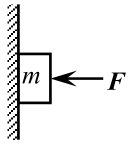
第 2 章　质点动力学

思考题

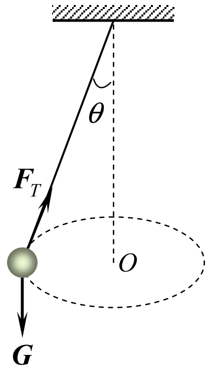
2-1 用一沿水平方向的外力 $\boldsymbol{F}$ 将质量为 m 的物体压在竖直墙上，如图所示。若墙与物体间的静摩擦系数为 μ_s，则物体与墙之间的静摩擦力为多大？如果外力 $\boldsymbol{F}$ 增大一倍，静摩擦力将如何变化？



思考题 2-1 图

[提示]　物体与墙之间的静摩擦力 $F_s = mg$，外力 $\boldsymbol{F}$ 增大一倍，静摩擦力不变。

2-2 一个由绳子悬挂着的物体在水平面内作匀速圆周运动（称为圆锥摆），有人在重力的方向上求合力，写出 $F_T\cos\theta - G = 0$。另有人沿绳子拉力的方向求合力，写出 $F_T - G\cos\theta = 0$。显然两者不能同时成立，你认为哪个式子是错误的，为什么？



思考题 2-2 图

[提示]　$F_T - G\cos\theta = 0$ 是错误的。

因为物体的加速度始终指向 O 点，在拉力 $\boldsymbol{F}_T$ 的方向上的分量不为零，沿绳子拉力的方向上应有 $F_T - G\cos\theta = ma\sin\theta$，它与 $F_T\cos\theta - G = 0$ 同时成立。

2-3 一人用力 $\boldsymbol{F}$ 推地面上的木箱，经时间 Δt 未推动木箱，此推力的冲量等于多少？木箱既然受到了力的冲量，为什么它的动量没有改变？

[提示]　推力的冲量为 $\boldsymbol{F}\cdot\Delta t$。

动量定理中的冲量为合外力的冲量，木箱除受力 $\boldsymbol{F}$ 外还受到地面的摩擦力等其他外力，木箱未动说明此时木箱受到的合外力为零，故合外力的冲量也为零，根据动量定理，木箱的动量不发生变化。

2-4 一辆静止的车被后面开来的车碰撞，两车的驾驶员都受了点伤，你能否根据驾驶员受伤的情况来判断哪一辆车是停着的，哪一辆车是开动的？

[提示]　根据惯性的规律可知，停着车的驾驶员应该是背面受伤，开动车的驾驶员应该是前面受伤。

2-5 火车司机要开动很重的列车时，总是先开倒车，使车往后退一下，然后再往前开，

为什么这样做容易使列车开出？

[提示] 因为整列火车的质量很大，要使整列火车一起由静止到运动（产生加速度），需要很大的拉力。但如果先向后退一下，能使车厢之间的衔接放松，再往前开车时，让车厢一节一节地拉动，以使整列车开动就省力，也可避免开车时把车的挂钩拉断。

2-6 某人把一物体由静止开始举高到 h 时，使物体获得速度 v，在此过程中，人对物体做功为 W，则有 $W=\frac{1}{2}mv^2+mgh$。这一结果正确吗？这可以理解为“合外力对物体做的功等于物体动能的增量与势能的增量之和”吗？为什么？

[提示] 结果正确，但不能理解为“合外力对物体做的功等于物体动能的增量与势能的增量之和”。

因为 W 并非合外力做的功，物体所受的力除了人的作用力 F 外，还有重力 mg，因此根据动能定理，合外力的功等于物体动能的增量，即

$$(F-mg)h=\frac{1}{2}mv^2-0$$

所以

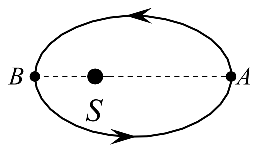
$$W=Fh=\frac{1}{2}mv^2+mgh$$

W 是人对物体所做的功，而不是合外力做的功。

2-7 保守力有什么特点？保守力的功与势能的关系如何？

[提示] 保守力做功与路径无关，只与始末位置有关。保守力的功等于系统势能增量的负值，即 $W=-\Delta E_P$。

2-8 行星绕太阳 S 作椭圆轨道运动，从近日点 B 向远日点 A 运行的过程中，太阳对它的引力做正功还是做负功？从远日点 A 向近日点 B 运行的过程中，太阳对它的引力做正功还是做负功？由此功判断行星的动能以及行星和太阳系统的引力势能在这两个阶段中各是增加还是减少？



