Prova scritta di Logica Matematica 1
29 gennaio 2010

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Se F è valida allora $F \vee G$ è valida per ogni G. **V** | **F** 1pt

2. $q \equiv (q \to \neg p) \to q$. **V** | **F** 1pt

3. Sia I l'interpretazione con $D^I = \mathbb{N}$, $f^I(n) = 2n$,
$p^I = \{0, 1, 4, 5, 11, 22, 86, 90\}$ e $r^I = \{\, (n, m) \, : \, m = 2n + 1 \,\}$.
Allora $I \models \forall x(p(x) \wedge \exists y\, r(y, x) \to \neg p(f(x)))$. **V** | **F** 1pt

4. L'enunciato $p(a) \wedge p(b) \wedge p(c) \wedge \neg\forall x\, p(x)$ è insoddisfacibile. **V** | **F** 1pt

5. $\exists x(\neg F \to G) \equiv \neg\exists x\, F \to \exists x\, G$. **V** | **F** 1pt

6. Quante delle seguenti formule sono in forma prenessa?
$\forall x\, p(x) \to q(y)$, $\forall y\, p(y) \wedge q(z)$, $\exists x(p(x) \wedge \forall y\, q(y))$. **0** | **1** | **2** | **3** 1pt

7. Se F è valida nella logica con uguaglianza allora F è valida. **V** | **F** 1pt

8. Se $I \equiv_{\mathcal{L}} J$ allora esiste un omomorfismo forte suriettivo di I in J. **V** | **F** 1pt

9. Se la formula predicativa F è soddisfacibile allora
tutti i tableaux (anche non sistematici) per F hanno rami aperti. **V** | **F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate l'insoddisfacibilità nella logica con uguaglianza dell'insieme di enunciati 4pt

$$\{\exists x\, f(f(x)) = x, \forall x\, r(x, f(x)), \forall x \forall y(r(x, y) \to \neg r(y, x))\}.$$

11. Sul retro del foglio dimostrate che l'enunciato 4pt

$$\forall x\, \exists y(r(x, y) \wedge \neg r(y, x)) \to \forall x(r(x, x) \to r(f(x), x))$$

non è valido.

12. Sia $\mathcal{L} = \{a, b, d, m, p, =\}$ un linguaggio con uguaglianza, dove a e b sono simboli di costante, d e m sono simboli di funzione unari e p è un simbolo di relazione binario. Interpretando a come "Andrea", b come "Barbara", $d(x)$ come "il dentista di x", $m(x)$ come "la madre di x" e $p(x, y)$ come "x è parente di y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) La madre di Andrea è parente del dentista di Barbara, che è anche il dentista di Andrea; 3pt

(ii) Il dentista di Andrea è il dentista di tutti i parenti di Barbara, ad eccezione della madre di Barbara, che ha un altro dentista. 3pt

13. Usando il metodo dei tableaux stabilite se 3pt

$$(p \land s \to q \lor \neg r) \land (\neg q \to p) \to q \lor (p \lor r \to \neg s)$$

è valida. Se la formula non è valida definite una valutazione che non la soddisfa. (Utilizzate il retro del foglio)

14. Dimostrate che 5pt

$$\forall x\, r(c, x), \forall x(p(x) \to \neg r(x, f(x))) \rhd \exists x\, \neg p(x).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

15. Usando l'algoritmo di Fitting e utilizzando lo spazio qui sotto, mettete in forma normale congiuntiva la formula 2pt

$$(p \land \neg q) \lor \neg(r \land (s \lor \neg w) \to \neg t \land u).$$

Soluzioni

1. V in qualsiasi interpretazione F è soddisfatta e quindi anche $F \vee G$ è soddisfatta.

2. V come si verifica ad esempio con le tavole di verità.

3. F $I, \sigma[x/11] \not\models p(x) \wedge \exists y\, r(y, x) \rightarrow \neg p(f(x))$.

4. F per esempio $D^I = \{0, 1\}$, $a^I = b^I = c^I = 0$, $p^I = \{0\}$, mostra la soddisfacibilità dell'enunciato.

5. V $\exists x(\neg F \rightarrow G) \equiv \forall x\, \neg F \rightarrow \exists x\, G \equiv \neg \exists x\, F \rightarrow \exists x\, G$ utilizzando i Lemmi 7.55 e 7.46 delle dispense.

