第三篇　波动与光学

第 8 章　振动学基础

思考题

8-1 根据简谐振动的特征，分析下列几种运动是否为简谐振动？

（1）拍皮球时，球的运动（设皮球与地面的碰撞是弹性的）；

（2）质点作匀加速圆周运动时，它在直径上的投影点的运动；

（3）把浮在静水面上的木块按下去然后松开，木块的运动；

（4）U 形玻璃管中的水银作上下振动。

[提示] 简谐振动的特征：运动方程满足 $x = A\cos(\omega t+\varphi)$，质点受力满足 $F=-kx$ 或动力学方程有 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$ 的形式。据此可以判别：（1）、（2）不是；（3）、（4）近似为简谐振动。

8-2 用旋转矢量法决定下列振动的初相

（1）开始时，振动质点在位移为+A/2 且向 x 轴正方向运动；

（2）开始时，振动质点在位移为－A/2 且向 x 轴负方向运动；

（3）开始时，振动质点在位移为－A 处。

（略）

8-3 如果把一个单摆拉开一个小角度 θ_0 然后放开让其自由摆动，问：

（1）此 θ_0 是否就是振动的初相？

（2）单摆绕悬点转动的角速度是否就是简谐振动的角频率？

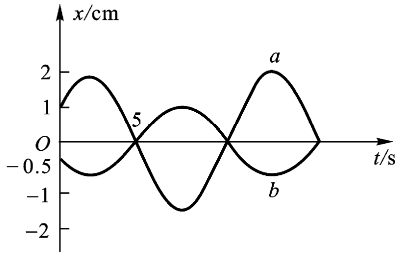
[提示] （1）否；　（2）否。

8-4 弹簧振子作简谐振动时，如果它的振幅增大为原来的 2 倍，而频率减为原来的一半，问它的能量怎样改变？

[提示] 由谐振动的总能公式 $E=\dfrac{1}{2}kA^2=\dfrac{1}{2}mA^2\omega^2$ 知，能量不变。

8-5 图中 a、b 表示两个同方向、同频率的简谐振动的振动曲线。则它们合振动的振幅、初相、周期各为多少？试在图中画出合振动的振动曲线。

[提示] 合振动的振幅 $A = 1.0\times10^{-2}$ m，初相为 $-\dfrac{\pi}{3}$，周期为 12 s。



思考题 8-5 图

习　题　8

选择题

8-1　B　　8-2　D　　8-3　C　　8-4　D　　8-5　A　　8-6　D　　8-7　C

8-8　B

填空题

8-9 （1）$2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}}$；（2）$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$　　8-10　$2\sqrt{m}$

8-11　$3.43\ \mathrm{s}$，$-2\pi/3$　　8-12　10，$\pi/2$

计算题

8-13 质量为 10g 的质点作简谐振动，其振幅为 24 cm，周期为 4.0 s，当 $t = 0$ 时，位移为+24 cm ,求：（1）振动方程；（2）由起始位移运动到 $x = 12$ cm 处所需的最短时间。

[分析] 写振动方程，即找 A、ω、φ。

[解] （1）设质点的振动方程为

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

由题设条件　$A = 0.24\ \mathrm{m},\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2},\ t = 0$ 时

$$x_0 = A\cos\varphi = A,\quad 故\ \varphi = 0$$

质点的振动方程为　$x = 0.24\cos(\dfrac{\pi}{2}t)$　(SI)

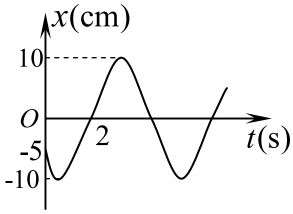
（2）由　$x = 0.24\cos(\dfrac{\pi}{2}t) = 0.12\ \mathrm{m}$

得　$\cos\dfrac{\pi}{2}t = \dfrac{1}{2},\quad \dfrac{\pi}{2}t = \dfrac{\pi}{3}$

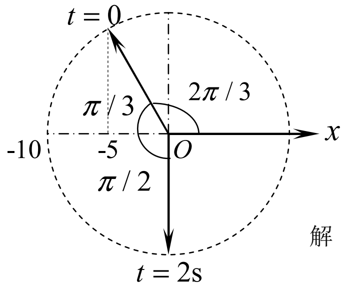
所以　$t = \dfrac{2}{3} = 0.67\ \mathrm{s}$

本题第 2 问也可用旋转矢量法求解。

8-14 一简谐振动的振动曲线如图所示，求此谐振动的余弦表达式。



习题 8-14 图



解 8-14 图

[分析] 从振动曲线中找出 A、ω、φ，用旋转矢量法求解。

[解] 设质点的振动方程为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

由曲线可知，$A = 10$ m，画出 $t = 0$ 和 $t = 2$ s 时刻旋转矢量的位置如解 8-14 图所示，由图可知 $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$，又因为 $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2} = \omega t = 2\omega$，所以 $\omega = \dfrac{5\pi}{12}$

