试卷编号：________

学院：________ 专业：________ 班级________ 学号：________ 姓名：________

诚信考试，诚信做人。

装 订 线

广东工业大学考试试卷（A）

2019 — 2020 学年度第 二 学期

课程名称： 复变函数 学分 2 试卷满分 100 分

考试形式： 开卷 （开卷或闭卷）

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
评卷得分											
评卷签名											
复核得分											
复核签名											

注：1. 试题中的闭曲线如无特殊说明均默认为正向；2. 试题中 i,j 相同，都表示虚数单位；

一、(每题 5 分，共 30 分)简答题

1.求 $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2020}$ 的指数表示式;

2.求 $\mathrm{Im}[i^{1+i}]$;

3. 求 $\arg e^{i(4+3i)}$;

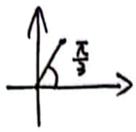
4.计算 $\oint_{|z|=1}(e^z+|z|\bar{z})dz$;

5. 求双边幂级数级数

$$\frac{(-2)i^{(-2)}}{(z-1)^2}+\frac{(-1)i^{(-1)}}{(z-1)}+1+\cdots+ni^n(z-1)^n+\cdots=\sum_{n=-2}^{\infty}ni^n(z-1)^n$$ 的收敛区域;

6.设 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，且 $\lim\limits_{|t|\to\infty}f(t)=0$，求 $\mathscr{F}[f'(t-2)]$.

一、1) $(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^{2020}$



$= (e^{i\frac{\pi}{3}})^{2020}$

$= e^{i(673+\frac{1}{3})\pi}$

$= e^{i(\frac{4}{3}\pi)}$

∵ $-\pi<\theta<\pi$

∴ $= e^{i(-\frac{2}{3}\pi)}$

2) i^{1+i}

$= e^{(\ln i)(1+i)}$

$= e^{(1+i)[\ln 1+ \cancel{\theta+2k\pi)} \; i(\arg z+2k\pi)]}$

$= e^{(1+i)[i\cancel{ag}(\arg z+2k\pi)]}$

$= e^{(i-1)(\arg z+2k\pi)}$

$= e^{-\arg z-2k\pi}\cdot e^{i\cdot(\arg z+2k\pi)}$

$= e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}\cdot(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$

$Im[i^{1+i}] = \cancel{e^{\frac{\pi}{2}}2}$
$e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}$

3) $\arg e^{4i-3}$

$e^{-3}e^{i4}$

$4>\pi$

$\arg = 4-2\pi$

4) $\oint_{|z|=1}(e^z+|z|\bar{z})dz$

$= \oint_{|z|=1} e^z dz + \oint_{|z|=1}\bar{z}dz$

$= 0 + \oint_{|z|=1}\frac{1}{z}dz$

柯积: $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$

$= 0 + 2\pi i\cdot 1$

$= 2\pi i$

6) $\cancel{f(t-2)}$

$f'(t-2) = (jw)F[f(t-2)]$

两w一样吗

$= jw\cdot e^{-jw2}F(w)$

?

试卷编号：______

学院：______ 专业：______ 班级：______ 学号：______ 姓名：______

诚信考试，诚信做人。

装 订 线

广东工业大学考试试卷（ A ）

2019 — 2020 学年度第 二 学期

课程名称： 复变函数与积分变换C 学分 2.5 试卷满分 100 分

考试形式： 网考

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
评卷得分											
评卷签名											
复核得分											
复核签名											

一、（10分）求 $|z-2|=|z+i|$ 的轨迹和 $\left[\dfrac{-1+i}{3+4i}\right]^{\frac{1}{2}}$ 的根.

二、（12分）已知 $f(z)=\dfrac{1}{z-1}$，$z=x+iy$，则函数 $f(z)$ 把单位圆周 $(x-1)^2+y^2=1$ 映射成什么曲线？

三、（12分）证明 $u(x,y)=x^2-y^2+e^x\cos y$ 为调和函数，求满足 $f(i)=0$ 的解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

四、（10分）设 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z^2+1)\cos z}+\ln(z+1)$.（1）求 $f(z)$ 的解析区域，（2）求 $f'(z)$。

五、（10分）计算积分 $\oint_C \dfrac{\sin(z)}{z^2(z^2+1)}dz$，其中C为 $|z-i|=\dfrac{3}{2}$ 的正向圆周。

六、（10分）求复数 $z=(2+i)^{1-i}$ 的辐角主值和等式 $e^z-1+\sqrt{3}i=0$ 的根。

七、（12分）求函数 $f(t)=(t-2)e^{-3|t|}+\delta(t-1)$ 的傅里叶变换。

八、（12分）利用拉普拉斯变换求方程 $9y''-6y'(t)+y(t)=u(t)$ 满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=0$ 的解，其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数。

