# Table des matières


**1 DÉTERMINANTS** **3**
- 1.1 Permutations . . . 3
  - 1.1.1 Définitions . . . 3
  - 1.1.2 Signature d'une permutation . . . 4
- 1.2 Applications multilinéaires . . . 5
  - 1.2.1 Définitions . . . 5
  - 1.2.2 Applications multilinéaires alternées . . . 5
- 1.3 Définition du déterminant et premières propriétés . . . 9
  - 1.3.1 Déterminant d'une famille de $n$-vecteurs . . . 9
  - 1.3.2 Déterminant d'un endomorphisme . . . 10
  - 1.3.3 Déterminant d'une matrice . . . 12
  - 1.3.4 Déterminant des matrices carrées $2 \times 2$ . . . 13
  - 1.3.5 Matrices transposées . . . 13
  - 1.3.6 Opérations sur les lignes et les colonnes . . . 14
- 1.4 Développement d'un déterminant . . . 15
  - 1.4.1 Cofacteurs et comatrices . . . 15
  - 1.4.2 Matrices triangulaires . . . 19
  - 1.4.3 Matrices inverses et déterminant . . . 20
- 1.5 Formules de Cramer . . . 21
- 1.6 Rang d'une matrice . . . 22

**2 RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES** **25**
- 2.1 Sous-espaces propres et diagonalisation . . . 25
  - 2.1.1 Valeurs propres, vecteurs propres . . . 25
  - 2.1.2 Sous-espaces propres . . . 28
  - 2.1.3 Endomorphismes et matrices diagonalisables . . . 30
  - 2.1.4 Calcul des puissances d'une matrice . . . 32
- 2.2 Trigonalisation et théorème de Cayley-Hamilton . . . 34
  - 2.2.1 Endomorphismes trigonalisables . . . 34
  - 2.2.2 Polynômes d'endomorphismes . . . 36
  - 2.2.3 Théorème de Cayley-Hamilton . . . 37

2.3 Polynôme minimal . . . 38
2.3.1 Théorème de décomposition des noyaux . . . 38
2.3.2 Polynômes annulateurs, polynôme minimal . . . 39
2.4 Projecteurs . . . 42
2.5 Sous-espaces caractéristiques . . . 44
2.5.1 Indice d'un endomorphisme et endomorphismes nilpotents . . . 44
2.5.2 Sous-espaces caractéristiques . . . 46
2.5.3 Décomposition de Dunford-Jordan . . . 48
2.6 Applications et exemples . . . 51

**3 SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES 53**
3.1 Exponentielle d'une matrice ou d'un endomorphisme . . . 53
3.1.1 Espaces vectoriels normés . . . 53
3.1.2 Norme sur l'espace des endomorphismes et sur les matrices . . . 55
3.1.3 Dérivabilité et intégration des fonctions à variable réelle et à valeurs dans un espace vectoriel . . . 57
3.1.4 Exponentielle d'une matrice . . . 58
3.2 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants . . . 62
3.2.1 Système différentiel linéaire homogène . . . 63
3.2.2 Système différentiel linéaire non homogène . . . 65
3.3 Équations différentielles linéaires . . . 67

# Chapitre 1

# DÉTERMINANTS

## 1.1 Permutations

### 1.1.1 Définitions

**Définition 1.1.1** *Une* **permutation** *de l'ensemble* $F_n = \{1, ..., n\}$ *est une bijection de* $F_n$ *sur* $F_n$.

On notera $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations.

**Remarque 1.1.1** *La donnée d'un élément* $\sigma$ *de* $\mathfrak{S}_n$ *est définie par les données successives de* $\sigma(1) \in F_n$, $\sigma(2) \in F_n \setminus \{\sigma(1)\}, \cdots, \sigma(n) \in F_n \setminus \{\sigma(1), \cdots, \sigma(n-1)\}$.

*On en déduit que card* $(\mathfrak{S}_n) = n!$.

**Remarque 1.1.2** $\mathfrak{S}_n$ *muni de la loi de composition* $\circ$ *est un groupe. En effet* $\circ$ *est une loi interne. En effet si* $(\sigma, \sigma') \in \mathfrak{S}_n^2$, *alors* $\sigma \circ \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ *car la composée de deux bijections est une bijection.*

*La loi* $\circ$ *est associative. En effet si* $(\sigma, \sigma', \sigma'') \in \mathfrak{S}_n^3$, *alors on a évidemment* $(\sigma \circ \sigma') \circ \sigma'' = \sigma \circ (\sigma' \circ \sigma'')$.

*L'application identité notée id* ($id(k) = k$ *pour tout* $k \in F_n$) *est une permutation de* $F_n$ *et est l'élément neutre pour* $\circ$. *Pour tout* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *on a* $\sigma \circ Id = Id \circ \sigma = \sigma$.

*Tout élément* $\sigma$ *de* $\mathfrak{S}_n$ *admet un inverse qui n'est rien d'autre que la bijection réciproque* $\sigma^{-1}$.

**Définition 1.1.2** $\mathfrak{S}_n$ *muni de la loi* $\circ$ *s'appelle le* **groupe des permutations** *ou* **groupe symétrique**.

**Exemples de permutations:** Soit $E_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ définie par : $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$ et $\sigma(4) = 2$. On écrira alors :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Définition 1.1.3** *On suppose que $n \geqslant 2$. Pour tout $(i,j) \in F_n^2$ tel que $i < j$, on appelle* **transposition** *échangeant $i$ et $j$ et on note $\tau_{ij}$ la permutation de $F_n$ définie par $\tau_{ij}(i) = j$, $\tau_{ij}(j) = i$ et $\tau_{ij}(k) = k$, pour tout $k \in F_n \setminus \{i,j\}$.*

On écrira aussi $\tau_{ij} = (i,j)$.

**Exemple:** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est une transposition et on a $\sigma = (1,4)$.

Nous admettons maintenant le théorème suivant qui nous sera utile par la suite.

**Théorème 1.1.1** *Tout élément de $\mathfrak{S}_n$ est produit de transpositions.*

### 1.1.2 Signature d'une permutation

**Définition 1.1.4** *Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $(i,j) \in F_n^2$. On dit que le couple $(\sigma(i), \sigma(j))$* **présente une inversion pour** *$\sigma$ (ou est une* **inversion de** *$\sigma$) si : $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.*

Le nombre d'inversions d'une permutation $\sigma$ est noté $\nu(\sigma)$.

**Exemple:** Considérons $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Les couples $(\sigma(1), \sigma(2))$, $(\sigma(1), \sigma(3))$, $(\sigma(1), \sigma(4))$, $(\sigma(2), \sigma(3))$, $(\sigma(2), \sigma(4))$ sont des inversions de $\sigma$. En revanche $(\sigma(3), \sigma(4))$ n'est pas une inversion. Donc $\nu(\sigma) = 5$.

**Remarque 1.1.3** *La permutation Id ne possédant aucune inversion, on a $\nu(id) = 0$.*

**Définition 1.1.5** *On appelle* **signature** *de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\nu(\sigma)}$.*

**Remarque 1.1.4** $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$.

**Définition 1.1.6** *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On dit que $\sigma$ est* **paire** *si $\varepsilon(\sigma) = 1$ et $\sigma$ est* **impaire** *si $\varepsilon(\sigma) = -1$.*

**Théorème 1.1.2** *Soient $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$. Alors :*

1. $\varepsilon(\sigma) = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.
2. $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.
3. $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

**Proposition 1.1.1** *Soit $\tau$ une transposition de $\mathfrak{S}_n$. Alors $\tau$ est impaire.*

## 1.2 Applications multilinéaires

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou des complexes.

### 1.2.1 Définitions

**Définition 1.2.1** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On dit que l'application :*

$$\begin{array}{cccc} f & : & E^p = E \times \cdots \times E & \longrightarrow & F \\ & & (x_1, \cdots, x_p) & \longmapsto & f(x_1, \cdots, x_p) \end{array}$$

*est une* **application multilinéaire** *ou* $p$**-linéaire** *si pour tout $i$ compris entre 1 et $p$ et pour tous vecteurs $x_1$,...,$x_{i-1}$, $x_{i+1}$,...,$x_p$ fixés, l'application :*

$$x \longmapsto f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_p)$$

*est une application linéaire de $E$ dans $F$.*

*Si de plus $F = \mathbb{K}$, on dit que $f$ est une* **forme** $p$**-linéaire**.

Autrement dit on a pour tout vecteur $x$ et $y$ de $E$ :

$$f(x_1, \cdots, x_{i-1}, \lambda x + \mu y, x_{i+1}, \cdots, x_p) =$$
$$\lambda f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_p) + \mu f(x_1, \cdots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \cdots, x_p)$$

**Remarque 1.2.1** *Notons $\mathcal{L}^p(E, F)$ l'ensemble des applications $p$-linéaires de $E$ dans $F$. Étant donné $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{L}^p(E, F)$ on peut définir les deux opérations suivantes :*

1. $(f + g)(x_1, \cdots, x_p) = f(x_1, \cdots, x_p) + g(x_1, \cdots, x_p)$.
2. $(\lambda f)(x_1, \cdots, x_p) = \lambda f(x_1, \cdots, x_p)$.

*Alors il est facile de vérifier que $\mathcal{L}^p(E, F)$ muni de ces deux opérations est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

### 1.2.2 Applications multilinéaires alternées

**Définition 1.2.2** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $v : E^p = E \times \cdots \times E \longrightarrow F$ une application multilinéaire. On dit que $v$ est* **alternée** *si pour tout couple $(i, j) \in F_p^2$ tel que $i \neq j$ et pour tout $(x_1, \cdots x_p) \in E^p$ :*

$$x_i = x_j \quad \textit{implique} \quad v(x_1, \cdots, x_p) = 0$$

**Proposition 1.2.1** *Si $v : E^p = E \times \cdots \times E \longrightarrow F$ est une application multilinéaire alternée, alors pour tout couple $(i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2$ tel que $i < j$, on a :*

$$v(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = -v(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$$

Preuve: Comme $v$ est multilinéaire et alternée on a :

$$\begin{aligned}0 =&v(x_1, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_p)\\ &= v(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_p) + v(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p)\\ &+ v(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p) + v(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_p)\\ &= v(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) + v(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p)\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

**Remarque 1.2.2** *L'ensemble $\Lambda^p(E, F)$ des applications multilinéaires alternées de $E$ dans $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p(E, F)$ pour les opérations définies dans la remarque 1.2.1.*

**Remarque 1.2.3** *De la proposition 1.2.1, on déduit immédiatement que si $\tau$ est une transposition de $\mathfrak{S}_p$, $v(x_1, \cdots, x_p) = \varepsilon(\tau)v(x_{\tau(1)}, \cdots, x_{\tau(p)})$.*

Cette remarque nous conduit à la proposition suivante :

**Proposition 1.2.2** *Soit $v : E^p = E\times\cdots\times E \longrightarrow F$ une application multilinéaire alternée et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_p$. Alors pour tout vecteur $(x_1, \cdots, x_p) \in E^p$, on a :*

$$v(x_1, \cdots, x_p) = \varepsilon(\sigma)v(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(p)})$$

Preuve: La preuve résulte d'une application directe du théorème 1.1.1. En effet toute permutation s'écrivant comme un produit de transpositions, il existe des transpositions $\tau_1, ..., \tau_k$ telles que $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$. De la remarque ci-dessus, il découle que :

$$\begin{aligned}v(x_1, \cdots, x_p) &= \varepsilon(\tau_k)v(x_{\tau_k(1)}, \cdots, x_{\tau_k(p)})\\ &= \varepsilon(\tau_{k-1})\varepsilon(\tau_k)v(x_{\tau_{k-1}\circ\tau_k(1)}, \cdots, x_{\tau_{k-1}\circ\tau_k(p)})\\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &= \varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)\cdots\varepsilon(\tau_k)v(x_{\tau_1\circ\tau_2\circ\cdots\circ\tau_k(1)}, \cdots, x_{\tau_1\circ\tau_2\circ\cdots\circ\tau_k(p)})\\ &= \varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)\cdots\varepsilon(\tau_k)v(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(p)})\end{aligned}$$

et utilisant la propriété 2. du théorème 1.1.2, on déduit que $\varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)\cdots\varepsilon(\tau_k) = \varepsilon(\tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k) = \varepsilon(\sigma)$, d'où le résultat recherché. □

**Proposition 1.2.3** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{K}$. Alors*

1. *Soit* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* $E$*. Pour tous vecteurs* $x_1$,...,$x_n$ *de* $E$*, on note* $\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$,..., $\begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$ *leurs coordonnées respectives dans la base* $\mathcal{B}$*. Alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} \omega & : & E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & (x_1, \ldots x_n) & \longmapsto & \omega(x_1, \ldots, x_n) = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)i} \end{array}$$

   *est une* $n$*-forme linéaire alternée. De plus* $\omega$ *est l'unique* $n$*-forme linéaire alternée vérifiant* $\omega(e_1, \ldots, e_n) = 1$*.*
2. $\forall v \in \Lambda^n(E, \mathbb{K})$ *on a* $v = v(e_1, \ldots, e_n)\omega$*.*
3. $\dim(\Lambda^n(E, \mathbb{K})) = 1$*.*

Preuve de la proposition : Montrons que $\omega$ est une $n$-forme linéaire alternée. Soit $x'_i \in E$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x'_{1i} \\ \vdots \\ x'_{ni} \end{pmatrix}$ dans $(e_1, \cdots, e_n)$ et soient $\lambda$, $\mu \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{aligned} \omega(x_1, \cdots, \lambda x_i + \mu x'_i, \cdots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots (\lambda x_{\sigma(i)i} + \mu x'_{\sigma(i)i}) \cdots x_{\sigma(n)n} \\ &= \lambda \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(i)i} \cdots x_{\sigma(n)n} \\ &+ \mu \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x'_{\sigma(i)i} \cdots x_{\sigma(n)n} \\ &= \lambda\omega(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) + \mu\omega(x_1, \cdots, x'_i, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

Donc $\omega$ est multilinéaire. Montrons maintenant que $\omega$ est alternée. Soit $(i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2$ tel que $i < j$. Supposons que $x_i = x_j$. Considérons $\tau = (i, j)$ la transposition qui échange $i$ et $j$. Alors :

$$\begin{aligned} \omega(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) &= \omega(x_{\tau(1)}, \cdots, x_{\tau(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)\tau(1)} \cdots x_{\sigma(n)\tau(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(\tau(1))\tau(\tau(1))} \cdots x_{\sigma(\tau(n))\tau(\tau(n))} \end{aligned}$$

où dans cette dernière égalité, on a changé l'ordre des facteurs en appliquant $\tau$. Or $\tau \circ \tau = id$, donc :

$$\begin{aligned}\omega(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)x_{\sigma\circ\tau(1)1}\cdots x_{\sigma\circ\tau(n)n}\\ &= -\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma\circ\tau)x_{\sigma\circ\tau(1)1}\cdots x_{\sigma\circ\tau(n)n}\end{aligned}$$

car $\varepsilon(\sigma\circ\tau)=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)=-\varepsilon(\sigma)$ et $\varepsilon(\tau)=-1$. Comme $\sigma\longmapsto\sigma\circ\tau$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ sur lui-même, on déduit que :

$$\begin{aligned}\omega(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n) &= -\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)x_{\sigma(1)1}\cdots x_{\sigma(n)n}\\ &= -\omega(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)\end{aligned}$$

Donc $2\omega(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=0$ et comme $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on déduit que

$$\omega(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=0$$

Donc $\omega$ est alternée.

D'autre part si les vecteurs $x_1$,...,$x_n$ sont les vecteurs $e_1$,...,$e_n$ de la base canonique alors $x_{ij}=0$ si $i\neq j$ et $x_{ii}=1$. Donc $x_{\sigma(1)1}\cdots x_{\sigma(n)n}\neq 0$ si et seulement si $\sigma(i)=i$ pour tout $i$ compris entre 1 et $n$ c'est-à-dire si et seulement si $\sigma=id$. Donc :

$$\omega(e_1,\cdots,e_n)=x_{11}\cdots x_{nn}=1$$

Soit maintenant $v$ une forme $n$-linéaire alternée. Alors :

$$\begin{aligned}v(x_1,\cdots,x_n) &= v\left(\sum_{i_1=1}^n x_{i_11}e_{i_1},\sum_{i_2=1}^n x_{i_22}e_{i_2},\cdots,\sum_{i_n=1}^n x_{i_nn}e_{i_n}\right)\\ &= \sum_{i_1=1}^n\sum_{i_2=1}^n\cdots\sum_{i_n=1}^n x_{i_11}x_{i_22}\cdots x_{i_nn}v(e_{i_1},\cdots,e_{i_n})\end{aligned}$$

Comme $v$ est multilinéaire alternée, dès que pour $k\neq l$ on a $i_k=i_l$, alors $v(e_{i_1},\cdots,e_{i_n})=0$. Donc on ne va considérer que les termes où tous les $i_j$ sont différents. Cela revient à dire que l'application $j\longmapsto i_j$ qui va de $\{1,\cdots,n\}$ dans lui-même est une bijection donc une permutation $\sigma$ de $\mathfrak{S}_n$. Donc en réécrivant $i_j=\sigma(j)$, on a :

$$\begin{aligned}v(x_1,\cdots,x_n) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}x_{\sigma(1)1}\cdots x_{\sigma(n)n}v(e_{\sigma(1)},\cdots,e_{\sigma(n)})\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)x_{\sigma(1)1}\cdots x_{\sigma(n)n}v(e_1,\cdots,e_n)\end{aligned}$$

où dans cette dernière égalité on a appliqué la proposition 1.2.2. Donc $v = v(e_1, \ldots, e_n)\omega$.

