Prova scritta di Logica Matematica
27 luglio 2022

Cognome Nome Matricola

Indicate su ogni foglio che consegnate cognome, nome e numero di matricola.
Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio.

1. Usando l'algoritmo di Fitting mettete in forma normale disgiuntiva la formula 2pt

$$\neg\big((\neg p \wedge q \to \neg(\neg r \to s)) \vee (\neg t \wedge \neg(u \wedge \neg v))\big).$$

2. Sia $\{c, d, m, b, a\}$ un linguaggio dove c e d sono simboli di costante, m è un simbolo di funzione unario e b e a sono simboli di relazione binari. Interpretando c come "Camilla", d come "Davide", $m(x)$ come "la madre di x", $b(x, y)$ come "x è più basso di y" e $a(x, y)$ come "x è amico di y", traducete la frase: 3pt

almeno un amico di Camilla è più basso di tutti gli amici della madre di Davide.

3. Usando il metodo dei tableaux stabilire se 3pt

$$\neg((p \vee q) \wedge (s \to \neg p \vee (r \wedge \neg t)) \to (s \to q \vee \neg(t \vee \neg r)))$$

è soddisfacibile. Se la formula è soddisfacibile definite un'interpretazione che la soddisfa.

4. Usando l'algoritmo presentato nel corso mettete in forma prenessa l'enunciato 2pt

$$\forall x\, \neg\forall y\, r(x, y) \to \neg\forall x\, \exists y\, \neg r(x, f(y)) \wedge \exists x\, \forall y\, r(f(x), f(y)).$$

Se riuscite, usate il minimo numero di quantificatori possibili. 1pt

5. Dimostrate che 4pt

$$\forall x(\neg q(x) \to \exists y(r(x, y) \wedge q(y))), \forall x\, \forall y\, \forall z(r(x, y) \wedge r(x, z) \to y = z) \models_{=} \forall x(r(x, x) \to q(x)).$$

6. Dimostrate che l'insieme di enunciati 4pt

$$\{\forall x(p(x) \to \exists y(r(x, y) \wedge \neg p(y))), \forall x(\neg p(x) \to \exists y(r(x, y) \wedge p(y))), \forall x\, \forall y(\neg r(x, y) \vee \neg r(y, x))\}$$

è soddisfacibile.

7. Sia $\mathcal{L} = \{f, p, r\}$ un linguaggio in cui f è un simbolo di funzione unario e p e r sono simboli di relazione, il primo unario e il secondo binario. Sia I l'interpretazione per $\mathcal{L}$ definita da 3pt

$$D^I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}; \qquad p^I = \{1, 3, 4, 7\}; \qquad r^I = \{(0, 4), (2, 4), (5, 4), (6, 4)\};$$

$$f^I(0) = 7; \quad f^I(1) = 5; \quad f^I(2) = 4; \quad f^I(3) = 2;$$

$$f^I(4) = 3; \quad f^I(5) = 4; \quad f^I(6) = 3; \quad f^I(7) = 2.$$

Definite una relazione di congruenza $\sim$ su I che abbia quattro classi d'equivalenza, giustificando la vostra risposta.
Descrivete l'interpretazione quoziente $I/{\sim}$.

8. Usando il metodo dei tableaux dimostrate che 4pt

$$\exists x(q(x) \to p(x)), \forall x(\neg q(x) \to p(c)) \models \exists x\, p(x).$$

9. Dimostrate, usando solo le regole della deduzione naturale predicativa (comprese le sei regole derivate) che 5pt

$$\forall x(\exists y\, r(x, y) \to \forall y\, \neg r(y, x)) \rhd \forall x\, \neg r(x, x).$$

Soluzioni

1. Utilizziamo l'Algoritmo 3.22 delle dispense, adottando le semplificazioni suggerite nella Nota 3.30:

$$[\langle \neg\big((\neg p \wedge q \to \neg(\neg r \to s)) \vee (\neg t \wedge \neg(u \wedge \neg v))\big)\rangle]$$
$$[\langle \neg(\neg p \wedge q \to \neg(\neg r \to s)), \neg(\neg t \wedge \neg(u \wedge \neg v))\rangle]$$
$$[\langle \neg p \wedge q, \neg r \to s, \neg(\neg t \wedge \neg(u \wedge \neg v))\rangle]$$
$$[\langle \neg p, q, \neg r \to s, \neg(\neg t \wedge \neg(u \wedge \neg v))\rangle]$$
$$[\langle \neg p, q, r, \neg(\neg t \wedge \neg(u \wedge \neg v))\rangle , \langle \neg p, q, s, \neg(\neg t \wedge \neg(u \wedge \neg v))\rangle]$$
$$[\langle \neg p, q, r, t\rangle , \langle \neg p, q, r, u \wedge \neg v\rangle , \langle \neg p, q, s, t\rangle , \langle \neg p, q, s, u \wedge \neg v\rangle]$$
$$[\langle \neg p, q, r, t\rangle , \langle \neg p, q, r, u, \neg v\rangle , \langle \neg p, q, s, t\rangle , \langle \neg p, q, s, u, \neg v\rangle]$$

La formula in forma normale disgiuntiva ottenuta è

$$(\neg p \wedge q \wedge r \wedge t) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge u \wedge \neg v) \vee (\neg p \wedge q \wedge s \wedge t) \vee (\neg p \wedge q \wedge s \wedge u \wedge \neg v).$$

2. $\exists x(a(x, c) \wedge \forall y(a(y, m(d)) \to b(x, y)))$.

