第 3 章　刚体的定轴转动

思考题

3-1　一均质细棒，可绕通过其一端的光滑固定轴在竖直平面内转动。使棒从水平位置自由下摆，棒是否作匀角加速转动？为什么？

[提示] 否。

在棒的自由下摆过程中，转动惯量不变，但使棒下摆的力矩随摆的下摆而减小，由转动定律知，棒摆动的角加速度也随之变小。

3-2　计算一个刚体对某轴的转动惯量时，能不能认为它的质量集中于其质心，成为一个质点，然后计算这个质点对该轴的转动惯量，为什么？

[提示] 不能。

因为刚体的转动惯量与质量对转轴的分布有关。如一均质圆盘对过其中心并与盘面垂直的轴的转动惯量为$\frac{1}{2}mR^2$，若把质量全部集中于质心，则对同一轴的转动惯量为零。

3-3 一质点绕一定点作匀速圆周运动时，动量、角动量、动能、机械能是否守恒？为什么？

[提示] 若质点在竖直平面上运动，则动量，机械能改变；角动量，动能不变。若质点在水平面上运动，则动量改变；角动量，动能，机械能不变。

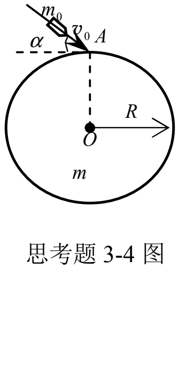
3-4 一半径为 R，质量 m 的轮子，可绕通过轮心 O 且与轮面垂直的水平光滑固定轴转动。转动惯量为 $J = mR^2$。轮子原先静止，一质量为 m_0 的子弹，以速度 v_0 沿与水平方向成 α 角射中轮缘并留在 A 处，如图所示。设子弹与轮撞击的时间极短。问：（1）以轮、子弹为系统，撞击前后系统的动量是否守恒？为什么？动能是否守恒？为什么？角动量是否守恒？为什么？（2）子弹和轮开始一起转动时，轮的角速度是多少？

[提示] （1）系统动量不守恒。因为在轴 O 处受到外力作用，合外力不为零；动能不守恒。因为是完全非弹性碰撞；角动量守恒。因为合外力矩为零。

（2）由角动量守恒，有

$$m_0 v_0 R\cos\alpha = (m+m_0)R^2\omega$$

所以
$$\omega = \frac{m_0 v_0 \cos\alpha}{(m+m_0)R}$$



思考题 3-4 图

3-5 旋转着的芭蕾舞演员要加快旋转时，总是把两臂收拢，靠近身体。这样做的目的是什么？当旋转加快时，转动动能有无变化？关于动能变化的来去，你怎样解释？

[提示] 演员在转动过程中，可近似认为其受合外力矩为零，人体保持角动量守恒 $J\omega = J_0\omega_0 =$ 常量。当把两臂收拢靠近身体时，使质量分布靠近转轴，转动惯量随之减小，角速度增大。此时的转动动能 $E_k = \dfrac{1}{2}J\omega^2 = \dfrac{J_0^2\omega_0^2}{2J} = E_{k0}\dfrac{J_0}{J}$，由于 J 减小，所以 $E_k > E_{k0}$。转动动能增加是两手收拢过程中内力做功（消耗“体力”）提供的。

习　题　3

选择题

3-1　D　　3-2　C　　3-3　A　　3-4　C　　3-5　A　　3-6　D　　3-7　D

填空题

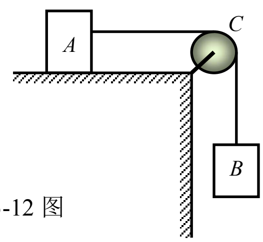
3-8　$\dfrac{1}{2}mgl$，$\dfrac{2g}{3l}$　　　3-9　$\dfrac{1}{2}(4m-3m_0)r^2$

3-10　mvd　　　3-11　$\omega_0/3$

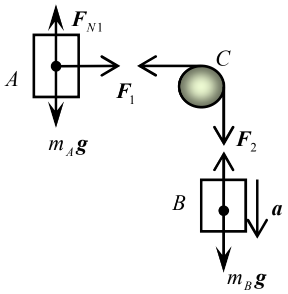
计算题

3-12　如题 3-12 图所示。滑块 A、重物 B 和滑轮 C 的质量分别为 $m_A = 50$ kg,，$m_B = 200$ kg,，$m_C = 15$ kg。滑轮可视为半径 $R = 0.10$ m 的均质圆盘。滑轮与轻绳之间无相对滑动，水平面光滑。求滑块 A 的加速度及滑轮两边绳子的张力。