Enfin comme $v = v(e_1, \ldots, e_n)\omega$, il est facile de voir que $\omega$ est l'unique $n$-forme alternée telle que $\omega(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

□

## 1.3 Définition du déterminant et premières propriétés

### 1.3.1 Déterminant d'une famille de $n$-vecteurs

D'après la proposition précédente si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, alors il existe une unique $n$-forme linéaire alternée $\omega$ telle que $\omega(e_1, \cdots, e_n) = 1$.

Notons $\det_{\mathcal{B}} = \omega$.

**Définition 1.3.1** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{K}$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Alors pour toute famille de $n$ vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ le scalaire $det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$ s'appelle le* **déterminant de la famille** $(u_1, \ldots, u_n)$ *dans la base $\mathcal{B}$.*

**Remarque 1.3.1** *De la proposition 1.2.3 on déduit immédiatement que :*

$$\forall v \in \Lambda^n(E, \mathbb{K}), \forall (u_1, \cdots, u_n) \in E^n, v(u_1, \cdots, u_n) = v(e_1, \cdots, e_n) det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$$

**Proposition 1.3.1** *Soit $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$. Alors $(u_1, \cdots, u_n)$ est liée si et seulement si $det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) = 0$.*

PREUVE: Supposons que $(u_1, \cdots, u_n)$ est liée. Alors il existe des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0$$

Comme $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ non tous nuls, il existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $\lambda_i \neq 0$. Donc :

$$u_i = -\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} u_j = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \alpha_j u_j$$

et

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \alpha_j \det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_{i-1}, u_j, u_{i-1}, \cdots, u_n) = 0$$

Réciproquement si $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) = 0$. Supposons par l'absurde que $(u_1, \cdots, u_n)$ est libre. Comme $E$ est de dimension $n$, $\mathcal{B}' = (u_1, \cdots, u_n)$ est une base de $E$. Donc :

$$\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \cdots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(e_1, \cdots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) = 0$$

Ceci contredit le fait que $\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \cdots, u_n) = 1$ donc $(u_1, \cdots, u_n)$ est liée.

□

### 1.3.2 Déterminant d'un endomorphisme

**Proposition et définition 1.3.1** *Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n$, $f$ un endomorphisme de $E$ et $v : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme $n$-linéaire alternée non nulle. Soit $f^\star(v)$ l'application de $E^n$ dans $\mathbb{K}$ définie pour tous $x_1, \cdots, x_n$ par :*

$$f^\star(v)(x_1, \cdots, x_n) = v(f(x_1), \cdots, f(x_n))$$

*Alors $f^\star(v)$ est une forme $n$-linéaire alternée et $f^\star(v) = \lambda v$. De plus $\lambda$ ne dépend pas du choix de $v$ et s'appelle le* **déterminant** *de $f$. On note $\lambda = det(f)$.*

Preuve: La preuve du fait que $f^\star(v)$ est multilinéaire alternée est laissée au lecteur. La proposition 1.2.3 nous disant que l'espace des formes multilinéaires alternées est un espace vectoriel de dimension 1, il s'ensuit que $v$ étant non nul est une base de cet espace et donc $f^\star(v) = \lambda v$. Maintenant si $v'$ est une autre forme $n$-linéaire alternée non nulle, alors $v' = \mu v$ et on en déduit facilement que $f^\star(v') = \lambda v'$ ce qui prouve l'unicité de $\lambda$.

□

**Proposition 1.3.2** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{K}$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

$$det(f) = det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

Preuve: D'après la définition de $\det(f)$ on a

$$\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = f^\star(\det_{\mathcal{B}})(e_1, \ldots, e_n) = \det(f)\det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n) = \det(f)$$

□

**Proposition 1.3.3** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$ sur $\mathbb{K}$. Alors pour tout endomorphisme $f$ de $E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :*

$$det(\lambda f) = \lambda^n det(f)$$

Preuve: Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de $E$ alors :

$$\begin{aligned}\det(\lambda f) &= \det_{\mathcal{B}}((\lambda f)(e_1), \cdots, (\lambda f)(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(\lambda f(e_1), \cdots, \lambda f(e_n)) \\ &= \lambda^n \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \cdots, f(e_n))\end{aligned}$$

Cette dernière égalité provenant du fait que $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme linéaire. On en déduit donc que le résultat recherché. □

**Proposition 1.3.4** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$ sur $\mathbb{K}$. Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$. Alors :*

$$det(f \circ g) = det(f)det(g)$$

PREUVE: Soit $v$ une forme $n$-linéaire alternée non nulle. Alors :

$$\begin{aligned}((f \circ g)^{\star} v)(x_1, \cdots, x_n) &= v((f \circ g)(x_1), \cdots, (f \circ g)(x_n)) \\ &= v(f(g(x_1)), \cdots, f(g(x_n))) \\ &= \det(f) v(g(x_1), \cdots, g(x_n)) \\ &= \det(f)\det(g) v(x_1, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure que $(f \circ g)^{\star}(v) = \det(f)\det(g)v$. Mais d'autre part, on a aussi $(f \circ g)^{\star}(v) = \det(f \circ g)v$, d'où le résultat.

□

**Proposition 1.3.5** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$.*

1. *Alors $det(Id_E) = 1$.*
2. *Un endomorphisme $f$ de $E$ est un automorphisme de $E$ si et seulement si $det(f) \neq 0$. Si $f$ est un automorphisme alors : $det(f^{-1}) = \dfrac{1}{det(f)}$.*

PREUVE: Étant donné $v$ une forme $n$-linéaire alternée non nulle on a de manière immédiate $\mathrm{Id}_E^{\star} v = v$, donc $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$ ce qui montre le point 1.

Supposons maintenant que $f$ est un automorphisme. Alors d'après la proposition 1.3.4 on a :

$$\det(f \circ f^{-1}) = \det(f)\det(f^{-1}) = \det(\mathrm{Id}_E) = 1$$

Ce qui montre que $\det(f) \neq 0$ ainsi que la relation demandée.

Réciproquement supposons que $\det(f) \neq 0$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Alors

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

Comme $\det(f) \neq 0$, d'après la proposition 1.3.1 $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de $E$, donc une base de $E$. Il s'ensuit que $f$ est surjective et comme les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension, $f$ est un automorphisme.

□

**Proposition 1.3.6** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{K}$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}$. Alors*

$$det(f) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}$$

PREUVE: D'après la proposition 1.3.2 $\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$. D'autre part la $j$-ième colonne de $A$ n'étant rien d'autre que les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $f(e_j)$, on déduit du point 1. de la proposition 1.2.3 la relation souhaitée. □

### 1.3.3 Déterminant d'une matrice

On considère maintenant l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des matrices colonnes à $n$ lignes. Soit $\mathcal{C} = (E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Rappelons que $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'autre part pour toute matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on notera par la suite :

$$C_1(A) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, C_n(A) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

les colonnes de $A$ et :

$$L_1(A), \cdots, L_n(A)$$

les lignes de $A$.

**Définition 1.3.2** *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *une matrice carrée de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Alors le* **déterminant** *de $A$ noté $det(A)$ est l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :*

$$det(A) = det_{\mathcal{C}}(C_1(A), \cdots, C_n(A))$$

On notera aussi $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

**Remarque 1.3.2**

— *On a évidemment $det(I_n) = 1$. En effet :*

$$det(I_n) = det_{\mathcal{C}}(E_1, \cdots, E_n) = 1$$

— *D'autre part* $det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}$.

En comparant avec la proposition 1.3.6, ce dernier point conduit immédiatement au résultat suivant

**Proposition 1.3.7** *Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit $f$ un endomorphisme de $E$ et $A$ la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}$. Alors :*

$$det(A) = det(f)$$

Comme corollaire de ce résultat et des propositions 1.3.3, 1.3.4 et 1.3.5 on a les théorèmes suivants :

**Théorème 1.3.1** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :*

$$det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$$

**Théorème 1.3.2** *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $det(AB) = (detA)(detB)$.*

**Théorème 1.3.3** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A$ est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$. Si $A$ est inversible alors : $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$.*

Nous verrons dans la partie 4.2 que l'on peut retrouver ce résultat de manière différente.

**Proposition 1.3.8** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ sur un corps $\mathbb{K}$ muni d'une base $\mathcal{B}$ et soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille de $n$ vecteurs. Soit $P$ la matrice de $(u_1, \cdots, u_n)$ dans $\mathcal{B}$. Alors*

$$det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) = det(P)$$

### 1.3.4 Déterminant des matrices carrées $2 \times 2$

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, alors $\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2}$. Il n'y a que deux permutations dans $\mathfrak{S}_2$, les permutations $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors $\varepsilon(id) = 1$ et $\varepsilon(\tau) = -1$.

Donc $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

### 1.3.5 Matrices transposées

**Proposition 1.3.9** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $det({}^tA) = detA$.*

PREUVE: Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors ${}^tA = (\tilde{a}_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\det({}^tA) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \tilde{a}_{\sigma(1)1} \cdots \tilde{a}_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}
\end{aligned}$$

On peut permuter les facteurs $a_{1\sigma(1)}$,..., $a_{n\sigma(n)}$. On a alors :

$$a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{\sigma'(1)\sigma(\sigma'(1))} \cdots a_{\sigma'(n)\sigma(\sigma'(n))}$$

pour tout $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$. C'est en particulier vrai si on prend $\sigma' = \sigma^{-1}$. On a donc :

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

mais $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$, donc

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

Or l'application $\sigma \longmapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ dans lui-même. Donc finalement,

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} = \det A$$

□

**Remarque 1.3.3** *Le fait que det(${}^tA$) = detA a pour conséquence que toutes les propriétés du déterminant démontrées sur les colonnes restent vraies sur les lignes et vice versa.*

### 1.3.6 Opérations sur les lignes et les colonnes

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors $\det A = \det_{\mathcal{C}}(C_1(A), \cdots, C_n(A)) = \det({}^tA) = \det_{\mathcal{C}}({}^tL_1(A), \cdots, {}^tL_n(A))$. Les deux propositions qui suivent sont des conséquences immédiates du fait que $\det_{\mathcal{C}}$ est multilinéaire alternée.

**Proposition 1.3.10** *Si une colonne (ou une ligne) est combinaison linéaire d'autres colonnes (ou lignes) alors detA = 0. En particulier, si deux colonnes (ou deux lignes) sont égales, alors detA = 0.*

**Proposition 1.3.11**

1. *Si à la colonne $C_j(A)$ (ou à la ligne $L_i(A)$) on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes $\sum_{k \neq j} \lambda_k C_k(A)$ (ou des autres lignes $\sum_{k \neq i} \lambda_k L_k(A)$),* **le déterminant reste inchangé**.

2. *Si on permute deux colonnes (ou deux lignes) de $A$,* **le déterminant change de signe**.
3. *Si on multiplie une colonne (ou une ligne) de $A$ par $\mu$, alors* **le déterminant de** $A$ **est multiplié par** $\mu$.

## 1.4 Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne

### 1.4.1 Cofacteurs et comatrices

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A(i,j)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant la $i$-ième ligne et la $j$-ième colonne de $A$.

**Exemple:** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -8 & 3 & 8 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$. Alors :

$$A(1,2) = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

**Définitions 1.4.1** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

— *On appelle* **cofacteur** *de $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ d'indice $(i,j)$ le coefficient*

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} det A(i,j)$$

— *La matrice $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'appelle la* **matrice des cofacteurs** *ou* **comatrice**.

Avant d'énoncer le théorème principal, nous avons besoin des deux lemmes suivants :

**Lemme 1.4.1** *Soit $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Alors :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = det(A)$$

PREUVE: Considérons les applications :

$$\begin{array}{cccc} \Phi \;: & \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ & X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} & \longmapsto & \Phi(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcccc} V & : & \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})^{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & (X_1, \cdots, X_{n-1}) & \longmapsto & \det_{\mathcal{C}}(E_1, \Phi(X_1), \cdots, \Phi(X_{n-1})) \end{array}$$

Alors $\Phi$ est une application linéaire et de manière immédiate, $V$ est une forme $n-1$-linéaire alternée. Soit $\mathcal{C}' = (E_1', \cdots, E_{n-1}')$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$. Alors

$$V(E_1', \cdots, E_{n-1}') = \det_{\mathcal{C}}(E_1, \Phi(E_1'), \cdots, \Phi(E_{n-1}')) = \det_{\mathcal{C}}(E_1, \cdots, E_n) = 1$$

D'après la proposition 1.2.3, il existe une unique $n-1$-forme alternée sur $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $V(E_1', \ldots, E_{n-1}') = 1$. Donc $V = \det_{\mathcal{C}'}$ et on a :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det_{\mathcal{C}'}(C_1(A), \cdots, C_{n-1}(A)) \\ &= \det_{\mathcal{C}}[E_1, \Phi(C_1(A)), \cdots, \Phi(C_{n-1}(A))] \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. $\square$

**Lemme 1.4.2** *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & 0 & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & 1 & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & 0 & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.
*Alors* $detA = (-1)^{i+j} det(A(i,j))$.

PREUVE: Après avoir mis la ligne $i$ en ligne 1 puis la colonne $j$ en colonne 1, on obtient d'après les règles de la proposition 1.3.11 :

$$\det A = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ 0 & a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & A(i,j) & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & A(i,j) & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j}\det(A(i,j))$$

d'après le lemme précédent. □

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un théorème fondamental sur le calcul des déterminants qui sert constamment.

**Théorème 1.4.1** *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k$ un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$. Alors :*

1. $detA = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}\, detA(i,k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ik}$.
   *On dit qu'on* **développe suivant la colonne** $k$.
2. $detA = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj}\, detA(k,j) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\tilde{a}_{kj}$.
   *On dit qu'on* **développe suivant la ligne** $k$.

**Exemple:** Calculons $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$. Nous allons développer ce déterminant suivant la deuxième colonne. Pour cela affectons chaque coefficients $a_{ij}$ de la matrice, du signe $(-1)^{i+j}$. On a alors :

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1^+ & \mathbf{4}^- & -2^+ \\ 2^- & \mathbf{1}^+ & 3^- \\ 3^+ & -\mathbf{1}^- & -1^+ \end{vmatrix}$$
$$= -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

où $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ a été obtenue en supprimant la première ligne et la deuxième colonne, $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ en supprimant la deuxième ligne et la deuxième colonne et $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ la troisième ligne et la deuxième colonne.

Preuve du théorème 1.4.1: Montrons le 1. du théorème. La $k$-ième colonne de $A$ peut sécrire :

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = a_{1k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{nk} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comme le déterminant est multilinéaire, on a immédiatement,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & 0 & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1k-1} & 0 & a_{i-1k+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik-1} & 1 & a_{ik+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1k-1} & 0 & a_{i+1k+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & 0 & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Et d'après le lemme 1.4.2, on a :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A(i,k).$$

D'autre part, comme $\det({}^tA) = \det A$, on obtient immédiatement l'assertion 2.

□

**Proposition 1.4.1** *(***Règle de Sarrus***) On a :*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$- (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

La preuve s'obtient en développant par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne.

**Remarque 1.4.1** *On obtient facilement le résultat en écrivant :*

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{array} \begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}) \end{aligned}$$

*Attention !* **La règle de Sarrus marche uniquement pour les matrices** $(3,3)$.

### 1.4.2 Matrices triangulaires

**Proposition 1.4.2** *Soit* $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *une matrice triangulaire. Alors* $detA = a_{11} \cdots a_{nn}$.

