浅谈复变函数与积分变换在自动控制专业中的应用

王淑君　刘红芳　张文华

（唐山学院专科教育部，河北 唐山 063020）

摘　要：简要论述了复变函数与积分变换在自动控制专业中的应用。

关键词：自动控制；物理系统；线性系统

《复变函数与积分变换》这门课程主要是两大部分的内容，一是复变函数的相关知识，二是傅里叶变换与拉普拉斯变换这两个主要的积分变换。在自动控制专业中，对信号处理时的传递函数理论分析、各类信号处理中的时-频域理论分析等内容要应用复变函数中的方法与拉普拉斯变换进行处理；对线性系统的理论分析要应用拉普拉斯变换进行。因此《复变函数与积分变换》这门课程对该专业的学习起着重要作用，下面仅就几个简单问题进行分析。

1 描述线性系统的微分方程

一个物理系统，如果可以用常系数线性微分方程来描述，那么这个物理系统称为线性系统。例如，在 RC 串联电路中（如图 1），电容器的输出端电压 $U_c(t)$ 与 R、C 及输入端电压 e(t) 之间的关系可以用微分方程 $RC\frac{du_c}{dt}+u_c=e(t)$ 来描述，它就是一个线性系统。

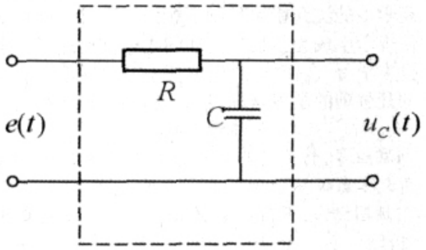


图 1

对于自动控制专业中的许多物理系统不仅可以用微分方程来描述，而且可以用拉普拉斯变换求解。

例 1：如图 2 所示的机械系统最初是静止的，受一冲击力 f(t)=Aδ(t) 的作用使系统开始运动，求由此而产生的振动。

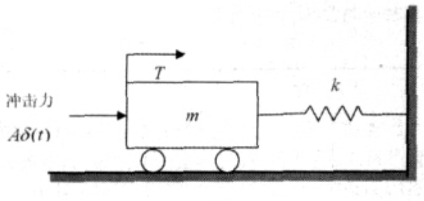


图 2

解：设系统振动规律为 x=x(t)，且当 t=0 时，x(0)=x′(0)=0，冲击力 f(t)=Aδ(t)，弹性恢复力为-kx(x 为弹性阻尼系数)。

根据牛顿第二定律，有　$mx''(t)=A\delta(t)-kx(t)$

即　$mx''(t)+kx(t)=A\delta(t)$

设 $L[x(t)]=X(s)$，对方程两边取拉普拉斯变换，可得

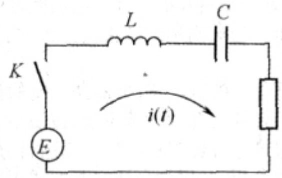
$ms^2X(s)+kX(s)=A$

于是 $X(s)=\frac{A}{ms^2+k}$ 取拉普拉斯逆变换，得

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]=L^{-1}\left[\frac{A}{ms^2+k}\right]=\frac{A}{\sqrt{mk}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

因此，此振动规律是振幅为 $\frac{A}{\sqrt{mk}}$，角频率为 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ 的简谐振动。

例 2：在 RLC 串连直流电源 E（如图）的电路系统中，求回路中的电流 i(t)。其中 R 为电阻，L 为电感，C 为电容，且 $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$。



解：根据基尔霍夫（Kirchhoff）定律，有

$$u_R(t)+u_c(t)+u_L(t)=E,$$

其中 $u_R(t)=Ri(t)$，又由 $i(t)=C\frac{du_c(t)}{dt}$ 知，

$$u_c(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau,\ u_L(t)=L\frac{di(t)}{dt},$$

于是有，$Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau+L\frac{di(t)}{dt}=E$，且 $i(0)=i'(0)=0$。

对方程两边取拉普拉斯变换，且设 $L[i(t)]=I(s)$，则有 $RI(s)+\frac{1}{Cs}I(s)+LsI(s)=\frac{E}{s}$。

所以，$I(s)=\frac{\frac{E}{s}}{Ls+R+\frac{1}{Cs}}=\frac{E}{L}\cdot\frac{1}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{CL}}=\frac{E}{L}\cdot\frac{1}{\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2+\left(\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}\right)}$

因为 $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$，所以可设 $\omega^2=\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}$，I(s) 可以改为

$$I(s)=\frac{E}{L\omega}\cdot\frac{\omega}{\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2+\omega^2},$$

取拉普拉斯逆变换，得

$$i(t)=\frac{E}{L\omega}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega t,(t>0)。$$

该解表明，在回路中出现了角频率为 ω 的衰减正弦振荡电流。

2 线性系统的传递函数

线性系统的两个主要概念是激励与响应，通常称输入函数为系统的激励，而称输出函数为系统的响应（见图 3）。

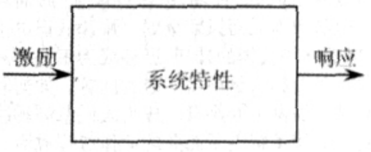


图 3

如在 RC 串联电路中，输入端电压 e(x) 为该系统的激励，电容器的输出端电压 $u_c(t)$ 为该系统的响应。要研究激励与响应同系统本身特性之间的关系，这就需要有描述系统本性特征的函数——传递函数。

凡是可用一阶微分方程描述的系统，称为一阶系统。其标准形式的微分方程为 $a_1y'+a_0y=f(t)$。在零初始条件下对其进行拉普拉斯变换，可以求得一阶线性系统的传递函数为

$G(s)=\frac{1}{a_1s+a_0}$。显然，在同一形式的输入信号作用下，尽管这些系统的输出信号是各不相同的物理量，但是它们的输出信号的形式是相同的。正因为如此，系统的理论分析才具有普遍意义。

例如：在 RC 串联电路 $RC\frac{du_c}{dt}+u_c=e(t)$ 中，其传递函数为 $G(s)=\frac{1}{RCs+1}$。

因此，学生想要学好专业课，《复变函数与积分变换》课程显然是必不可少的。只有学好《复变函数与积分变换》，学生在学习专业课中才能轻松自如地掌握相关知识，并运用于实践中。

作者简介：王淑君(1978,7,5~)，女，河北唐山人，职称：助教，职务：教研室主任。

（上接 69 页）　用中的一些读写速度、距离、工作模式等问题，对读写器进行了改进，以使其总体性能有大幅度的提高，促进 RFID 系统在我国应用领域的大规模应用。

参考文献

[1]EPC Radio -Frequency Identity Protocols Generation-2 UHF RFID,EPCglobal Inc.

[2]射频识别(RFID)技术.[德]Klaus Finkenzeller

[3]陆永宁.非接触 IC 卡原理与应用[M].北京:电子工业出版社.

[4]李苏剑.无线射频识别技术(RFID)理论与应用.游战清[M].北京:电子工业出版社.

[5]谭民,刘禹　.RFID 技术系统工程及应用指南[M].北京:机械工业出版社.

[6]K.Finkenzeller. RFID Handbook[S]. London: Wiley, 1999.

[7]RF Micro Device,RF2173 3V GSM POWER AMPLIFIER.RF Micro Device Inc.,2003.5

[8]EVALUATION BOARD FOR THE SYNTHESIZER FAMILIES. Silicon Laboratories Inc. Preliminary Rev. 0.5

责任编辑：李光旭