

## 9. Доказательство корректности пирамидальной сортировки с использованием инварианта

### Описание алгоритма пирамидальной сортировки

Пирамидальная сортировка (*heapsort*) выполняется в два этапа:

1. Построение кучи (*heapify*) из исходного массива. Это создаёт структуру данных, где каждый узел больше (или меньше, для мин-кучи) своих дочерних узлов.
2. Извлечение максимального (или минимального) элемента из кучи, который помещается в конец массива. После каждого извлечения свойства пирамиды восстанавливаются.

### Инвариант пирамидальной сортировки

**Инвариант:** На любом шаге выполнения алгоритма:

- Массив частично отсортирован: элементы после текущей позиции максимального элемента упорядочены по возрастанию.
- Куча сохраняет свойства пирамиды: для каждого узла  $i$ , выполняется  $A[i] \geq A[2i + 1]$  и  $A[i] \geq A[2i + 2]$  (для макс-кучи).

Инвариант сохраняется на всех этапах алгоритма благодаря следующим операциям.

### Доказательство корректности

#### 1. Построение кучи

На этапе построения кучи выполняется операция погружения (*heapify-down*) начиная с последнего узла, у которого есть дочерние элементы. В результате:

- Каждый подмассив, представляющий поддерево, преобразуется в кучу.
- Свойства кучи распространяются на всю структуру, начиная с нижнего уровня дерева и заканчивая корнем.

Таким образом, на этом этапе инвариант выполняется: массив представляет собой полную кучу.

#### 2. Извлечение максимального элемента

Максимальный элемент (корень кучи) извлекается и помещается в конец массива. После этого:

- Последний элемент массива перемещается в корень.
- Выполняется операция погружения (*heapify-down*), восстанавливающая свойства пирамиды для оставшейся части массива.
- Инвариант сохраняется, так как отсортированные элементы не изменяются, а оставшаяся часть массива остаётся кучей.

### 3. Завершение алгоритма

Процесс продолжается до тех пор, пока не будет извлечён последний элемент кучи. В результате:

- Все элементы массива упорядочены по возрастанию (или убыванию, для мин-кучи).
- Инвариант гарантирует, что на каждом шаге массив частично отсортирован, а оставшаяся часть поддерживает свойства кучи.