6. 0 nessuna delle formule è in forma prenessa.

7. F il fatto che F sia valida nelle logica con uguaglianza non esclude che in qualche interpretazione non normale F possa essere falsa. Ad esempio $a = a$ è falsa in un'interpretazione in sui $=^I = \emptyset$.

8. F si veda la Nota 9.15 delle dispense.

9. V quanto affermato è una conseguenza immediata del teorema di correttezza (Teorema 10.27 delle dispense).

10. Dobbiamo mostrare che nessuna interpretazione normale soddisfa i tre enunciati dell'insieme, che indichiamo con F, G e H. Supponiamo per assurdo che I sia un'interpretazione di questo tipo, con l'intento di arrivare ad una contraddizione.

Da $I \models F$ segue l'esistenza di $d_0 \in D^I$ tale che $(f^I(f^I(d_0)), d_0) \in =^I$: dato che I è normale ciò significa $f^I(f^I(d_0)) = d_0$.

Dato che $I \models G$ si ha in particolare $I, \sigma[x/d_0] \models r(x, f(x))$ e $I, \sigma[x/f^I(d_0)] \models r(x, f(x))$, cioè $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$ e $(f^I(d_0), f^I(f^I(d_0))) \in r^I$.

Visto che $I \models H$ avremmo in particolare che $I, \sigma[x/d_0, y/f^I(d_0)] \models r(x, y) \rightarrow \neg r(y, x)$. Perciò, dato che $(d_0, f^I(d_0)) \in r^I$ dovremmo avere $(f^I(d_0), d_0) \notin r^I$.

Ma $f^I(f^I(d_0)) = d_0$ è incompatibile con $(f^I(d_0), d_0) \notin r^I$ e $(f^I(d_0), f^I(f^I(d_0))) \in r^I$. Abbiamo così ottenuto la contraddizione che cercavamo.

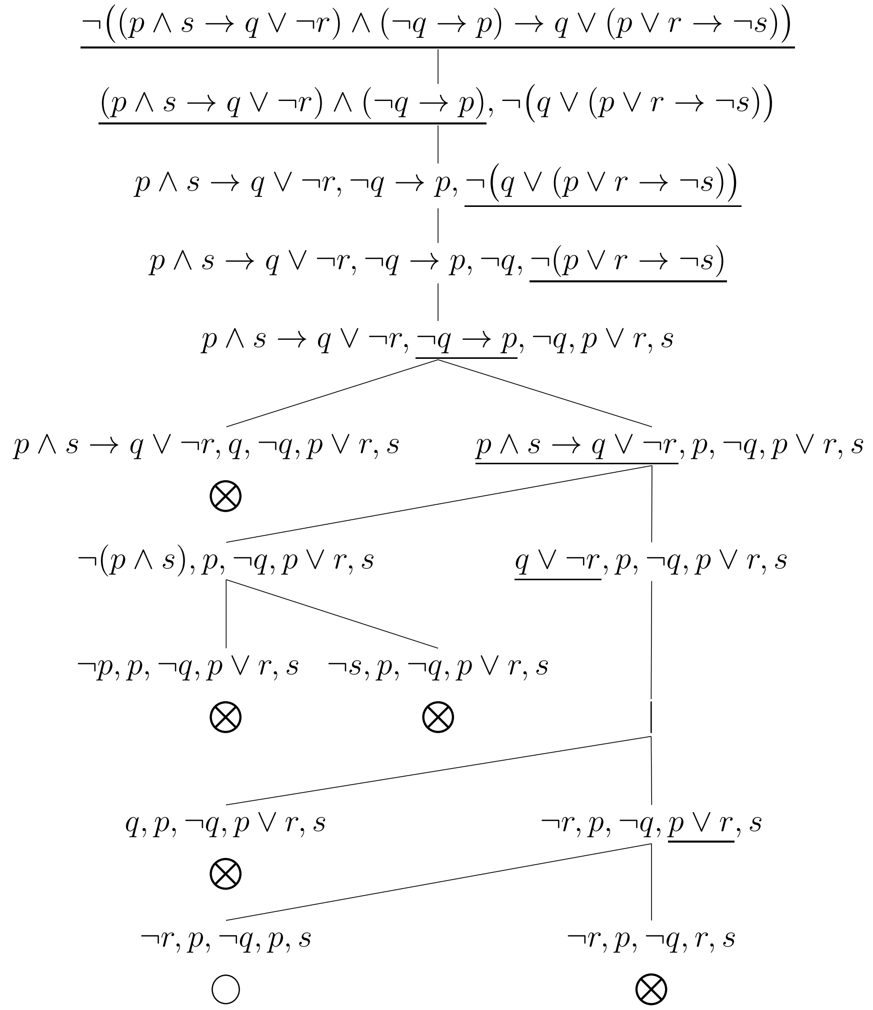
11. Bisogna trovare un'interpretazione che renda falso l'enunciato. In altre parole l'interpretazione deve soddisfare $\forall x\, \exists y(r(x, y) \wedge \neg r(y, x))$ ma non $\forall x(r(x, x) \rightarrow r(f(x), x))$. L'interpretazione I definita da

