

## MATLAB在《复变函数与积分变换》中的应用

周后卿<sup>1</sup>, 徐幼专<sup>2</sup>

(1. 邵阳学院 理学院, 湖南 邵阳 422000; 2. 邵阳广播电视大学, 湖南 邵阳 422000)

**摘要:**《复变函数与积分变换》是工科类学生的一门重要基础课,既是《高等数学》的后续课程,也是学习其他专业课程的有力工具。该文探讨如何应用MATLAB辅助《复变函数与积分变换》教学的问题。

**关键词:**复变函数与积分变换; MATLAB; 应用

**中图分类号:**G642.0 **文献标识码:**A **文章编号:**1009-3044(2018)04-0089-03

**DOI:**10.14004/j.cnki.ckt.2018.0391

计算机辅助教学在大学数学教学中越来越普遍,利用MATLAB软件,已成为教师的首选。MATLAB凭借强大的符号运算、大量的函数以及统计、最优化、偏微分方程数值解等工具箱,已经成为运筹学、多元统计、时间序列分析、数字信号处理、动态系统仿真、图像处理、自动控制理论等课程教学中的必备教学工具,深受师生的喜欢和信赖<sup>[1]</sup>。在《复变函数与积分变换》课程教学中,MATLAB也大有可为,许多内容都可以用到这个软件<sup>[2-5]</sup>。我们通过一些实例,阐述MATLAB在这门课程中的应用。通过运用这个软件,达到降低内容难度,提振学生学习的士气,帮助学生加深、了解、掌握知识点,培养学生运用软件解决问题的能力。

### 1 利用MATLAB作图

我们知道,MATLAB提供了强大的图形处理和编辑功能,能够将经过数据处理、运算和分析后的结果通过图形的方式直观地进行表示。作图的原理是先计算离散自变量上对应的函数值,然后将这些点描绘出来;对于连续函数的话,则可以通过微分思想来进行,即不断减小离散点的间隔后,绘制这些数据。通过MATLAB作图,直观反映函数,把复杂问题简单化,学生容易接受与理解。例如,在实数域中,对于实变量函数,不妨设正弦函数 $f(x) = \sin x$ ,它是一个一元函数,它的图形是一条曲线(见图1)。代码如下:

```
x=0:0.01:2*pi;  
y=sin(x);  
plot(x,y,'r') 红颜色用“r”表示。
```

对这个图形,学生很熟悉。但是,在复数域中,对于复变量函数 $f(z) = \sin z$ 的图像,到底是啥样?学生不清楚;特别是说 $|\sin z| \leq 1$ 不成立,学生更不清楚。为了形象说明这一性质,我们借助MATLAB,就很容易画出它的图形(见图2)。用Z轴表示 $\sin z$ 的模,作出 $|\sin z|$ 的图像,其MATLAB程序如下:

```
x=[0:pi/5:7*pi],  
[x,y]=meshgrid(x),  
z=x+i*y,
```

u=sin(z),  
surf(x,y,abs(u))

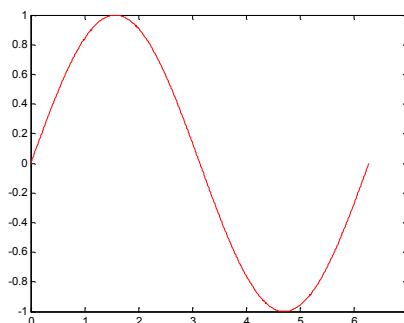


图1  $f(x) = \sin x$  的图形

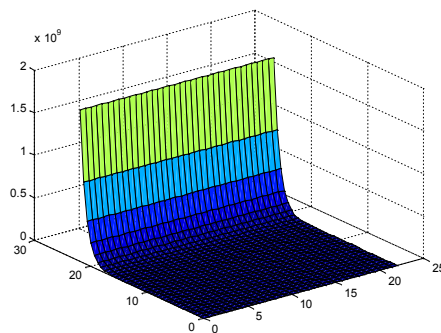


图2  $f(z) = \sin z$  的图形

学生通过观看图像,就容易区分它们之间的差异,也就能明白一定条件下 $|\sin z| \geq 1$ 了。

### 2 MATLAB在复变函数与积分变换计算中的应用

MATLAB在复变函数与实变函数中的计算有着相似之处,不管自变量是实数还是复数,都是将自变量的值直接代入函数表达式中去计算。可以利用MATLAB对一个复常数进行基本

收稿日期:2017-12-26

基金项目:邵阳学院精品资源共享课项目;邵阳学院教学改革研究项目(2017JG19)