PREUVE: On démontre le résultat par récurrence sur $n$ pour les matrices triangulaires supérieures. La relation est vraie pour $n = 1$. Supposons maintenant qu'elle est vraie pour les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour un entier $n \geqslant 1$ et montrons qu'elle reste vraie pour les matrices de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$. Soit $A$ une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$. Alors

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n+1\ n+1} \end{pmatrix}$$

En développant suivant la dernière ligne on a :

$$\det A = a_{n+1\ n+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Par hypothèse de récurrence le résultat étant vrai pour les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on obtient le résultat voulu.

D'autre part, comme pour toute matrice carrée $A$, $\det(A) = \det({}^tA)$, la proposition reste vraie pour les matrices triangulaires inférieures.

$\square$

### 1.4.3 Matrices inverses et déterminant

**Théorème 1.4.2** *Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :*

$$A\,{}^t\tilde{A} = {}^t\tilde{A}A = (detA)I_n$$

Preuve: Posons $A = (a_{ij})$ et ${}^t\tilde{A} = (b_{jk})$. Alors

$$b_{jk} = \tilde{a}_{kj} = (-1)^{k+j}\det A(k,j)$$

Soit $C = A\,{}^t\tilde{A}$. Montrons que $C = (\det A)I_n$. Pour cela posons $C = (c_{ik})$. Alors

$$c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{ij} = \det A$$

d'après le 1. du théorème 1.4.1.

Soit maintenant $i \neq k$. On peut supposer $i < k$. Alors

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{kj} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{ij}\det A(k,j)$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots\cdots\cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-11} & \cdots\cdots\cdots & a_{k-1n} \\ a_{i1} & \cdots\cdots\cdots & a_{in} \\ a_{k+11} & \cdots\cdots\cdots & a_{k+1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

car les lignes $k$ et $i$ sont les mêmes. On en déduit donc que $C = (\det A)I_n$.

□

On en déduit alors immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 1.4.1** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A$ est inversible si et seulement si $detA \neq 0$ (résultat déjà énoncé dans le théorème 1.3.3). Si $A$ est inversible, $A^{-1} = \dfrac{{}^t\tilde{A}}{detA}$.*

## 1.5 Formules de Cramer

On rappelle que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(S) : AX = Y$ est le système de $n$ équations à $n$ inconnues associé, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

— $(S)$ est un système de Cramer.

— $(S)$ admet une solution et une seule.

— rg $(A) = n$.

— $A$ est inversible.

— $\det A \neq 0$.

Si $(S)$ est de Cramer, la solution est donnée par $X = A^{-1}Y = \dfrac{{}^t\tilde{A}Y}{\det A}$. Si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a alors la proposition suivante :

**Proposition 1.5.1** *(***Formules de Cramer***) Si $(S)$ est de Cramer, alors :*

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & y_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & y_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{detA}$$

Preuve: Posons $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$. On a vu que $X = \dfrac{{}^t\tilde{A}Y}{\det A}$, donc :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ji} y_j \\ &= \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} y_j (-1)^{i+j} \det A(j,i) \\ &= \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & y_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & y_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

## 1.6 Rang d'une matrice

**Définition 1.6.1** (**Matrice extraite**) *Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$. Soit $r \leqslant p$ et $s \leqslant q$. On dit que $A' \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$ est une* **matrice extraite** *de $A$ si $A'$ est de la forme $A' = (a_{i_k j_l})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant r \\ 1 \leqslant l \leqslant s}}$ où $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant p$ et $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_s \leqslant q$.*

**Exemple:** Soit $A = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & -1 & \mathbf{3} & \mathbf{6} & 7 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 \\ \mathbf{3} & 6 & \mathbf{8} & \mathbf{2} & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Alors la matrice $A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice extraite de $A$.

**Théorème 1.6.1** *Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors $A$ est de rang $r$ si et seulement si :*

1. *Il existe une matrice carrée $A'$ extraite de $A$ de format $(r, r)$ telle que $detA' \neq 0$.*
2. *Pour tout $s > r$, toute matrice carrée $A''$ de format $(s, s)$ extraite de $A$ vérifie $detA'' = 0$.*

Preuve:

1. Montrons tout d'abord que si $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ de rang $r$, alors il existe une matrice carrée $A'$ extraite de $A$ de format $(r, r)$ telle que $\det A' \neq 0$ :

   Comme rg $(A) = $ rg $(C_1(A), \ldots, C_q(A)) = r$, on peut extraire de $(C_1(A), \ldots, C_q(A))$ une famille libre $(C_{j_1}(A), \ldots, C_{j_r}(A))$ de $r$ vecteurs $(j_1 < \cdots < j_r)$.
   Notons $A'$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ dont la $\ell$-ième colonne est $C_{j_\ell}(A)$. Alors :

   $$r = \text{rg } (A') = \text{rg } ({}^tA') = \text{rg } (L_1(A'), \cdots, L_p(A'))$$

   Donc on peut extraire de la famille $(L_1(A'), \cdots, L_p(A'))$ une famille libre de $r$ vecteurs $(L_{i_1}(A'), \cdots, L_{i_r}(A'))$ $(i_1 < \cdots < i_r)$. Soit $A''$ la matrice de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ dont la $k$-ième ligne est $L_{i_k}(A')$. En fait $A'' = (a_{i_k j_\ell})_{1 \leqslant k, \ell \leqslant r}$ et rg $(A'') = r$. Donc $\det(A'') \neq 0$.

2. Montrons maintenant que s'il existe une matrice carrée $A' \in \mathcal{M}_s(\mathbb{K})$ extraite de $A$ telle que $\det(A') \neq 0$ alors rg $(A) \geqslant s$ :

   Tout d'abord $A' = (a_{i_k j_\ell})_{1 \leqslant k, \ell \leqslant s}$ avec $i_1 < \cdots < i_s$ et $j_1 < \cdots < j_s$.
   Puisque $\det(A') \neq 0$ rg $(A') = s$ et $(C_1(A'), \cdots, C_s(A'))$ est une famille libre. Mais cela implique que la famille $(C_{j_1}(A), \cdots, C_{j_s}(A))$ est libre. Donc rg $(A) \geqslant s$.

Des points 1. et 2. on déduit de manière immédiate la preuve du théorème.

$\square$

**Exemple:** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Donc tous les déterminants de matrices $(3,3)$ extraites de $A$ sont nuls, donc rg $(A) < 3$.

Pour que $A$ soit de rang 2 il suffit de trouver une matrice $(2,2)$ extraite de déterminant non nul, sinon si toutes les matrices $(2,2)$ extraites sont de déterminant nul alors rg $(A) < 2$. Or

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

donc rg $(A) = 2$.

# Chapitre 2

# RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n$. D'autre part $\mathcal{L}(E)$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de $E$.

## 2.1 Sous-espaces propres et diagonalisation

Étant donné un espace vectoriel $E$ sur un corps $\mathbb{K}$ de dimension finie, les endomorphismes les plus simples sont les homothéties $f = \lambda \mathrm{Id}_E$. La matrice de ces endomorphismes est la même dans toutes les bases de $E$. C'est une matrice diagonale avec des $\lambda$ sur la diagonale et des 0 partout ailleurs. Autrement dit il n'y a pas de direction privilégiée.

Étant donné maintenant un endomorphisme $u$ quelconque, on va essayer dans ce chapitre de le "dévisser" en "cassant" l'espace $E$ en une somme directe de sous-espaces stables (précisément les sous-espaces propres) sur lesquels $u$ se comportera comme une homothétie. Si cela est possible en prenant une base dans chacun de ces sous-espaces et en les réunissant, on obtiendra une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ sera diagonale.

### 2.1.1 Valeurs propres, vecteurs propres

**Définition 2.1.1** *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. S'il existe un vecteur* **non nul** *$x$ de $E$ tel que $u(x) = \lambda x$, alors on dit que :*

1. *$\lambda$ est une* **valeur propre** *de $u$.*
2. *$x$ est un* **vecteur propre** *de $u$ associé à $\lambda$.*

*On appelle* **spectre** *de $u$ et on note $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de $u$.*

**Remarque 2.1.1** *1. Il résulte de la définition qu'un vecteur propre n'est jamais nul.*

2. *$\lambda$ est une valeur propre de $u$ si et seulement si Ker $(u - \lambda Id_E) \neq \{0\}$.*
   *En effet $\lambda$ est une valeur propre de $u$ si et seulement si il existe un vecteur non nul $x$ de $E$ tel que $u(x) = \lambda x$. Or $0 = u(x) - \lambda x = (u - \lambda Id_E)(x)$. Il s'ensuit que $\lambda$ est une valeur propre de $u$ si et seulement si Ker $(u - \lambda Id_E) \neq \{0\}$.*

**Définition 2.1.2** *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. S'il existe un vecteur colonne* **non nul** *$X$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$, alors on dit que :*

1. *$\lambda$ est une* **valeur propre** *de $A$.*
2. *$X$ est un* **vecteur propre** *de $A$ associé à $\lambda$.*

*On appelle* **spectre** *de $A$ et on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de $A$.*

**Remarque 2.1.2** *Soient $\mathcal{B}$ une base de $E$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. Alors $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A)$. Plus précisément :*

1. *$\lambda$ est une valeur propre de $u$ si et seulement si $\lambda$ est une valeur propre de $A$.*
2. *$x$ est un vecteur propre de $u$ si et seulement si $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$ est un vecteur propre de $A$.*

**Définition 2.1.3** *Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de $A$ le scalaire :*

$$tr\ (A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

**Proposition 2.1.1** *Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Alors $tr\ (AB) = tr\ (BA)$.*

Preuve: La preuve est laissée au lecteur. □

**Proposition et définition 2.1.1** *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de $E$. Alors le scalaire $tr\ (Mat_{\mathcal{B}}(u))$ ne dépend pas de la base choisie et s'appelle la* **trace** *de $u$. On le note $tr\ (u)$.*

Preuve: La preuve est laissée au lecteur. □

**Proposition et définition 2.1.2** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La fonction*

$$\begin{array}{cccc} \chi_u & : & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & x & \longmapsto & det(u - xId_E) \end{array}$$

*est une fonction polynomiale de degré $n$. De plus :*

$$\chi_u(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} tr\ (u) X^{n-1} + \cdots + det(u)$$

*$\chi_u$ s'appelle le* **polynôme caractéristique** *de $u$.*

**Proposition et définition 2.1.3** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La fonction*

$$\begin{array}{rcccc} \chi_A & : & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & x & \longmapsto & det(A - xI_n) \end{array}$$

*est une fonction polynomiale de degré $n$. De plus :*

$$\chi_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} tr\,(A) X^{n-1} + \cdots + det(A)$$

*$\chi_A$ s'appelle le* **polynôme caractéristique** *de $A$.*

**Remarque 2.1.3** *Soient $\mathcal{B}$ une base de $E$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = Mat\,_{\mathcal{B}}(u)$. Alors $\chi_A = \chi_u$.*

Preuve des énoncés 2.1.2 et 2.1.3 : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Alors :

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (a_{\sigma(i)i} - x\delta_{\sigma(i)i})$$

Chacun des produits $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(a_{\sigma(i)i} - x\delta_{\sigma(i)i})$ est une fonction polynomiale en $x$ de degré inférieur ou égal à $n$. Il en est de même de leur somme et $\chi_A$ est un polynôme de degré au plus $n$. Or :

$$\chi_A(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\mathrm{Id}\}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (a_{\sigma(i)i} - x\delta_{\sigma(i)i}) + \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - x)$$

Remarquons que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\mathrm{Id}\}$, alors il existe $j \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $\sigma(j) \neq j$. En posant $k = \sigma^{-1}(j)$, on a $k \neq j$ et $\sigma(k) \neq k$. Donc $\delta_{\sigma(j)j} = \delta_{\sigma(k)k} = 0$. Ainsi :

$$\prod_{i=1}^{n} (a_{\sigma(i)i} - x\delta_{\sigma(i)i}) = a_{\sigma(j)j} a_{\sigma(k)k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j,k}}^{n} (a_{\sigma(i)i} - x\delta_{\sigma(i)i})$$

et donc pour chaque $\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\mathrm{Id}\}$, $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(a_{\sigma(i)i} - x\delta_{\sigma(i)i})$ est une fonction polynomiale de degré au plus $n-2$ et il en est de même de $\displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\mathrm{Id}\}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n}(a_{\sigma(i)i} - x\delta_{\sigma(i)i})$. Or comme $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - x)$ est de degré $n$ il s'ensuit que $\chi_A$ est de degré $n$ et que les coefficients de $x^n$ et $x^{n-1}$ dans $\chi_u$ sont les coefficients de $x^n$ et $x^{n-1}$ dans $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - x)$. Donc les coefficients de $x^n$ et $x^{n-1}$ dans $\chi_A$ sont respectivement $(-1)^n$ et $(-1)^{n-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}\,(A)$.

Le terme constant de $\chi_A$ est $\chi_A(0) = \det(A)$. Ceci prouve l'énoncé 2.1.3. La preuve de 2.1.2 est une conséquence immédiate de la remarque 2.1.3 et de la proposition et définition 2.1.1. □

En raison des remarques 2.1.2 et 2.1.3, on se contentera dans la majorité des cas d'énoncer les résultats dans le cadre des endomorphismes.

**Proposition 2.1.2** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ si et seulement si $\lambda$ est racine de $\chi_u$.*

Preuve: On a vu d'après la remarque 2.1.1 que $\lambda$ est valeur propre de $u$ si et seulement si Ker $(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$. Or les 4 assertions ci-dessous sont équivalentes :

1. Ker $(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$
2. $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective.
3. $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas un isomorphisme.
4. $\det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$ (voir proposition 1.3.5)

Donc $\lambda$ est valeur propre de $u$ si et seulement si $\chi_u(\lambda) = 0$. □

**Corollaire 2.1.1** *Tout endomorphisme $u$ de $E$ a au plus $n$ valeurs propres.*

**Définition 2.1.4** *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda$ une valeur propre de $u$. On dira que $\lambda$ est une valeur propre d'ordre $m$ si $\lambda$ est une racine d'ordre $m$ de $\chi_u$. L'entier $m$ s'appelle la* **multiplicité** *de $\lambda$ et sera noté $m(\lambda)$.*

### 2.1.2 Sous-espaces propres

**Définition 2.1.5** *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda$ une valeur propre de $u$. Le sous-espace vectoriel $E_\lambda(u) := Ker\ (u - \lambda Id_E)$ s'appelle le* **sous-espace propre** *associé à la valeur propre $\lambda$.*

**Remarque 2.1.4**
1. *Si $\lambda$ est une valeur propre de $u$, on a toujours $E_\lambda(u) \neq \{0\}$.*
2. *$E_\lambda(u) \setminus \{0\}$ est l'ensemble des vecteurs propres de $u$.*
3. *Les sous-espaces propres de $u$ sont stables par $u$ (pour toute valeur propre $\lambda$, $u(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u)$).*

**Définition 2.1.6** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda$ une valeur propre de $A$. Le sous-espace vectoriel $M_\lambda(A) := Ker\ (A - \lambda I_n)$ de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ s'appelle le* **sous-espace propre** *associé à la valeur propre $\lambda$.*

**Proposition 2.1.3** *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda$ une valeur propre de $u$. Alors :*

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(u)) \leqslant m(\lambda)$$

PREUVE: Posons $p = \dim(E_\lambda(u))$. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de $E_\lambda(u)$ que l'on complète par $e_{p+1}, \cdots, e_n$ pour obtenir une base $\mathcal{B}$ de $E$. Dans ce cas on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{1\ p+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & a_{p\ p+1} & \cdots & a_{pn} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{p+1\ p+1} & \cdots & a_{p+1\ n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n\ p+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique s'écrit donc :

$$\chi_u(x) = (\lambda - x)^p \chi_M(x)$$

Donc $(\lambda - x)^p$ divise $\chi_u$ et $p \leqslant m(\lambda)$. $\square$

**Théorème 2.1.1** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors les sous-espaces propres de $u$ sont en somme directe.*

PREUVE: Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres de $u$. Le but est de montrer que si $(v_1, \cdots, v_r) \in E_{\lambda_1} \times \cdots \times E_{\lambda_r}$ et $v_1 + \cdots + v_r = 0$ alors $v_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$.

On va procéder par récurrence en montrant que $E_{\lambda_1}, \cdots, E_{\lambda_j}$ sont en somme directe pour tout $j \in \{1, \cdots, r\}$.

Pour $j = 1$, la propriété est vraie.

On suppose maintenant la propriété vraie au rang $j \in \{1, \cdots, r-1\}$. Montrons qu'elle est vraie au rang $j + 1$.

