第二篇　电磁学

第 4 章　静电场

思考题

4-1 点电荷与试验电荷有什么区别？

[提示] “点电荷”是实际带电体在一定条件下简化的物理模型。当带电体的线度比所考察的距离足够小，以致它的大小和形状对研究问题不起作用或其影响可忽略时，可以把它看作为一个点，但它本身不一定很小，所带的电量没有限制。

“试验电荷”是用来测定电场性质的一个辅助工具。对它的要求是：线度必须足够小，带电量也必须足够小。引入试验电荷后，不应改变原来电场的大小和分布。

4-2 在一个带正电的大导体球附近 P 处放置一点电荷 q（$q>0$），测得它受力为 F。若考虑到电荷 q 的电量不是足够小，由 $E = F/q$ 得出的电场强度值比原来 P 点的场强大还是小？若大导体球带负电，情况又如何？

[提示] 点电荷的电量不是足够小，它的引入将影响原来大导体球上的电荷分布，原先大导体球上的电荷在球面上是均匀分布的，放置 q 后，大导体球上的正电荷远离 P 点，由 $E = F/q$ 得出的电场强度值是重新分布后的场强，它比原来 P 点的场强要小；若大导体球带负电，情况正好相反，负电荷靠近 P 点，因而 F/q 比原来 P 点的场强大。

4-3 判断下列说法是否正确并指出为什么？

（1）如果高斯面上 $\boldsymbol{E}$ 处处为零，则高斯面内必无电荷；

（2）如果高斯面内无电荷，则高斯面上 $\boldsymbol{E}$ 处处为零；

（3）如果高斯面上 $\boldsymbol{E}$ 处处不为零，则高斯面内必有电荷；

（4）如果高斯面内有电荷，则高斯面上 $\boldsymbol{E}$ 处处不为零；

（5）如果穿过高斯面的电通量不为零，则高斯面上的 $\boldsymbol{E}$ 一定处处不为零。

[提示] （1）不对。由高斯定理 $\boldsymbol{\Phi} = \oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$，$\boldsymbol{E}$ 在高斯面上处处为 0，只能讲高斯面内包围的电荷代数和 $\sum q_i = 0$，并不一定无电荷，也可有等量异号对称分布的电荷存在。

（2）不对。$\sum q_i = 0$，仅指通过高斯面的电通量为零，并非一定 $\boldsymbol{E}$ 在高斯面上处处为零（高斯面外的电荷也在高斯面上各点产生场强）。

（3）不对。$\boldsymbol{E}$ 在高斯面上处处不为 0，并非是通过高斯面的电通量一定不为零。因而无法确定高斯面内是否包围的电荷。

（4）不对。高斯面内有电荷 $\sum q_i$，仅指通过高斯面的电通量不为零。当然，不能说 E 在高斯面上处处为 0，但也不能讲 $\boldsymbol{E}$ 在高斯面上处处不为 0。

（5）不一定。由 $\boldsymbol{\Phi} = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 知，$\boldsymbol{\Phi} \neq 0$ 可分两种情况，一是面上处处都有电力线穿过，只是穿入和穿出高斯面的 $\boldsymbol{E}$ 线数不相等，因而穿过高斯面的总通量 $\boldsymbol{\Phi} \neq 0$，此时面上各点的 $\boldsymbol{E}$ 处处不为零；当高斯面包围不等量的两异号电荷中的一个时就属这种情况；另一可能是只有电力线从一部分高斯面上穿入或穿出（高斯面的一部分在导体内），此时 $\boldsymbol{\Phi} \neq 0$，但导体内那部分高斯面上的 E 等于 0。

4-4 为什么只有在场强分布具有高度对称时，才能直接用高斯定理计算场强？应用高斯定理求场强时，高斯面应怎样选取才合适？

[提示] 因为只有当场强分布具有某种对称性时，电场强度 E 才有可能以标量的形式从高斯定理的积分号内提取出来；应用高斯定理求场强时，高斯面应这样选取：

（1）高斯面必须通过待求场强的那一点（场点）；（2）高斯面上各处的法线必须与 $\boldsymbol{E}$ 平行或垂直；（3）在法线与 $\boldsymbol{E}$ 平行部分的高斯面上各点的场强大小必须相等；（4）高斯面的形状应比较简单。

