

24. Битоническая последовательность

Последовательность называется битонической, если она сначала возрастает, а затем убывает. Другими словами, массив $arr[0..n-1]$ является битоническим, если существует индекс i , где $0 \leq i \leq n-1$, такой что:

$$x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_i$$

и

$$x_i \geq x_{i+1} \geq \dots \geq x_{n-1}$$

Последовательность, отсортированная по возрастанию, считается битонической с пустой убывающей частью. Аналогично, последовательность, отсортированная по убыванию, считается битонической с пустой возрастающей частью. Обрат битонической последовательности также является битоническим.

Как сформировать битоническую последовательность из случайных данных?

Для формирования битонической последовательности из случайного массива:

1. Начинаем с формирования 4-элементных битонических последовательностей из последовательных 2-элементных последовательностей. Рассмотрим 4-элементную последовательность x_0, x_1, x_2, x_3 . Мы сортируем x_0 и x_1 по возрастанию, а x_2 и x_3 по убыванию. Затем объединяем эти две пары, чтобы получить 4-элементную битоническую последовательность.
2. Затем берем две 4-элементные битонические последовательности, сортируя одну по возрастанию, а другую по убыванию (с использованием битонической сортировки, которую мы обсудим ниже), и так далее, пока не получим битоническую последовательность.

Пример

Преобразуем следующую последовательность в битоническую последовательность:

$$3, 7, 4, 8, 6, 2, 1, 5$$

Шаг 1: Рассматриваем каждую пару из двух последовательных элементов как битоническую последовательность и применяем битоническое слияние для каждой пары:

$$[3, 7], [4, 8], [6, 2], [1, 5]$$

Затем сортируем $[3, 7]$ и $[4, 8]$ по возрастанию, а $[6, 2]$ и $[1, 5]$ по убыванию:

$$[3, 7] \text{ и } [4, 8] \text{ (по возрастанию), } [6, 2] \text{ и } [1, 5] \text{ (по убыванию)}$$

Шаг 2: Два 4-элементных битонических массива:

$$A = [3, 7, 8, 4], \quad B = [2, 6, 5, 1]$$

Затем продолжаем слияние до тех пор, пока не получим битоническую последовательность:

$$[3, 4, 7, 8, 6, 5, 2, 1]$$

Алгоритм битонической сортировки

Алгоритм битонического слияния включает два шага:

1. **Создание битонической последовательности:** На этом этапе создается битоническая последовательность, как описано выше. После этого массив становится [3, 4, 7, 8, 6, 5, 2, 1].

2. **Создание отсортированной последовательности из битонической:** На этом этапе первая половина массива отсортирована по возрастанию, а вторая половина — по убыванию. Мы сравниваем первые элементы первой половины с первыми элементами второй половины, затем вторые элементы первой половины с вторыми элементами второй половины и так далее. Если элемент из первой половины больше, чем элемент из второй половины, мы меняем их местами.

После выполнения этих шагов получаем два битонических массива. Если продолжить этот процесс внутри двух битонических последовательностей, мы получим четыре битонических массива, и так далее, пока не получим 8 битонических последовательностей длины 1. Когда все последовательности отсортированы, мы получаем окончательно отсортированный массив.