Soit $(v_1, \cdots, v_{j+1}) \in E_{\lambda_1} \times \cdots \times E_{\lambda_{j+1}}$ tel que $\sum_{i=1}^{j+1} v_i = 0$. Alors :

$$u\left(\sum_{i=1}^{j+1} v_i\right) = \sum_{i=1}^{j+1} u(v_i) = \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i v_i = 0$$

Donc :

$$0 = \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i v_i - \lambda_{j+1} \sum_{i=1}^{j+1} v_i = \sum_{i=1}^{j+1} (\lambda_i - \lambda_{j+1}) v_i = \sum_{i=1}^{j} (\lambda_i - \lambda_{j+1}) v_i$$

Or pour tout $i \in \{1, \cdots, j\}$, $(\lambda_i - \lambda_{j+1}) v_i \in E_{\lambda_i}$. Comme par hypothèse de récurrence, $E_{\lambda_1}, \cdots E_{\lambda_j}$ sont en somme directe, il s'ensuit que pour tout $i \in \{1, \cdots, j\}$, $(\lambda_i - \lambda_{j+1}) v_i = 0$. De plus $\lambda_i - \lambda_{j+1} \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, j\}$. Donc :

$$v_1 = \cdots = v_j = 0$$

et $\sum_{i=1}^{j+1} v_i = v_{j+1} = 0$. Donc $E_{\lambda_1}, \cdots, E_{\lambda_{j+1}}$ sont en somme directe. Par récurrence sur $j$ la propriété est vraie pour tout $j \in \{1, \cdots, r\}$.

□

### 2.1.3 Endomorphismes et matrices diagonalisables

**Définition 2.1.7** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $u$ est* **diagonalisable** *s'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que Mat $_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale.*

**Définition 2.1.8** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $A$ est* **diagonalisable** *si $A$ est semblable à une matrice diagonale. Autrement dit $A$ est diagonalisable s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $D = P^{-1}AP$.*

**Remarque 2.1.5** *Soient $\mathcal{B}$ une base de $E$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A =$ Mat $_{\mathcal{B}}(u)$. Alors $u$ est diagonalisable si et seulement si $A$ est diagonalisable.*

**Théorème 2.1.2** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$u$ est diagonalisable.*
2. *Il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ constituée de vecteurs propres de $u$.*
3. *$E$ est la somme directe des sous-espaces propres de $u$.*
4. *$\chi_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$ (i.e. $\chi_u$ a toute ses racines dans $\mathbb{K}$) et pour toute valeur propre de $u$, $\dim(E_\lambda(u)) = m(\lambda)$.*

Preuve: $1 \Rightarrow 2$. Il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de $E$ telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, on a pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $u(e_i) = \alpha_i e_i$ ce qui prouve 2.

$2 \Rightarrow 3$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base formée de vecteurs propres de $u$. D'après le théorème 2.1.1 les sous-espaces propres sont en somme directe et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une famille libre de $\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$. Donc :

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)\right) \geqslant n = \dim(E)$$

et $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$.

$3 \Rightarrow 1$ et $3 \Rightarrow 4$. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres de $u$. Posons $n_i = \dim(E_{\lambda_i}(u))$. Soient $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_r$ des bases respectivement de $E_{\lambda_1}(u), \cdots, E_{\lambda_r}(u)$. Comme par hypothèse $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$, $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_i$ est une base de $E$ constituée de vecteurs propres. Donc :

$$\text{Mat }_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

ce qui prouve 1.

D'autre part $\chi_u(x) = (\lambda_1 - x)^{n_1} \cdots (\lambda_r - x)^{n_r}$. Il s'ensuit que le polynôme est scindé et que la multiplicité des valeurs propres vérifie $m(\lambda_i) = n_i = \dim(E_{\lambda_i}(u))$ ce qui prouve 4.

$4 \Rightarrow 3$ On suppose que $\chi_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et que pour toute valeur propre de $u$, $\dim(E_\lambda(u)) = m(\lambda)$. Donc :

$$\chi_u(x) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - x)^{m(\lambda_i)}$$

et $\dim(E_{\lambda_i}(u)) = m(\lambda_i)$. On a donc :

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)\right) = \sum_{i=1}^{r} \dim(E_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^{r} m(\lambda_i) = n$$

Par conséquent $\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u) = E$.

$\square$

**Corollaire 2.1.2** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors si $\chi_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et si toutes les racines de $\chi_u$ sont simples alors $u$ est diagonalisable.*

**Remarque 2.1.6** *Si $\chi_u$ est scindé, c'est-à-dire si $\chi_u(x) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - x)$ alors tr $(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et det$(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.*

**Remarque 2.1.7** *On a vu que si $A$ est diagonalisable alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP$ est diagonale. Alors $(C_1(P), \cdots, C_n(P))$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de $A$.*

### 2.1.4 Calcul des puissances d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$. Si $A$ est diagonalisable alors il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ et $P \in GL_k(\mathbb{K})$ telles que $D = P^{-1}AP$. Or on sait calculer $D^n$. En effet si $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_k \end{pmatrix}$, alors $D^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_k^n \end{pmatrix}$. D'autre part on peut montrer par récurrence que :

$$D^n = (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

d'où :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Intéressons-nous maintenant au cas des suites de nombres complexes définies par une relation de récurrence du type :

$$u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + a_{k-2}u_{n+k-2} + \cdots + a_0u_n$$

pour tout $n \geqslant 0$. Cette relation de récurrence est équivalente à la relation de récurrence matricielle :

$$X_{n+1} = AX_n$$

pour tout $n \geqslant 0$ où $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+k-1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{K})$ et $A = \begin{pmatrix} a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & \cdots & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$. Un calcul facile permet de voir que pour tout $n \geqslant 0$, $X_n = A^nX_0$. Calculons le polynôme caractéristique $\chi_A$. Alors :

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} a_{k-1}-\lambda & a_{k-2} & \cdots & \cdots & a_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} + D_{k-1} = (-\lambda)^k + D_{k-1}\end{aligned}$$

où :

$$D_i = \begin{vmatrix} a_i & a_{i-1} & \cdots & \cdots & a_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

En développant suivant la première colonne on remarque que $D_i = (-1)^i a_i \lambda^i - D_{i-1}$ et par récurrence on montre que :

$$D_i = (-1)^i \sum_{j=0}^{i} a_j \lambda^j$$

et :

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^k \left(\lambda^k - a_{k-1}\lambda^{k-1} - \cdots - a_1\lambda - a_0\right)$$

Comme on travaille dans $\mathbb{C}$, $\chi_A$ est scindé. Supposons que toutes les racines de $\chi_A$ soient distinctes. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ ces racines. Alors pour tout $i \in \{1, \cdots, k\}$, $V_i = \begin{pmatrix} \lambda_i^{k-1} \\ \lambda_i^{k-2} \\ \vdots \\ \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\lambda_i$.

D'après la remarque 2.1.5, on a $D = P^{-1}AP$ où $P$ est la matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ vérifiant $C_i(P) = V_i$ et :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Donc notant $P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$

$$X_n = A^n X_0 = PD^nP^{-1}X_0 = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1\lambda_1^n \\ \vdots \\ c_k\lambda_k^n \end{pmatrix}$$

Donc $X_n = c_1\lambda_1^n V_1 + \cdots + c_k\lambda_k^n V_k$ d'où :

$$u_n = c_1\lambda_1^n + \cdots + c_k\lambda_k^n$$

## 2.2 Trigonalisation et théorème de Cayley-Hamilton

### 2.2.1 Endomorphismes trigonalisables

**Définition 2.2.1** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $u$ est* **trigonalisable** *s'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que Mat $_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.*

**Définition 2.2.2** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $A$ est* **trigonalisable** *s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.*

**Remarque 2.2.1** *Soient $\mathcal{B}$ une base de $E$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A =$ Mat $_{\mathcal{B}}(u)$. Alors $u$ est trigonalisable si et seulement si $A$ est trigonalisable.*

**Théorème 2.2.1** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u$ est trigonalisable si et seulement si $\chi_u$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ (i.e. $\chi_u$ se décompose en un produit de polynômes du premier degré).*

PREUVE:

— ($\Rightarrow$) Si $u$ est trigonalisable alors il existe une base $\mathcal{B}$ telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Notant $T =$ Mat $_{\mathcal{B}}(u)$, on en déduit immédiatement que $\chi_u(x) = \det(T - xI_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - x)$ ce qui signifie que $\chi_u$ est scindé.

— ($\Leftarrow$) On suppose que $\chi_u$ est scindé et on veut montrer que $u$ est trigonalisable. Nous allons raisonner par récurrence sur $n = \dim(E)$. Si $n = 1$ l'affirmation est immédiate.
En supposant que pour $n \geqslant 2$ l'affirmation est vraie quand $\dim(E) = n - 1$, montrons qu'elle est encore vraie quand $\dim(E) = n$.
Donc soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\chi_u$ soit scindé. Cela entraîne que $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et soit $e_1$ un vecteur propre associé. Complétons $e_1$ par des vecteurs $e_2, \cdots, e_n$ pour que $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ soit une base de $E$. Alors :

$$\mathrm{Mat}\,_{\mathcal{B}}(u) = M = \begin{pmatrix} \lambda & m_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & M_1 & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

Donc $\chi_u(x) = (\lambda - x)\det(M_1 - xI_{n-1})$. D'autre part on a $E = \mathbb{K}e_1 \oplus F$ où $F = \mathrm{Vect}(e_2, \cdots, e_n)$. Soit $g$ l'endomorphisme de $E$ défini par :

$$\mathrm{Mat}\,_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & M_1 & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

Remarquons que pour tout $i \in \{2, \cdots, n\}$ :

$$u(e_i) = m_{1i}e_1 + g(e_i)$$

Ainsi pour tout $v \in F$ il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que :

$$u(v) = ae_1 + g(v)$$

D'autre part on a évidemment $g(F) \subset F$. Donc $g_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ et $\mathrm{Mat}\,_{\{e_2,\cdots,e_n\}}(g_{|F}) = M_1$. Or $\chi_u(x) = (\lambda - x)\det(M_1 - xI_{n-1}) = (\lambda - x)\chi_{M_1}(x)$. Comme $\chi_u$ est scindé, il s'ensuit que $\chi_{M_1}$ est scindé et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Il existe une base $(f_2, \cdots, f_n)$ de $F$ telle que :

$$\mathrm{Mat}\,_{\{f_2,\cdots,f_n\}}(g_{|F}) = \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Comme $E = \mathbb{K}e_1 \oplus F$, $\mathcal{B}' = \{e_1, f_2, \cdots, f_n\}$ est une base de $E$. Pour tout $j \in \{2, \cdots, n\}$ il existe $a_{1j} \in \mathbb{K}$ tel que :

$$u(f_j) = a_{1j}e_1 + g(f_j) = a_{1j}e_1 + \sum_{i=2}^{j} \alpha_{ij} f_i$$

Il s'ensuit que Mat $_{\mathcal{B}'}(u)$ est triangulaire supérieure.

□

**Corollaire 2.2.1** *Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie. Alors tout endomorphisme de $E$ est trigonalisable.*

PREUVE: C'est une conséquence du fait que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos (i.e. tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ est scindé).

□

**Remarque 2.2.2** *Si un endomorphisme $u$ est trigonalisable alors sa matrice dans une base appropriée est triangulaire supérieure et sur la diagonale principale figure les valeurs propres de $u$, chacune d'elle y figurant autant de fois que son ordre de multiplicité dans $\chi_u$.*

### 2.2.2 Polynômes d'endomorphismes

Soit $u$ un endomorphisme de $E$. On rappelle que pour tout $i \in \mathbb{N}^\star$, $u^i$ est défini par récurrence de la façon suivante :

1. $u^0 = \mathrm{Id}_E$.
2. Pour tout entier $i \geqslant 1$, $u^i = u \circ u^{i-1}$.

On a alors les propriétés suivantes, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}$ on a :

1. $u^p \circ u^q = u^{p+q} = u^q \circ u^p$.
2. $(u^p)^q = u^{pq} = (u^q)^p$

**Définition 2.2.3** *Soit $u$ un endomorphisme de $E$. On appelle polynôme de l'endomorphisme $u$ tout endomorphisme de la forme :*

$$P(u) = \sum_{i=0}^{k} a_i u^i$$

*où $P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.*

**Remarque 2.2.3** *De même si $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, on pose :*

$$P(A) = \sum_{i=0}^{k} a_i A^i$$

**Proposition 2.2.1** *Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$, $P$ et $Q$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors :*

1. $(\lambda P + \mu Q)(u) = \lambda P(u) + \mu Q(u)$.
2. $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) = (QP)(u)$.
3. *Si $\mathcal{B}$ est une base de $E$, alors $Mat_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(Mat_{\mathcal{B}}(u))$.*

**Remarque 2.2.4** *Cette proposition ne dit rien d'autre que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_u & : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & & P(X) & \longmapsto & P(u) \end{array}$$

*est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre. Plus précisément cela signifie que :*

- *$\Phi_u$ est une application linéaire du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.*
- $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ , $\Phi_u(PQ) = \Phi_u(P) \circ \Phi_u(Q)$.
- $\Phi_u(1) = u^0 = Id_E$.
- *Si $P(X) = (X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_r)^{\alpha_r}$ alors :*

$$P(u) = (u - a_1 Id_E)^{\alpha_1} \circ \cdots \circ (u - a_r Id_E)^{\alpha_r}$$

### 2.2.3 Théorème de Cayley-Hamilton

**Théorème 2.2.2** *(de Cayley-Hamilton) Soit $u$ un endomorphisme de $E$, alors :*

$$\chi_u(u) = 0$$

Preuve: Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il suffit de montrer le théorème dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. $u$ est trigonalisable. Donc soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base dans laquelle $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, les valeurs propres de $u$ telles que :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ O & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ soit $V_k := \text{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$. Alors on a le lemme suivant :

**Lemme 2.2.1** *Pour tout* $k \in \{2, \cdots, n\}$, $(u - \lambda_k Id_E\ )(V_k) \subset V_{k-1}$.

PREUVE: Soit $k \in \{2, \cdots, n\}$ et $j \in \{2, \cdots, k\}$. Comme $T$ est triangulaire supérieure il existe des scalaires $\alpha_{1j}, \cdots, \alpha_{jj}$ tels que :

$$(u - \lambda_k \mathrm{Id}_E\ )(e_j) = \sum_{i=1}^{j} \alpha_{ij} e_i - \lambda_k e_j$$

Si $j < k$, alors $(u - \lambda_k \mathrm{Id}_E\ )(e_j) \in V_{k-1}$. Si $j = k$, comme $\alpha_{kk} = \lambda_k$, on a aussi $(u - \lambda_k \mathrm{Id}_E\ )(e_j) \in V_{k-1}$.

□

Poursuivons maintenant la preuve du théorème. Soit maintenant $x \in E = V_n$. Alors d'après le lemme précédent :

$$(u - \lambda_n \mathrm{Id}_E\ )(x) \in V_{n-1}\ ,\ (u - \lambda_{n-1} \mathrm{Id}_E\ ) \circ (u - \lambda_n \mathrm{Id}_E\ )(x) \in V_{n-2}\ , \cdots,$$
$$(u - \lambda_2 \mathrm{Id}_E\ ) \circ \cdots \circ (u - \lambda_n \mathrm{Id}_E\ )(x) \in V_1$$

Comme $V_1$ n'est rien d'autre que le sous-espace propre associé à $\lambda_1$, on a :

$$(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E\ ) \circ \cdots \circ (u - \lambda_n \mathrm{Id}_E\ )(x) = 0$$

et comme $\chi_u(u)(x) = (-1)^n (u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E\ ) \circ \cdots \circ (u - \lambda_n \mathrm{Id}_E\ )(x)$, il s'ensuit que $\chi_u(u) = 0$.

□

## 2.3 Polynôme minimal

### 2.3.1 Théorème de décomposition des noyaux

**Théorème 2.3.1** *Soient* $u \in \mathcal{L}(E)$, $P_1, \cdots, P_k$ *des polynômes de* $\mathbb{K}[X]$ *premiers entre eux deux à deux et* $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$. *Alors :*

$$Ker\ (P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} Ker\ (P_i(u))$$

PREUVE: Si $k = 1$, le résultat est évident.

Si $k = 2$, alors $P = P_1 P_2$ et $P_1$ et $P_2$ sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bezout, il existe deux polynômes $U_1$ et $U_2$ tels que :

$$1 = U_1 P_1 + U_2 P_2$$

Il s'ensuit que :

$$\mathrm{Id}_E = U_1(u) \circ P_1(u) + U_2(u) \circ P_2(u)$$

Soit $x \in \text{Ker }(P_1(u)) \cap \text{Ker }(P_2(u))$. Alors la relation précédente entraîne que :

$$x = U_1(u)(P_1(u)(x)) + U_2(u)(P_2(u)(x)) = 0$$

Donc Ker $(P_1(u))$ et Ker $(P_2(u))$ sont en somme directe.