思考题 2-8 图

[提示] 万有引力是保守力，其做功与路径无关。行星和太阳系统只有保守内力做功，系统的机械能守恒。所以，从近日点 B 向远日点 A 运行的过程中，引力做负功，系统的引力势能增加，行星的动能减少；从远日点 A 向近日点 B 运行的过程中，引力做正功，系统的引力势能减少，行星的动能增加。

习　题　2

选择题

2-1　B　　2-2　C　　2-3　D　　2-4　C　　2-5　D　　2-6　D　　2-7　D

2-8　B　　2-9　B　　2-10　C　　2-11　D

填空题

2-12 $1:\cos^2\theta$　　2-13 $\arccos(\frac{g}{R\omega^2})$

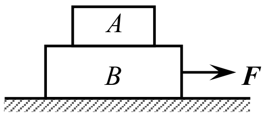
2-14 4 m/s，2.5 m/s　　2-15 4000 J

2-16 $-\frac{2Gm_E m}{3R}$　　2-17 $\sqrt{\frac{k}{mr}}$，$-\frac{k}{2r}$

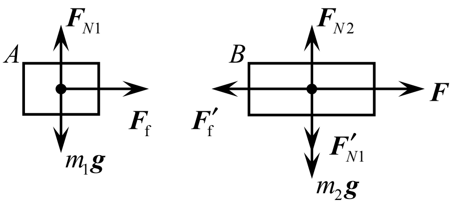
计算题

2-18 质量分别为 m_1 和 m_2 的木块 A 和 B 叠放在光滑的水平面上，A 和 B 之间的静摩擦系数为 μ。如图所示。如用力 $\boldsymbol{F}$ 拉 B，欲使 B 从 A 下抽出，作用在 B 上的拉力至少为多大？

[分析] B 的加速度 a_B 大于 A 的加速度 a_A 时，B 就可从 A 下面抽出。用隔离体法，画示力图分析。



习题 2-18 图



解 2-18 图

[解] 分别隔离 A 和 B，画出它们的示力图如解 2-18 图。取水平向右的方向为正。

对 A：

$$\mu m_1 g = m_1 a_A$$

A 物体的最大加速度

$$a_{Am} = \mu g$$

对 B：

$$F - \mu m_1 g = m_2 a_B$$

$$a_B = \frac{F - \mu m_1 g}{m_2}$$

当 $a_B > a_{Am}$ 时，B 板就能从 A 下面抽出，有

$$\frac{F - \mu m_1 g}{m_2} > \mu g$$

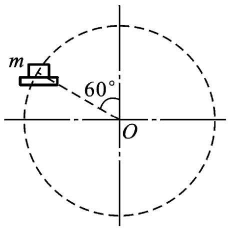
解得

$$F > \mu(m_1 + m_2)g$$

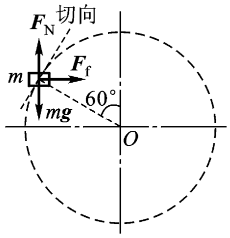
2-19 质量为 $m = 0.2$ kg 的砝码置于木板上，手持木板保持水平，托着砝码使之在竖直平面内作半径 R=1m，速率 v =1 m/s 的匀速率圆周运动。当砝码与木板一起运动到如图所示位置时，砝码受到木板的摩擦力和支承力各为多少？

[分析]　砝码在竖直平面内作圆周运动，把砝码受到的力沿切向和法向分解，分别列出切向和法向的运动方程，这样求解较方便。

[解]　隔离砝码，画出它的示力图如解 2-19 图。把 $\boldsymbol{F}_N, \boldsymbol{F}_\mathrm{f}$，$\boldsymbol{G}$ 沿切向和法向分解



习题 2-19 图



解 2-19 图

切向：　$$mg\sin 60^0 - F_\mathrm{f}\cos 60^0 - F_N\sin 60^0 = 0$$

法向：　$$mg\cos 60^0 + F_\mathrm{f}\sin 60^0 - F_N\sin 60^0 = m\frac{v^2}{R}$$

联立以上两式解得

$$F_N = 1.86\ \ \mathrm{N}, \qquad F_\mathrm{f} = 0.17\ \ \mathrm{N}$$

*2-20 质量为 m 的子弹以速度 v_0 水平射入沙土中，设子弹所受阻力与速度反向，大小与速度成正比，比例系数为 k，忽略子弹的重力，求：（1）子弹射入沙土后，速度随时间变化的关系式；（2）子弹进入沙土的最大深度。

