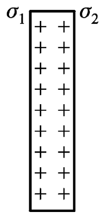
第 5 章　导体和电介质中的静电场

思考题

5-1 无限大均匀带电平面两侧的场强为$E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$。这个公式对于均匀带电的导体在其表面附近产生的电场也适用。但是静电平衡状态下，带电导体表面附近的场强却是$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$。前者比后者小一半，这是为什么？



思考题 5-1 解图

[提示] 所谓无限大均匀带电平面，是忽略了厚度的一种几何平面，认为电荷分布在一个几何面上。实际的带电薄板（例如金属板），电荷是分布在两个表面上的，设左面的电荷面密度为σ_1，右面的电荷面密度为σ_2（思考题 5-1 解图），均匀分布时 $\sigma_1=\sigma_2$，式$E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$中的$\sigma$应等于$\sigma_1+\sigma_2$，而式$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$中的$\sigma$应等于$\sigma_1$或等于$\sigma_2$。

5-2 把一个带正电的导体 A 移近一个原来不带电的导体 B 时，导体 B 的电位是不变、升高还是降低？为什么？

[提示] 导体 B 的电位将升高。因为，带电体 A 移近 B 时，B 上会出现感应电荷，靠近 A 的一边感应电荷为负，远离 A 的一边感应电荷为正，从导体 A 的正电荷发出的电场线一部分终止与负的感应电荷上，正的感应电荷发出的电场线延伸至无限远，由于同一电场线其起点的电位总是高于终点的电位，若取无限远处的电位为零，则正的感应电荷所在处的电位大于零，静电平衡时，导体 B 为等位体，因此导体 B 的电位大于零。带电体 A 未移近 B 之前，B 的电位为零，所以，当 A 移近 B 时，B 的电位升高了。

5-3 有一个带有电荷的导体球，在它的旁边有一块不带电的物体（可能是导体，也可能是电介质），在这样的情况下，能不能用高斯定理来求周围空间的场强分布？为什么？

[提示] 高斯定理求场强的条件是：场强分布有一定的对称性。本问题不能用高斯定理求场强。

其旁边的物体如是导体，由于静电感应，将出现感应电荷，如是电介质，将出现极化电荷；反过来，由于静电感应，导体球上的电荷不再是均匀分布的。因此，空间的场强分布就不具有对称性，故不能用高斯定理求场强分布。

5-4 一个带电体带有一定的电量，当另一个不带电的导体移近它时，它的电容有没有改变？

[提示] 电容会增大。

设带电体带的电量为$+Q$，导体单独存在时，其电容为$C=\dfrac{Q}{U}$，当另一个不带电的导体移近它时，因静电感应， 靠近带电体的一端会出现相异的感应电荷（设为$-q$），而远离的一端则会出现$+q$。由于$-q$离带电体近些，对带电体的电位影响大些，$+q$离带电体远一些，对带电体的电位影响也小一些。因而总效果是使带电体的电位减小了，而Q不变，所以电容增大了。这与孤立导体的电容不随带电状况而改变的性质并不矛盾。因为当有其它导体移近时，原来的导体已经不再是孤立导体了，电容就可能发生变化。

5-5 平行板电容器充电后，如果切断电源，使两极板间的距离增大。问两极板间电势差、极板间场强、电容器电容如何改变？如果不切断电源而增大两极板间距。则极板上电荷面密度、极板间场强、电容器电容又如何改变？

[提示] 电容器充电后切断电源，极板上的电量保持不变。使两极板间的距离增大，则电容器电容$C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$减小；两极板间的场强$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$不改变；两极板间的电势差$U=Ed$增大。

如果不切断电源而增大两极板间距，则两极板间的电势差U不变。电容器电容$C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$减小；电容器极板上的电量$Q=CU$减少；极板上的电荷面密度$\sigma=\dfrac{Q}{S}$减小；两极板间的场强$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$减小。