[分析] 滑轮的质量不能忽略，滑轮两边绳中张力不等，牛顿第二定律对滑轮不适用; A、B 两物体因作平动仍可看成质点, 且因绳子不能伸长, A、B 两物的加速度大小相等。用隔离体法，画示力图分析。



习题 3-12 图



解 3-12 图

[解]　设滑轮左、右两边绳子的张力分别为 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$, 系统的加速度为 $\boldsymbol{a}$。 分别隔离重物 A、滑轮 C 和重物 B，画出它们的示力图如解 3-12 图。取顺时针转动的方向为正, 对 A、B 由牛顿第二定律, 对滑轮由转动定律列方程如下：

$$F_1 = m_A a$$

$$m_B g - F_2 = m_B a$$

$$(F_2 - F_1)R = J\alpha$$

$$a = R\alpha$$

滑轮视为均质圆盘，$J = \dfrac{1}{2} m_C R^2$，联立以上四式解得

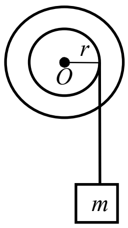
$$a = \frac{m_B g}{m_A + m_B + {m_c}/{2}} = 7.61 \text{ m/s}^2$$

$$F_1 = m_A a = 381 \text{ N}$$

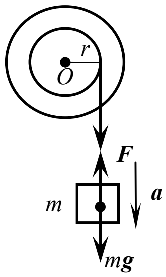
$$F_2 = m_B (g - a) = 440 \text{ N}$$

3-13　质量为 m 的物体系于轻绳的一端，绳的另一端绕在一半径为 r 的轮轴的轴上，如题 3-13 图所示。轴水平且垂直于轮轴面，整个装置架在光滑的固定轴承上。当物体由静止释放后，在时间 t 内下降了一段距离 s，试求整个轮轴的转动惯量。

[分析] 滑轮作定轴转动, 是刚体；重物 m 作平动, 可看成质点。物体由静止开始作匀加速直线运动, 可求得 a, 再由转动定律列方程即可求得整个轮轴的转动惯量。



习题 3-13 图



解 3-13 图

[解]　设绳子的张力为 $\boldsymbol{F}$, 重物 m 的加速度为 $\boldsymbol{a}$。 分别隔离组合滑轮和重物 m，画出它们的示力图如解 3-13 图。取顺时针转动的方向为正，对重物 m 由牛顿第二定律, 对组合滑轮由转动定律列方程如下：

$$mg - F = ma$$

$$Fr = J\alpha$$

$$a = r\alpha$$

又因为重物 m 作匀加速直线运动, 且 $v_0 = 0$，由匀加速直线运动公式可求得 a

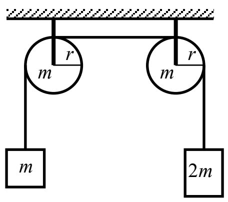
$$a = \frac{2s}{t^2}$$

联立以上四式解得组合滑轮的转动惯量为

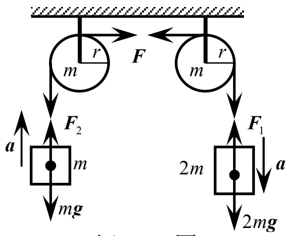
$$J = mr^2(\frac{gt^2}{2s} - 1)$$

3-14　一轻绳跨过两个质量均为 m 、半径均为 r 的均质定滑轮，绳的两端分别挂着质量为 m 和 $2m$ 的重物，如题 3-14 图所示。绳与滑轮间无相对滑动，绳子不可伸长，滑轮轴光滑。系统从静止释放，求两滑轮之间绳子的张力。

[分析]　两个相同的滑轮作定轴转动, 是刚体；两个重物作平动, 可看成质点。本题要注意的是, 两个滑轮把绳子分成了三段，在滑轮质量不能忽略的情况下，各段绳中的张力不相等。但因绳子不能伸长，两重物的加速度大小以及两滑轮的角加速度大小应相等。用隔离体法，画示力图分析。