4-5 确定静电场中某点的电势时，为什么必须选定一个电势零点？

[提示] 因电势仅有相对的意义。空间各点的电势的大小与正负，都与零电势点的选取有关。但两点间的电势差是绝对的，与零电势点的选取无关。

4-6 下列说法是否正确，为什么？

（1）场强为零的地方，电势也一定为零。电势为零的地方，场强一定为零。

（2）电势较高的地方，电场强度一定较大。电场强度较小的地方，电势也一定较低。

（3）场强大小相等的地方，电势相同。电势相等的地方，场强也都相等。

（4）带正电的物体，电势一定是正的。

[提示] （1）不对。场强与电势值无关，仅与电势的变化有关。场强为 0，仅指电势在该点附近的梯度为 0，电势可不为 0。如导体内各点场强为 0，导体是等势体，电势不一定为 0。

（2）不对。电势的高低，与零电势点的选取有关，与场强无关。如不论导体的电势有多高，其内部电场却恒为零。

（3）不对。场强相等的地方，是电势梯度相同，而不是电势相同。例如均匀电场的电场线上各点场强相同，但电场线却指向电势降落的方向。

（4）不对。电势的正负，决定于零电势点的选取。比零电势点高则正，反之为负，与物体带电的正负无关。即使取无限远处电势为零，带正电物体的电势也与周围物体带电有关，如周围物体带很多负电，它的电势也可为负值。

习　题　4

选择题

4-1　C　　4-2　B　　4-3　D　　4-4　D　　4-5　A　　4-6　B　　4-7　A

4-8　C

填空题

4-9　$\dfrac{\lambda_1 d}{\lambda_1+\lambda_2}$

4-10　$\dfrac{\lambda}{\varepsilon_0}$

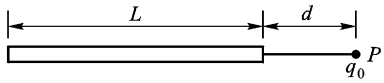
4-11　0，$\dfrac{\lambda}{2\varepsilon_0}$

4-12　处处正交，　电势降落

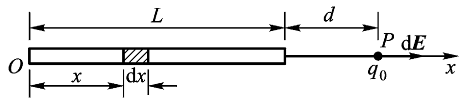
4-13　$\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{r_2})$

计算题

4-14　电量 q 均匀分布在长为 L 的细棒上，如图所示。今在细棒轴线上距棒右端为 d 处的 P 点放一试验电荷 q_0。计算 q_0 受细棒电场的作用力。



习题 4-14 图



解 4-14 图

[分析] 电荷 q_0 在电场中受电场的作用力大小为 $F=q_0E$，故本题的关键是先求出 P 点的电场强度，可用叠加原理求。

[解] 以带电细棒左端为坐标原点，建立一维坐标如解 4-14 图所示。在 x 处取线元 dx，其带电量为

$$\mathrm{d}q=\lambda\,\mathrm{d}x=\frac{q}{L}\mathrm{d}x$$

$\mathrm{d}q$ 在 P 点产生的电场强度的大小为

$$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\mathrm{d}x}{L(L+d-x)^2}$$

方向沿 x 正向。因为各电荷元在 P 点产生的 $\mathrm{d}E$ 方向均相同，故 P 点的场强大小

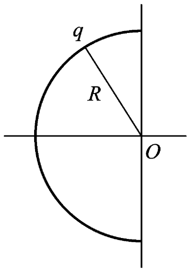
$$E_P=\int\mathrm{d}E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\int_0^L\frac{\mathrm{d}x}{(L+d-x)^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d(L+d)}$$

$$\boldsymbol{E}_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d(L+d)}\boldsymbol{i}$$

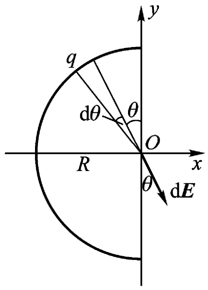
试验电荷 q_0 在 P 点受细棒电场的作用力

$$\boldsymbol{F} = q_0\boldsymbol{E}_P = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 d(L+d)}\boldsymbol{i}$$

4-15 电量 q 均匀分布在半径为 R 的半圆环上，如图所示。求半圆环中心 O 点的电场强度。



习题 4-15 图



解 4-15 图

[解] 以半圆环中心为坐标原点，建立直角坐标系如解 4-15 图所示。

在 θ 处取线元 $\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$，其带电量

$$\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}l = \frac{q}{\pi R}R\mathrm{d}\theta = \frac{q}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

$\mathrm{d}q$ 在 O 点产生的电场强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的大小为