习 题 5

选择题

5-1 B　5-2 A　5-3 B　5-4 D　5-5 C　5-6 B　5-7 D
5-8 B

填空题

5-9 不变， 减小　　5-10 σ，$\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$

5-11 R_1/R_2， $4\pi\varepsilon_0(R_1+R_2)$

计算题

5-12 半径分别为R_1和R_2（$R_2>R_1$）的两个同心导体薄球壳，分别带电量Q_1和Q_2。今将内球壳用细导线与远处的半径为 r 的导体球相连。导体球原来不带电，细线上的电量忽

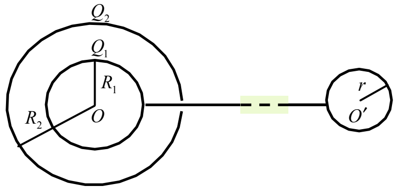
略不计。求相连后导体球所带的电量 q。

[分析] 同心导体球壳与导体球相距很远，二者可视为孤立。用细导线将内球壳与导体球相连后，内球壳与导体球成为一等势体，内、外球壳上的电荷以及导体球上的电荷将重新分布，但总电荷守恒。

[解] 设内球壳与导体球相连后，导体球上带电量为 q，取无限远处为电势零点，则导体球的电势为

$$U_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

内球壳的电势为 $$U_{R_1} = \frac{Q_1 - q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$



习题 5-12 图

二者电势相等，有

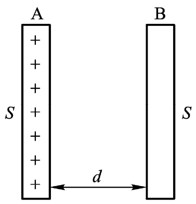
$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q_1 - q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

解得 $$q = \frac{r(R_2 Q_1 + R_1 Q_2)}{R_2(R_1 + r)}$$

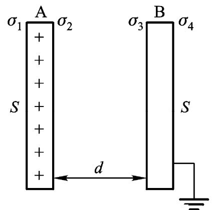
5-13 把一块原来不带电的金属板 B，移近一块已带有正电荷 Q 的金属板 A，平行放置。设两极板面积都是 S，板间距离为 d。忽略边缘效应。求：

（1）两极板间的电势差 U_{AB}；

（2）若将 B 板接地，两极板间的电势差 U'_{AB} 又为多少？



习题 5-13 图



解 5-13 图

[分析] 根据场强叠加原理求出 A、B 两板达静电平衡后，两板之间的场强分布，再由电势差的定义求解。

[解] （1）把一块不带电的金属板 B，移近一块已带有正电荷 Q 的金属板 A 时，B 板会感应带电，同时 B 板的电荷又影响 A 板，两导体板达静电平衡后，设 A、B 两板四个面上的电荷面密度分别为 σ_1、σ_2、σ_3 和 σ_4，根据教材式（5-2）有

$$\sigma_1 = \sigma_4 \qquad ①$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 \qquad ②$$

又由电荷守恒，有

$$\sigma_1 + \sigma_2 = Q/2S \qquad ③$$

$$\sigma_3 + \sigma_4 = 0 \qquad ④$$

联立以上四式解得

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q}{2S}, \qquad \sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q}{2S}$$

两板之间的场强大小

$$E_{AB} = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \qquad \text{方向 A→B}$$

所以 $$U_{AB} = \int_0^d \boldsymbol{E}_{AB} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{Qd}{2\varepsilon_0 S}$$

（2）若 B 板接地，则

$$\sigma_4' = \sigma_1' = 0, \qquad \sigma_2' = -\sigma_3' = \frac{Q}{s}$$

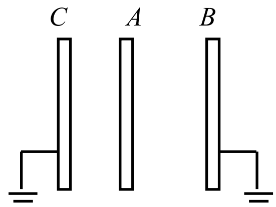
$$E_{AB}' = \frac{\sigma_2'}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3'}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

所以 $$U_{AB}' = \int_0^d \boldsymbol{E}_{AB}' \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$$

5-14 三块平行金属板 A、B、C，面积均为 200 cm^2。A、B 间距为 4 mm，A、C 间距为 2 mm。B、C 两板都接地，如图所示。A 板带正电荷 $q = 3\times10^{-7}$C，不计边缘效应。求