Montrons maintenant que $\text{Ker }(P(u)) \subset \text{Ker }(P_1(u)) + \text{Ker }(P_2(u))$ :

Soit $x \in \text{Ker }(P(u))$, alors :

$$x = U_1(u)(P_1(u)(x)) + U_2(u)(P_2(u)(x))$$

Or :

$$P_2(u)(U_1(u)(P_1(u)(x))) = U_1(u)(P(u)(x)) = 0$$

Donc $U_1(u)(P_1(u)(x)) \in \text{Ker }(P_2(u))$. De même $U_2(u)(P_2(u)(x)) \in \text{Ker }(P_1(u))$. Finalement $x \in \text{Ker }(P_1(u)) + \text{Ker }(P_2(u))$.

Montrons que $\text{Ker }(P_1(u)) + \text{Ker }(P_2(u)) \subset \text{Ker }(P(u))$ :

Soit $x \in \text{Ker }(P_1(u))$, alors $P(u)(x) = P_2(u)(P_1(u)(x)) = 0$ donc $x \in \text{Ker }(P(u))$ et $\text{Ker }(P_1(u)) \subset \text{Ker }(P(u))$. De même $\text{Ker }(P_2(u)) \subset \text{Ker }(P(u))$. Donc $\text{Ker }(P_1(u)) + \text{Ker }(P_2(u)) \subset \text{Ker }(P(u))$. On a donc montré que :

$$\text{Ker }(P(u)) = \text{Ker }(P_1(u)) \oplus \text{Ker }(P_2(u))$$

Soit $k \geqslant 3$ et supposons le théorème démontré au rang $k-1$. Montrons que le résultat est vrai au rang $k$. Soient $P_1, \cdots, P_k$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux et $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$. Alors les polynômes $P_1$ et $P_2 \cdots P_k$ sont premiers entre eux et d'après ce qui a été montré précédemment on a :

$$\text{Ker }(P(u)) = \text{Ker }(P_1(u)) \oplus \text{Ker }(P_2 \cdots P_k)(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \text{Ker }(P_i(u))$$

$\square$

### 2.3.2 Polynômes annulateurs, polynôme minimal

Commençons par quelques rappels. Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Alors on dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{I}$ de $A$ est un **idéal** si :

1. $(\mathcal{I}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$.
2. $\forall a \in A \ , \ \forall x \in \mathcal{I} \ , \ ax \in \mathcal{I}$.

Un idéal est dit **principal** si $\mathcal{I}$ est engendré par un seul élément. Autrement dit $\mathcal{I}$ est principal s'il existe $\alpha \in \mathcal{I}$ tel que :

$$\mathcal{I} = \{y\alpha \ ; \ y \in A\}$$

Un **anneau principal** est un anneau dont tous les idéaux sont principaux.

L'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal. C'est une conséquence de l'algorithme d'Euclide. En effet soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Alors $\mathcal{I}$ est non vide. Si $\mathcal{I} = \{0\}$, le résultat est évident.

Supposons $\mathcal{I} \neq \{0\}$. Soit $P_0$ un polynôme non nul de $\mathcal{I}$ de degré minimal. Soit $P \in \mathcal{I}$. En effectuant la division euclidienne de $P$ par $P_0$, il existe des polynômes $Q$ et $R$ tels que :

$$P(X) = Q(X)P_0(X) + R(X)$$

où $\deg(R) < \deg(P_0)$. Comme $(\mathcal{I}, +)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, $P(X) - Q(X)P_0(X) \in \mathcal{I}$. Donc $R(X) \in \mathcal{I}$. Mais comme $P_0$ un polynôme non nul de $\mathcal{I}$ de degré minimal, il s'ensuit que $R(X) = 0$ et :

$$\mathcal{I} = \{Q(X)P_0(X) \ ; \ Q(X) \in \mathbb{K}[X]\}$$

Donc $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal et tout idéal $\mathcal{I}$ de $\mathbb{K}[X]$ est engendré par tout polynôme non nul de $\mathcal{I}$ de degré minimal. De plus il n'est pas difficile de voir qu'il existe un unique polynôme **unitaire** (i.e. dont le terme de plus haut degré vaut 1) de $\mathcal{I}$ de degré minimal qui engendre $\mathcal{I}$. Résumons tout ceci dans la proposition qui suit :

**Proposition 2.3.1** *L'anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes est principal et tout idéal $\mathcal{I}$ tel que $\mathcal{I} \neq \{0\}$ est engendré par un unique polynôme unitaire de $\mathcal{I}$ de degré minimal.*

**Proposition et définition 2.3.1** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{K}[X]$ suivant :*

$$\mathcal{I}(u) = \{P \in \mathbb{K}[X] \ ; \ P(u) = 0\}$$

*Alors $\mathcal{I}(u)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé* **idéal annulateur** *de $u$.*

*Tout polynôme $P$ de $\mathcal{I}(u)$ est appelé* **polynôme annulateur** *de $u$.*

PREUVE: Le polynôme nul appartient à $\mathcal{I}(u)$, donc $\mathcal{I}(u) \neq \emptyset$. Soient $(P, Q) \in (\mathcal{I}(u))^2$. Alors :

$$(P - Q)(u) = P(u) - Q(u) = 0$$

Donc $\mathcal{I}(u)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$. D'autre part pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$ :

$$(AP)(u) = A(u) \circ P(u) = 0$$

Donc $\mathcal{I}(u)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. □

**Proposition et définition 2.3.2** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\mathcal{I}(u) \neq \{0\}$ et il existe un unique polynôme unitaire $\mu_u$ de $\mathcal{I}(u)$ de degré minimal qui engendre $\mathcal{I}(u)$.*

*Autrement dit $\mu_u$ est l'unique polynôme annulateur de $u$, unitaire de degré minimal qui divise tous les autres polynômes annulateurs de $u$.*

*$\mu_u$ s'appelle le* **polynôme minimal** *de $u$.*

PREUVE: D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_u(u) = 0$. Comme $\deg \chi_u = n$, $\chi_u$ est un polynôme non nul et $\mathcal{I}(u) \neq \{0\}$. D'après la proposition 2.3.1 il existe un unique polynôme unitaire $\mu_u$ de $\mathcal{I}(u)$ de degré minimal qui engendre $\mathcal{I}(u)$. Cela revient à dire que :

$$\mathcal{I}(u) = \{P(X)\mu_u(X) \,;\, P(X) \in \mathbb{K}[X]\}$$

□

**Remarque 2.3.1** *Le degré $m$ du polynôme minimal vérifie toujours $m \geqslant 1$.*

**Proposition 2.3.2** *Le polynôme minimal et le polynôme caractéristique ont exactement les mêmes racines.*

PREUVE: Soit $\lambda$ une racine de $\chi_u$. Alors $\lambda$ est une valeur propre de $u$. Soit $x$ un vecteur propre de $u$ associé à $\lambda$. Il est facile de voir que pour tout entier $i \geqslant 0$ : $u^i(x) = \lambda^i x$. Donc si $\mu_u(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$, alors :

$$0 = \mu_u(u)(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i u^i(x) = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^i\right) x = \mu_u(\lambda)x$$

Comme $x$ est non nul car $x$ est un vecteur propre, $\mu_u(\lambda) = 0$ et $\lambda$ est une racine de $\mu_u$.

□

**Théorème 2.3.2** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé et si toutes ses racines sont simples.*

PREUVE:

— ($\Rightarrow$) Supposons que $u$ est diagonalisable. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres de $u$. Considérons le polynôme :

$$M(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_r)$$

Comme $u$ est diagonalisable, $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$. Donc soit $x \in E$, alors il existe $(x_1, \cdots, x_r) \in E_{\lambda_1}(u) \times \cdots \times E_{\lambda_r}(u)$ tel que :

$$x = x_1 + \cdots + x_r$$

Or :

$$M(u)(x_i) = \left( \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant r \\ j \neq i}} (u - \lambda_j \mathrm{Id}_E) \right) ((u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)(x_i)) = 0$$

Donc $M(u)(x) = 0$ pour tout $x \in E$. Donc $M$ est un polynôme annulateur de $u$ et $\mu_u$ divise $M$. Comme les racines de $\mu_u$ sont exactement les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$, il s'ensuit que $\mu_u = M$ et $\mu_u$ est scindé et n'a que des racines simples.

— ($\Leftarrow$) Supposons que $\mu_u$ est scindé et n'a que des racines simples. Alors :

$$\mu_u(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_r)$$

et $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont les valeurs propres de $u$. D'après le théorème 2.3.1 :

$$E = \mathrm{Ker}\ (\mu_u(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\ (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E) = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$$

Donc $E$ est la somme directe des sous-espaces propres de $u$ ce qui signifie que $u$ est diagonalisable.

□

**Corollaire 2.3.1** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u$ est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de $u$ qui est scindé et qui n'admet que des racines simples.*

Preuve:

— ($\Rightarrow$) On suppose que $u$ est diagonalisable. Alors d'après le théorème précédent $\mu_u$ est scindé et n'a que des racines simples. De plus c'est un polynôme annulateur.

— ($\Leftarrow$) Réciproquement supposons qu'il existe un polynôme annulateur $P$ de $u$ qui est scindé et qui n'admet que des racines simples. Comme $\mu_u$ divise $P$, il s'ensuit que $\mu_u$ est scindé et n'a que des racines simples ce qui implique d'après le théorème précédent que $u$ est diagonalisable.

□

## 2.4 Projecteurs

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $E$ : $E = F \oplus G$. Pour tout $x$ de $E$ il existe un unique couple $(p(x), q(x)) \in F \times G$ tel que $x = p(x) + q(x)$.

**Proposition 2.4.1** *Les applications $p$ et $q$ sont des endomorphismes de $E$. $p$ s'appelle le* **projecteur** *sur $F$* **parallèlement** *à $G$ et $q$ s'appelle le* **projecteur** *sur $G$* **parallèlement** *à $F$.*

**Remarque 2.4.1** *On a $p + q = Id_E$.*

**Proposition 2.4.2** *1. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ supplémentaires dans $E$ et $p$ le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$. Alors on a : $p \circ p = p$, Im $(p) = F$ et Ker $(p) = G$.*

*De plus si $q$ est le projecteur sur $G$ parallèlement à $F$, alors $p \circ q = q \circ p = 0$.*

*2. Réciproquement, soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$. Alors :*

$$E = Im\ (p) \oplus Ker\ (p)$$

*et $p$ est le projecteur sur Im $(p)$ parallèlement à Ker $(p)$.*

**Remarque 2.4.2** *L'application linéaire $q = Id_E - p$ est le projecteur sur Ker $(p)$ parallèlement à Im $(p)$, Ker $(q) =$ Im $(p)$ et Im $(q) =$ Ker $(p)$.*

Soient $F_1, \ldots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de $E$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$. Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique $n$-uplet $(p_1(x), \ldots, p_k(x)) \in F_1 \times \ldots \times F_k$ tel que : $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$.

**Proposition 2.4.3** *Les applications $p_i$ sont des endomorphismes et $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ s'appelle* **famille de projecteurs** *de $E$ associée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$.*

**Proposition 2.4.4** *1. Soit $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ une famille de projecteurs de $E$ associée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$. Alors : pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, k\}^2$ :*

- *(i) $Id_E = \sum_{i=1}^{k} p_i$.*
- *(ii) $p_i \circ p_i = p_i$.*
- *(iii) $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$.*

*De plus Im $(p_i) = F_i$ et Ker $(p_i) = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} F_j$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$.*

*2. Réciproquement soit $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ une famille d'endomorphismes de $E$ vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii). Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{k}$ Im $(p_i)$ et $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ est la famille de projecteurs associés à cette décomposition.*

**Remarque 2.4.3** *Si $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ et $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est la famille de projecteurs associée à $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$, alors s'il existe un endomorphisme $v$ tel que pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, $F_i$ est stable par $v$ alors $v \circ p_i = p_i \circ v$.*

**Proposition 2.4.5** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u$ est diagonalisable si et seulement si il existe des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ et une famille de sous-espaces vectoriels $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ tels que :*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i \quad et \quad u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$$

*où $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ est la famille de projecteurs associée à $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$. Dans ce cas $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ et $F_i = E_{\lambda_i}(u)$ pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$.*

**Remarque 2.4.4**

- *Si $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ et $u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$ où $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ est la famille de projecteurs associée à $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$, alors pour tout entier $k \geqslant 0$ :*

$$u^k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k p_i$$

- *Plus généralement si $(u_1, \cdots, u_r) \in \mathcal{L}(E)^r$ et si pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$ les sous-espaces $F_i$ sont stables par $u_i$, alors l'endomorphisme $u = \sum_{i=1}^{r} u_i \circ p_i$ vérifie pour tout entier $k \geqslant 0$ :*

$$u^k = \sum_{i=1}^{r} u_i^k \circ p_i$$

## 2.5 Sous-espaces caractéristiques et décomposition de Dunford-Jordan

### 2.5.1 Indice d'un endomorphisme et endomorphismes nilpotents

**Proposition 2.5.1** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

1. *Pour tout entier $k \geqslant 0$, $Ker\ (u^k) \subset Ker\ (u^{k+1})$.*
2. *La suite $(Ker\ (u^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir d'un certain rang. Autrement dit :*
$$\exists j \geqslant 0\ ;\ \forall k \geqslant j\ ,\ Ker\ (u^j) = Ker\ (u^k)$$
3. *Si $j$ est un entier tel que $Ker\ (u^j) = Ker\ (u^{j+1})$ alors :*
$$\forall k \geqslant j\ ,\ Ker\ (u^j) = Ker\ (u^k)$$
4. *Soit $i_0$ le plus petit entier tel que $Ker\ (u^{i_0}) = Ker\ (u^{i_0+1})$. Alors $i_0 \leqslant \dim(E)$.*

PREUVE:

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \text{Ker } (u^k)$, alors :
$$u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0) = 0$$
Donc $x \in \text{Ker } (u^{k+1})$ et $\text{Ker } (u^k) \subset \text{Ker } (u^{k+1})$.
2. Considérons la suite $(\dim(\text{Ker } (u^k)))_{k\in\mathbb{N}}$. Comme $\text{Ker } (u^k) \subset \text{Ker } (u^{k+1}) \subset E$, $\dim(\text{Ker } (u^k)) \leqslant \dim(\text{Ker } (u^{k+1})) \leqslant \dim(E) = n$ donc $(\dim(\text{Ker } (u^k)))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers majorée. Donc à partir d'un certain rang, la suite $(\dim(\text{Ker } (u^k)))_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. Donc :
$$\exists j \geqslant 0 \ ; \ \forall k \geqslant j \ , \ \dim(\text{Ker } (u^j)) = \dim(\text{Ker } (u^k))$$
Comme $\text{Ker } (u^j) \subset \text{Ker } (u^k)$ pour tout $k \geqslant j$, il s'ensuit que $\text{Ker } (u^j) = \text{Ker } (u^k)$ pour tout $k \geqslant j$.
3. Supposons que $\text{Ker } (u^j) = \text{Ker } (u^{j+1})$. Montrons que pour tout $k \geqslant j$, $\text{Ker } (u^k) = \text{Ker } (u^{k+1})$. Soit $x \in \text{Ker } (u^{k+1})$, alors :
$$u^{k+1}(x) = u^{j+1}(u^{k-j}(x)) = 0$$
Donc $u^{k-j}(x) \in \text{Ker } (u^{j+1})$, mais comme $\text{Ker } (u^j) = \text{Ker } (u^{j+1})$, $u^{k-j}(x) \in \text{Ker } (u^j)$ et :
$$u^j(u^{k-j}(x)) = 0 = u^k(x)$$
Donc $x \in \text{Ker } (u^k)$ et $\text{Ker } (u^{k+1}) \subset \text{Ker } (u^k)$. Mais d'après le 1. on a aussi $\text{Ker } (u^k) \subset \text{Ker } (u^{k+1})$. Finalement $\text{Ker } (u^k) = \text{Ker } (u^{k+1})$.
4. Soit $i_0$ le plus petit entier tel que $\text{Ker } (u^{i_0}) = \text{Ker } (u^{i_0+1})$. Considérons l'application :
$$\begin{array}{rcccc} F & : & \{0, \cdots, i_0\} & \longrightarrow & \{0, \cdots, n\} \\ & & k & \longmapsto & \dim(\text{Ker } (u^k)) \end{array}$$
D'après le point précédent, on a :
$$\dim(\text{Ker } (u^0)) < \cdots < \dim(\text{Ker } (u^{i_0}))$$
Donc $F$ est injective et il s'ensuit que $i_0 \leqslant n$.