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\mathrm{d}\theta$$

方向如图所示。因为各电荷元在 O 点产生的 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 方向不同，把 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 分解为

$$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\cos\theta，\qquad \mathrm{d}E_y = -\mathrm{d}E\sin\theta$$

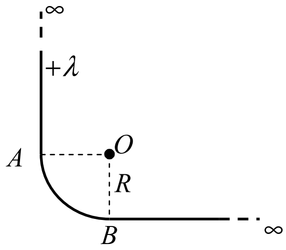
由对称性知 $$E_y = \int \mathrm{d}E_y = 0$$

所以 $$E = E_x = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{i}$$

*4-16 电荷线密度为 λ 的“无限长”细线被弯成如图示的形状，其中 AB 段是半径为 R 的四分之一圆弧，试求圆心 O 点的场强。

[分析]　O 点的场强为两段带电半无限长直线与带电四分之一圆弧段在 O 点场强的叠加。



习题 4-16 图

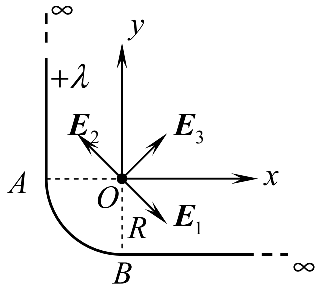
[解] 在 O 点建立坐标系如解 4-16 图所示。

半无限长直线 $A\infty$ 在 O 点产生的场强

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})$$

半无限长直线 $B\infty$ 在 O 点产生的场强

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$$



解 4-16 图

四分之一圆弧段在 O 点产生的场强

$$\boldsymbol{E}_3 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$$

由场强叠加原理，O 点的合场强为

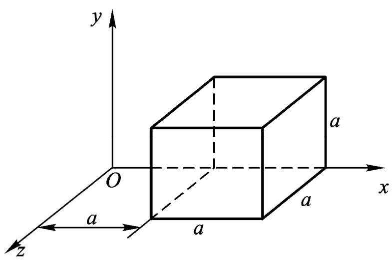
$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$$

4-17 真空中一立方体形的高斯面，其位置放置如图所示。已知立方体边长为 $a = 0.1$ m，空间的场强分布为：

$$E_x = bx,\quad E_y = 0,\quad E_z = 0$$

常数 $b = 1000$ N/(C.m)。试求通过该闭合面的电场强度通量及闭合面中包含的净电荷。

[分析] 由电场的解析式知道，场强为沿 x 方向的非均匀电场。因此，通过立方体的上、下、前、后四个面的电场强度通量为零；而与 x 轴垂直的左、右两个面的电场强度通量不为零，且不相等。电场强度在这两个面上均匀分布，根据高斯定理可知，立方体内有激发静电场的源，即有电荷。



习题 4-17 图

[解] 设通过左、右两个平面的电场强度通量分别为 Φ_1 和 Φ_2，根据上述分析有

$$\Phi_1 = \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{S} = -E_1 S = -ba \cdot a^2 = -ba^3$$

$$\Phi_2 = \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{S} = E_2 S = 2ba \cdot a^2 = 2ba^3$$

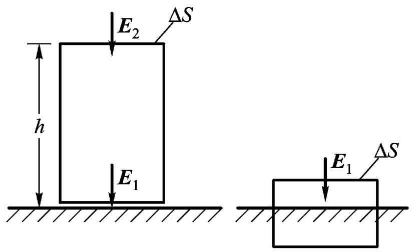
通过立方体其它平面的电场强度通量均为零，故通过该闭合面的总电场强度通量为

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 = (E_2 - E_1)S \\ &= 2ba^3 - ba^3 = ba^3 = 1000 \times 0.1^3 = 1\ \mathrm{N \cdot m^2 / C}\end{aligned}$$

由高斯定理$\Phi = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$，该闭合面内包含的净电荷

$$q = \varepsilon_0 \Phi = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C}$$

4-18 实验表明：在靠近地面处的电场强度$\boldsymbol{E}_1$的大小约为 1.0×10^2 N/c，方向垂直地面向下；在离地面 1.5×10^3 m 高处，电场强度$\boldsymbol{E}_2$的大小约 为 20 N/c，方向也垂直地面向下。（1）计算从地面到 1.5×10^3 m 高度大气层中电荷的平均体密度；（2）假设地球表面处的电场强度$\boldsymbol{E}_1$完全是由均匀分布在地球表面的电荷产生，求地面上的电荷面密度。



