Prova scritta di Logica Matematica 1
18 febbraio 2010

Cognome Nome

Matricola

Scrivete **subito** il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco.

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta.

Per ogni esercizio è indicato il relativo punteggio. Nella prima parte se la riposta è corretta, il punteggio viene aggiunto al totale, mentre se la risposta è errata il punteggio viene sottratto (l'assenza di risposta non influisce sul punteggio totale).

Per superare l'esame bisogna raggiungere 18 punti, di cui almeno 5 relativi alla prima parte.

PRIMA PARTE

Barrate la risposta che ritenete corretta. Non dovete giustificare la risposta.

1. Quante delle seguenti formule sono in forma normale disgiuntiva?
$(p \land \neg q \land r) \lor (\neg s \land q)$, $p \lor (\neg q \land \neg r)$, $(p \land \neg s) \lor (\neg\neg t \land q)$. **0 | 1 | 2 | 3** 1pt

2. Se $F \models H$ e $G \models H$ allora $F \lor G \models H$. **V | F** 1pt

3. Se F è una α-formula, allora F non è la negazione di un'implicazione. **V | F** 1pt

4. Se $F \rhd G$ allora $F \to G$ è valida. **V | F** 1pt

5. Sia I l'interpretazione con $D^I = \{0,1,2,3\}$, $p^I = \{0,2\}$ e $r^I = \{(0,0),(0,2),(1,2),(1,3),(3,0),(3,2)\}$.
Allora $I \models \forall x(\exists y\, r(y,x) \to p(x) \lor \exists z(r(x,z) \land \neg p(z)))$. **V | F** 1pt

6. $\exists x\, \neg p(x) \land x = c \to \neg p(c)$ è valida nella logica con uguaglianza. **V | F** 1pt

7. Se $I, \sigma \models \forall x\, F$ allora $I, \sigma \models F\{x/t\}$ per ogni termine chiuso t. **V | F** 1pt

8. Se esiste un omomorfismo forte (non necessariamente suriettivo) di I in J e $I \models p(a) \land \neg q(b)$, allora $J \models p(a) \land \neg q(b)$. **V | F** 1pt

9. Se Γ è un insieme di Hintikka e $\neg\exists x\, \neg(r(a,x) \lor p(x)) \in \Gamma$ allora $r(a,a) \in \Gamma$. **V | F** 1pt

SECONDA PARTE

10. Sul retro del foglio dimostrate che l'enunciato 4pt

$$p(c) \land \forall x(p(x) \to \neg p(f(x)) \land p(f(f(x)))) \land \neg q(c) \land \forall x(q(x) \lor q(f(f(x))))$$

è soddisfacibile.

11. Considerate i seguenti enunciati, che indichiamo con F, G, H e K: 4pt

$$\forall x\, \forall y\, (q(f(x,y)) \to q(x) \lor q(y)); \qquad \exists x\, \exists y\, q(f(x,y));$$

$$\forall x\, \forall y\, (q(x) \land q(y) \to \neg q(f(x,y))); \qquad \exists x\, \exists y\, x \neq y.$$

Sul retro del foglio dimostrate che $F, G, H \models_= K$.

12. Sia $\mathcal{L} = \{b, p, r, c, a\}$ un linguaggio, dove b è un simbolo di costante, p è un simbolo di funzione unario, r e c sono simboli di relazione unari e a è un simbolo di relazione binario. Interpretando b come "Bruno", $p(x)$ come "il primo film di x", $r(x)$ come "x è un regista", $c(x)$ come "x è un cinefilo" e $a(x, y)$ come "x ama y", traducete le seguenti frasi, utilizzando lo spazio sotto ognuna di esse:

(i) Bruno è un cinefilo e ama il primo film di qualche regista; 3pt

(ii) C'è qualche regista di cui nessun cinefilo ama il primo film. 3pt

13. Dimostrate che $F \wedge (H \to \neg G), \neg F \vee G \rhd \neg H$. Usate solo le regole della deduzione naturale proposizionale, comprese le quattro regole derivate. (Utilizzate il retro del foglio) 3pt

14. Usando il metodo dei tableaux stabilite la validità di 5pt

$$\forall x(\exists y\, r(x, y) \to r(x, x)) \wedge \exists y\, r(y, a) \to \exists z\, r(z, z).$$

(Utilizzate il retro del foglio)

15. Utilizzando lo spazio qui sotto mettete in forma prenessa la formula 2pt

$$\forall x(\forall y\, p(x, y) \to \neg\forall y\, q(y, x)) \wedge \neg\forall x\, \neg\forall y\, r(x, y).$$

[Se si usa il minimo numero di quantificatori possibili, 1pt in più.]