[分析]　子弹运动过程中受到变力作用，需要用牛顿第二定律列微分方程求解。

[解]　（1）子弹进入沙土后受力为 $-kv$，由牛顿定律

$$-kv = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{k}{m}\mathrm{d}t, \quad \rightarrow \int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{k}{m}\int_0^t \mathrm{d}t$$

所以　$$v = v_0 e^{-kt/m}$$

（2）求最大深度有两种解法

解 1：　由　$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad \rightarrow \ \mathrm{d}x = v_0 e^{-kt/m}\mathrm{d}t$

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t v_0 e^{-kt/m}\mathrm{d}t$$

求得　$$x = \frac{m}{k}v_0(1 - e^{-kt/m})\text{，} \rightarrow x_m = mv_0/k$$

解 2： 由 $$-kv=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

有 $$\mathrm{d}x=-\frac{m}{k}\mathrm{d}v$$

$$\int_0^{x_m}\mathrm{d}x=-\frac{m}{k}\int_{v_0}^{0}\mathrm{d}v$$

所以 $$x_m=mv_0/k$$

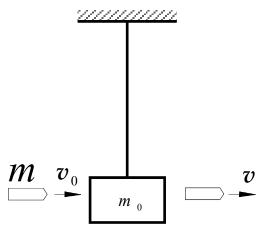
2-21 质量 m_0 =1.5 kg 的物体，用长 l =1.25 m 的细绳悬挂在天花板上，如图所示。今有一质量 m =10 g 的子弹以 v_0 =500 m/s 的水平速度射穿物体，刚穿出物体时，子弹的速度大小 v =30 m/s，设穿透时间极短。求：（1）子弹刚穿出时绳中张力的大小；（2）子弹在穿透过程中所受的冲量。

[分析] 视物体和子弹为一个系统, 因穿透时间极短, 系统水平方向动量守恒, 由动量守恒定律可求得子弹穿过物体后, 物体 m_0 获得的速度，再把牛顿第二定律应用于 m_0，可求得绳中的张力；子弹在穿透过程中所受的冲量可由质点动量定理求得。

[解] (1) 设子弹穿过 m_0 后，m_0 的水平速度为 v'，物体和子弹系统水平方向动量守恒, 取水平向右的方向为正, 由动量守恒定律有

$$mv_0=mv+m_0v'$$

所以 $$v'=\frac{m(v_0-v)}{m_0}=3.13\ \ \text{m/s}$$



习题 2-21 图

m_0 的法向运动方程由牛顿第二定律有

$$F_T-m_0g=m_0\frac{v'^2}{l}$$

所以 $$F_T=m_0g+m_0\frac{v'^2}{l}=26.5\ \ \text{N}$$

（2）取水平向右的方向为正, 质点动量定理应用于子弹有

$$F\cdot\Delta t=mv-mv_0=-4.7\ \ \text{N. s}$$

负号表示冲量的方向与 $\boldsymbol{v}_0$ 相反。

2-22 质量为m_0的木块在光滑的固定斜面上，由 A 点静止下滑，当滑至 B 点时，木块被一水平飞来的子弹击中，子弹陷入木块内。已知 A、B 距离为 l，子弹质量为m，速度为 v。求子弹射入木块后它们共同的速度大小。

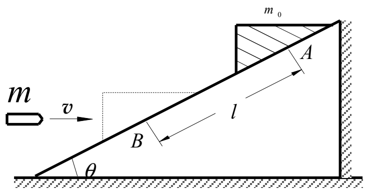
[分析] 斜面光滑，m 滑至 B 点时的速度可由机械能守恒定律求得。m_0 在 B 点与子弹发生完全非弹性碰撞，因斜面固定，子弹和木块系统水平方向的动量不守恒；若忽略子弹和木块的重力, 则子弹和木块系统沿斜面方向的动量守恒，可由动量守恒定律求得结果。

[解] 设木块 M 滑至 B 点时的速度大小为v_1，由机械能守恒定律求得为

$$v_1=\sqrt{2gl\sin\theta} \qquad \text{方向沿斜面向下。}$$

设子弹与木块碰撞后共同的速度为 u, 子弹和木块系统沿斜面方向动量守恒。取沿斜面向上的方向为正，由动量守恒定律有

$$mv\cos\theta-m_0v_1=(m+m_0)u$$



习题 2-22 图

把v_1代入解得

$$u=\frac{mv\cos\theta-m_0\sqrt{2gl\sin\theta}}{m+m_0}$$

*2-23 质量皆为 m 的两木块 A、B 静止在光滑水平面上，用劲度系数为 k 的轻弹簧连接，如图所示。一质量为 m 的子弹以水平速度 v_0 击中木块 A 并留在 A 内。求：（1）弹簧的最大压缩量；（2）木块 B 的最大速度。