作者简介:周后卿(1963—),男,湖南邵阳人,教授,硕士,研究方向为图论及其应用。

本栏目责任编辑:王力

计算机教学与教育信息化

的求模,求幅角,求实部、虚部的运算。更进一步地,还可以求复数的指数、对数,对复数进行三角运算,举几个例子加以说明。

例1 求下列复数的实部,虚部,共轭复数,幅角,模

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7, \frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i}, i^{18}。$$

解 代码如下:

```
z=[((1-i)/(1+i)).^7; i/(1-i)+(1-i)/i; i.^18];
```

```
real(z), % 求复数的实部
```

```
imag(z), % 求复数的虚部
```

```
conj(z), % 求复数的共轭复数
```

```
angle(z), % 求复数的幅角
```

```
abs(z), % 求复数的模
```

运算的结果:

```
z =
0+1.0000i
-1.5000-0.5000i
-1.0000
ans =
0
-1.5000
-1.0000
ans =
1.0000
-0.5000
0
ans =
0-1.0000i
-1.5000+0.5000i
-1.0000
ans =
1.5708
-2.8198
3.1416
ans =
1.0000
1.5811
1.0000
```

用MATLAB计算优势在于能够对多个复数同时进行计算,不用单独一个一个地去求。

例2 求方程  $z^3 + 1 = 0$  的解。

解法一(常规解法)将代数式化为三角式,原方程为  $z^3 = -1 = \cos \pi + i \sin \pi$ 。所以,  $z$  的三次方根为:

$$z_k = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3}, k=0, 1, 2, \text{也即}$$

$$z_0 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, z_1 = -1, z_2 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}。$$

解法二(用MATLAB计算)

代码如下:

```
roots=solve('z^3+1=0'),
```

运算结果:

```
roots =
-1
1/2+(3^(1/2)*i)/2
```

$$1/2-(3^{1/2}*i)/2$$

用MATLAB计算显得非常简单。

如果先将方程写成幂的形式:  $z = \sqrt[3]{-1}$ , 这是一个多值函数,那么,MATLAB 仅仅对其主值( $k=0$ 时)进行计算。

解法三 代码如下:

$$(-1)^{(1/3)}$$

结果显示:

$$\text{ans} = 0.5000 + 0.8660i。$$

由此看出,利用这个方法,只能得到一个答案。所以,一般不选择此类解法。

我们都知道,MATLAB除了简单的加、减、乘、除、乘方、开方运算外,还有更强大的计算功能,如微积分运算。首先,用MATLAB求极限,举例如下。

$$\text{例3 求极限 } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z}。$$

解 代码如下:

```
syms z,f=z/sin(z),limit(f,z,0),
```

运算结果:

$$f=z/\sin(z), \text{ans}=1,$$

$$\text{即 } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1。$$

其次,还可用MATLAB求复变函数的导数,例如:

$$\text{例4 求函数 } f(z) = \frac{z}{(1+z)\sin z} \text{ 的导数。}$$

解 代码如下:

```
syms z,f=z/((1+z)*sin(z)),diff(f),
```

运算结果:

$$f=z/(\sin(z)*(z+1)),$$

ans =

$$1/(\sin(z)*(z+1))-z/(\sin(z)*(z+1)^2)-(z*\cos(z))/(\sin(z)^2*(z+1)),$$

$$\text{也即, } f'(z) = \frac{1}{(1+z)\sin z} - \frac{z}{(1+z)^2 \sin z} - \frac{z \cos z}{(1+z)\sin^2 z}。$$

用MATLAB求复变函数的定积分,在形式上与实变函数的定积分相同,只是积分限由实数变成复数而已。格式为: `int (function,variable,a,b)`,其中,function为函数表达式,variable为积分变量,a,b分别为积分下限、上限。

$$\text{例5 计算定积分 } \int_0^i z \cos z dz。$$

解 代码如下:

```
syms z,f=z*cos(z),inf=int(f,z,0,i),
```

结果显示:

$$f=z*\cos(z), \text{inf}=1/\exp(1)-1,$$

$$\text{即 } \int_0^i z \cos z dz = e^{-1} - 1。$$

### 3 MATLAB在级数展开中的应用

一个函数在一个区域内解析,那么这个函数在这个区域内就能展开成泰勒级数,这是复变函数的一个重要内容,也是学生感到困难的地方。利用MATLAB,我们就很容易掌握函数在一点展开成级数的方法。具体格式为 `F=taylor(f,n,variable,a)`, `taylor`表示泰勒级数,n表示展开式的项数,variable表示变量,a表示在这点展开。

