第一篇　力　学

第1章　质点运动学

思考题

1-1 什么是位置矢量？位置矢量和位移矢量有什么区别？怎样选取坐标原点可使两者一致？

[提示] 位置矢量简称位矢或矢径，是从坐标原点至质点所在位置的有向线段，通常用 $\boldsymbol{r}$ 表示；而位移矢量是从前一时刻质点所在位置到后一时刻质点所在位置的有向线段，用 $\Delta\boldsymbol{r}$ 表示。它们的关系为

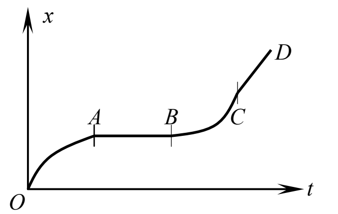
$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$$

若把坐标原点取在质点的初位置，则 $\boldsymbol{r}_0=0$，任意时刻质点对于此位置的位移 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}$。

1-2 质点作平面运动，已知其运动方程的直角坐标分量为 $x=x(t), y=y(t)$。在计算质点的速度和加速度的大小时，有人先由 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，求出 $r=r(t)$，再由 $v=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 和 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 求得结果，你认为这种做法对吗？如果不对，错在什么地方？

[提示] 这种做法不对。速度的定义式是 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$；速度的大小，即速率 $v=|\boldsymbol{v}|=\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|\neq\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$；加速度的定义式是 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$；加速度的大小 $a=\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|\neq\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$。一般 $\mathrm{d}r\neq|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$，$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 只是径向速度，即由质点相对于原点距离 r 变化引起的，是 $\boldsymbol{v}$ 沿径向的分量大小。同理 $|\mathrm{d}\boldsymbol{v}|\neq\mathrm{d}v$，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 只反映速度大小的变化，只是切向加速度。

1-3 一质点作直线运动的 $x\sim t$ 曲线如图所示，质点的运动可分为OA、AB（平行于 t 轴的直线）、BC和CD（直线）四个区间。试问每一区间速度、加速度分别是正值、负值，还是零？



思考题 1-3 图

[提示] OA 区间：$v>0, a<0$；AB 区间：$v=0, a=0$；

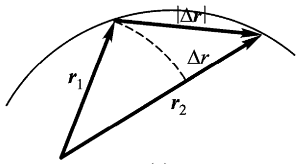
BC 区间：$v>0, a>0$；CD 区间：$v>0, a=0$。

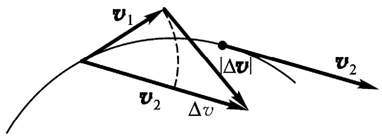
1-4 在曲线运动中，$|\Delta \boldsymbol{r}|$ 与 Δr，$|\Delta \boldsymbol{v}|$ 与 Δv 是否相同？

[提示] $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 与 Δr，$|\Delta \boldsymbol{v}|$ 与 Δv 不同。

$|\Delta \boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|$ 是两位置矢量之差的大小，而 $\Delta r = r_2 - r_1$ 是两位置矢量的大小之差，两者不等，见思考题 1-4 解图。

$|\Delta \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1|$ 是两时刻速度之差的大小，即速度增量，而 $\Delta v = v_2 - v_1$ 是两时刻速度的大小之差，两者也不等。见图。

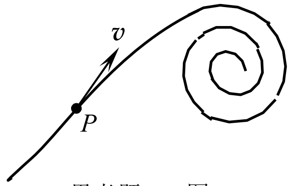




思考题 1-4 解图

1-5 质点沿平面螺旋线自外向内运动，如图所示。质点的自然坐标与时间的一次方成正比。问质点的切向加速度和法向加速度是越来越大还是越来越小？为什么？

[提示] 切向加速度 $a_t = 0$，法向加速度 a_n 越来越大。



思考题 1-5 图

设质点的运动方程为 $s = ct$（c 为常数）

则 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = c$，$a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{c^2}{\rho}$$

即质点作匀速率曲线运动，$a = a_n$，又因为质点自外向内运动，ρ 越来越小，所以 a_n 越来越大。

习　题　1

选择题

1-1　D　　1-2　D　　1-3　C　　1-4　C　　1-5　B　　1-6　D　　1-7　B

填空题

1-8　5 m/s，　17 m/s　　　　1-9　23 m/s

1-10 $6\ \mathrm{m/s^2}$， $450\ \mathrm{m/s^2}$　　　　1-11 $v_0^2\cos^2\theta/g$

计算题

1-12 一质点沿 x 轴作直线运动，t 时刻的坐标为 $x=4.5t^2-2t^3$（SI）。试求：

（1）第 2 秒内的平均速度；（2）第 2 秒末的瞬时速度。

[分析] 根据平均速度、瞬时速度的定义求。

[解] （1）根据平均速度的定义式，有

$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(2)-x(1)}{2-1}=-0.5\ \ \mathrm{m/s}$$