3. Per stabilire se la formula è soddisfacibile applichiamo l'Algoritmo 4.5 delle dispense, etichettando la radice del tableau con la formula. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

- $\underline{\neg((p \vee q) \wedge (s \to \neg p \vee (r \wedge \neg t)) \to (s \to q \vee \neg(t \vee \neg r)))}$
  - $\underline{(p \vee q) \wedge (s \to \neg p \vee (r \wedge \neg t))}, \neg(s \to q \vee \neg(t \vee \neg r))$
    - $p \vee q, s \to \neg p \vee (r \wedge \neg t), \underline{\neg(s \to q \vee \neg(t \vee \neg r))}$
      - $p \vee q, s \to \neg p \vee (r \wedge \neg t), s, \underline{\neg(q \vee \neg(t \vee \neg r))}$
        - $\underline{p \vee q}, s \to \neg p \vee (r \wedge \neg t), s, \neg q, t \vee \neg r$
          - $p, \underline{s \to \neg p \vee (r \wedge \neg t)}, s, \neg q, t \vee \neg r$
            - $p, \neg s, s, \neg q, t \vee \neg r$ $\otimes$
            - $p, \underline{\neg p \vee (r \wedge \neg t)}, s, \neg q, t \vee \neg r$
              - $p, \neg p, s, \neg q, t \vee \neg r$ $\otimes$
              - $p, \underline{r \wedge \neg t}, s, \neg q, t \vee \neg r$
                - $p, r, \neg t, s, \neg q, \underline{t \vee \neg r}$
                  - $p, r, \neg t, s, \neg q, t$ $\otimes$
                  - $p, r, \neg t, s, \neg q, \neg r$ $\otimes$
          - $q, s \to \neg p \vee (r \wedge \neg t), s, \neg q, t \vee \neg r$ $\otimes$

Il tableau è chiuso e quindi la formula di partenza non è soddisfacibile.

4. Una soluzione in cui si usa il minimo numero di quantificatori è:

$$\forall x\, \neg\forall y\, r(x,y) \to \neg\forall x\, \exists y\, \neg r(x, f(y)) \wedge \exists x\, \forall y\, r(f(x), f(y))$$
$$\forall x\, \exists y\, \neg r(x,y) \to \exists x\, \forall y\, r(x, f(y)) \wedge \exists x\, \forall y\, r(f(x), f(y))$$
$$\forall x\, \exists y\, \neg r(x,y) \to \exists x(\forall y\, r(x, f(y)) \wedge \exists x\, \forall y\, r(f(x), f(y)))$$
$$\forall x\, \exists y\, \neg r(x,y) \to \exists x\, \exists z(\forall y\, r(x, f(y)) \wedge \forall y\, r(f(z), f(y)))$$
$$\forall x\, \exists y\, \neg r(x,y) \to \exists x\, \exists z\, \forall y(r(x, f(y)) \wedge r(f(z), f(y)))$$
$$\exists x(\exists y\, \neg r(x,y) \to \exists z\, \forall y(r(x, f(y)) \wedge r(f(z), f(y))))$$
$$\exists x\, \exists z\, \forall y(\exists y\, \neg r(x,y) \to r(x, f(y)) \wedge r(f(z), f(y)))$$
$$\exists x\, \exists z\, \forall y\, \forall v(\neg r(x,v) \to r(x, f(y)) \wedge r(f(z), f(y)))$$

5. Dobbiamo dimostrare che se un'interpretazione normale soddisfa i due enunciati, che indichiamo con F e G, a sinistra del simbolo di conseguenza logica allora soddisfa anche quello a destra, che indichiamo con H. Supponiamo allora che I sia normale e soddisfi F e G.

Dato che H è universale, per dimostrare che $I \vDash H$ consideriamo $d \in D^I$ arbitrario, con l'obiettivo di ottenere $I, \sigma[x/d] \vDash r(x,x) \to q(x)$. Se $(d,d) \notin r^I$ oppure se $d \in q^I$ questo è immediato, e quindi ci concentriamo sul caso in cui $(d,d) \in r^I$ e $d \notin q^I$, con l'obiettivo di dimostrare che conduce a una contraddizione.