故振动方程为 $$x = 0.1\cos(\frac{5\pi}{12}t + \frac{2\pi}{3}) \quad \text{(SI)}$$

8-15 质量为 100g 的质点沿 x 轴作简谐振动，振幅为 1.0 cm，加速度的最大值为 4.0 cm/s^2。求：（1）过平衡位置时的动能和总振动能；（2）动能和势能相等时的位置。

[分析] 根据题给条件可求得 ω，再依据振动能量公式可求得结果。

[解] 已知 $m = 0.1\,\text{kg}$, $A = 1.0\times10^{-2}\,\text{m}$

$$a_m = \omega^2 A = 4.0\times10^{-2}\,\text{m/s}^2$$

所以 $$\omega = \sqrt{\frac{a_m}{A}} = 2 \quad 1/\text{s}$$

（1）平衡位置时， $E_P = 0$

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}\times0.1\times2^2\times10^{-4} = 2.0\times10^{-5}\,\text{J}$$

$$E = E_k + E_P = 2.0\times10^{-5}\,\text{J}$$

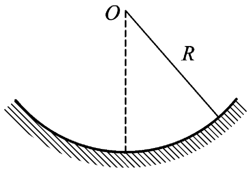
（2）由 $E_k = E_P$，即 $E_P = \dfrac{1}{2}E$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{4}kA^2$$

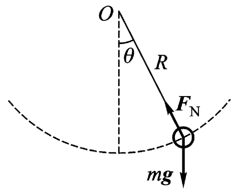
所以 $$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}A = \pm 7.1\times 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

8-16 在竖直面内半径为 R 的一段光滑圆弧形轨道上，放一小物体，使其静止于轨道的最低处，然后轻碰一下此物体，使其沿圆弧形轨道来回作小幅度运动。试证：

（1）此物体作简谐振动；（2）此简谐振动的周期为$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$ 。



习题 8-16 图



解 8-16 图

[分析] 建立坐标，分析物体在任意位置时的受力情况，写出物体在任意位置受到的合力或合力矩，并列出物体的动力学方程，即可证明之。

[解] 取轨道的最低点为平衡位置，建立角坐标θ。任意角位置θ处，物体的受力如解 8-16 图所示。

物体在任意位置受到的合外力矩为

$$M = -mg\sin\theta\cdot R = -mgR\sin\theta$$

由转动定律列出物体的动力学方程为

$$-mgR\sin\theta = J\alpha = mR^2\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

θ不大时，$\sin\theta\approx\theta$，上式写成

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{R}\theta = 0 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\theta = 0$$

式中$\omega^2 = \dfrac{g}{R}$ ，这是谐振动方程。可见，在θ不大时，物体作谐振动。振动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

*8-17 一台钟摆的等效摆长$l = 0.995\,\mathrm{m}$，摆锤可上、下移动以调节其周期，该钟每天快 1 分 27 秒。假如将此摆当作质量集中在摆锤中心的一个单摆来考虑，则应将摆锤向下

移动多少距离，才能使钟走得准确？

[分析] 钟摆周期的相对误差$\Delta T / T=$钟的相对误差$\Delta t / t$，根据单摆的周期公式计算。

[解] 单摆的周期 $T=2\pi\sqrt{l / g}$，设重力加速度 g 不变

则有
$$2\mathrm{d}T / T=\mathrm{d}l / l$$

令$\Delta T=\mathrm{d}T$，$\Delta l=\mathrm{d}l$，并考虑到$\Delta T / T=\Delta t / t$，则摆锤向下移动的距离
$$\Delta l=2l\Delta t / t=2.00 \text{ mm}$$
即摆锤应向下移 2mm，才能使钟走得准确。

8-18 已知两同方向谐振动的表达式分别为
$$x_1=4\times10^{-2}\cos(2t+\frac{\pi}{6}) \text{（SI）}, \quad x_2=3\times10^{-2}\cos(2t-\frac{5\pi}{6}) \text{（SI）}$$
求它们合振动的振幅和初相。

[分析] 这是同方向同频率的简谐振动的合成，可直接套用有关的公式求解。

[解] 同方向同频率的简谐振动的合成结果是

合振动的振幅为
$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

合振动的初相为
$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

把$A_1=0.04\,\mathrm{m}$，$A_2=0.03\,\mathrm{m}$，$\varphi_1=\frac{\pi}{6}$，$\varphi_2=-\frac{5\pi}{6}$代入上述两式求得合振动的振幅和初相分别为
$$A=10^{-2}\,\mathrm{m}, \qquad \varphi=\frac{\pi}{6}$$