习题 2-23 图

[分析] 分两个过程考虑， 即子弹与木块 A 碰撞的过程和木块 A 连同子弹与木块 B 碰撞的过程，因水平面光滑, 显然两个过程系统水平方向动量都守恒。弹簧压缩量最大时应有$v_A=v_B$；而木块 B 的速度最大时应有弹簧的压缩量为零。

[解] （1）设子弹射入木块 A 后一起运动的速度为v_{A0}，对子弹、木块 A 系统，水平方向动量守恒，取水平向右的方向为正, 由动量守恒定律有

$$mv_0=(m+m)v_{A0} \qquad ①$$

又因为子弹与木块 A 碰撞的时间极短，在这极短的时间内弹簧尚未被压缩，所以碰后瞬时，木块 B 的速度$v_{B0}=0$。

此后进行的过程，对木块 A（连同子弹）、木块 B、弹簧组成的系统，水平方向不受外力，也无非保守内力作功，故系统的动量及机械能都守恒。设弹簧压缩量为Δx时，A、B

的速度分别为v_A和v_B，由动量守恒及机械能守恒定律有

$$2mv_{\mathrm{A0}}=2mv_{\mathrm{A}}+mv_{\mathrm{B}} \qquad ②$$

$$\frac{1}{2}(2m)v_{\mathrm{A0}}^2=\frac{1}{2}(2m)v_{\mathrm{A}}^2+\frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2+\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \qquad ③$$

弹簧压缩量最大时，应有$v_A=v_B$，联立①、②、③解得

$$\Delta x_m=\sqrt{\frac{m}{6k}}v_0$$

（2）木块B的速度最大时，弹簧的压缩量为零。将$\Delta x=0$代入③并重解上述方程得

$$v_{\mathrm{Bm}}=\frac{2}{3}v_0$$

2-24 从 10 m 深的井中把 10 kg 的水匀速上提，由于水桶漏水，每升高 1 m 要漏去 0.2 kg 的水。（1）画出示意图，设置坐标，写出外力所做元功 dW的表达式；（2）计算把水从水面提到井口外力所做的总功W。

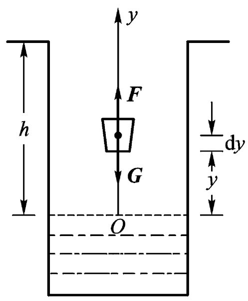
[分析] 这是变力做功，先写出外力(提升力)F随位置坐标y变化的函数关系, 再写出元功 dW的表达式，积分即可得总功。

[解] (1) 画示意图如解 2-24 图所示，坐标原点取在水面，竖直向上为y轴正向。当水桶上升高度为y时，桶中水的质量为$(10-0.2y)$ kg，水桶匀速上升, 提升力F等于水桶的重量, 即

$$F=(10-0.2y)g$$

水桶由y处再上升 dy的高度，外力(提升力)F所做的元功为

$$\mathrm{d}W=F\mathrm{d}y=(10-0.2y)g\mathrm{d}y$$



解 2-24 图

（2）把水桶从水面提升到井口，外力所做的总功为

$$W=\int\mathrm{d}W=\int_0^{10}(10-0.2y)g\mathrm{d}y=882\ \ \mathrm{J}$$

2-25 一质量为 m 的质点在指向中心的平方反比力$F=\dfrac{k}{r^2}$（ k为常数）的作用下，作半径为 r 的圆周运动，求质点运动的速度和总机械能，选取距力心无限远处的势能为零。

[分析] 质点作圆周运动的向心力即为引力，由牛顿第二定律可求得速度；机械能等于动能加势能。

[解] 由牛顿第二定律，有

$$\frac{k}{r^2}=m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v=\sqrt{\frac{k}{mr}}$$

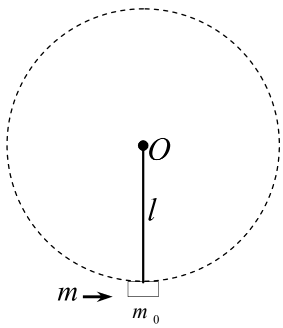
$r=\infty$ 为势能零点

$$E_P=\int_r^{\infty}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_r^{\infty}-\frac{k}{r^2}\mathrm{d}r=-\frac{k}{r}\text{。}$$