习题 3-14 图



解 3-14 图

[解]　设右边绳子的张力为 $\boldsymbol{F}_1$，左边绳子的张力为 $\boldsymbol{F}_2$, 两滑轮之间绳子的张力为 $\boldsymbol{F}$，系统的加速度为 $\boldsymbol{a}$。分别隔离两重物和两滑轮，画出它们的示力图如解 3-14 图。取顺时针转动的方向为正，对两重物由牛顿第二定律，对两滑轮由转动定律列方程如下：

$$2mg - F_1 = 2ma$$

$$F_2 - mg = ma$$

$$(F_1 - F)r = \frac{1}{2}mr^2\alpha$$

$$(F - F_2)r = \frac{1}{2}mr^2\alpha$$

$$a = r\alpha$$

上述五个方程联立求解得

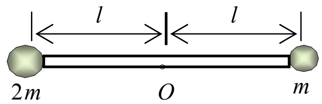
$$F = \frac{11}{8}mg$$

3-15　一长为 $2l$，质量为 $3m$ 的均直细棒的两端各固定有质量分别为 $2m$ 和 m 的小球（小球视为质点），如题 3-22 图所示。此杆可绕通过杆中心并与杆垂直的水平光滑固定轴在竖直平面内转动。先使其在水平位置，然后无初速地释放。求

（1）　此刚体系统绕 O 轴转动的转动惯量；

（2）　水平位置时杆的角加速度；

（3）　通过铅垂位置时杆的角速度。



习题 3-15 图

[分析] 根据转动惯量的可加性，此刚体系统绕 O 轴的转动惯量，等于两质点绕 O 轴的转动惯量与细棒绕 O 轴的转动惯量之和；水平位置时杆的角加速度可由转动定律列方程求得；第三问则有多种求法。

[解] (1) 系统绕 O 轴转动的转动惯量

$$J=\frac{1}{12}\cdot 3m\cdot(2l)^2+ml^2+2ml^2=4ml^2$$

(2) 取逆时针方向为正，水平位置时杆的角加速度由转动定律，有

$$(2m-m)gl=J\alpha=4ml^2\alpha$$

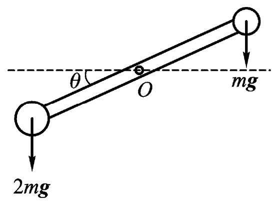
所以 $$\alpha=\frac{g}{4l}$$

(3) 铅垂位置时杆的角速度可有多种解法

解 1. 用转动定律

任意位置杆的受力如解 3-15 图，由转动定律列出杆的运动方程为

$$(2m-m)gl\cos\theta=J\alpha=4ml^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$



解 3-15 图

因为 $$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

所以 $$\omega\mathrm{d}\omega=\frac{g}{4l}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

上式两边积分，注意初始条件，$\theta=0$ 时，$\omega=\omega_0=0$

$$\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega=\frac{g}{4l}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

解得 $$\omega=\sqrt{\frac{g}{2l}}$$

解 2. 用转动动能定理

刚体在解 3-15 图的位置再转 $\mathrm{d}\theta$ 的角度，合外力矩的元功为

$$\mathrm{d}W=(2m-m)gl\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

系统转到铅垂位置，合外力矩的总功为

$$W=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}W=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2m-m)gl\cos\theta\mathrm{d}\theta=mgl$$

由转动动能定理，$W=\dfrac{1}{2}J\omega^2-0$

所以 $$\omega=\sqrt{\frac{g}{2l}}$$

读者试分析此刚体系统在转动过程中，机械能是否守恒？如果守恒，怎样列方程求解。

3-16 在光滑水平面上，一根长 $l = 2$ m 的绳子，一端固定与 O 点，另一端系一质量 $m = 0.5$ Kg 的物体。开始时，物体位于位置 A，OA 间距 $d = 0.5$ m，绳子处于松弛状态。现使物体以初速度 $v_A = 4$ m/s 垂直 OA 向右滑动，如题 3-16 图所示。设以后的运动中物体到达位置 B，此时物体的速度方向与绳垂直。求：（1）此时刻物体对 O 点的角动量大小 L_{B}；　（2）物体在 B 点的速度大小 v_B。

