广东工业大学试卷参考答案及评分标准

（ A ）

课程名称： 复变函数与积分变换

考试时间： 2020 年 04 月 24 日 （第 8 周 星期 五）

一、（10 分）求$|z-2|=|z+i|$的轨迹和$\left[\frac{-1+i}{3+4i}\right]^{\frac{1}{2}}$的根.

解：因为$|z-2|=|z+i|$，故有$(x-2)^2+y^2=x^2+(y+1)^2$……3 分

进一步得 $4x+2y+1=0$ ……5 分

$$\frac{-1+i}{3+4i}=\frac{(-1+i)(3-4i)}{25}=\frac{1+7i}{25}=\frac{\sqrt{2}}{5}e^{i\arctan 7}$$ …..8 分

所以$$\left[\frac{-1+i}{3+4i}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{2^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{1}{2}}}e^{i\frac{\arctan 7+2k\pi}{2}},k=0,1.$$ ……10 分

二、(12 分) 已知 $f(z)=\frac{1}{z-1}$，$z=x+iy$，则函数 $f(z)$ 把单位圆周 $(x-1)^2+y^2=1$ 映射成什么曲线？

解：因为

$$f(z)=\frac{1}{z-1}=\frac{x-1-iy}{(x-1)^2+y^2}$$ ……5 分

令$$u=\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2},v=\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}$$ ……7 分

有$$u^2+v^2=\frac{(x-1)^2+y^2}{((x-1)^2+y^2)^2}=1$$ …..12 分

三、（12 分）证明 $u(x,y)=x^2-y^2+e^x\cos y$ 为调和函数，求满足 $\mathbf{f(i)=0}$ 的解析函数

$\mathbf{f(z)=u(x,y)+iv(x,y)}$.

解：因为

$u_x=2x+e^x\cos y, u_y=-2y-e^x\sin y$ .....5 分

因此有

$f'(z)=u_x-iu_y=2x+e^x\cos y+i2y+ie^x\sin y=2z+e^z$ ....8 分

故

$f(z)=\int f'(z)dz=\int(2z+e^z)dz=z^2+e^z+C$ .....10 分

代入 $f(i)=0$，得

$C=1-e^i$，故 $f(z)=z^2+e^z+1-e^i$ .....12 分

四、（10 分）设 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z^2+1)\cos z}+\ln(z+1)$.（1）求 $f(z)$ 的解析区域，（2）求 $f'(z)$。

解：因为 $(z^2+1)\cos z=0$ 得 $z=\pm i$ 及 $z=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$。....2 分

而 $\ln(z+1)$ 在 $x\le -1$ 处不解析.....2 分,因此 $f(z)$ 在 $z=\pm i$，$z=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 及 $x\le -1$ 处不解析。

而 $f'(z)=\dfrac{e^z(z^2+1)\cos z-2e^z z\cos z+e^z(z^2+1)\sin z}{(z^2+1)^2\cos^2 z}+\dfrac{1}{z+1}$ ......10 分

五、（10 分）计算积分 $\oint_C\dfrac{\sin(z)}{z^2(z^2+1)}dz$，其中 C 为 $|z-i|=\dfrac{3}{2}$ 的正向圆周。

解：因为函数$\dfrac{\sin(z)}{z^2(z^2+1)}$在圆周 C 内有不解析点 $z=i$ 及 $z=0$，根据复合闭路定理，以 $\mathbf{z}=0$ 及 $z=i$ 为中心画两个互不相交的圆 C_0 及 C_i，所以有

$$I=\oint_C \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)}dz$$

$$=\oint_{C_0}\frac{\sin z}{z^2(z^2+1)}dz+\oint_{C_i}\frac{\sin z}{z^2(z+i)(z-i)}dz$$ ....4 分

$$=2\pi i\left[\frac{\sin z}{z^2+1}\right]'_{z=0}+2\pi i\left[\frac{\sin z}{z^2(z+i)}\right]_{z=i}$$ . . . . . 7 分

$$=2\pi i-\pi\sin i$$ . . . . 10 分

六、（10 分）求复数 $z=(2+i)^{1-i}$ 的辐角主值和等式 $e^z-1+\sqrt{3}i=0$ 的根。

解：

（1）$(2+i)^{1-i}=e^{(1-i)\mathrm{Ln}(2+i)}=e^{(1-i)(\frac{\ln 5}{2}+i[\arctan\frac{1}{2}+2k\pi])}$

