45. Асимптотические оценки сумм

Рассмотрим доказательства асимптотических оценок для следующих сумм:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^k, \quad \sum_{i=1}^{n-1} \log i, \quad \sum_{i=1}^{n-1} i \log i.$$

1. Сумма $\sum_{i=0}^{n-1} i^k$

Сумма $\sum_{i=0}^{n-1} i^k$ связана с многочленными суммами и может быть аппроксимирована через интеграл:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^k \approx \int_0^n x^k \, dx.$$

Рассчитаем интеграл:

$$\int_0^n x^k \, dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^n = \frac{n^{k+1}}{k+1}.$$

Следовательно:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^k \sim \frac{n^{k+1}}{k+1}, \quad \text{при } n \to \infty.$$

Асимптотическая оценка:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^k = O(n^{k+1}).$$

2. Сумма $\sum_{i=1}^{n-1} \log i$

Эта сумма выражает логарифм факториала:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log i = \log((n-1)!).$$

Используем формулу Стирлинга:

$$(n-1)! \sim \sqrt{2\pi(n-1)} \left(\frac{n-1}{e} \right)^{n-1}.$$

Берём логарифм от обеих сторон:

$$\log((n-1)!) \sim \log\left(\sqrt{2\pi(n-1)}\right) + \log\left(\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}\right).$$

Упрощаем выражение:

$$\log((n-1)!) \sim \frac{1}{2}\log(2\pi(n-1)) + (n-1)\log(n-1) - (n-1).$$

Основные члены:

$$\log((n-1)!) \sim (n-1)\log(n-1) - (n-1).$$

Следовательно:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log i \sim n\log n - n.$$

Асимптотическая оценка:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log i = O(n\log n).$$

3. Сумма $\sum_{i=1}^{n-1} i\log i$

Эта сумма представляется через интегральную аппроксимацию:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i\log i \approx \int_1^n x\log x\,dx.$$

Рассчитаем интеграл, используя метод интегрирования по частям. Пусть:

$$u = \log x, \quad dv = x\,dx.$$

Тогда:

$$du = \frac{1}{x}dx, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int x\log x\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}dx.$$

Вычисляем оставшийся интеграл:

$$\int \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6}.$$

Следовательно:

$$\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^3}{6}.$$

Подставляем пределы интегрирования от 1 до n:

$$\int_1^n x \log x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^3}{6} \right]_1^n.$$

Подставляем верхний предел n (нижний вклад при $x = 1$ незначителен для асимптотики):

$$\int_1^n x \log x \, dx \sim \frac{n^2}{2} \log n - \frac{n^3}{6}.$$

Основное слагаемое:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \log i \sim \frac{n^2}{2} \log n.$$

Асимптотическая оценка:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \log i = O(n^2 \log n).$$