第 9 章 波动学基础

思考题

9-1 说明波长、波频、波速这三个物理量的含义；在 $u=\lambda\nu$ 中，各量由哪些因素决定？从一给定波源发出的机械波通过不同介质传播时，什么量是变的？什么量是不变的？

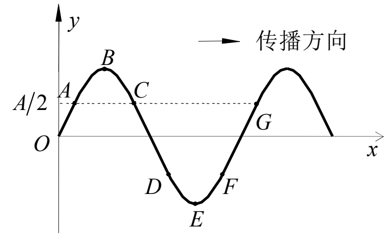
（略）

9-2 设某时刻波形曲线如图所示，波沿 x 正方向传播。

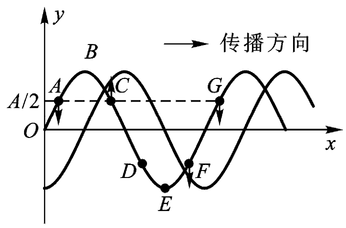
（1）在图中用箭头示出 A、C、F、G 各质点在该时刻的运动方向；

（2）求此时刻 B、E、G 三质点的振动相位；

（3）画出经过 $T/4$ 后的波形图。



思考题 9-1 图



思考题 9-2 解图

[提示] （1）此时刻 A、C、F、G 各质点的运动方向如思考题 9-2 解图所示。

（2）此时刻 B、E、G 三质点的振动相位分别为 $\varphi_B=0$，$\varphi_E=\pm\pi$，$\varphi_G=\dfrac{\pi}{6}$。

（3）经过 $T/4$ 后的波形图如思考题 9-2 解图所示。

9-3 波函数 $y(x,t)=A\cos\left[\omega(t-\dfrac{x}{u})+\varphi\right]=A\cos(\omega t-\dfrac{\omega x}{u}+\varphi)$ 中，$\dfrac{x}{u}$，$\dfrac{\omega x}{u}$，φ，$y(x,t)$ 各代表什么物理意义？

[提示] $\dfrac{x}{u}$ 表示波从坐标原点传至 x 处需要的时间； $\dfrac{\omega x}{u}$ 表示 x 处质点落后原点处质点振动的相位； φ 表示原点处质点振动的初相； y 表示 x 处质点在 t 时刻的振动位移。

9-4 波动传播过程中，任一质元的总能量随时间变化，这与能量守恒定律是否矛盾？

[提示] 与能量守恒定律并不矛盾，只不过是体积元的能量与邻近媒质发生能量传递。

9-5 两波叠加产生干涉现象的条件是什么？在什么情况下两波波形相互加强？在什么情况下两波波形相互减弱？

[提示] 两波叠加产生干涉现象的条件是：两波必须频率相同，振动方向相同，相位相

同或相位差恒定。

干涉加强、减弱的条件是：两波在叠加点的相位差

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}=\begin{cases}\pm 2k\pi & 加强\\ \pm(2k+1)\pi & 减弱\end{cases}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

式中$\varphi_2-\varphi_1$为两相干波源的相位差，r_1、r_2分别为两相干波源到叠加点的距离。

当$\varphi_2-\varphi_1=0$（两相干波源同相）时，上述条件可简化为用波程差$\delta=r_2-r_1$表示，即

$$\delta=r_2-r_1=\begin{cases}\pm k\lambda & 加强\\ \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & 减弱\end{cases}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

9-6 驻波是怎样形成的，它有什么特征？为什么说驻波实质上不是波？

[提示] 驻波是波干涉现象的一个特例，是介质的一种特殊振动状态。即两列振幅相同的相干波，在同一直线上沿相反方向传播时叠加而形成的。驻波的特点是存在波节和波腹，相邻波节的距离为$\dfrac{\lambda}{2}$。驻波与行波的区别在于：行波由于传播能量，使波形不断地前进。驻波的能量，当各点位移均最大时，各点速度为零，总能量等于各点的势能之和。由于波节处介质形变，能量集中在波节。当各点位移为零时，总能量等于各点的动能之和，因波腹处速度最大，能量集中在波腹。这样，驻波的能量在振动过程中，只在波腹和波节之间周期性流动，并不向前传播，因而波形也并不向前。

9-7 驻波中各点的相位有什么关系？为什么说相位没有传播？

[提示] 驻波分段振动，同一段上的各点，振幅不同，相位相同，相邻两段的各点振动相位始终相反；驻波没有振动状态和相位的向外传播。

习　题　9

选择题

9-1　C　　9-2　A　　9-3　C　　9-4　B　　9-5　B　　9-6　C　　9-7　B

9-8　A　　9-9　D

填空题

9-10　$y=A\cos[2\pi(\nu t-\frac{L_1+L_2}{\lambda})+\varphi]$，　$x=-L_1+k\lambda$，　$(k=\pm1,\pm2,\cdots)$