（2）因为 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=9t-6t^2$，$t=2\,\mathrm{s}$ 代入，得

$$v(2)=9\times 2-6\times 2^2=-6\ \ \mathrm{m/s}$$

1-13 一质点的运动方程为 $x=2t,\ \ y=19-2t^2$（SI）。试求：

（1）质点的轨迹方程；（2）$t=2\mathrm{s}$ 时刻质点的位置矢量，并计算第 2 秒内的平均速度大小；（3）第 2 秒末质点的瞬时速度和瞬时加速度。

[分析] 解本题的关键是弄清：轨迹方程、位置矢量、速度（含平均速度）和加速度的定义。

[解] 已知运动方程 $x=2t,\ \ y=19-2t^2$

（1）消去 t 得轨迹方程 $y=19-\dfrac{x^2}{2}$

（2）运动方程的矢量式为 $\boldsymbol{r}(t)=2t\boldsymbol{i}+(19-2t^2)\boldsymbol{j}$

$t=2$ s， $\boldsymbol{r}(2)=4\boldsymbol{i}+(19-2\times2^2)\boldsymbol{j}=4\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}$

平均速度 $$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}(2)-\boldsymbol{r}(1)}{2-1}==2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}\ \ \mathrm{m/s}$$

$$\overline{v}=\sqrt{2^2+6^2}=6.32\quad \mathrm{m/s}$$

（3）因为 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j}$， $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=-4\boldsymbol{j}$

$t = 2$ s， $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j}$ m/s， $\boldsymbol{a} = -4\boldsymbol{j}$ m/s^2

1-14 质点沿 x 轴运动，加速度与位置坐标 x 的关系为 $a = 2x - 1$（SI），如果质点在原点处的速度 $v_0 = 6\ \mathrm{m/s}$。求质点在任意位置处的速度。

[分析] 这是运动学的第二类问题，即已知加速度，求速度，需要积分求解。

[解] 设质点在 x 处的速度为 v，由题设

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2x - 1$$

所以 $$\int_6^v v dv = \int_0^x (2x-1) dx$$

积分并整理得 $$v = \sqrt{2x^2 - 2x + 36} \quad \text{（SI）}$$

1-15 质点沿 x 轴运动，加速度随速度变化的关系为 $a = -kv$，式中 k 为常数。当 $t = 0$ 时，$x = x_0, v = v_0$，求任意时刻质点的速度和位置。

[分析] 本题也是运动学的第二类问题，已知加速度，求速度和位置，需要积分两次。

[解] 设任意时刻质点的速度为 v，位置坐标为 x，由题设

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv$$

分离变量并积分 $$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v} = -k\int_0^t \mathrm{d}t, \quad \rightarrow \quad \ln\frac{v}{v_0} = -kt$$

所以 $$v = v_0 e^{-kt}$$

又因为 $$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 e^{-kt}$$

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = v_0 \int_0^t e^{-kt} \mathrm{d}t$$

所以 $$x = x_0 + \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$$

1-16 一质点作半经为 R 的圆运动，$t = 0$ 时经过 P 点，此后速率按 $v = A + Bt$ （A、B 为正值常数）变化。求质点运动一周再经过 P 点时它的切向加速度和法向加速度的大小。