$$D^I = \{0, 1, 2\}, \quad f^I(0) = f^I(1) = f^I(2) = 1,$$
$$r^I = \{(0, 1), (0, 0), (1, 2), (2, 0)\}$$

ha queste caratteristiche.

12. (i) $p(m(a), d(b)) \wedge d(b) = d(a)$;
(ii) $\forall x(p(x, b) \wedge x \neq m(b) \rightarrow d(a) = d(x)) \wedge d(m(b)) \neq d(a)$.

13. Per stabilire se la formula è valida costruiamo un tableau per la sua negazione. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo. Utilizziamo ripetutamente la Convenzione 4.34 delle dispense e ci fermiamo non appena un nodo contiene una coppia complementare.



Il tableau è aperto e quindi la formula originaria non è valida. Una valutazione che non la soddisfa è data da $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{F}$, $v(r) = \mathbf{F}$, $v(s) = \mathbf{V}$.

14. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\, r(c,x)}{r(c,f(c))} \qquad \dfrac{[p(c)]^1 \qquad \dfrac{\forall x(p(x) \to \neg r(x,f(x)))}{p(c) \to \neg r(c,f(c))}}{\neg r(c,f(c))}}{\bot}}{\neg p(c)}\,1}{\exists x\, \neg p(x)}$$

15.

$$\langle[(p \wedge \neg q) \vee \neg(r \wedge (s \vee \neg w) \to \neg t \wedge u)]\rangle$$
$$\langle[p \wedge \neg q, \neg(r \wedge (s \vee \neg w) \to \neg t \wedge u)]\rangle$$
$$\langle[p, \neg(r \wedge (s \vee \neg w) \to \neg t \wedge u)], [\neg q, \neg(r \wedge (s \vee \neg w) \to \neg t \wedge u)]\rangle$$
$$\langle[p, r \wedge (s \vee \neg w)], [p, \neg(\neg t \wedge u)], [\neg q, r \wedge (s \vee \neg w)], [\neg q, \neg(\neg t \wedge u)]\rangle$$
$$\langle[p, r], [p, s \vee \neg w], [p, t, \neg u], [\neg q, r], [\neg q, s \vee \neg w], [\neg q, t, \neg u]\rangle$$
$$\langle[p, r], [p, s, \neg w], [p, t, \neg u], [\neg q, r], [\neg q, s, \neg w], [\neg q, t, \neg u]\rangle$$

La formula in forma normale congiuntiva ottenuta è

$$(p \vee r) \wedge (p \vee s \vee \neg w) \wedge (p \vee t \vee \neg u) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee s \vee \neg w) \wedge (\neg q \vee t \vee \neg u).$$