Soluzioni

1. **2** le prima due formule sono in forma normale disgiuntiva, mentre la terza non lo è perché $\neg\neg t$ non è un letterale.
2. **V** se un'interpretazione I soddisfa $F \vee G$ allora soddisfa almeno una tra F e G. Usando le ipotesi si ottiene che in entrambi i casi $I \models H$.
3. **F** la negazione di un'implicazione è una α-formula.
4. **V** l'affermazione segue dal Teorema 5.17 (correttezza della deduzione naturale) e dal Lemma 2.38 delle dispense.
5. **F** $I, \sigma[x/3] \models \exists y\, r(y,x)$ ma $I, \sigma[x/3] \not\models p(x) \vee \exists z(r(x,z) \wedge \neg p(z))$.
6. **F** per esempio l'interpretazione normale con $D^I = \{0,1\}$, $c^I = 0$, $p^I = \{0\}$, in uno stato con $\sigma(x) = 0$ non soddisfa la formula.
7. **V** è una conseguenza del Lemma 7.45 delle dispense.
8. **V** è una conseguenza del Lemma 9.8 delle dispense (la formula che consideriamo è infatti aperta).
9. **F** $\{\neg\exists x\, \neg(r(a,x) \vee p(x)), \neg\neg(r(a,a) \vee p(a)), r(a,a) \vee p(a), p(a)\}$ è un insieme di Hintikka.
10. Bisogna trovare un'interpretazione che soddisfa l'enunciato. L'interpretazione I definita da
$$D^I = \{0,1,2\}, \quad c^I = 0, \quad f^I(0) = 1, \quad f^I(1) = 2, \quad f^I(2) = 1,$$
$$p^I = \{0,2\}, \quad q^I = \{1,2\}$$
ha questa caratteristica. Anche l'interpretazione J definita da
$$D^J = \mathbb{N}, \quad c^J = 0, \quad f^J(n) = n+1,$$
$$p^J = \{\, n : n \text{ è pari}\,\}, \quad q^J = \{\, n : n > 0\,\}$$
andrebbe bene.
11. Dobbiamo mostrare che se un'interpretazione normale soddisfa F, G e H allora soddisfa anche K. Sia dunque I un'interpretazione normale che soddisfa F, G e H.

    Dato che $I \models G$ esistono $d_0, d_1 \in D^I$ tali che $f^I(d_0,d_1) \in q^I$. Usando $I \models F$ si ottiene che $d_0 \in q^I$ oppure $d_1 \in q^I$. Se entrambe queste condizioni fossero vere da $I \models H$ si avrebbe $f^I(d_0,d_1) \notin q^I$, che è impossibile. Quindi deve essere che uno tra d_0 e d_1 appartiene a q^I, mentre l'altro non vi appartiene. Perciò $d_0 \neq d_1$. Dato che I è normale questo significa che $(d_0,d_1) \notin =^I$, e perciò $I \models K$.
12. (i) $c(b) \wedge \exists x(r(x) \wedge a(b, p(x)))$;
    (ii) $\exists x(r(x) \wedge \forall y(c(y) \rightarrow \neg a(y, p(x))))$.

13. Ecco una deduzione naturale che mostra quanto richiesto:

$$
\dfrac{\neg F \lor G \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{F \land (H \to \neg G)}{F} \qquad [\neg F]^2}{\bot}}{\neg H} \qquad \dfrac{\dfrac{[G]^2 \qquad \dfrac{[H]^1 \qquad \dfrac{F \land (H \to \neg G)}{H \to \neg G}}{\neg G}}{\bot}}{\neg H}\,{\scriptstyle 1}}{\neg H}\,{\scriptstyle 2}
$$

14. Per stabilire la validità dell'enunciato costruiamo un tableau per la sua negazione. Indichiamo con F, G e H le γ-formule $\forall x(\exists y\, r(x,y) \to r(x,x))$, $\neg\exists z\, r(z,z)$ e $\neg\exists y\, r(c,y)$. In ogni passaggio sottolineiamo la formula su cui agiamo.

$$\underline{\neg(F \land \exists y\, r(y,a) \to \exists z\, r(z,z))}$$
$$|$$
$$\underline{F \land \exists y\, r(y,a)}, G$$
$$|$$
$$F, \underline{\exists y\, r(y,a)}, G$$
$$|$$
$$\underline{F}, r(c,a), G$$
$$|$$
$$F, \underline{\exists y\, r(c,y) \to r(c,c)}, r(c,a), G$$

$$
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
F, \underline{H}, r(c,a), G & F, r(c,c), r(c,a), \underline{G} \\
| & | \\
F, H, \neg r(c,a), r(c,a), G & F, r(c,c), r(c,a), G, \neg r(c,c) \\
\otimes & \otimes
\end{array}
$$

15.

$$\forall x(\forall y\, p(x,y) \to \neg\forall y\, q(y,x)) \land \neg\forall x\, \neg\forall y\, r(x,y)$$
$$\forall x(\forall y\, p(x,y) \to \exists y\, \neg q(y,x)) \land \exists x\, \forall y\, r(x,y)$$
$$\forall x\, \exists y(p(x,y) \to \neg q(y,x)) \land \exists x\, \forall y\, r(x,y)$$
$$\exists x(\forall z\, \exists y(p(z,y) \to \neg q(y,z)) \land \forall z\, r(x,z))$$
$$\exists x\, \forall z(\exists y(p(z,y) \to \neg q(y,z)) \land r(x,z))$$
$$\exists x\, \forall z\, \exists y((p(z,y) \to \neg q(y,z)) \land r(x,z))$$