$$\text{例6 将函数 } f(z) = \frac{1}{(1+z)^2} \text{ 展开成泰勒级数。}$$

分析: 如果没有特别说明,将函数在哪一点展开泰勒级数,一般是默认为在把函数展开成麦克劳林级数,当然,前

提是函数在原点要解析。所以,这里就是在  $z=0$  处展开。

解 代码如下:

```
syms z,f=1/(1+z)^2,F=taylor(f,10,z,0),
```

运算结果显示:

```
f=1/(z+1)^2,
```

```
F=-10*z^9+9*z^8-8*z^7+7*z^6-6*z^5+5*z^4-4*z^3+3*z^2-2*z+1,
```

即  $F = -10z^9 + 9z^8 - 8z^7 + 7z^6 - 6z^5 + 5z^4 - 4z^3 + 3z^2 - 2z + 1$ 。

#### 4 MATLAB在留数计算中的应用

利用MATLAB计算留数问题,将复杂繁琐的计算交由计算机处理,使运算变得简单快捷,能充分调动学生学习积极性、创造性。对于形如函数  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  ( $P(z), Q(z)$  均为  $z$  的多项式)在孤立奇点处的留数,其留数格式为  $[r,p]=\text{residue}(B,A)$ ,其中,  $r$  表示留数,  $p$  表示极点;  $B, A$  分别表示函数  $P(z), Q(z)$  的系数组成的行向量。在计算时,只需写  $\text{residue}(B,A)$  即可。

例7 求函数  $f(z) = \frac{z^4 + 11z^3 + 39z^2 + 52z + 26}{z^4 + 10z^3 + 35z^2 + 50z + 24}$  在孤立奇点处的留数。

解 首先写出分子、分母两个多项式的系数向量,然后再去求  $\text{residue}(B,A)$ 。代码如下:

```
B=[1,11,39,52,26],A=[1,10,35,50,24],[r,p]=residue(B,A),
```

运算结果显示:

```
B=1 11 39 52 26
```

```
A=1 10 35 50 24
```

```
r= p=
```

```
1.0000 -4.0000
```

```
2.5000 -3.0000
```

```
-3.0000 -2.0000
```

```
0.5000 -1.0000
```

也即,当极点  $p=-4$  时,留数  $r=1$ ,余类推。

若函数  $f(z)$  的形式不是有理分式时,只能先判断  $f(z)$  的极点重数,然后根据公式

$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$  来求,这里  $z_0$ 、 $m$  分别表示极点、极点重数。它的MATLAB格式如下:

$\lim_{z \rightarrow z_0} \text{diff}(\text{sym}(f(z)*(z-z_0)^m), z', m-1) / \text{prod}(1:m-1, z', z_0)$ , 这里,  $\text{prod}(1:m-1)$  表示1到  $m-1$  连乘积。

例8 求函数  $f(z) = \frac{1-e^z}{z^4}$  在  $z=0$  的留数。

解 首先判断  $z=0$  是函数的三重极点,即  $m=3$ 。写出计算留数的MATLAB格式:

```
limit(diff(sym('z^3*(1-exp(z))/z^4'), 'z', 2)/prod(1:2, 'z', 0),
```

运算显示:  $\text{ans} = -1/6$ , 即函数在  $z=0$  的留数为  $-\frac{1}{6}$ 。

#### 5 MATLAB在傅里叶变换中的应用

傅里叶变换是积分变换的重要内容之一,也是难点之一,利用MATLAB可以轻松化解难点。我们知道,傅里叶变换的公式为  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$ ; 那么利用MATLAB求傅里叶变换的格式为  $F=\text{fourier}(Fun,t,w)$ , 即将  $t$  的函数变成  $w$  的函数。

例9 求函数  $f(t) = \sin 2t$  的傅里叶变换。

解 代码如下:

```
syms t w,ft=sin(2*t),F=sym(fourier(ft,t,w)).
```

显示如下

```
ft=sin(2*t),
```

```
F=-pi*(dirac(w-2)-dirac(w+2))*i,
```

即  $F = -\pi i(\delta(w-2) - \delta(w+2))$ 。

傅里叶逆变换的公式为  $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega$ 。在MAT-

LAB中使用  $\text{ifourier}$  函数来实现逆变换,格式如下:  $f=\text{ifourier}(Fw,w,t)$ , 默认  $w$  为独立变量,默认返回函数是以  $x$  为自变量的函数。