Dato che $I \vDash F$ si ha in particolare $I, \sigma[x/d] \vDash \neg q(x) \to \exists y(r(x,y) \wedge q(y))$ e quindi, dato che $d \notin q^I$, deve essere $I, \sigma[x/d] \vDash \exists y(r(x,y) \wedge q(y))$. Esiste dunque $d_0 \in D^I$ tale che $(d, d_0) \in r^I$ e $d_0 \in q_I$.

Una conseguenza di $I \vDash G$ è che $I, \sigma[x/d, y/d, z/d_0] \vDash r(x,y) \wedge r(x,z) \to y = z$. Dato che $(d,d) \in r^I$ e $(d, d_0) \in r^I$ deve essere $I, \sigma[x/d, y/d, z/d_0] \vDash y = z$: per la normalità di I questo significa che d e d_0 sono lo stesso elemento di D^I. Ciò però contraddice $d \notin q^I$ e $d_0 \in q_I$: ecco quindi la contraddizione cercata.

6. Dobbiamo definire un'interpretazione normale che soddisfa tutti e tre gli enunciati. Due interpretazioni con queste caratteristiche sono definite da

$$D^I = \{0,1,2,3\}, \quad p^I = \{0,2\}, \quad r^I = \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,0)\};$$
$$D^J = \mathbb{Z}, \quad p^J = \{\, n : n \text{ è dispari} \,\}, \quad r^J = \{\, (n,m) : n < m \,\}.$$

7. Dobbiamo partizionare D^I in quattro insiemi in modo da rispettare la Definizione 10.22 delle dispense.

Notiamo che 4 è l'unico elemento di D^I che compare al secondo posto degli elementi di r^I: non può quindi essere congruente con nessun altro elemento di D^I.

Osserviamo che applicando f^I a 2 e 5 si ottiene 4: quindi questi elementi possono essere congruenti tra loro ma certamente non sono congruenti con nessun altro elemento di D^I. Possiamo allora ipotizzare che gli altri elementi non appartenenti a p^I (ovvero 0 e 6) formino un'altra classe di congruenza, mentre la quarta consista degli elementi di p^I diversi da 4. Riassumendo, pensiamo che le quattro classi di congruenza siano $\{0,6\}$, $\{1,3,7\}$, $\{2,5\}$ e $\{4\}$.

Possiamo ora verificare che $\sim$ così definita soddisfa le condizioni che riguardano f (perché $f^I(0) \sim f^I(6)$, $f^I(1) \sim f^I(3) \sim f^I(7)$ e $f^I(2) \sim f^I(5)$) e r (perché sia $(0,4)$ che $(6,4)$ e sia $(2,4)$ che $(5,4)$ sono in r^I).

Si ha allora

$$D^I/{\sim} = \{[0],[1],[2],[4]\};$$
$$f^{I/\sim}([0]) = [1], \quad f^{I/\sim}([1]) = [2], \quad f^{I/\sim}([2]) = [4], \quad f^{I/\sim}([4]) = [1];$$
$$p^{I/\sim} = \{[1],[4]\}, \qquad r^{I/\sim} = \{([0],[4]),([2],[4])\}.$$

8. Per mostrare la conseguenza logica dobbiamo costruire (utilizzando l'Algoritmo 11.52 e le Convenzioni 11.19 e 11.21 delle dispense) un tableau chiuso con la radice etichettata dagli enunciati a sinistra del simbolo di conseguenza logica (indichiamo il secondo, che è una γ-formula, con F) e la negazione $\neg\exists x\, p(x)$ dell'enunciato a destra (che indichiamo con G).

In ogni passaggio sottolineiamo le formule su cui agiamo.

$$
\begin{array}{c}
\underline{\exists x(q(x) \to p(x))}, F, G \\
| \\
\underline{q(a) \to p(a)}, F, G \\
\swarrow \qquad\qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\neg q(a), \underline{F}, G \\
| \\
\neg q(a), F, \underline{\neg q(a) \to p(c)}, G \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\neg q(a), F, q(a), G \\
\otimes
\end{array}
&
\begin{array}{c}
\neg q(a), F, p(c), \underline{G} \\
| \\
\neg q(a), F, p(c), G, \neg p(c) \\
\otimes
\end{array}
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
p(a), F, \underline{G} \\
| \\
p(a), F, G, \neg p(a) \\
\otimes
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Si noti l'importanza di scegliere in modo opportuno le istanze delle γ-formule. Con altre scelte il tableau cresce rapidamente di dimensione.

9. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\forall x(\exists y\, r(x,y) \to \forall y\, \neg r(y,x)) \rhd \forall x\, \neg r(x,x).$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[r(x,x)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[r(x,x)]^1}{\exists y\, r(x,y)} \qquad \dfrac{\forall x(\exists y\, r(x,y) \to \forall y\, \neg r(y,x))}{\exists y\, r(x,y) \to \forall y\, \neg r(y,x)}}{\forall y\, \neg r(y,x)}}{\neg r(x,x)}}{\bot}}{\neg r(x,x)}\,{}^{1}}{\forall x\, \neg r(x,x)}
$$