$=e^{\frac{\ln5}{2}+\arctan\frac{1}{2}+2k\pi}e^{i[\arctan\frac{1}{2}+2k\pi-\frac{\ln5}{2}]}=e^{\frac{\ln5}{2}+\arctan\frac{1}{2}+2k\pi}e^{i(\arctan\frac{1}{2}-\frac{\ln5}{2})}$，. . . . . . . 4 分

其辐角主值为：$\arctan\dfrac{1}{2}-\dfrac{\ln 5}{2}$. . . . . . . 5 分

（2）因为 $e^z=1-i\sqrt{3}$，故 $z=\mathrm{Ln}(1-i\sqrt{3})$. . . . 7 分

所以

$z=\ln 2+i(-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi)$. . . . . 10 分

七、（12 分）求函数 $f(t)=(t-2)e^{-3|t|}+\delta（t-1）$ 的傅里叶变换。

解：

因为 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-3|t|}e^{-j\omega t}dt=\int_0^{\infty}e^{-3t}e^{-j\omega t}dt+\int_{-\infty}^{0}e^{3t}e^{-j\omega t}dt=\frac{e^{-(3+j\omega)t}\big|_0^{\infty}}{-(3+j\omega)}+\frac{e^{(3-j\omega)t}\big|_{-\infty}^{0}}{3-j\omega}$

$=\dfrac{1}{3+j\omega}+\dfrac{1}{3-j\omega}=\dfrac{6}{9+\omega^2}$ . . . . . . 5 分

而 $F(f(t))=F(te^{-3|t|})-2F(e^{-3|t|})+F(\delta(t-1))$ . . . . . 7 分

$=j\frac{d}{d\omega}[\frac{6}{9+\omega^2}]-\frac{12}{9+\omega^2}+e^{-j\omega}$ . . . . . 9 分

$=\frac{-12j\omega}{(9+\omega^2)^2}-\frac{12}{9+\omega^2}+e^{-j\omega}$ . . . . 12 分

八、(12 分)利用拉普拉斯变换求方程 $9y''-6y'(t)+y(t)=u(t)$ 满足初始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=0$ 的解，其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数。

解：对微分方程 $9y''(t)-6y'(t)+y(t)=u(t)$ 两边同时求 Laplace 变换得到

$9s^2Y(s)-9sy(0)-9y'(0)-6(sY(s)-y(0))+Y(s)=\frac{1}{s}$ . . . . 4 分

故而

$$Y(s)=\frac{1}{(3s-1)^2s}$$ . . . . 6 分

而

$Y(s)=\frac{3}{(3s-1)^2}+\frac{1}{s}-\frac{3}{(3s-1)}=\frac{1}{3(s-\frac{1}{3})^2}+\frac{1}{s}-\frac{1}{s-\frac{1}{3}}$ . . . . 9 分

对两边同时求 Laplace 逆变换得到

$y(t)=1-e^{\frac{t}{3}}+\frac{1}{3}te^{\frac{t}{3}}$ . . . . . . 12 分

九、(12 分)证明函数 $f(z)=\sqrt{|\mathrm{Im}(2z^2)|}$ 的实部及虚部在点 $z=0$ 处满足柯西-黎曼方程，但在点 $z=0$ 处不可导。

解:

因为$f(z)=2\sqrt{|xy|}$ .....3 分

故

$u(x,y)=2\sqrt{|xy|}, v(x,y)=0$ ......4 分

由于

$$u_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x}=0$$

$$u_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y}=0$$ ....6 分

故 $\begin{matrix} u_x(0,0)=v_y(0,0)=0 \\ u_y(0,0)=-v_x(0,0)=0 \end{matrix}$ ....8 分

而

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+i\Delta y}$$ ......10 分

令$\Delta y=k\Delta x$，代入上式得

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sqrt{|\Delta xk\Delta x|}}{\Delta x+ik\Delta x}$$

$$=\frac{2\sqrt{|k|}}{1+ik}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

知当k不同是，其值不同，故$f(z)$在$z=0$处不可导 ......12 分