[分析]　视物体为质点，物体由 A 到 B 过程中，受合外力矩为零，物体对 O 点的角动量守恒，可由质点角动量守恒定律求。

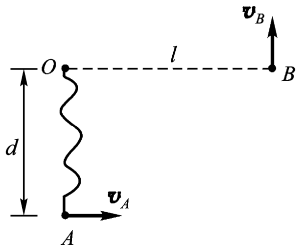
[解]　（1）取逆时针的方向为正，由角动量守恒定律，有

$$L_B = L_A$$

所以
$$L_B = L_A = mv_A d = 0.5 \times 4 \times 0.5 = 1 \, \text{N.m.s}$$

（2）因为 $L_B = mv_B l = mv_A d$

所以
$$v_B = \frac{d}{l} v_A = \frac{0.5}{2} \times 4 = 1 \ \text{m/s}$$



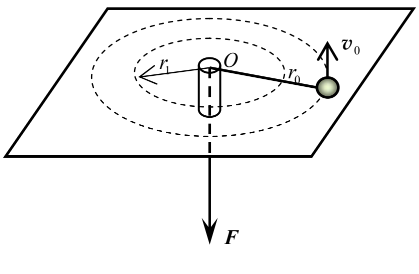
习题 3-16 图

3-17 光滑水平桌面上有一质量为 m 的小球，系在一根穿过桌面中心光滑套管的绳子一端，如题 3-17 图所示。开始时，让小球以速度 v_0 绕中心 O 点作半径为 r_0 的圆周运动，然后缓慢向下拉绳，使小球运动的轨道半径由 r_0 减小到 r_1。求：（1）轨道半径减为 r_1 瞬时小球的速度大小；（2）由 r_0 减小到 r_1 过程中，拉力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功。

[分析]　视小球为质点，桌面光滑，小球受绳子作用的力始终通过中心 O 点，此力对 O 点的力矩始终为零。因此，在绳子收缩过程中，质点对 O 点的角动量守恒，可由质点角动量守恒定律求得新位置的速度；而拉力的功则由质点动能定理求解。

[解]（1）取逆时针的方向为正，由角动量守恒定律，有

$$mv_0 r_0 = mvr_1$$



习题 3-17 图

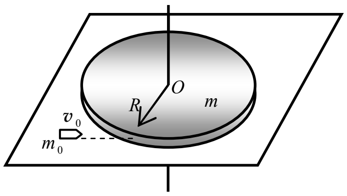
所以 $$v=\frac{r_0}{r_1}v_0$$

（2）由（1）的结果可知，质点的速度增大了，动能也增大了。动能的增加，是由于力 $\boldsymbol{F}$ 做了功，由质点动能定理，有

$$W=\frac{1}{2}mv_0^2(\frac{r_0}{r_1})^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_0^2[(\frac{r_0}{r_1})^2-1]$$

*3-18　质量为 m，半径为 R 的均质圆盘放在水平桌面上(题 3-18 图)，可绕盘中心并与盘面垂直的固定光滑轴转动。开始时圆盘静止，一质量为 m_0 的子弹以水平速度 $\boldsymbol{v}_0$ 垂直圆盘半径打入圆盘边缘并嵌在盘边上，盘与桌面间的滑动摩擦系数为 μ，求：（1）子弹击中圆盘后，盘所获得的角速度；（2）经多长时间后，盘停止转动。

[分析]　整个过程分两个阶段：即子弹击中圆盘（视为碰撞）阶段和圆盘转动阶段。碰撞瞬时, 因摩擦阻力矩远小于冲力矩, 故子弹和圆盘组成的系统对 O 轴的角动量守恒，由角动量守恒定律可求得子弹打入圆盘后，圆盘开始转动的角速度；转动过程中因圆盘受到摩擦阻力矩作用, 最终停止, 所需时间可由转动定律或角动量定理求得。本题要注意的是：在求圆盘受到的摩擦阻力矩时，应注意圆盘上每一质量元受到的摩擦阻力矩是不同的，需把圆盘划分成许多微元, 写出任一微元受到的摩擦阻力及摩擦阻力矩后, 积分即可求得总摩擦阻力矩。



