2023年春季《高等代数》课后辅导：**期中考前练习**

试题共 2 页,6 道大题. 建议完成时间为 110min.

01 互素多项式 　　12%

设 $f(x)=x^3-x+2, g(x)=x^2+1\in\mathbb{Q}[x]$. 验证 $(f,g)=1$, 并求 $u(x),v(x)\in\mathbb{Q}[x]$, 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.

02 矩阵的不变因子 　　20%

已知矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{8\times 8}$ 的不变因子除却 6 个 1 以外还有多项式 $(\lambda-2)(\lambda^2+4)^s$ 与 $(\lambda-2)^t(\lambda^2+4)$, 其中 s 与 t 都是正整数, 且 $t>1$. 请求解下面内容, 并给出完整步骤或原理说明:

i. s,t 的值; 　**ii.** $\boldsymbol{A}$ 的所有初等因子; 　**iii.** $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形;

iv. $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式; 　**v.** $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{60}$ 的最小多项式;

vi. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可看作实数矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的有理标准形.

03 线性变换 　　24%

设 V 为一复数域上的三维线性空间,$\mathscr{A}$ 为该线性空间上的一个线性变换, 且 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-3&4\\3&-2&4\\8&-8&9\end{pmatrix}.$$

i. 试以 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的线性组合表示出一组基 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3$, 使得 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3$ 下的矩阵为 Jordan 标准型;

ii. 若该线性空间上的一个线性变换 $\mathscr{F}$ 满足 $\mathscr{F}^2+9\mathscr{E}=10\mathscr{F}$(其中 $\mathscr{E}$ 为恒等变换), 则该线性变换在某组基下的矩阵是否可能为 $\boldsymbol{A}$? 请说明理由.

iii. 是否存在一个线性变换 $\mathscr{B}$ 满足 $\mathscr{B}^2=\mathscr{A}$? 若存在, 请求出 $\mathscr{B}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下的矩阵; 若不存在, 请证明之;

iv. 记集合 C 为 V 上所有满足 $\mathscr{A}\mathscr{C}=\mathscr{C}\mathscr{A}$(即可交换性) 的线性变换组成的集合, 试证明集合 C(在线性变换之加法与数乘运算的意义下) 构成复数域上的线性空间, 并计算它的维数.

04 多项式的整除问题 14%

证明: 多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 能被 $(x-1)^k$ 整除的充要条件为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 4 & 9 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^k & 3^k & \cdots & n^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

05 中国剩余定理 16%

I. 若 $p_k(x)\in\mathbb{P}[x](k=1,2,\cdots,s)$ 是一组两两互素的非零次多项式, $f_k(x)\in\mathbb{P}[x](k=1,2,\cdots,s)$ 为一组不全为零的多项式, 证明下面两个命题:

i. $\exists h_k(x)\in\mathbb{P}[x](k=1,2,\cdots,s)$, 使得

$$p_i(x)|h_k(x)-\delta_{ik},\forall i=1,2,\cdots,s,$$

其中 δ_{ik} 为 Kronecker 符号, 当 $i=k$ 时取 1, 否则取 0;

ii. $\exists F(x)\in\mathbb{P}[x]$, 使得

$$p_i(x)|F(x)-f_i(x),\forall i=1,2,\cdots,s.$$

II. 对于问题 01 中的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$, 求一个次数不超过 4 的多项式 $h(x)\in\mathbb{Q}[x]$, 使得

$$f(x)|h(x)+4x,g(x)|h(x)-4.$$

06 矩阵指数 14%

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵且 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$. 定义矩阵

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{2!}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}^{k-1}}{(k-1)!},$$

其中矩阵 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵. 证明:

i. 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 可逆;

ii. 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 与矩阵 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 相似.