9-11　相同，相同，　$2\pi/3$　　　9-12　$A\cos[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})+(\varphi\pm\pi-2\pi\frac{2L}{\lambda})]$

计算题

9-13　一平面简谐波沿x轴负方向传播，波速为$u=20\ \mathrm{m/s}$，如图所示，已知A点处

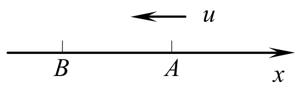
质点的振动方程为 $y_A = 3\cos 4\pi t$（SI）。（1）以 A 点为坐标原点，写出波函数；（2）以距 A 点 5 m 处的 B 点为坐标原点，写出波函数。

[分析] 这是写波函数的第一类问题，即已知波线上某点的振动方程，写波函数。 以 A 点为原点，即已知原点（A 点）处质点的振动方程，只要写出离原点为 x 处质点的振动方程，就是波函数。类似地以 B 点为原点，可先写出原点（B 点）处质点的振动方程，再写波函数。

[解] （1）以 A 点为坐标原点的波函数

已知原点（A 点）处质点的振动方程为

$$y_A = 3\cos 4\pi t$$



习题 9-13 图

则波函数 $$y = 3\cos 4\pi(t + \frac{x}{u}) = 3\cos 4\pi(t + \frac{x}{20}) \quad \text{（SI）}$$

（2）B 点，$x = -5\,\text{m}$, 代入上式得 B 点的振动方程

$$y_B = 3\cos 4\pi(t - \frac{5}{20}) = 3\cos(4\pi t - \pi)$$

所以，以 B 点为坐标原点的波函数为

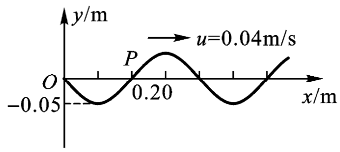
$$y = 3\cos[4\pi(t + \frac{x}{u}) - \pi] = 3\cos[4\pi(t + \frac{x}{20}) - \pi] \text{（SI）}$$

9-14 一平面简谐波沿 x 轴正方向传播，$t = 0$ 时刻的波形如图所示。求:（1）该波的波动表达式;（2）P 处质点的振动方程。

[分析] 这是写波函数的第二类问题，即已知某时刻的波形曲线，写波函数。先写出坐标原点处质点的振动方程，再写波函数。第二问只需把 P 点的坐标代入波动表达式即可求得。

[解] （1）设原点处质点的振动方程为

$$y_0 = A\cos(\omega t + \varphi)$$



习题 9-14 图

由图知 $A = 0.05\,\text{m}$， $\omega = 2\pi\nu = 2\pi\dfrac{u}{\lambda} = 0.2\pi$

$t = 0$ 时， $y_0 = A\cos\varphi = 0$， $v_0 = -A\omega\sin\varphi > 0$

得 $$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

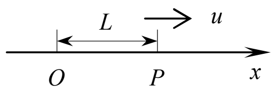
所以 $$y_0 = 0.05\cos(0.2\pi t - \pi/2) \text{（SI）}$$

波动表达式 $$y = 0.05\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) - \frac{\pi}{2}] = 0.05\cos[0.2\pi(t - \frac{x}{0.04}) - \frac{\pi}{2}] \text{（SI）}$$

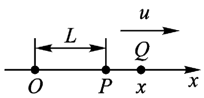
（2）令 $x = 0.20\,\text{m}$，代入波动表达式得 P 处质点的振动方程

$$y_P = 0.05\cos[0.2\pi(t-\frac{0.20}{0.04})-\frac{\pi}{2}] = 0.05\cos(0.2\pi t-\frac{3\pi}{2})$$ （SI）

9-15 一平面简谐波沿 x 轴正方向传播，波速大小为 u，已知 P 点处质点的振动方程为 $y_P = A\cos(\omega t+\varphi)$，如图所示。求：（1）$O$ 处质点的振动方程；（2）该波的波函数；（3）与 P 处质点振动状态相同的那些质点的位置。



习题 9-15 图



解 9-15 图

[分析] 波向 x 轴正方向传播，O 处质点比 P 处质点先振动，时间上或相位上都超前 P 点。同一波线上相位差 $\Delta\varphi = \pm 2k\pi$ 的那些质点振动状态相同。