□

**Définition 2.5.1** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle* **indice** *de $u$ le plus petit entier $i_0$ tel que $Ker\ (u^{i_0}) = Ker\ (u^{i_0+1})$.*

**Remarque 2.5.1** — *Si $i_0 > 0$, alors d'après la définition de $i_0$ et la proposition on a pour tout $p \geqslant 1$ :*
$$\{0\} = Ker\ (u^0) \subsetneq \cdots \subsetneq Ker\ (u^{i_0}) = Ker\ (u^{i_0+1}) = \cdots = Ker\ (u^{i_0+p})$$

— *Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Alors Ker $(u^p) = \{0\}$ si et seulement si Ker $(u) = \{0\}$. En effet si Ker $(u^p) = \{0\}$ on a forcément Ker $(u) = \{0\}$. Réciproquement si Ker $(u) = \{0\}$, alors on a Ker $(u^0)$ = Ker $(u^1)$ et $u$ est un endomorphisme d'indice 0, ce qui implique que Ker $(u^p) = \{0\}$. (On peut aussi dire que si Ker $(u) = \{0\}$ alors $u$ est un isomorphisme et qu'il en est de même de $u^p$, d'où le résultat).*

**Définition 2.5.2** *Soit $\nu \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $\nu$ est un endomorphisme* **nilpotent** *s'il existe un entier $k$ tel que $\nu^k = 0$.*

**Proposition 2.5.2** *Soit $\nu$ un endomorphisme nilpotent de $E$. Soit $n_0$ l'indice de $\nu$. Alors $n_0$ est le plus petit entier tel que $\nu^{n_0} = 0$ et on a $n_0 \leqslant \dim(E)$.*

Preuve: Comme $\nu$ est un endomorphisme nilpotent, par définition il existe un entier $k$ tel que $\nu^k = 0$. Donc le polynôme $P(X) = X^k$ est un polynôme annulateur de $\nu$. Il s'ensuit que le polynôme minimal de $\nu$, $\mu_\nu$ divise $P$. Donc il existe un entier $m$ tel que $\mu_\nu(X) = X^m$ et on a $\mu_\nu(\nu) = \nu^m = 0$. Donc Ker $(\nu^m) = E$ et comme Ker $(\nu^m) \subset$ Ker $(\nu^{m+1})$, on a Ker $(\nu^m) =$ Ker $(\nu^{m+1})$. Par définition de l'indice, on a donc $n_0 \leqslant m$. Mais comme Ker $(\nu^{n_0}) =$ Ker $(\nu^{n_0+1})$, le point 3 de la proposition 2.5.1 entraîne que Ker $(\nu^{n_0}) =$ Ker $(\nu^m) = E$. Donc $\nu^{n_0} = 0$ et le polynôme $Q(X) = X^{n_0}$ est un polynôme annulateur de $\nu$ que divise $\mu_\nu$. Donc $m \leqslant n_0$.

On a donc prouvé que $n_0 = m$. Comme $\mu_\nu$ est le polynôme minimal et que son degré est $n_0 \geqslant 1$, on a $\nu^{n_0-1} \neq 0$. □

**Proposition 2.5.3** *Soit $\nu$ un endomorphisme nilpotent de $E$. Alors* $\mathrm{Sp}(\nu) = \{0\}$*. De plus $\nu$ est diagonalisable si et seulement si $\nu = 0$.*

Preuve: On a vu dans la preuve précédente que le polynôme minimal s'écrit $\mu_\nu(X) = X^{n_0}$ où $n_0$ est l'indice de $\nu$. Les racines de $\mu_\nu$ étant exactement les valeurs propres de $\nu$, il y a donc une unique valeur propre qui est 0. D'autre part si $\nu$ est diagonalisable alors il existe une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de $\nu$ dans laquelle $\nu$ est diagonale. Mais comme l'unique valeur propre est 0, on a Mat $_{\mathcal{B}}(\nu) = O$ et $\nu = 0$. □

### 2.5.2 Sous-espaces caractéristiques

Dans ce paragraphe $u$ est un endomorphisme de $E$ tel que $\chi_u$ soit scindé sur $\mathbb{K}$. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres (distinctes) de $u$. Alors :

$$\chi_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \quad , \quad \mu_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$$

On note d'autre part :

$$C_{\lambda_i}(u) := \mathrm{Ker}\ (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i} \quad \text{et} \quad M_{\lambda_i}(u) := \mathrm{Ker}\ (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\beta_i}$$

On a bien entendu $1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$.

**Définition 2.5.3** *Soit $i \in \{1, \cdots, r\}$. Le sous-espace vectoriel $C_{\lambda_i}(u)$ s'appelle le* **sous-espace caractéristique** *associé à la valeur propre $\lambda_i$.*

**Remarque 2.5.2** — *D'après le paragraphe précédent, on a :*

$$E_{\lambda_i}(u) \subset M_{\lambda_i}(u) \subset C_{\lambda_i}(u)$$

— *$M_{\lambda_i}(u)$ et $C_{\lambda_i}(u)$ sont stables par $u$ (i.e. $u(M_{\lambda_i}(u)) \subset M_{\lambda_i}(u)$ et $u(C_{\lambda_i}(u)) \subset C_{\lambda_i}(u)$).*

**Proposition 2.5.4** *Soit $i \in \{1, \cdots, r\}$. L'indice de $u - \lambda_i Id_E$ est $\beta_i$. En particulier on a :*

$$M_{\lambda_i}(u) = C_{\lambda_i}(u)$$

PREUVE: Les polynômes de l'ensemble $\{(X - \lambda_i)\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$ sont premiers deux à deux. Il en est de même des polynômes de $\{(X - \lambda_i)^{\alpha_i}\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$ et $\{(X - \lambda_i)^{\beta_i}\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$. Comme $\chi_u$ et $\mu_u$ sont des polynômes annulateurs on a Ker $(\chi_u(u)) =$ Ker $(\mu_u(u)) = E$ et d'après le théorème 2.3.1 on a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} M_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} C_{\lambda_i}(u)$$

Donc :

$$\dim(E) = \sum_{i=1}^{r} \dim(M_{\lambda_i}(u)) = \sum_{i=1}^{r} \dim(C_{\lambda_i}(u))$$

Comme $M_{\lambda_i} \subset C_{\lambda_i}$, on a $\dim(M_{\lambda_i}(u)) \leqslant \dim(C_{\lambda_i}(u))$. S'il existe $i \in \{1, \cdots, r\}$ tel que $\dim(M_{\lambda_i}(u)) < \dim(C_{\lambda_i}(u))$ alors :

$$\sum_{i=1}^{r} \dim(M_{\lambda_i}(u)) < \sum_{i=1}^{r} \dim(C_{\lambda_i}(u))$$

ce qui constitue une contradiction. Donc pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, on a $\dim(M_{\lambda_i}(u)) = \dim(C_{\lambda_i}(u))$ et $M_{\lambda_i}(u) = C_{\lambda_i}(u)$. On en déduit donc que l'indice $i_0$ de $u - \lambda_i \mathrm{Id}_E$ vérifie $i_0 \leqslant \beta_i$.

Supposons que $i_0 < \beta_i$. Cela signifie alors que Ker $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\beta_i - 1} =$ Ker $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\beta_i}$. Considérons alors le polynôme :

$$Q(X) = \left( \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant r \\ j \neq i}} (X - \lambda_j)^{\beta_j} \right) (X - \lambda_i)^{\beta_i - 1}$$

Soit $x \in E$. Comme $E = \bigoplus_{j=1}^{r} M_{\lambda_j}(u)$, il existe $(x_1, \cdots, x_r) \in M_{\lambda_1} \times \cdots \times M_{\lambda_r}$ tel que : $x = x_1 + \cdots + x_r$. Pour tout $j \in \{1, \cdots, r\}$ tel que $j \neq i$, on a $(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)^{\beta_j}(x_j) = 0$. De plus comme Ker $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\beta_i - 1} =$ Ker $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\beta_i}$ on a $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\beta_i - 1}(x_i) = 0$. Donc pour tout $j \in \{1, \cdots, r\}$ $Q(u)(x_j) = 0$ et :

$$Q(u)(x) = 0$$

Ceci pour tout $x \in E$. Donc $Q$ est un polynôme annulateur de $u$. Mais $\deg(Q) < \deg(\mu_u)$ ce qui contredit la définition de $\mu_u$. Donc $i_0 = \beta_i$. □

**Proposition 2.5.5** *Pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$ on a :*

$$\dim(C_{\lambda_i}(u)) = m(\lambda_i) = \alpha_i$$

PREUVE: Posons $n_i = \dim(C_{\lambda_i}(u))$. Comme $C_{\lambda_i}(u)$ est stable par $u$, la restriction $u_i = u_{|C_{\lambda_i}(u)}$ est un endomorphisme de $C_{\lambda_i}(u)$. De plus on a Ker $(u_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{C_{\lambda_i}(u)})^{\alpha_i} = C_{\lambda_i}(u)$. Donc le polynôme $Q(X) = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ est un polynôme annulateur de $u_i$ et ceci montre que $\lambda_i$ est l'unique valeur propre de $u_i$. Soit $\mathcal{B}_i$ une base de $C_{\lambda_i}(u)$ dans laquelle la matrice de $u_i$ est triangulaire supérieure. On complète $\mathcal{B}_i$ par une famille de vecteurs $\mathcal{L}$ de façon à ce que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_i \cup \mathcal{L}$ soit une base de $E$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_i & a_{12} & \cdots & a_{1n_i} & \\ 0 & \ddots & & \vdots & A \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n_i-1,n_i} & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & \\ & & O & & B \end{pmatrix}$$

On en déduit alors que :

$$\chi_u(X) = (\lambda_i - X)^{n_i} Q(X)$$

et donc $(\lambda_i - X)^{n_i}$ divise $\chi_u(X)$. Cela implique que $n_i \leqslant \alpha_i$. On a donc :

$$\dim(E) = \sum_{i=1}^{r} \dim(C_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^{r} n_i \leqslant \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$$

Par un raisonnement analogue à la preuve précédente, on déduit que $n_i = \alpha_i$.

□

### 2.5.3 Décomposition de Dunford-Jordan

**Théorème 2.5.1** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\chi_u$ soit scindé dans $\mathbb{K}[X]$. Alors il existe un unique couple $(d, \nu)$ d'endomorphismes de $E$ tel que :*

1. *$u = d + \nu$.*
2. *$d \circ \nu = \nu \circ d$.*
3. *$d$ est diagonalisable et $\nu$ est nilpotent.*

*De plus si $\mu_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$, alors $d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$ où $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est la famille de projecteurs associés à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{r} M_{\lambda_i}(u)$ et l'indice de $\nu$ est $N = \max_{1 \leqslant i \leqslant r}(\beta_i)$.*

Preuve: On a $E = \bigoplus_{i=1}^{r} M_{\lambda_i}(u)$. Soit $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ la famille de projecteurs associés à cette décomposition. Posons $d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$. Alors $d$ est un endomorphisme diagonalisable (voir proposition 2.4.5). Posons maintenant $\nu = u - d$. Alors :

$$\nu = u - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i = u \circ \sum_{i=1}^{r} p_i - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i = \sum_{i=1}^{r} (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E) \circ p_i$$

Montrons que $\nu \circ d = d \circ \nu$.

$$\begin{aligned}
\nu \circ d &= \left( \sum_{i=1}^{r} (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E) \circ p_i \right) \circ \sum_{j=1}^{r} \lambda_j p_j \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant r} \lambda_j (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E) \circ p_i \circ p_j \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant r} \lambda_j (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E) \circ p_j \circ p_i
\end{aligned}$$

Comme pour tout couple $(i,j) \in \{1, \cdots, r\}^2$, les sous-espaces $M_{\lambda_j}(u)$ sont stables par $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$ alors $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E) \circ p_j = p_j \circ (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$. Donc :

$$\begin{aligned}
\nu \circ d &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant r} \lambda_j p_j \circ (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E) \circ p_i \\
&= d \circ \nu
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\nu$ est nilpotent d'indice $N = \max_{1 \leqslant i \leqslant r}(\beta_i)$. Comme pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, les sous-espaces $M_{\lambda_i}(u)$ sont stables par $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$, on a (voir la remarque 2.4.4) :

$$\nu^N = \sum_{i=1}^{r} (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^N \circ p_i$$

Or $N \geqslant \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$ et $\beta_i$ est l'indice de $u - \lambda_i \mathrm{Id}_E$ d'après la proposition 2.5.4. Donc Ker $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^N =$ Ker $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\beta_i} = M_{\lambda_i}(u)$.

Soit $x \in E$. Alors pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, $p_i(x) \in$ Ker $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^N$. Donc pour tout $x \in E$, $\nu^N(x) = 0$ ce qui signifie que $\nu^N = 0$ et $\nu$ est nilpotent. Soit $j \in \{1, \cdots, r\}$ tel que $\beta_j = N$. Alors dans ce cas Ker $(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)^{N-1} \subsetneq$ Ker $(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)^N = M_{\lambda_j}$. Donc soit $x \in M_{\lambda_j} \setminus$ Ker $(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)^{N-1}$. Alors :

$$\nu^{N-1}(x) = \sum_{i=1}^{r} (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{N-1}(p_i(x)) = (u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)^{N-1}(x) \neq 0$$

Donc $\nu$ est nilpotent d'indice $N$.

Il nous reste à montrer l'unicité du couple $(d, \nu)$. Soit $(d', \nu')$ vérifiant les hypothèses 1, 2 et 3 du théorème. Notons $N'$ l'indice de $\nu'$. Soit $\lambda' \in \mathrm{Sp}(d')$ et $x \in E_{\lambda'}(d') \setminus \{0\}$. Alors comme $u$ et $d'$ commutent :

$$\begin{aligned} 0 = \nu'^{N'}(x) = (u - d')^{N'}(x) &= \sum_{k=0}^{N'} \binom{N'}{k} (-1)^{N'-k} (u^k \circ d'^{N'-k})(x) \\ &= \sum_{k=0}^{N'} \binom{N'}{k} (-1)^{N'-k} (u^k \circ (\lambda' \mathrm{Id}_E)^{N'-k})(x) \\ &= (u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{N'}(x) \end{aligned}$$

Donc Ker $(u - \lambda' \mathrm{Id}_E)^{N'} \neq \{0\}$. Il s'ensuit d'après la remarque 2.5.1 que Ker $(u - \lambda' \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$ et $\lambda' \in \mathrm{Sp}(u)$. Donc $\mathrm{Sp}(d') \subset \mathrm{Sp}(u)$. De plus on déduit de ce qui précède que :

$$E_{\lambda'}(d') \subset C_{\lambda'}(u)$$

Notons $\mathrm{Sp}(d') = \{\lambda'_1, \cdots, \lambda'_s\}$. Comme $d'$ est diagonalisable :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda'_i}(d') \subset \bigoplus_{i=1}^{s} C_{\lambda'_i}(u)$$

On en déduit alors que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{s} C_{\lambda'_i}(u)$$

que pour tout $i \in \{1, \cdots, s\}$, $E_{\lambda'_i}(d') = C_{\lambda'_i}(u)$ et que $\mathrm{Sp}(d') = \mathrm{Sp}(u)$. Pour tout $x \in E$ on a :

$$d'(x) = \sum_{i=1}^{s} d'(p_i(x)) = \sum_{i=1}^{s} \lambda'_i p_i(x) = d(x)$$

Donc $d = d'$ et $\nu = \nu'$. □

**Remarque 2.5.3** *1.* $\mathrm{Sp}(d) = \mathrm{Sp}(u)$.

*2.* $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ , $E_\lambda(d) = C_\lambda(u)$.

*3.* $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $C_\lambda(u)$ *est stable par* $\nu$.

## 2.6 Applications et exemples

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\chi_u$ soit scindé dans $\mathbb{K}[X]$. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres (distinctes) de $u$. Alors :

$$\chi_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{\alpha_i} \quad , \quad \mu_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{\beta_i}$$

On rappelle d'autre part que :

$$\text{Ker } (u-\lambda_i \text{Id}_E)^{\beta_i - 1} \subsetneq \text{Ker } (u-\lambda_i \text{Id}_E)^{\beta_i} = \text{Ker } (u-\lambda_i \text{Id}_E)^{\alpha_i} = C_{\lambda_i}$$

et que $1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i = \dim(C_{\lambda_i}(u))$.