解 4-18 图

[分析] 利用高斯定理求解。

[解] （1）设离地球表面 $h = 1.5\times10^3$ m 高度以下大气层中电荷的平均体密度为ρ，取底面积为Δs的柱形高斯面，其下底在地面附近，上底在 h 高度处，如解 4-18 左图所示。 由高斯定理，有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E_1\Delta S - E_2\Delta S = (E_1 - E_2)\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot \rho h \Delta S$$

解得 $$\rho = \frac{\varepsilon_0(E_1 - E_2)}{h} = \frac{8.85\times10^{-12}\times(1.0\times10^2 - 20)}{1.5\times10^3} = 4.72\times10^{-13}\ \ \mathrm{C/m^3}$$

（2） 设地球表面电荷面密度为σ，由于电荷只分布在地球表面，所以电场线终止于地面，作高斯面如解 4-18 右图所示。由高斯定理，有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -E_1\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot \sigma \Delta S$$

求得 $$\sigma = -\varepsilon_0 E_1 = -8.85\times10^{-12}\times1.0\times10^2 = -8.85\times10^{-10}\ \ \mathrm{C/m^2}$$

*4-19 一球体内均匀分布着电荷体密度为ρ的正电荷，若保持电荷分布不变，在该球体内挖去一半径为$r(r<R)$的小球体，球心为O'，两球心间距离$|OO'| = a$，如图所示。求：（1）空腔内，球心O'处的电场强度；（2）球体内 P 点处的电场强度。已知O'，O，P 三点在一直径上，且$|OP| = a$。

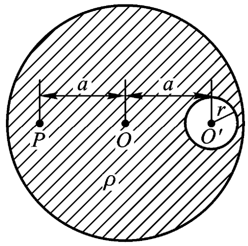
[分析] 本题带电体的电荷分布不具有球对称性，不满足用高斯定理直接求电场分布的条件。但这空心带电球体可视为电荷体密度为ρ的完整均匀带电球体与一个电荷体密度为

$-\rho$、球心在O'、半径等于空腔半径r的带电小球体的叠套。这样大、小球体在空间激发的场强可分别用高斯定理求得。场点的合场强则为两者的矢量叠加。

[解] 设大、小带电球体的场强分别为$\boldsymbol{E}_1$和E_2，则场点的合场强为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$$

（1）对O'点，小球的场强 $E_{2O'}=0$



习题 4-19 图

大球的场强可由高斯定理求得

$$\oint_S \boldsymbol{E}_{1o'}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=E_{1o'}\cdot 4\pi a^2=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3$$

$$E_{1O'}=\frac{\rho a}{3\varepsilon_0}$$

所以 $E_{O'}=E_{1O'}+E_{2O'}=\dfrac{\rho a}{3\varepsilon_0}$， 方向沿$OO'$连线外侧向右。

（2）对 P 点，大球的场强

$$E_{1P}=\frac{\rho a}{3\varepsilon_0}，\quad \text{方向沿}\ OP\ \text{连线外侧向左。}$$

小球的场强由高斯定理，有

$$\oint_S \boldsymbol{E}_{2\boldsymbol{P}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=E_{2P}\cdot 4\pi(2a)^2=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E_{2P}=-\frac{\rho r^3}{12\varepsilon_0 a^2}\quad \text{方向沿}\ PO'\ \text{连线指向小球球心。}$$

所以 $E_P=E_{1P}+E_{2P}=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}(a-\dfrac{r^3}{4a^2})$ 方向沿OP连线外侧向左。

4-20 两个无限长同轴圆柱面，半径分别为R_1和R_2（$R_2>R_1$），带有等量异号电荷，单位长度的带电量为λ。分别求出离轴线为 r 处的电场强度。（1）$r < R_1$，（2）$r > R_2$,（3）$R_1 < r< R_2$

[分析] 本题因电荷分布有轴对称性，故场强分布也有轴对称性，可用高斯定理求电场分布。

[解] 作半径为r、长为l与带电圆柱面同轴的圆柱形高斯面，两底面上的电通量为零，圆柱侧面上的$\boldsymbol{E}$大小相等，由高斯定理，有

（1）$r<R_1$时

$$\oint_S \boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E_1 \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot 0$$

所以 $$E_1 = 0$$

（2）$r > R_2$ 时

$$\oint_S \boldsymbol{E}_3 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E_3 \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon_0}(\lambda l - \lambda l) = 0$$