[解] （1）已知 P 处质点的振动方程为

$$y_P = A\cos(\omega t+\varphi)$$

O 处质点在时间上比 P 处质点早 L/u 秒振动，故 O 处质点的振动方程为

$$y_0 = A\cos[\omega(t+\frac{L}{u})+\varphi]$$

（2）波线上 x 处质点的振动方程，即波函数为

$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x-L}{u})+\varphi]$$

（3）如解 9-15 图所示，设坐标为 x 处的 Q 点振动状态与 P 点相同，则 Q、P 两点的相位差满足

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{x-L}{\lambda} = \frac{\omega(x-L)}{u} = \pm 2k\pi$$

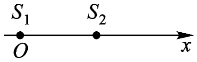
所以 $$x = L \pm k\frac{2\pi u}{\omega}, \qquad k = 0，1，2，\cdots$$

即坐标满足上式的各点振动状态与 P 点相同。

9-16 如图所示，两相干波源 S_1 和 S_2，相距 $d = 30$ m，S_1 和 S_2 都在 x 坐标轴上，S_1 位于坐标原点。设由 S_1 和 S_2 分别发出的两列波沿 x 轴传播时强度保持不变，$x_1 = 9$ m 和 $x_2 = 12$ m 的两点是相邻的两个因干涉而静止的点，求两波的波长和两波源的最小相位差。

[分析] 取 S_1 为坐标原点，利用干涉减弱的条件，分别对 x_1 和 x_2 两点列两个方程即可求得答案。

[解] 设 S_1 和 S_2 的振动初相位分别为 φ_1 和 φ_2。



习题 9-16 图

在 x_1 点两波引起的振动相位差为

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=(2k+1)\pi$$

即
$$\varphi_2-\varphi_1-2\pi\times\frac{d-2x_1}{\lambda}=(2k+1)\pi \qquad ①$$

在 x_2 点两波引起的振动相位差为

$$\varphi_2-\varphi_1-2\pi\times\frac{d-2x_2}{\lambda}=(2k+3)\pi \qquad ②$$

② - ①得

$$4\pi\times\frac{x_2-x_1}{\lambda}=2\pi$$

$$\lambda=2(x_2-x_1)=6\ \ \text{m}$$

代入①

$$\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi+2\pi\times\frac{d-2x_1}{\lambda}=(2k+5)\pi$$

当 $k=-2,\ -3$ 时，相位差有最小值

$$\varphi_2-\varphi_1=\pm\pi$$

7-17 如图所示，两列波长均为 λ 的相干波分别通过图中 O_1 和 O_2 点；通过 O_1 点的波在 MN 平面反射时有半波损失。O_1 和 O_2 两点的振动方程为 $y_{10}=A\cos\pi t$ 和 $y_{20}=A\cos\pi t$，且有 $O_1Q+QP=8\lambda$，$O_2P=3\lambda$，求：（1）两列波分别在 P 点引起的振动方程；（2）P 点的合振动方程。

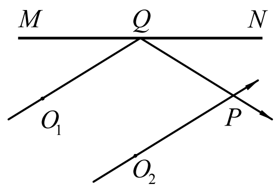
[分析] 反射波有半波损失，即有相位 π 的突变，计算相位差时要 $\pm\pi$ 。

[解]

（1） $$y_1=A\cos(\pi t-\pi-\frac{2\pi}{\lambda}\times 8\lambda)=A\cos(\pi t-\pi)$$

$$y_2=A\cos(\pi t-\frac{2\pi}{\lambda}\times 3\lambda)=A\cos(\pi t)$$

(2) $$y=y_1+y_2=A\cos(\pi t-\pi)+A\cos(\pi t)$$
$$=-A\cos(\pi t)+A\cos(\pi t)=0$$



习题 9-17 图

*9-18 设入射波的方程为 $y_1=A\cos 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})$，波在 $x=0$ 处发生全反射，反射点为一自由端，求：（1）反射波的波函数；（2）合成波（驻波）的波函数；（3）波腹和波节的位置；（4）若反射点为一固定端时，写出反射波的波函数。

[分析] 反射点为自由端时，反射波无“半波损失”，即无相位突变；反射点为固定端时，反射波有“半波损失”。另传播过程中，波的振幅不变。

[解] （1）反射点为自由端时的反射波方程

$$y_2 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$$

（2）合成波（驻波）表达式

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) + A\cos(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$$

$$= 2A\cos(\frac{2\pi x}{\lambda})\cos(\frac{2\pi}{T}t)$$

（3）波腹位置

由
$$\frac{2\pi x}{\lambda} = k\pi$$

得
$$x = \frac{1}{2}k\lambda\,, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

波节位置

由
$$\frac{2\pi x}{\lambda} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

得
$$x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}\,, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

（4）反射点为固定端时的反射波表达式

$$y_2' = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) - \pi]$$