D'après le théorème 2.5.1 il existe un unique couple $(d, \nu)$ d'endomorphismes de $E$ vérifiant les propriétés 1,2,3 du théorème. Notons $m$ l'indice de $\nu$. Soit $k \in \mathbb{N}$ alors comme $d$ et $\nu$ commutent on peut appliquer la formule du binôme de Newton ce qui donne :

$$u^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} d^{k-i} \nu^i$$

Si $k \geqslant m-1$, alors :

$$u^k = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{k}{i} d^{k-i} \nu^i$$

Maintenant soient des bases $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_r$ respectivement de chacun des sous-espaces caractéristiques $C_{\lambda_1}(u), \cdots, C_{\lambda_r}(u)$. Considérons la base de $E$ définie par $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$. Dans ce cas comme $E_{\lambda_i}(u) = C_{\lambda_i}(u)$ pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$ on a :

$$\text{Mat }_{\mathcal{B}}(d) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & O & & \ddots & & O & \\ & & & & \lambda_r & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

et $\text{Mat }_{\mathcal{B}}(\nu) = \text{Mat }_{\mathcal{B}}(u-d)$. De plus comme $C_{\lambda_i}(u)$ est stable par $\nu$, en posant $A = \text{Mat }_{\mathcal{B}}(u)$, $D = \text{Mat }_{\mathcal{B}}(d)$ et $N = \text{Mat }_{\mathcal{B}}(\nu)$ alors $A$ est une matrice diagonale par blocs et pour $k \geqslant m-1$ on a :

$$A^k = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{k}{i} D^{k-i} N^i$$

On sait calculer les puissances de $D$. Il reste à calculer $N^2, \cdots, N^{m-1}$.

On peut cependant faire les choses plus finement. Pour cela pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$ comme :

$$\text{Ker } (u - \lambda_i \text{Id}_E) \subsetneq \cdots \subsetneq \text{Ker } (u - \lambda_i \text{Id}_E)^{\beta_i - 1} \subsetneq \text{Ker } (u - \lambda_i \text{Id}_E)^{\beta_i}$$

On construit des bases $\mathcal{B}_{i,1}, \cdots, \mathcal{B}_{i,\beta_i}$ respectivement de Ker $(u - \lambda_i \text{Id}_E), \cdots,$ Ker $(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{\beta_i}$ de telle manière que :

$$\mathcal{B}_{i,1} \subset \cdots \subset \mathcal{B}_{i,\beta_i}$$

Autrement dit chaque base $\mathcal{B}_{i,j-1}$ de Ker $(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{j-1}$ est complétée par une famille libre $\mathcal{L}_j$ de Ker $(u - \lambda_i \text{Id}_E)^j$ pour obtenir une base $\mathcal{B}_{i,j}$ de Ker $(u - \lambda_i \text{Id}_E)^j$. Remarquons alors que si $v \in \mathcal{L}_j$ alors $(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{j-1}((u - \lambda_i \text{Id}_E)(v)) = 0$. Donc $u(v) - \lambda_i v \in$ Ker $(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{j-1} = \text{Vect}(\mathcal{B}_{i,j-1})$. Il s'ensuit qu'on a :

$$\text{Mat }_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ & & \lambda_1 & \ddots & & & \vdots \\ & O & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \lambda_r & \ddots & \vdots \\ & & & & & \ddots & * \\ & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

et dans cette base $N$ est une matrice triangulaire supérieure stricte.

# Chapitre 3

# SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

Dans toute la suite le corps $\mathbb{K}$ considéré est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 3.1 Exponentielle d'une matrice ou d'un endomorphisme

### 3.1.1 Espaces vectoriels normés

**Définition 3.1.1** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle* **norme** *sur $E$ toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

1. $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad ; \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
3. $\forall(x, y) \in E \times E \quad ; \quad N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.

*Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé* **espace vectoriel normé**.

Dans la pratique on note pour tout $x \in E$, $N(x) = \|x\|$ et $(E, \|\ \ \|)$ désigne l'espace vectoriel normé associé.

Voici maintenant quelques résultats importants pour la suite :

— Une norme permet de parler de suites convergentes. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E$ tend vers $x \in E$ si $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.

— Deux normes $\|\ \ \|_1$ et $\|\ \ \|_2$ sont **équivalentes** s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que pour tout $x \in E$ :

$$\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1$$

Les suites convergentes pour $\|\ \ \|_1$ ou $\|\ \ \|_2$ sont alors les mêmes et ont la même limite.

Si $E$ est de **dimension finie** alors toutes les normes sont équivalentes.

— Remarquons que si $E$ est de dimension finie muni d'une base $(e_1, \cdots, e_n)$ alors toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $E$ telle que $x_k = \sum_{i=1}^{n} x_{k,i} e_i$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tend vers $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ :

$$x_{k,i} \longrightarrow x_i \quad \text{quand} \quad k \longrightarrow \infty$$

— Si $(E, \| \ \|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie alors $(E, \| \ \|)$ est **complet**. Autrement dit toute suite de **Cauchy** dans $E$ est convergente. On rappelle qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ , \ \ \exists N \ \ ; \ \ \forall p, q \geqslant N \ \ , \ \ \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

— La notion de norme permet aussi de parler de fonctions continues. Si $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés, alors $f : E \longrightarrow F$ est continue en $x \in E$ si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E$ telle que $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$ pour la norme $\| \ \|_E$ alors $\lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = f(x)$ pour la norme $\| \ \|_F$. Là encore si $E$ et $F$ sont de dimension finie l'ensemble des fonctions continues est le même quelque soit le choix des normes sur $E$ et $F$.

À partir de maintenant $(E, \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie $n$.

Donnons un exemple important de norme dans un espace vectoriel de dimension finie. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de $E$. Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, posons :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Alors $\| \ \|_1$ est une norme sur $E$.

**Définition 3.1.2** *Soit* $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ *une série de* $E$*. On dit* $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ **converge absolument** *si la série* $\sum_{k\geqslant 0} \|u_k\|$ *converge.*

**Proposition 3.1.1** *Soit* $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ *une série de* $E$ *qui converge absolument. Alors* $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ *est convergente.*

PREUVE: Posons $S_N = \sum_{k=0}^{N} u_k$. Alors pour tout $p > q$ :

$$\|S_p - S_q\| = \left\| \sum_{k=q+1}^{p} u_k \right\| \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} \|u_k\|$$

Comme $\sum_{k\geqslant 0} \|u_k\|$ est une série convergente la suite $\left(\sum_{k=0}^{N} \|u_k\|\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (car $E$ est complet car de dimension finie) et pour tout $\varepsilon > 0$ :

$$\exists N \quad ; \quad \forall p, q \geqslant N \quad , \quad \sum_{k=q+1}^{p} \|u_k\| < \varepsilon$$

Donc :

$$\forall p, q \geqslant N \quad , \quad \|S_p - S_q\| < \varepsilon$$

Donc $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $E$ qui est complet. Donc $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente ce qui signifie que $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge.

□

### 3.1.2 Norme sur l'espace des endomorphismes et sur les matrices

Dans toute cette partie $(E, \| \ \|)$ est une espace vectoriel normé de dimension finie $n$.

**Proposition 3.1.2** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe une constante $M$ telle que pour tout $x \in E$ :*

$$\|u(x)\| \leqslant M\|x\|$$

*De plus $u$ est continue sur $(E, \| \ \|)$.*

PREUVE: Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de $E$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ alors :

$$\|u(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|e_i\| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}(\|e_i\|) \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(\|e_i\|)\|x\|_1$$

Or toutes les normes étant équivalentes il existe un réel $\beta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|x\|_1 \leqslant \beta\|x\|$. Donc posant $M = \beta \max_{1\leqslant i\leqslant n}(\|e_i\|)$, on a prouvé que pour tout $x \in E$ :

$$\|u(x)\| \leqslant M\|x\|$$

Maintenant si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $E$ qui converge vers $x$, alors :

$$\|u(x_k) - u(x)\| = \|u(x_k - x)\| \leqslant M\|x_k - x\|$$

Comme $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} \|x_k - x\| = 0$, on conclut que $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} u(x_k) = u(x)$ et $u$ est continue. $\square$

De la proposition on déduit que $\sup\limits_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|u(x)\|$ est bien définie.

**Proposition 3.1.3** *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ définissons :*

$$|||u||| := \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|u(x)\|$$

*Alors $|||\ \ |||$ est une norme sur $E$ qui satisfait :*

1. $\forall x \in E\ ,\ \|u(x)\| \leqslant |||u|||\|x\|$.
2. $\forall (u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2\ ,\ |||u \circ v||| \leqslant |||u||||||v|||$.

$|||\ \ |||$ *s'appelle* **norme d'algèbre**.

**Proposition 3.1.4** *On considère l'espace vectoriel des matrices colonnes $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ muni d'une norme $\|\ \ \|$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et définissons :*

$$|||A||| := \sup_{\substack{X\in E\\ \|X\|=1}} \|AX\|$$

*Alors $|||\ \ |||$ est une norme sur $E$ qui satisfait :*

1. $\forall X \in E\ ,\ \|AX\| \leqslant |||A|||\|X\|$.
2. $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2\ ,\ |||AB||| \leqslant |||A||||||B|||$.

$|||\ \ |||$ *s'appelle* **norme matricielle**.

Preuve: Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, considérons l'application :

$$\begin{array}{rcccc} f_A & : & E & \longrightarrow & E \\ & & X & \longmapsto & AX \end{array}$$

Alors $f_A$ est un endomorphisme de $E$ et $|||A||| = |||f_A|||$. L'assertion 1. est évidente. Pour l'assertion 2. on a :

$$|||AB||| = |||f_{AB}||| = |||f_A \circ f_B||| \leqslant |||f_A||||||f_B||| = |||A||||||B|||$$

$\square$

### 3.1.3 Dérivabilité et intégration des fonctions à variable réelle et à valeurs dans un espace vectoriel

Dans toute cette partie $(E, \| \ \|)$ est une espace vectoriel normé de dimension finie $n$.

**Définition 3.1.3** *Soit $I$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction $f : I \longrightarrow E$ est* **dérivable** *en $t_0 \in I$, s'il existe un vecteur de $E$ noté $f'(t_0)$ tel que :*

$$\left\| \frac{1}{h}(f(t_0+h) - f(t_0)) - f'(t_0) \right\| \longrightarrow 0$$

*quand $h \longrightarrow 0$.*

*Si $f$ est dérivable sur $I$, l'application :*

$$\begin{array}{rcrcl} f' & : & I & \longrightarrow & E \\ & & t & \longmapsto & f'(t) \end{array}$$

*s'appelle la dérivée de $f$ sur $I$.*

**Proposition 3.1.5** *Soit $I$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On suppose que $E$ est muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit $f : I \longrightarrow E$ une fonction. Notons $(f_1, \cdots, f_n)$ les fonctions composantes de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ (i.e. $\forall t \in I \ , \ f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i$). Alors $f$ est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si les fonctions $f_i$ sont dérivables en $t_0 \in I$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$.*

**Proposition 3.1.6** *Soit $I$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow E$ une fonction.*

1. *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $E$. Alors les fonctions composantes de $f$ dans $\mathcal{B}$ sont intégrables au sens de Riemann sur $I$ si et seulement si les fonctions composantes de $f$ dans $\mathcal{B}'$ sont intégrables au sens de Riemann sur $I$. Si les fonctions composantes de $f$ dans une base sont intégrables, on dira alors que $f$ est intégrable.*
2. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de $E$ et $(f_1, \cdots, f_n)$ les composantes de $f$ dans $\mathcal{B}$. Alors la quantité :*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_I (f_i(t)dt)\, e_i$$

*ne dépend pas de la base choisie et est notée $\int_I f(t)dt$.*

Désormais l'espace $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est muni d'une norme et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme matricielle associée.

**Proposition 3.1.7** *Soient :*

$$A \ : \ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & A(t) \end{array}, \quad B \ : \ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & B(t) \end{array}$$

*et*

$$X \ : \ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & X(t) \end{array}$$

*trois fonctions dérivables sur $I$. Alors les fonctions :*

$$AB \ : \ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & A(t)B(t) \end{array}, \quad AX \ : \ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & A(t)X(t) \end{array}$$

*sont dérivables et :*

$$(AB)'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t) \quad et \quad (AX)'(t) = A'(t)X(t) + A(t)X'(t)$$

Preuve: Soit $h \in \mathbb{R}^\star$ tel que $t + h \in I$. Alors :

$$\begin{aligned}
&\left|\!\left|\!\left| \frac{1}{h}(A(t+h)B(t+h) - A(t)B(t)) - A'(t)B(t) - A(t)B'(t) \right|\!\right|\!\right| \\
&= \left|\!\left|\!\left| \frac{1}{h}(A(t+h) - A(t))B(t+h) + \frac{1}{h}A(t)(B(t+h) - B(t)) - A'(t)B(t) - A(t)B'(t) \right|\!\right|\!\right| \\
&= \left|\!\left|\!\left| \left( \frac{1}{h}(A(t+h) - A(t)) - A'(t) \right) B(t+h) + A'(t)(B(t+h) - B(t)) \right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left. +A(t) \left( \frac{1}{h}(B(t+h) - B(t)) - B'(t) \right) \right|\!\right|\!\right| \\
&\leqslant \left|\!\left|\!\left| \frac{1}{h}(A(t+h) - A(t)) - A'(t) \right|\!\right|\!\right| |||B(t+h)||| + |||A'(t)||| |||B(t+h) - B(t)||| \\
&+ |||A(t)||| \left|\!\left|\!\left| \frac{1}{h}(B(t+h) - B(t)) - B'(t) \right|\!\right|\!\right| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

quand $h \longrightarrow 0$. Donc $AB$ est dérivable et $(AB)'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$.

On démontre de la même manière que $AX$ est dérivable.

□

### 3.1.4 Exponentielle d'une matrice

**Proposition et définition 3.1.1** *Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} A^k$ est convergente. Sa somme notée $e^A$ ou $\exp(A)$ s'appelle l'***exponentielle** *de $A$. De plus :*

$$|||e^A||| \leqslant e^{|||A|||}$$

PREUVE: $\left|\left|\left|\frac{1}{k!}A^k\right|\right|\right| \leqslant \frac{1}{k!}|||A^k||| \leqslant \frac{1}{k!}|||A|||^k$. Or la série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}|||A|||^k$ est convergente donc $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}A^k$ est convergente. De plus comme :

$$\left|\left|\left|\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}A^i\right|\right|\right| \leqslant \sum_{i=0}^{k}\left|\left|\left|\frac{1}{i!}A^i\right|\right|\right| \leqslant \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}|||A|||^i \leqslant e^{|||A|||}$$

On a $|||e^A||| \leqslant e^{|||A|||}$.

$\square$

**Proposition 3.1.8** *1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors :*

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^AP$$

*2. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si $AB = BA$ alors :*

$$e^Ae^B = e^{A+B} = e^Be^A$$

*et*

$$Be^A = e^AB$$

*3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $e^A$ est toujours inversible et :*

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}$$

PREUVE:

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$P^{-1}\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}A^i\right)P = \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}P^{-1}A^iP = \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}(P^{-1}AP)^i$$

Or l'application $X \longmapsto P^{-1}XP$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension fini, donc elle est continue et :

$$P^{-1}e^AP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k\right)P = \lim_{n\longrightarrow\infty}P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^k\right)P = e^{P^{-1}AP}$$

2. Pour montrer le point 2. nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.1.1** *Soient* $\sum_{k\geqslant 0} A_k$ *et* $\sum_{k\geqslant 0} B_k$ *deux séries absolument convergentes de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Soit* $C = AB$. *Alors la série* $\sum_{k\geqslant 0}\left(\sum_{i=0}^{k} A_k B_{k-i}\right)$ *est absolument convergente et* $C = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} A_i B_{k-i}\right)$.

Montrons maintenant le point 2. Comme $A$ et $B$ commutent on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}(A+B)^k &= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} A^i B^{k-i}\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}A^i B^{k-i}\\ &= \sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{i!}A^i\right)\left(\frac{1}{(k-i)!}B^{k-i}\right)\end{aligned}$$

Comme $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}A^k$ et $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}B^k$ sont absolument convergentes, d'après le lemme la série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}(A+B)^k$ est absolument convergente et :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(A+B)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{i!}A^i\right)\left(\frac{1}{(k-i)!}B^{k-i}\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}B^k\right)$$

d'où le résultat.

$\square$

**Proposition 3.1.9** *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors l'application* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , $t \longmapsto e^{tA}$ *est de classe* $C^\infty$ *et* $(e^{tA})' = Ae^{tA}$.