九、（12分）证明函数 $f(z)=\sqrt{|\mathrm{Im}(2z^2)|}$ 的实部及虚部在点 $z=0$ 处满足柯西-黎曼方程，但在点 $z=0$ 处不可导。

1)

$w=\sqrt[n]{z}$

$w=\sqrt[n]{r}\cdot e^{-i(\frac{\theta+2k\pi}{n})}$

2) $\frac{1}{x-1+iy}$

$\frac{(x-1)-(iy)}{(x-1)^2+y^2}$

$u=\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$

$v=\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}$

$u=x-1$

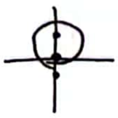
$v=-y$

$u^2+v^2=1$

4) 奇点：$z=\pm i,\ \frac{\pi}{2}+k\pi,\ (-\infty,-1]$

.... $+\frac{1}{z+1}$

5. 奇：$z=0,\ z=\pm i$



6. $e^{(1-i)\,Ln(2+i)}$

$Ln(2+i)=\ln|z|+[(\arg\theta+2k\pi)i]$

$e^z=1-i\sqrt{3}$

$1-i\sqrt{3}=2e^{\frac{-\sqrt{3}}{1}}$

$e^z=2e^{-\sqrt{3}}$

$e^{z-\sqrt{3}}=2$

$z-\sqrt{3}=\ln 2$

$z=\ln 2+\sqrt{3}$

七. 分类

$F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-jwt}f(t)dt$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-1)e^{-jwt}dt=e^{-jw}$

八.

九. $2z^2=2x^2+4xy-i2y^2$

$Im=-2y^2$

$=2y^2$

$f(z)=\sqrt{2y^2}=u$

$v=0$

偏导

二、(10 分) 讨论函数 $f(z)=|z+1|^2\,\mathrm{Im}(z)$ 的可导性和解析性，并求函数

$f(z)=|z+1|^2\,\mathrm{Im}(z)$ 在可导点的导数.

三、(10 分) 设 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-1|=2}\dfrac{\zeta^3}{(\zeta-z)^2}d\zeta$ ，求 $f'(1), f'(2i)$.

四、(10 分) 设 C 为正向圆周 $|z-i|=2$，求 $\int_c \dfrac{1}{z^2(z^2+4)}dz$.

五（10 分）证明 $v(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$ 当 $x>0, y>0$ 时为调和函数，并求 $u(x,y)$ 使得

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为解析函数且 $f(1)=0$.

六（10 分）把函数 $f(z)=\dfrac{z^2-z-1}{(z-1)^2(z-2)}$ 在圆环域 $1<|z-1|<+\infty$ 内展开成洛朗级数.

七(10 分) 求 $\mathscr{F}^{-1}[\pi\delta'(\omega-1)]$.

八（10 分）利用拉普拉斯变换解常微分方程组

$$\begin{cases} y''(t)-2x'(t)=2\sin t \\ -2x''(t)-2x(t)+y'(t)=0 \end{cases}, x'(0)=x(0)=1, y'(0)=y(0)=0.$$

二、$z = x+iy$

$$f(z) = [(x+1)^2+y^2]\,y$$
$$= (x^2+2x+1+y^2)\,y$$
$$= x^2y+y^3+2xy+y$$

$u = y^3+x^2y+2xy+y$

$v = 0$

初等函数多项式

u, v 全域可微

$$C\text{-}R:\ \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

则 $x=y=0$ 时符合CR

即 $f(z)$ 在 z 为0处可导

其他处处不可导

即 $f(z)$ 全域不解析

在 $z_0 = 0+i0$ 上

$$f'(z_0) = u_x + i v_x$$
$$= 2xy+2y+i0$$
$$= 0+i0$$

三、$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-1|=2}\frac{z^3}{(z-z_0)^2}dz$

若 z_0 在 $|z-1|=2$ 内

$$\oint_{|z-1|=2}\frac{z^3}{(z-z_0)^2}dz = \frac{2\pi i}{1!}(z^3)'\Big|_{z=z_0}$$

$$f(z) = 3z_0^2$$

若 z_0 不在 $|z-1|=2$ 内

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\cdot 0$$
$$=0$$

综上 $f(z) = \begin{cases} 3z_0^2 & ,z_0\text{内} \\ 0 & ,z_0\text{外} \end{cases}$

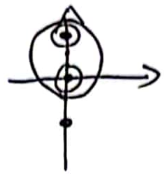
$f'(z) = \begin{cases} 6z_0 & ,\text{内} \\ 0 & ,\text{外} \end{cases}$