总机械能 $$E=E_k+E_P=\frac{1}{2}mv^2-\frac{k}{r}=-\frac{k}{2r}$$

2-26 质量为 m 的子弹，水平射入悬挂着的静止砂袋中，如图所示。砂袋质量为 m_0，摆长为 l，为使砂袋能在竖直平面内完成整个圆周运动，子弹至少应以多大的速度射入？

[分析] 整个过程分两个阶段， 即子弹和砂袋碰撞的阶段和砂袋绕悬点 O 在竖直平面内作圆周运动的阶段。前一阶段 m、m_0 系统水平方向动量守恒；后一阶段对(m+ m_0)、地球系统机械能守恒。



习题 2-26 图

[解] 设 v_0 为子弹射入的最小速度，v 为砂袋连同子弹获得的速度，取水平向右的方向为正，由动量守恒定律有

$$mv_0=（m+m_0）v$$

砂袋连同子弹越过最高点的条件为

$$（m+m_0)g=(m+m_0)u^2/l$$

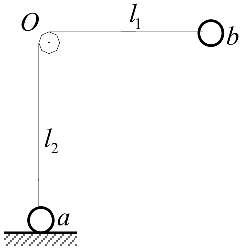
式中 u 为砂袋在最高点的速度，由机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}(m+m_0)v^2=(m+m_0)g2l+\frac{1}{2}(m+m_0)u^2$$

联立以上三式解得

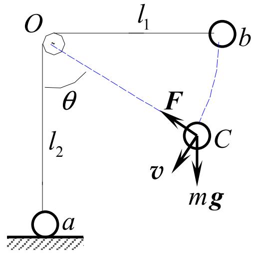
$$v_0=\frac{m+m_0}{m}\sqrt{5gl}$$

2-27 一轻绳跨越水平光滑细杆 O，绳的两端连有等质量的两个小球 a 和 b，b 球从水平位置由静止向下摆动，如图所示。求 a 球刚要离开地面时，跨越细杆 O 的两段绳之间的夹角为多大？



习题 2-27 图

;



解 2-27 图

[分析] 小球 a 离开地面的条件是：轻绳对球 a 的张力 $F \geq mg$ 。小球 b 下摆过程中，绳的张力不做功，b 球和地球系统的机械能守恒。

[解] 设 a、b 球的质量为 m, a 球刚要离开地面时，b 球运动到 C 点, 见解 2-30 图。b 球和地球系统的机械能守恒, 取过 C 点的水平面为重力势能的零点, 有

$$mgl_1\cos\theta = \frac{1}{2}mv^2 \qquad ①$$

C 点的速度由牛顿第二定律

$$F - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{l_1} \qquad ②$$

地面对球 a 的支持力等于零, 即 $F = mg$ 时，a 球刚离开地面, ②式改为

$$mg - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{l_1} \qquad ③$$

由①, ③解得

$$\cos\theta = \frac{1}{3}, \qquad \theta = \arccos\frac{1}{3} = 70^0 31'$$

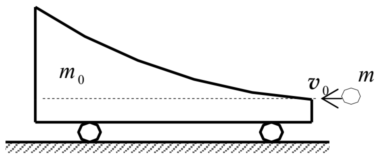
2-28 如图所示，一质量为 m_0 带有光滑弧形轨道的小车，静止在光滑水平面上，今有一质量为 m ，速度为 v_0 的小球，从轨道下端水平射入。求小球沿弧形轨道上升的最大高度 h 及此后下降离开小车时的速度 v。

[分析] 小球上升至最大高度时, 球与车有共同的水平速度, 小球射入到球上升到最大高度及此后下滑离开轨道的整个过程, 水平方向不受外力, 球、车系统水平方向动量守恒；且此过程中, 球、车、地球系统只有重力作功, 机械能守恒。

[解] （1）设小球上升至最大高度时, 球与车的共同速度为 v', 由动量守恒和机械能守恒，有

$$mv_0 = (m + m_0)v' \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m + m_0)v'^2 + mgh \qquad ②$$



习题 2-28 图

联立①、②解得

$$h = \frac{m_0 v_0^2}{2g(m + m_0)}$$

(2) 若以 v_1 表示球离开小车时小车的速度, 则对小球射入到球离开小车的整个过程,

由动量守恒和机械能守恒，有

$$mv_0 = mv + m_0 v_1 \quad ③$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m_0 v_1^2 \quad ④$$

联立③、④解得

$$v = \frac{m - m_0}{m + m_0} v_0$$

若$m < m_0$，则 v 与 v_0 反方向；若$m > m_0$，则 v 与 v_0 同方向。