所以 $$E_3 = 0$$

（3）$R_1 < r < R_2$ 时

$$\oint_S \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E_2 \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon_0} \lambda\, l$$

所以 $$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

4-21 若电荷以相同的面密度 σ 均匀分布在半径分别为 $r_1 = 10\,\mathrm{cm}$ 和 $r_2 = 20\,\mathrm{cm}$ 的两个同心球面上，设无穷远处的电势为零，已知球心电势为 300V，试求两球面的电荷面密度 σ 的值。

[分析] 球心处的电势应为两球面电荷分别在球心处产生的电势的叠加。

[解]
$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4\pi r_1^2\sigma}{r_1} + \frac{4\pi r_2^2\sigma}{r_2}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(r_1 + r_2) \end{aligned}$$

所以

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 U}{r_1 + r_2} = \frac{8.85\times10^{-12}\times300}{(10+20)\times10^{-2}} = 8.85\times10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}$$

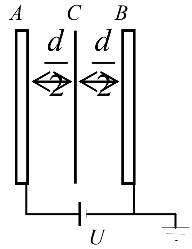
4-22 两块面积都是 S 的“无限大”平板 A、B 平行放置，相距为 d，接上电源使两极板分别维持在电势 U 和零电势。现将一带电量为 q，面积也是 S 厚度可忽略的导体片 C 平行插在 AB 两板的中间，如图所示。求导体片 C 的电势。

[分析] 忽略边缘效应，两平行板之间的电场为均匀电场。插入带电导体片 C 后，A、B 两板上的电荷分布要改变，但 A、B 间的电势差维持不变。利用场强叠加原理及场强与电势

差的关系求解。

[解] 未插导体片 C 时，A、B 间的场强为

$$E_1=\frac{U}{d},\qquad 方向\ A\to B$$



习题 4-22 图

插入带电量为 q 的导体片 C 后，电荷 q 在 C、B 间产生的场强为

$$E_2=\frac{q}{2\varepsilon_0 S},\qquad 方向\ C\to B$$

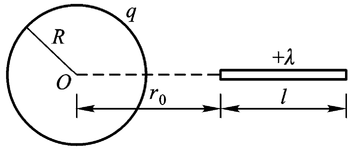
C、B 间的合场强为

$$E=E_1+E_2=\frac{U}{d}+\frac{q}{2\varepsilon_0 S}$$

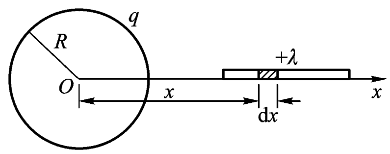
导体片 C 的电势

$$U_C=E\cdot\frac{d}{2}=\frac{1}{2}(U+\frac{qd}{2\varepsilon_0 S})$$

4-23 半径为 R 的球面均匀带电，电荷总量为 q。沿径向放有一条均匀带电的细线，细线长度为 l，电荷线密度为 λ。细线左端离球心距离为 r_0，如图所示。设球和线上的电荷分布不受相互作用影响。求：(1) 细线受球面电场的作用力；(2) 细线在球面电场中的电势能。（设无限远处电势为零）



习题 4-23 图



解 4-23 图

[分析] 把带电细线视为无数电荷元 dq 组成，dq 在电场中受电场的作用力和具有的电势能分别为：$\mathrm{d}F=E\mathrm{d}q$，$\mathrm{d}E_P=U\mathrm{d}q$，式中 E 和 U 分别为 dq 所在处的场强和电势。对细线积分，即可求得细线受球面电场的作用力及细线在球面电场中的电势能。

[解] 以球心为坐标原点，沿细线方向建立一维坐标如解 4-23 图所示。

（1）在 x 处取长为 dx 的线元，其上带电量为 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$

dq 在球面电场中受电场的作用力大小为

$$\mathrm{d}F=E\mathrm{d}q=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\cdot\lambda\mathrm{d}x$$

整条带电细线受球面电场的作用力

$$F=\int \mathrm{d}F=\frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r_0+l}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{q\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 r_0(r_0+l)}$$

F 的方向沿 x 轴正向。

（2）电荷元 $\mathrm{d}q$ 在球面电场中具有的电势能为

$$\mathrm{d}E_P=U\mathrm{d}q=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}\cdot\lambda\mathrm{d}x$$

整条带电细线在球面电场中的电势能

$$E_P=\int \mathrm{d}E_P=\frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r_0+l}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0+l}{r_0}$$