$f'(1) = 6$

$f'(2i) = 0$

四、奇点 $z = 0+0i$

$z = \pm 2i$



D内：$z_1 = 0$，$z_2 = 2i$

$$\text{原} = \int_{C_1}\frac{\frac{1}{z^2+4}}{z^2}dz + \int_{C_2}\frac{\frac{1}{(z^2)(z+2i)}}{(z-2i)}dz$$

$C_1: |z| = \frac{1}{2}$ $\quad C_2\ |z-2i| = \frac{1}{2}$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{z^2+4}\right)'\Big|_{z=0} + 2\pi i\,\frac{1}{(z^2)(z+2i)}\Big|_{z=2i}$$
$$= 2\pi i\cdot\left[-\frac{2z}{(z^2+4)^2}\right]\Big|_{z=0} + 2\pi i\,\frac{1}{z^3+2z^2i}\Big|_{z=2i}$$
$$= 0 + \frac{2\pi i}{-4\cdot(4i)}$$
$$= -\frac{\pi}{8}$$

五、$u_x = v_y = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}$

$u_y = -v_x = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$

u_x: $\int\frac{x^2}{x^2+y^2}dx$?

u_y $\int\frac{1}{x^2+y^2}dy$

六、$\delta'(w-1) = (-j)\,F[t f(t)]$

?

八 $s^2Y(s) - 2sX(s) = 2\frac{a^2}{s^2+a^2}$

$-2s^2X(s) - 2X(s) + sY(s) = 0$

5. 关于积分变换，下列等式中不正确的是（　　　）

（A） $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$　　（B） $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

（C） $f(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)e^{-j\omega t}dt$　　（D） $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$

二　填空题（每空 5 分，共 25 分）

1. 复数 $z=\sin\theta-i\cos(\theta),0<\theta<\frac{\pi}{2}$, 的指数表达式为__________。

2. 求值 $(-1+i)^{i}=$_______________。

3. 计算积分 $\oint\limits_{|z|=2}\frac{|z|}{z}dz=$____________。

4. 已知 $\cos(2t)$ 的 Laplace 变换为 $\frac{s}{s^2+4}$，求 $L(t\cos t)=$______ 。

5. 设 $\delta(t)$ 为单位脉冲函数， 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\sin(2t)dt=$______ 。

三 （10 分）证明函数 $u(x,y)=x^2-y^2$ 为调和函数，并求 $v(x,y)$ 使 $f=u+iv$ 为解析函数且 $f(0)=0$。

四（10 分）证明：如果函数 $f(z)=u+iv$ 及 $\overline{f(z)}=u-iv$ 在区域 D 内解析，则 $f(z)$ 为常数。

五（10 分）计算积分 $\oint\limits_{C}\frac{\sin z}{z^2(z-\frac{\pi}{3})}dz$，其中 C 为正向圆周 $|z|=2$。

六（10 分）用 Fourier 变换的定义求 $f(t)=e^{-2t}u(t)$ 的 Fourier 变换，然后用 Fourier 变换的性质计算函数 $g(t)=e^{j3t}tf(t)$ 的傅立叶变换，其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数。

七（10 分）用拉普拉斯变换解微分方程 $y''(t)-y(t)=\delta(t), y'(0)=y(0)=0$

四. $u_x = v_y = -u_y = 0$

$u_y = -v_x = v_x = 0$

五 正向:逆时

奇: $z=0,\ z=\frac{\pi}{3}$

$$\oint_{C_1} \frac{\frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{3}}}{(z-0)^2} dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{\sin z}{z^2}}{z-\frac{\pi}{3}} dz$$

$$= 2\pi i \left(\frac{\sin z}{z-\frac{\pi}{3}}\right)'\Big|_{z=0} + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi^2}{9}} \cdot 2\pi i$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{-\cos z\,(z-\frac{\pi}{3}) - \sin z\,(z-\frac{\pi}{3})}{(z-\frac{\pi}{3})^2}\Big|_{z=0} + \frac{9\sqrt{3}\,i}{\pi}$$

$$= 2\pi i\, \frac{\pi}{3} + \frac{9\sqrt{3}}{\pi} i$$

$$= \frac{2\pi^2}{3} i + \frac{9\sqrt{3}}{\pi} i$$

$$= \frac{2\pi^3 + 27\sqrt{3}}{3\pi} i$$

六. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} u(t) \cdot e^{-j w t} dt$

$\int_{0}^{+\infty} e^{-2t} \cdot e^{-j w t} dt$

$-2\,(e^{2jwt^2}) + (-jw)\,e$

$(-2-jw)(e^{2jwt^2})\Big|_0^{+\infty}$

$=$

$e^{j3t}\ t f(t)$

$t f(t) = \frac{F'(w)}{-j}$?