（1）B、C 板上的感应电量；

（2）A 板的电势。



习题 5-14 图

[分析] 根据导体静电平衡性质及电荷守恒定律求解。

[解] （1）因为 A 板带正电，静电平衡时，B、C 两板在相对 A 板一侧的表面上应感应负电荷，分别设为 $-q_B$ 和 $-q_C$，由电荷守恒定律，有

$$q_B + q_C = q \qquad ①$$

因 B、C 两板接地，$U_{AB} = U_{AC}$

而
$$U_{AB}=E_{AB}\cdot d_{AB}=\frac{\sigma_B}{\varepsilon_0}d_{AB}=\frac{q_B}{\varepsilon_0 S}d_{AB}$$

$$U_{AC}=E_{AC}\cdot d_{AC}=\frac{\sigma_C}{\varepsilon_0}d_{AC}=\frac{q_C}{\varepsilon_0 S}d_{AC}$$

所以
$$q_B d_{AB}=q_C d_{AC} \qquad ②$$

联立①、②解得

$$q_B=-\frac{1}{3}q=-1.0\times10^{-7}\ \text{C}$$
$$q_C=-\frac{2}{3}q=-2.0\times10^{-7}\ \text{C}$$

（2）因 B、C 两板接地，故

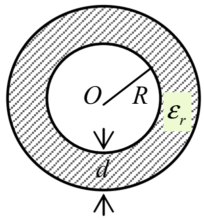
$$U_B=U_C=0$$

$$U_A=E_{AB}\cdot d_{AB}=\frac{|q_B|}{\varepsilon_0 S}\cdot d_{AB}=2.3\times10^{3}\ \text{V}$$

5-15 半径为 R、带电量为 q 的导体球，球外有一厚度为 d 的同心均匀电介质球壳，介质的相对介电常数为 ε_r，如图所示，求电场强度和电势的分布。

[分析] 因介质均匀，场强分布有球对称性，可用介质中的高斯定理求场强分布；根据电势的定义求电势分布。

[解] 由介质中的高斯定理，可求的空间场强的分布为



习题 5-15 图

$r<R$ 时，$D=0,\quad E=0$

$R<r<(R+d)$ 时，$D=\dfrac{q}{4\pi r^2},\quad E=\dfrac{D}{\varepsilon}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$

$r>(R+d)$ 时，$D=\dfrac{q}{4\pi r^2},\quad E=\dfrac{D}{\varepsilon}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

由电势的定义可求得电势分布

$$r<R\text{ 时，}U=\int_r^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}r=\int_r^{R}0\cdot\mathrm{d}r+\int_R^{R+d}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\mathrm{d}r+\int_{R+d}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+d}\right)+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R+d)}$$

$R < r < (R+d)$时，$U = \int_r^\infty \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}r = \int_r^{R+d} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\mathrm{d}r + \int_{R+d}^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R+d}\right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (R+d)}$$

$r > (R+d)$时，　　$U = \int_r^\infty \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}r = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

5-16 真空中半径分别为 R_1 和 R_2 的两个导体球，相距很远。今用一细导线将两者相连接，并给系统带上电量 Q。求

（1）每个球上分配到的电量是多少？

（2）按电容定义式计算此系统的电容。

[分析] 两个导体球相距很远，可视为孤立导体球；用导线相连后，两者电势相等。

[解] （1）设两球上各分配电荷 q_1 和 q_2，忽略导线的影响，则

$$q_1 + q_2 = Q \qquad ①$$

又两球相距很远，近似孤立，各球的电势分别为

$$U_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}, \qquad U_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

