Решение НЛРУ при функции-экспоненте

Будем искать частное решение НЛРУ

$$a_kF(n+k)+a_{k-1}F(n+k-1)+\ldots+a_1F(n+1)+a_0F(n)=b\alpha^n \quad (3.40)$$

в виде

$$F_p(n)=c\alpha^n. \quad (3.41)$$

Подставляя (3.41) в (3.40), имеем

$$\sum_{i=0}^{k} a_i c\alpha^{n+i}=b\alpha^n,$$

отсюда

$$c\alpha^n h(\alpha)=b\alpha^n,$$

т.е.

$$F_p(n)=\frac{b\alpha^n}{h(\alpha)},$$

если α не является корнем характеристического уравнения $h(x)$. Если α является корнем кратности m характеристического уравнения $h(x)$, то частное решение (3.40) следует искать в виде

$$F_p(n)=d\alpha^n n^{(m)}, \quad (3.42)$$

где d — некоторая константа, а $n^{(m)}$ — обобщенная степень,

$$\begin{cases} n^{(i)}=n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-i+1),\\ n^{(0)}=1. \end{cases} \quad (3.43)$$

Рассмотрим другое нелинейное уравнение,

$$\begin{cases} F(n) = aF\left(\frac{n}{m}\right) + bn, \\ F(1) = b. \end{cases} \tag{3.46}$$

Вычислим значение $F(n)$ при подстановке в (3.46) некоторых констант.

$$F(m) = aF(1) + bm = b(m+a) = bm\left(1 + \frac{a}{m}\right) \qquad \text{при } n = m,$$

$$F(m^2) = aF(m) + bm^2 = b(m^2 + am + a^2) =$$

$$= bm^2\left(1 + \frac{a}{m} + \left(\frac{a}{m}\right)^2\right) \qquad \text{при } n = m^2,$$

$$F(m^3) = aF(m^2) + bm^3 = b(m^3 + am^2 + a^2m + a^3) =$$

$$= bm^3\left(1 + \frac{a}{m} + \left(\frac{a}{m}\right)^2 + \left(\frac{a}{m}\right)^3\right) \qquad \text{при } n = m^3.$$

Теперь можно предположить, что решением уравнения (3.46) является

$$F(n) = bn\sum_{i=0}^{\log_m n}\left(\frac{a}{m}\right)^i. \tag{3.47}$$

Подставляя (3.47) в (3.46) и введя обозначение $r = \left(\frac{a}{m}\right)$, имеем

$$F(n) = aF\left(\frac{n}{m}\right) + bn = a\left(b\left(\frac{n}{m}\right)\sum_{i=0}^{\log_m \frac{n}{m}} r^i\right) + bn =$$

$$= rbn\sum_{i=0}^{\log_m n - 1} r^i + bn = bn\left(\sum_{i=0}^{\log_m n - 1} r^{i+1} + 1\right) =$$

$$= bn\left(\sum_{j=1}^{\log_m n} r^j + r^0\right) = bn\sum_{i=0}^{\log_m n} r^i.$$

Таким образом, (3.47) действительно является решением уравнения (3.46).

43. Рекуррентные соотношения: основная теорема. Формулировка.

$T(n) = a \cdot T(n/b) + f(n) \qquad a \geq 1,\ b > 1 \qquad f(n)$ - асимптотически положит.

1) $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}),\ \varepsilon > 0 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

2) $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n) = \Theta(f(n) \log n)$

3) $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$,

$a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$ $\Rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$

$c < 1$, при больш. n

$\exists n_0$, с которого...

44. Оценка сумм через $\int$. Основная идея.

Если функция $f(x)$ не убывает, то:

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

Если не возрастает:

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) \geq \int_a^b f(x)\,dx$$