例10 求函数  $F(w) = \frac{\sin w}{w}$  的傅里叶逆变换。

解 代码如下:

```
syms w,F=sin(w)/w,f=simple(ifourier(F)),
```

运行后显示:

```
F=sin(w)/w,
```

$f=\text{heaviside}(x+1)/2-\text{heaviside}(x-1)/2$ , 这里,  $\text{heaviside}$  表示单位阶跃函数。

即  $f = u(x+1)/2 - u(x-1)/2$ 。

#### 6 MATLAB在拉普拉斯变换中的应用

积分变换中有两个常用的变换,拉普拉斯变换就是其中一个。由于拉普拉斯变换在专业课程、在工程技术中有着广泛的应用,因此熟练掌握MATLAB方法,用它解决一些拉普拉斯变换问题显得十分有意义。

求时域函数  $f(t)$  的laplace变换  $F(s)$ , 格式为  $F=\text{laplace}(f,t,s)$ 。

设  $F$  是  $s$  的函数,参数  $s$  省略,返回结果  $F$  默认为  $s$  的函数;  $f$  为  $t$  的函数,当参数  $t$  省略,默认自由变量为  $t$ 。

例11 求函数  $f(t) = e^{-at} \sin bt$  的拉普拉斯变换。

解 代码如下:

```
syms t s a b,f=exp((-a)*t)*sin(b*t),F=laplace(f,t,s),
```

运行后显示:

```
f=sin(b*t)/exp(a*t),
```

```
F=b/((a+s)^2+b^2),
```

即  $F(s) = \frac{b}{(a+s)^2 + b^2}$ 。

对于拉普拉斯逆变换,常用的方法是留数法,部分分式法(即先将函数分解成一些简单的式子,然后再反求),查表法等等。如果借助MATLAB,根本就不需记忆这么多,很容易求出逆变换,格式为  $f=\text{simple}(\text{ilaplace}(F))$ , 对于  $f$  默认  $t$  为自变量;对于  $F$ , 默认  $s$  为自变量。

例12 求  $F(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$  的拉普拉斯逆变换。

解 代码如下:

```
syms t s,F=1/((s+1)*s^2),f=simple(ilaplace(F)),
```

运行后显示:

```
F=1/(s^2*(s+1)),
```

```
f=t+1/exp(t)-1,
```

即  $f(t) = t + e^{-t} - 1$ 。

#### 7 结束语

在《复变函数与积分变换》教学中,将 Matlab 软件引入课堂教学,利用 Matlab 软件在绘图和计算方面的优势,可以将抽象复杂的学习内容,用可视化、动态化的形式直观地表现出来,以促进学生知识深入理解;同时还可以简化繁琐的计算 (下转第93页)



像刚从妈妈怀抱里走出来的孩子,需要我们的老师来帮助他们学会“走路”,大数据的熟练运用可以帮助我们的老师更好的开展工作。

### 1.3 我们的学校没有意识到大数据对孩子们的重要性

我们的学校很多时候就想我们学生的家长,只是负责我们学生的安全问题,很少会去关心我们学生的上课情况、我们老师的上课质量、社会的发展趋势与当前课程设计的匹配程度等问题。只是一味地为了学校的知名度而削尖脑袋想办法。毕竟学校的知名度是学校招生的保证,这就像一个怪圈,知名度高的学校可以招到成绩比较好的学生,当然在管理上下的功夫也就相对比较少,这些学校就有更多的精力去做科研、课题,来间接的提升学校的知名度;可是对于一般一点点的学校来说,在这场竞争中本身就处于劣势地位,想要翻盘就更加困难了,所以只会一味地迎合市场,不会再安下心来做教育。

大数据其实对学校的作用要比对学生个人而言要大的多得多,学生的落后只是一个人的落后,而学校的落后是所有学生的落后。这种思想是非常可怕的,我不想让“子欲养而亲不待,父欲教而木成舟”的悲剧再次上演。其实本来可以避免的悲剧还是发生了,这就真的成了人间悲剧了。我们的学校应该有使命感和责任感,用心去做教育,真正做到“你若盛开,清风自来”,要知道教学水平才能真正决定学校的社会认可度。我们学校的领导者应该纠正这种错误的办学理念,把学校的工作重心调整到提高教学水平上来。