用细导线相连后，两球电势相等

$$U_1 = U_2 = U$$

即

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \qquad ②$$

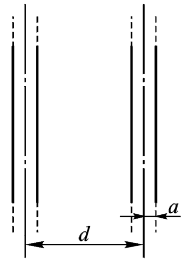
解①、②得

$$q_1 = \frac{R_1 Q}{R_1 + R_2}, \qquad q_2 = \frac{R_2 Q}{R_1 + R_2}$$

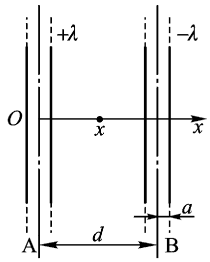
（2）根据电容定义式得此系统的电容为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_1} = 4\pi\varepsilon_0 R_1 \frac{Q}{q_1} = 4\pi\varepsilon_0 (R_1 + R_2)$$

5-17 真空中两根半径均为 a 的“无限长”直导线平行放置，它们的轴线之间相距为 d，且 $d \gg a$，试求该导体组单位长度的电容。



习题 5-17 图



解 5-17 图

[解] 设两导线单位长度分别带电$+\lambda$和$-\lambda$。以左边导线轴线上一点为坐标原点，x 轴与两导线垂直，建立一维坐标如解 5-17 图所示，两导线间 x 处一点的场强大小为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-x)}$$

两导线间的电势差

$$U_{AB}=\int \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^{d-a}(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x})\mathrm{d}x$$

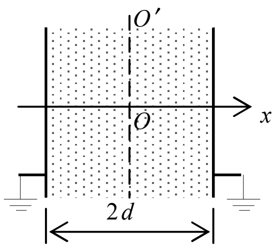
$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln\frac{d-a}{a}-\ln\frac{a}{d-a})$$

$$=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a}$$

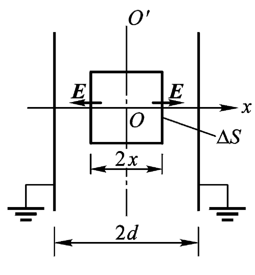
设长度为 L 的一段导线上所带电量为 Q，则有$\lambda=Q/L$，故单位长度的电容

$$C=\frac{Q}{LU_{AB}}=\frac{\lambda}{U_{AB}}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{d-a}{a}}$$

5-18 两块“无限大”平行导体板，相距 $2d$，都与地相连，如图所示。两板间充满正离子气体（与导体板绝缘），离子数密度为 n，每个离子的带电量为 q。如果忽略气体中的极化现象，可以认为场强分布相对中心平面 oo' 是对称的。试求两板间的场强分布和电势分布。



习题 5-18 图



解 5-18 图

[分析] 本题场强分布相对中心平面 OO' 对称，故可用高斯定理求场强分布，再由电势

的定义求电势。

[解] 作底面积为ΔS、长为 $2x$ 的柱形高斯面如解 5-18 图所示。由高斯定理，有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 2E\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0} nq \cdot 2x\Delta S$$

所以

$$E = \frac{nq}{\varepsilon_0} x$$

$\boldsymbol{E}$ 的方向垂直高斯面的两底向外。

由于导体板接地，电势为零，所以 x 处的电势为

$$U_x = \int_x^d E_x \mathrm{d}x = \frac{nq}{\varepsilon_0}\int_x^d x\mathrm{d}x = \frac{nq}{2\varepsilon_0}(d^2 - x^2)$$

5-19 一空气平行板电容器，两极板面积均为 S，极间距离为 d，在两极板间平行地插入一面积也是 S，厚度为 $d/2$ 的金属板，其电容变为原来的多少？如果插入的是相对介电常数为ε_r的介质板，结果又如何？

[分析] 在两极板之间插入同样面积的金属板，则极板间距减小，电容变大；如果插入的是介质板，则相当两个电容器的串联，总电容变小。

[解] 设原空气平行板电容器的电容为C_0，则

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

插入一厚度为$d/2$的金属板，相当极板间距减小为$d/2$，所以

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d/2} = 2\frac{\varepsilon_0 S}{d} = 2C_0$$

且金属板的位置对电容无影响。

若插入同样厚度的介质板（与介质板是否靠近金属板无关），则相当两个电容器的串联，有

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\dfrac{\varepsilon_0 S}{d/2}} + \frac{1}{\dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d/2}}$$

整理得

$$C = \frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}\frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} C_0$$