee \forall y\, \neg r(y, z)$. Allora o esiste $d_1 \in D^I$ tale che $f^I(d_1) = d_0$ (qui stiamo usando la normalità di I) oppure $I, \sigma[z/d_0] \vDash \forall y\, \neg r(y, z)$, cioè $(d', d_0) \notin r^I$ per ogni $d' \in D^I$. La seconda possibilità è esclusa dal fatto che $(f^I(d), d_0) \in r^I$. Se $f^I(d_1) = d_0$, dato che $I \models F$ implica $f^I(d_1) \in p^I$, avremmo $d_0 \in p^I$ che contraddice quanto ottenuto in precedenza.

12. (i) $p(a) = p(m(b)) \lor p(a) = p(p(b))$;
(ii) $\forall x(i(x) \land c(m(b), x) \to \exists y(c(x, y) \land c(y, a)))$.

13. Per stabilire se vale la conseguenza logica utilizziamo l'Algoritmo 4.40 delle dispense e costruiamo (utilizzando le convenzioni 4.31 e 4.32) un tableau con la radice etichettata dalle formule a sinistra del simbolo $\models$ e dalla negazione di quella a destra. In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

- $(p \to r) \to \neg s, \underline{s \lor (r \land q)}, (p \to q) \lor \neg s, \neg r$
  - $\underline{(p \to r) \to \neg s}, s, (p \to q) \lor \neg s, \neg r$
    - $\underline{\neg(p \to r)}, s, (p \to q) \lor \neg s, \neg r$
      - $p, \neg r, s, \underline{(p \to q) \lor \neg s}, \neg r$
        - $p, \neg r, s, \underline{p \to q}, \neg r$
          - $p, \neg r, s, \neg p, \neg r$ $\otimes$
          - $p, \neg r, s, q, \neg r$ $\bigcirc$
        - $p, \neg r, s, \neg s, \neg r$ $\otimes$
    - $\neg s, s, (p \to q) \lor \neg s, \neg r$ $\otimes$
  - $(p \to r) \to \neg s, \underline{r \land q}, (p \to q) \lor \neg s, \neg r$
    - $(p \to r) \to \neg s, r, q, (p \to q) \lor \neg s, \neg r$ $\otimes$

Il tableau è aperto e quindi la conseguenza logica non sussiste. Una valutazione che lo mostra è data da $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{F}$, $v(s) = \mathbf{V}$.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$
\dfrac{\exists x\, r(f(x), x) \lor p(f(c)) \qquad \dfrac{[\exists x\, r(f(x), x)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[r(f(x), x)]^1}{\exists z\, r(f(x), z)} \qquad \dfrac{\forall y(\exists z\, r(y, z) \to p(f(y)))}{\exists z\, r(f(x), z) \to p(f(f(x)))}}{p(f(f(x)))}}{\exists v\, p(f(v))}}{\exists v\, p(f(v))}\,{}_1 \qquad \dfrac{[p(f(c))]^2}{\exists v\, p(f(v))}}{\exists v\, p(f(v))}\,{}_2
$$

15. Utilizziamo l'Algoritmo 3.16 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.28:

$$\langle [(p \to \neg q \wedge r) \wedge s \to \neg(\neg t \to v \vee \neg u)] \rangle$$
$$\langle [\neg((p \to \neg q \wedge r) \wedge s), \neg(\neg t \to v \vee \neg u)] \rangle$$
$$\langle [\neg(p \to \neg q \wedge r), \neg s, \neg(\neg t \to v \vee \neg u)] \rangle$$
$$\langle [p, \neg s, \neg(\neg t \to v \vee \neg u)], [\neg(\neg q \wedge r), \neg s, \neg(\neg t \to v \vee \neg u)] \rangle$$
$$\langle [p, \neg s, \neg(\neg t \to v \vee \neg u)], [q, \neg r, \neg s, \neg(\neg t \to v \vee \neg u)] \rangle$$
$$\langle [p, \neg s, \neg t], [p, \neg s, \neg(v \vee \neg u)], [q, \neg r, \neg s, \neg t], [q, \neg r, \neg s, \neg(v \vee \neg u)] \rangle$$
$$\langle [p, \neg s, \neg t], [p, \neg s, \neg v], [p, \neg s, u], [q, \neg r, \neg s, \neg t], [q, \neg r, \neg s, \neg v], [q, \neg r, \neg s, u] \rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(p \vee \neg s \vee \neg t) \wedge (p \vee \neg s \vee \neg v) \wedge (p \vee \neg s \vee u) \wedge (q \vee \neg r \vee \neg s \vee \neg t) \wedge (q \vee \neg r \vee \neg s \vee \neg v) \wedge (q \vee \neg r \vee \neg s \vee u).$$