## 2 大数据在大学教学推广的改善方案

### 2.1 学校加大投资力度和重视程度

我们的学校可以为我们的同学提供良好的教学环境,也可以与社会各界取得联系,为我们的学生搭建一个平台,可以让他们在大数据相关企业进行实习,还可以邀请大数据相关从业人员与学生代表进行座谈会,帮助我们的学生更快的和社会接轨,打破这层壁垒需要学校和社会各界的共同努力。同时我们的学校可以在学校内部组织与大数据相关的比赛,让我们的学生能够参与进来,扩大对大数据的宣传,从而为我们教师的课上讲解营造一个非常良好的氛围。另一方面,我们学校可以联合学生组织出台相关文件,加强宣传,将大数据应用到日常的大学生活中去,让我们的学生能够亲身感受到大数据带来的便利。学校还可以鼓励我们的学生进行与大数据有关的APP开发,让我们的学生都能参与到大数据的浪潮中来,争取做到不让一个人掉队。我们的学校还可以从制度上进行创新,将学生的在校成绩和参与社会实践活动挂钩,将社会实践活动的成绩

展示在学生的成绩中。让我们的大数据推广工作可以更加顺利的进行下去。

### 2.2 大学学生要积极参加到大数据的搭建中去

我们的大学生要认清自己的优势和不足,积极响应学校的号召,积极参加到大数据的收集、应用、开发中去,这个过程中就需要发挥我们学生干部和学生组织的作用了,以点带面,让我们的学生可以更快的改掉自己的坏习惯,同时还可以让自己学到切实的技能,为自己以后的职业规划多谋一条出路。我们的学生可以以实习生的身份参与到大数据公司的相关工作中去,在学习技能的同时可以锻炼自己的其他能力,为以后更好地融入社会打下良好的基础。

### 2.3 大学老师要创新上课模式,不断充实自己

大学老师是大学教学质量高低的关键,大学老师正处于人生积累阶段,需要像海绵汲水一样汲取知识。广大青年抓学习,既要惜时如金、孜孜不倦,下一番心无旁骛、静谧自怡的功夫,又要突出主干、择其精要,努力做到又博又专、愈博愈专。特别是要克服浮躁之气,静下来多读经典,多知其所以然<sup>[5]</sup>。为大数据进课堂把好质量关,做好学生学习路上的引路人。

## 3 小结

本文结合作者从事教育工作十多年的经验,就大数据在高校教学中的应用中存在的问题展开探讨,分析了当前大数据在推广过程中存在的问题有三点:分别是学生对自己、对社会发展认识不清,厌学情绪普遍存在;大学老师们对大数据的理解运用不够熟练;我们的学校没有意识到大数据对孩子们的重要性。具体的改善方案,分别是学校加大投资力度和重视程度;大学学生要积极参加到大数据的搭建中去;大学老师要创新上课模式,不断充实自己。正如古诗中所说“不识庐山真面目,只缘身在此山中”,可能本人的思想还不够成熟,看问题还不能够达到面面俱到,只希望通过本文能够让更多的人参与到这个话题的讨论中来,以便寻找更为广泛的思路。

## 参考文献:

- [1] 刘文远. 大数据知识发现[J]. 燕山大学学报, 2014(5).
- [2] Maslow A H. A Theory of Human Motivation[M]. Psychological Review, 1943.
- [3] 李轲. 浅析市场调研中的黑匣子问题及其详解[J]. 安徽财经大学校报, 2013(8).
- [4] 邱然. 习近平的七年知青岁月[M]. 中共中央党校出版社, 2017.

(上接第91页)

过程,让学生有更多时间和精力去体会和掌握课程的精髓,激发学生的学习兴趣,让数学学习变得生动有趣。通过上面一些具体例子,我们可以看出, MATLAB 对学习确实有很大帮助,利用它能够解决很多计算问题,作图问题;能够化难为易,原来难以理解的问题变得迎刃而解。

## 参考文献:

- [1] 周建兴, 岂兴明, 矫津毅, 等. MATLAB 从入门到精通[M]. 北

京: 人民邮电出版社, 2008.

- [2] 茹静. 《复变函数与积分变换》实验教学的实践和探讨[J]. 吉林化工学院学报, 2015, 32(10):5-9.
- [3] 徐彬. Matlab 在复变函数与积分变换课堂教学中的应用[J]. 湖北理工学院学报, 2016, 32(3):68-72.
- [4] 韩英, 陈佳旗. 复变函数的可视化问题研究[J]. 北京石油化工学院学报, 2012, 20(4):61-64.
- [5] 王泽龙, 谢美华. 可视化在复变函数教学中的运用[J]. 高等数学研究, 2016, 19(4):56-57, 60.