[分析] 已知速率随时间线性变化, 对 t 求导可得切向加速度 a_t 的大小, 再设法求得质点过 P 点时的速度, 代入法向加速度公式即可求得 a_n。

[解] 已知 $v = A + Bt$，则切向加速度大小为

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = B$$

法向加速度 $$a_n = \frac{v^2}{R}$$

因为 $$v^2 = (A+Bt)^2 = A^2 + B(2At + Bt^2)$$

由 $$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = A + Bt$$

$$\int_0^{2\pi R} \mathrm{d}s = \int_0^t (A+Bt)\mathrm{d}t$$

得 $$2\pi R = At + \frac{1}{2}Bt^2，\rightarrow\ 2At + Bt^2 = 4\pi R$$

所以 $$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{A^2}{R} + 4\pi B$$

求法向加速度的另一解法：因为 $v = A + Bt$，即质点作匀变速圆周运动，且 $v_0 = A$，由匀变速运动公式

$$v^2 = v_0^2 + 2a_t s = A^2 + 2B\cdot(2\pi R) = A^2 + 4\pi BR$$

所以 $$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{A^2}{R} + 4\pi B$$

1-17 质点从静止出发沿半经 $R = 3$ m 的圆周作匀变速运动，切向加速度 $a_t = 3\ \mathrm{m/s^2}$。问：(1) 经过多少时间后质点的总加速度恰好与半经成 45^0 角？(2) 在上述时间内，质点所经过的路程和角位移各为多少？

[分析] 总加速度与半径成 45^0 角，必有 $a_t = a_n$，故先求出 a_n；第二问需积分求解

[解] 根据题意： $t = 0,\quad v_0 = 0$，$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 3\ \mathrm{m/s^2}$，有

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t 3\mathrm{d}t，\rightarrow\ v = 3\,t$$

质点的法向加速度 $$a_n = \frac{v^2}{R} = 3t^2$$

(1) 总加速度与半径成 45^0 角，则有 $a_t = a_n$

即 $$3t^2=3$$

所以 $$t=1\ \text{s}$$

（2）由速率的定义： $$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=3t$$

$$\int_0^s \mathrm{d}s=\int_0^t 3t\mathrm{d}t \quad\rightarrow\quad s=\frac{3}{2}t^2$$

t = 1 s 代入，得 $$s=\frac{3}{2}\times 1^2=1.5\ \ \text{m}$$

角位移 $$\theta=\frac{s}{R}=\frac{1.5}{3}=0.5\ \ \text{rad}$$

1-18 一质点在水平面内沿一半经 R = 2 m 的圆轨道转动，角速度与时间的函数关系为 $\omega=kt^2$（k 为常数）。已知 t = 2 s 时，质点的速度值为 32 m/s。试求 t = 1 s 时，质点的速度与加速度的大小。

[分析] 先根据已知条件确定常数 k, 由线速度与角速度的关系可得到速度随时间变化的函数关系，再根据切向加速度和法向加速度的定义即可分别求得 a_t 和 a_n。

[解] 已知角速度随时间变化的函数关系为 $\omega=kt^2$

$t=2\,\text{s}$ 时, 质点的速度 $v=32\ \ \text{m/s}$， 故常数

$$k=\frac{\omega}{t^2}=\frac{v}{Rt^2}=4\ \ \text{rad/s}^3$$

$$\omega=4t^2,\qquad v=R\omega=4Rt^2$$

$t=1\,\text{s}$ 时, 质点的速率 $v=4Rt^2=8\ \text{m/s}$

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=8Rt=16\ \ \text{m/s}^2\ ,\qquad a_n=\frac{v^2}{R}=32\ \ \text{m/s}^2$$

所以 $$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=35.8\ \ \text{m/s}^2$$

*1-19 一飞机驾驶员想往正北方向航行，遇到由东向西以 60 km/h 速率刮来的风。如果飞机在静止空气中的的航速为 180 km/h。试求驾驶员应取什么航向？飞机相对与地面的速率为多少？

[分析] 飞机相对于地面的速度 $\boldsymbol{v}_{\text{机地}}=\boldsymbol{v}_{\text{机空}}+\boldsymbol{v}_{\text{空地}}$. 画出三个速度的矢量关系图即可求解。

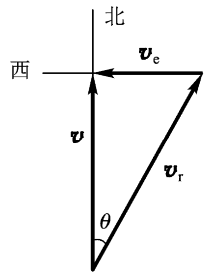
[解] 设飞机相对于地面的速度为 $\boldsymbol{v}$，飞机相对于空气的速度为 $\boldsymbol{v}_\mathrm{r}$，空气相对于地面

的速度为$\boldsymbol{v}_e$，由题意

$v_e = 600$ km/h ，正西方向；

$v_r = 180$ km/h ，方向未知；

v 的大小未知， 方向正北方向。



解 1-19 图

根据速度合成定理有

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e$$

三个速度$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_e$构成直角三角形, 矢量关系图如解 1-19 图所示

由矢量图可得

$$v = \sqrt{v_r^2 - v_e^2} = 170 \ \ \mathrm{km/h}$$

$$\theta = arc\tan\frac{v_e}{v} = 19.4^0$$

即，飞机应取北偏东 19.4^0 的航向飞行。