习题 3-18 图

[解]　(1) 把子弹和圆盘看成一系统，子弹击中圆盘过程中，对 O 轴的角动量守恒，设圆盘获得的角速度为 ω，由角动量守恒定律，有

$$m_0v_0R=(\frac{1}{2}mR^2+m_0R^2)\omega$$

求得圆盘开始转动的角速度

$$\omega=\frac{m_0v_0}{(\frac{1}{2}m+m_0)R}$$

（2）在 r 处取一宽度为 $\mathrm{d}r$ 的圆环，其质量、受到的摩擦阻力及摩擦阻力矩分别为

$$\mathrm{d}m=\frac{m}{\pi R^2}2\pi r\mathrm{d}r\text{，}\mathrm{d}F=\mu g\mathrm{d}m=\frac{2\mu mg}{R^2}r\mathrm{d}r\text{，}\mathrm{d}M=-\mathrm{d}F\cdot r=-\frac{2\mu mg}{R^2}r^2\mathrm{d}r$$

圆盘转动时受到的总摩擦阻力矩为

$$M=\int\mathrm{d}M=-\frac{2\mu mg}{R^2}\int_0^R r^2\mathrm{d}r=-\frac{2}{3}\mu mgR$$

（2）由转动定律

$$M=-\frac{2}{3}\mu mgR=J\alpha=(\frac{1}{2}mR^2+m_0R^2)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}t = -\frac{(\frac{1}{2}m + m_0)R}{\frac{2}{3}\mu mg}\mathrm{d}\omega$$

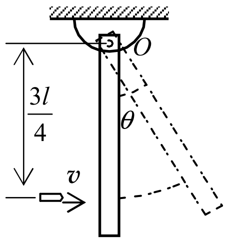
积分上式, 注意初始条件, $t=0$ 时的角速度为 ω，设经时间 t 秒，圆盘停止转动，则

$$\int_0^t \mathrm{d}t = -\frac{(\frac{1}{2}m + m_0)R}{\frac{2}{3}\mu mg}\int_\omega^0 \mathrm{d}\omega$$

所以
$$t = \frac{(\frac{1}{2}m + m_0)R}{\frac{2}{3}\mu mg}\omega = \frac{3m_0 v_0}{2\mu mg}$$

读者试用刚体定轴转动的角动量定理求解本题的第二问，并与上述解法作一比较。

3-19 一长为 l =1.0 m，质量为 m 的均直细杆可绕水平光滑固定轴 O 在竖直平面内转动, 如题 3-19 图所示。开始时杆自然地竖直悬垂。今有一质量为 $m/9$ 的子弹以 v =10m/s 的速度射入杆中。射入点离 O 点的距离为 $3l/4$。求:（1）子弹与杆开始共同转动的角速度;（2）杆的最大偏转角。



习题 3-19 图

[分析] 整个过程分两个阶段：即碰撞阶段和棒连同子弹一起上摆的阶段。碰撞瞬时，子弹和棒系统受合外力矩为零，对 O 轴的角动量守恒，但系统的动量不守恒。由角动量守恒定律可求得碰后棒连同子弹开始转动的角速度，摆动过程中，子弹、棒、地球组成的系统因只有重力矩作功，系统机械能守恒，可由机械能守恒定律列方程求解。

[解] （1）设碰后棒开始转动的角速度为 ω，子弹可视为质点，碰撞瞬时子弹和棒系统对 O 轴的角动量守恒。取逆时针转动的方向为正方向，由角动量守恒定律, 有

$$\frac{1}{9}mv\cdot\frac{3}{4}l = [\frac{1}{9}m(\frac{3}{4}l)^2 + \frac{1}{3}ml^2]\omega$$

解得
$$\omega = \frac{4v}{19l} = 2.10 \quad \text{rad/s}$$

（2）摆动过程中, 子弹、棒、地球组成的系统机械能守恒。设棒的最大偏转角为 θ, 由机械能守恒定律, 有

$$\frac{1}{2}[\frac{1}{9}m(\frac{3}{4}l)^2 + \frac{1}{3}ml^2]\omega^2 = \frac{1}{9}mg\frac{3}{4}l(1-\cos\theta) + mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

解上式得

$$\cos\theta = 1 - \frac{2v^2}{133gl} = 0.8466, \qquad \theta = 32.16^0$$