Preuve: Montrons d'abord que $t \longmapsto e^{tA}$ est dérivable :

$$\begin{aligned}\left|\left|\left|\frac{1}{h}(e^{(t+h)A} - e^{tA}) - Ae^{tA}\right|\right|\right| &= \left|\left|\left|e^{tA}\left(\frac{1}{h}(e^{hA} - I) - A\right)\right|\right|\right|\\ &= \left|\left|\left|e^{tA}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{k-1}}{k!}A^k\right)\right|\right|\right|\\ &= |h|\left|\left|\left|e^{tA}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{k-2}}{k!}A^k\right)\right|\right|\right|\end{aligned}$$

Supposons $|h| \leqslant 1$. Donc :

$$\begin{aligned}\left|\left|\left|\frac{1}{h}(e^{(t+h)A} - e^{tA}) - Ae^{tA}\right|\right|\right| &\leqslant |h| |||e^{tA}||| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} |||A|||^k \\ &\leqslant |h| |||e^{tA}||| e^{|||A|||} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

quand $h \longrightarrow 0$. Par récurrence on montre que la dérivée d'ordre $n$ existe et que :

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{tA} = A^n e^{tA}$$

□

**Proposition 3.1.10** *Soit* $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ *une matrice diagonale. Alors :*

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

*En particulier pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$, *on a* $e^{\lambda I_n} = e^{\lambda} I_n$.

Preuve: $e^D = \lim_{N \longrightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} D^k \right)$. Or :

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} D^k = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Notons $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} D^k = (x_{ij}^N)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $e^D = (x_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Les coefficients de $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} D^k$ et $e^D$ ne sont rien d'autre que les coordonnées de respectivement de $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} D^k$ et $e^D$ dans la base $\{E_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où pour tout $(i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2$ $E_{ij}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne $i$ et de la colonne $j$ qui est égal à 1. Comme $\lim\limits_{N\longrightarrow+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}D^k\right)=e^D$, $x_{ij}^N\longrightarrow x_{ij}$ ce qui prouve que :

$$e^D=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\lambda_1^k & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\lambda_n^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

$\square$

**Remarque 3.1.1** *On a vu dans la proposition 3.1.3 que l'on pouvait munir $\mathcal{L}(E)$ de la norme d'algèbre $|||\ \ |||$. De la même manière que pour les matrices on peut définir l'exponentielle d'un endomorphisme et tous les énoncés précédents sont transposables dans le cadre des endomorphismes.*

## 3.2 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $I$ désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. À partir de maintenant on identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.

**Définition 3.2.1** *Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Pour tout $i\in\{1,\cdots,n\}$, soit $b_i : I\longrightarrow\mathbb{K}$ une fonction continue et pour tout $(i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2$ soit $a_{ij}\in\mathbb{K}$.*

1. *Le système :*

$$(\mathcal{SL})\qquad\begin{cases}y_1' &= & a_{11}y_1+ & \cdots & +a_{1n}y_n+b_1\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ y_n' &= & a_{n1}y_1+ & \cdots & +a_{nn}y_n+b_n\end{cases}$$

*s'appelle **système différentiel linéaire d'ordre** $1$ **à coefficients constants**.*

2. *Le système :*

$$(\mathcal{SH})\qquad\begin{cases}y_1' &= & a_{11}y_1+ & \cdots & +a_{1n}y_n\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ y_n' &= & a_{n1}y_1+ & \cdots & +a_{nn}y_n\end{cases}$$

*s'appelle **système différentiel linéaire homogène associé à** $(\mathcal{SL})$.*

Résoudre $(\mathcal{SL})$ ou $(\mathcal{SH})$ revient à trouver un intervalle non vide $J \subset I$ et des fonctions $y_1, \cdots, y_n$ dérivables sur $J$ et vérifiant le système considéré. Si on note $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ alors :

$$(\mathcal{SL}) \Longleftrightarrow (\mathcal{L}) \qquad Y' = AY + B$$

et

$$(\mathcal{SH}) \Longleftrightarrow (\mathcal{H}) \qquad Y' = AY$$

Résoudre $(\mathcal{L})$ ou $(\mathcal{H})$ revient à trouver un intervalle non vide $J \subset I$ et une fonction $Y : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ dérivable sur $J$ et vérifiant respectivement $(\mathcal{L})$ ou $(\mathcal{H})$.

### 3.2.1 Système différentiel linéaire homogène

Notons $\mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $I$ dans $\mathbb{K}^n$.

**Théorème 3.2.1** *L'ensemble $S_{\mathcal{H}}$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de $\mathcal{H}$ : $Y' = AY$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$ de dimension $n$ formé de fonctions de classe $C^\infty$.*

*Plus précisément :*

$$S_{\mathcal{H}} := \{t \longmapsto e^{tA}C \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{K}^n\}$$

*De plus pour tout $(t_0, Y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ il existe une unique solution $Y$ de $\mathcal{H}$ telle que $Y(t_0) = Y_0$.*

Preuve: Il est immédiat que la fonction nulle appartient à $S_{\mathcal{H}}$ et que si $(Y_1, Y_2) \in S_{\mathcal{H}}^2$ alors pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ :

$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 \in S_{\mathcal{H}}$$

Donc $S_{\mathcal{H}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$.

Maintenant soit $Y \in S_{\mathcal{H}}$ et soit $Z(t) = e^{-tA}Y(t)$. Alors :

$$Z'(t) = -Ae^{-tA}Y(t) + e^{-tA}Y'(t) = -Ae^{-tA}Y(t) + e^{-tA}AY(t)$$

Or $A$ et $e^{-tA}$ commutent donc $Z'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc il existe $C \in \mathbb{K}^n$ tel que $Z(t) = C$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $Y(t) = e^{tA}C$.

Réciproquement on vérifie facilement que pour tout $C \in \mathbb{K}^n$, la fonction $t \mapsto Y(t) = e^{tA}C$ est solution de $S_{\mathcal{H}}$.

D'autre part soit $(t_0, Y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$. Alors :

$$Y(t_0) = Y_0 \Longleftrightarrow e^{t_0A}C = Y_0 \Longleftrightarrow C = e^{-t_0A}Y_0$$

□

**Théorème 3.2.2** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A$ est scindé. Notons $\mu_1, \cdots, \mu_n$ les valeurs propres de $A$ comptées avec multiplicité et soit $(U_1, \cdots, U_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs appartenant aux sous-espaces caractéristiques. Plus précisément on suppose que :*

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}\ ,\ U_i \in C_{\mu_i}(A)$$

*Alors :*

$$S_{\mathcal{H}} = \left\{ t \longmapsto \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\mu_i t} \left( \sum_{k=0}^{\gamma_i - 1} \frac{t^k}{k!} (A - \mu_i I_n)^k U_i \right) \ \text{où} \ \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\}$$

*où $\gamma_i$ est la multiplicité de $\mu_i$ dans $\mu_A$.*

*En particulier si $A$ est diagonalisable alors :*

$$S_{\mathcal{H}} = \left\{ t \longmapsto \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\mu_i t} U_i \ \text{où} \ \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\}$$

*Et dans ce cas $(U_1, \cdots, U_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de $A$.*

PREUVE: Le polynôme caractéristique $\chi_A$ étant scindé on a :

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - \lambda)^{\alpha_i}$$

et comme $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} C_{\lambda_i}(A)$, on choisit une base $\mathcal{B} = (U_1, \cdots, U_n)$ de $E$ telle que $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_i$ où pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, $\mathcal{B}_i$ est une base de $C_{\lambda_i}(A)$.

$Y$ est une solution de $\mathcal{H} : Y' = AY$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $Y(t) = e^{tA}C$ où $C \in \mathbb{K}^n$. Notons $(c_1, \cdots, c_n)$ les coordonnées de $C$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors $C = \sum_{i=1}^{n} c_i U_i$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $U_i \in C_{\mu_i}(A)$ où $\mu_1, \cdots, \mu_n$ sont les valeurs propres de $A$ comptées avec multiplicité. Donc :

$$\begin{aligned} Y(t) &= \sum_{i=1}^{n} c_i e^{tA} U_i = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\mu_i t I_n + t(A - \mu_i I_n)} U_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\mu_i t I_n} e^{t(A - \mu_i I_n)} U_i = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\mu_i t} e^{t(A - \mu_i I_n)} U_i \end{aligned}$$

D'autre part on a vu que si $\gamma_i$ désigne la multiplicité de $\mu_i$ dans le polynôme minimal de $A$, alors :

$$\text{Ker } (A - \mu_i I_n)^{\gamma_i - 1} \subsetneq \text{Ker } (A - \mu_i I_n)^{\gamma_i} = C_{\mu_i}(A)$$

De plus comme $U_i \in C_{\mu_i}(A)$, pour tout $k \geqslant \gamma_i$, $(A - \mu_i I_n)^k U_i = 0$ et il s'ensuit que :

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\mu_i t} \left( \sum_{k=0}^{\gamma_i - 1} \frac{t^k}{k!} (A - \mu_i I_n)^k U_i \right)$$

□

**Remarque 3.2.1** 1. *Les formules du théorème donne un calcul implicite de $e^{tA}$. En effet, en vertu de la formule de changement de coordonnées on a* $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = P^{-1}C$ *où $P$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{B}$. Autrement dit les colonnes de $P$ sont $U_1, \cdots, U_n$ et*

$$Y(t) = e^{tA} P \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

*ce qui permet de déduire que les colonnes de $e^{tA}P$ sont respectivement :*

$$e^{\mu_1 t} \left( \sum_{k=0}^{\gamma_1 - 1} \frac{t^k}{k!} (A - \mu_1 I_n)^k U_1 \right), \cdots, e^{\mu_n t} \left( \sum_{k=0}^{\gamma_n - 1} \frac{t^k}{k!} (A - \mu_n I_n)^k U_n \right)$$

2. *On peut remarquer d'autre part que si $N$ est la matrice nilpotente de la décomposition de Jordan de $A$, alors en utilisant la forme de $N$ apparaissant dans la preuve du théorème 2.5.1 du chapitre 2 on a pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ :*

$$e^{tN} U_i = \left( \sum_{k=0}^{\gamma_i - 1} \frac{t^k}{k!} (A - \mu_i I_n)^k U_i \right)$$

### 3.2.2 Système différentiel linéaire non homogène

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $B : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ une fonction continue et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Théorème 3.2.3** *On suppose que l'ensemble $S_{\mathcal{L}}$ des solutions de $\mathcal{L} : Y' = AY + B$ est non vide. Soit $\varphi_0 \in S_{\mathcal{L}}$. Alors :*

$$S_{\mathcal{L}} := \{I \longrightarrow \mathbb{K}^n, t \longmapsto e^{tA}C + \varphi_0(t) \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{K}^n\}$$

PREUVE: Soit $Y$ une solution de $\mathcal{L}$ sur $I$. Alors :

$$(Y-\varphi_0)'(t) = Y'(t) - \varphi_0'(t) = (AY(t)+B(t)) - (A\varphi_0(t)+B(t)) = A(Y(t)-\varphi_0(t))$$

Donc $Y-\varphi_0$ est solution de l'équation homogène $\mathcal{H} : Y' = AY$. Donc $Y(t) = e^{tA}C + \varphi_0(t)$ où $C \in \mathbb{K}^n$.

Réciproquement, on vérifie facilement que toutes les fonctions de la forme $Y(t) = e^{tA}C + \varphi_0(t)$ pour tout $t \in I$ sont solutions.

□

**Théorème 3.2.4** ***(Méthode de la variation de la constante)*** *L'ensemble $S_{\mathcal{L}}$ est non vide. Plus précisément pour tout $t_0 \in I$ :*

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_0 & : & I & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & & t & \longmapsto & \varphi_0(t) := \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{(t-x)A}B(x)dx \end{array}$$

*est une solution de $\mathcal{L}$.*

PREUVE: Soit pour tout $t \in I$, la fonction $\varphi_0(t) := \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{(t-x)A}B(x)dx$. Montrons que $\varphi_0$ est solution de $\mathcal{L}$.

Remarquons d'abord que puisque $tA$ et $-xA$ commutent alors $e^{(t-x)A} = e^{tA}e^{-xA}$ et $\varphi_0(t) = e^{tA}\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-xA}B(x)dx$. De plus :

$$\varphi_0'(t) = Ae^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-xA}B(x)dx + e^{tA}e^{-tA}B(t) = A\varphi_0(t) + B(t)$$

D'où le résultat.

□

**Remarque 3.2.2** — *Les solutions de $\mathcal{H} : Y' = AY$ s'écrivent $Y(t) = e^{tA}C$ avec $C \in \mathbb{K}^n$. Si l'on cherche une fonction dérivable $C : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ telle que $\varphi_0(t) = e^{tA}C(t)$ soit solution de $\mathcal{L}$ on a :*

$$0 = \varphi_0'(t) - (A\varphi_0(t) + B(t)) = Ae^{tA}C(t) + e^{tA}C'(t) - (Ae^{tA}C(t) + B(t)) =$$

*Donc $C'(t) = e^{-tA}B(t)$ et on retrouve l'expression donnée dans le théorème. Cette façon de trouver une solution de $\mathcal{L}$ explique l'expression de "Méthode de la variation de la constante".*

— *Pour résoudre $\mathcal{L}$ il suffit tout simplement de trouver une solution particulière $\varphi_0$ de $\mathcal{L}$ et toutes les autres solutions s'écrivent comme la somme de $\varphi_0$ et d'une solution de $\mathcal{H}$.*

## 3.3 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $I$ désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

**Définition 3.3.1** *Soient $n \geqslant 1$, $(a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue.*

1. *L'équation :*
$$(\mathcal{L}) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$$
*s'appelle **équation différentielle linéaire à coefficients constants**.*
2. *L'équation :*
$$(\mathcal{H}) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$
*s'appelle **équation différentielle linéaire homogène associée à** $\mathcal{L}$.*

Résoudre $(\mathcal{L})$ ou $(\mathcal{H})$ revient à trouver un intervalle non vide $J \subset I$ et une fonction $y$ dérivable sur $J$ vérifiant $(\mathcal{L})$ ou $(\mathcal{H})$.

**Définition 3.3.2** *Soient $n \geqslant 1$, $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue. On appelle **équation caractéristique** de l'équation différentielle :*
$$(\mathcal{L}) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$$
*l'équation :*
$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

**Théorème 3.3.1** *On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient $n \geqslant 1$, $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Considérons l'équation homogène :*
$$(\mathcal{H}) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$
*Supposons que les racines de l'équation caractéristique soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ de multiplicité respectives $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$. Alors l'ensemble des solutions $S_{\mathcal{H}}$ définies sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Plus précisément :*
$$S_{\mathcal{H}} := \{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \ ; \ \exists (P_1, \cdots, P_r) \in \mathbb{C}_{\alpha_1 - 1}[X] \times \cdots \times \mathbb{C}_{\alpha_r - 1}[X] \ ; \ y(t) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t} P_i(t)\}$$

Preuve: Posons $Y = \begin{pmatrix} y^{(n-1)} \\ \vdots \\ y' \\ y \end{pmatrix}$. Alors :
$$Y' = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Y$$

Notons $A$ la matrice du système différentiel obtenu. Les solutions de ce système sont de la forme :

$$Y(t) = e^{tA}C$$

où $C \in \mathbb{C}^n$. Calculons le polynôme caractéristique de $A$. Alors :

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right)$$

et les racines de $\chi_A$ sont exactement les racines de l'équation caractéristique. Donc

$$\chi_A(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

Comme $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} C_{\lambda_i}(A)$, il existe $(U_1, \cdots, U_r) \in \prod_{i=1}^{r} C_{\lambda_i}(A)$ tel que $C = \sum_{i=1}^{r} U_i$. Donc par un raisonnement similaire à la preuve du théorème 3.2.2 :

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{r} e^{tA}U_i = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t I_n + t(A-\lambda_i I_n)}U_i = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t}e^{t(A-\lambda_i I_n)}U_i = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t}\sum_{k=0}^{\alpha_i - 1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda_i I_n)^k U_i$$

Il s'ensuit que la dernière coordonnée de $Y(t)$ qui n'est rien d'autre que $y(t)$ vérifie :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t}\sum_{k=0}^{\alpha_i - 1}\alpha_{ki}t^k = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t}P_i(t)$$

où $P_i$ est un polynôme de degré au plus $\alpha_i - 1$.

Réciproquement il faut vérifier que si $y(t) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t}P_i(t)$ où $P_i$ est un polynôme de degré au plus $\alpha_i - 1$ alors $y$ est solution de $(\mathcal{H})$. Considérons l'endomorphisme suivant :

$$\begin{array}{rcccc} p & : & E & \longrightarrow & E \\ & & y & \longmapsto & p(y) = y' \end{array}$$

où $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors si $y \in S_{\mathcal{H}}$, on a :

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y = (p^n+a_{n-1}p^{(n-1)}+\cdots+a_1p'+a_0p)(y) = \prod_{i=0}^{r}(p-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i}(y) = 0$$

On va alors montrer le lemme suivant :

**Lemme 3.3.1** *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\alpha \geqslant 1$ un entier. Alors :*

$$(p - \lambda Id_E\ )^{\alpha}(t^{\alpha-1}e^{\lambda t}) = 0$$

Preuve: On a :

$$\begin{aligned}(p-\lambda \mathrm{Id}_E\ )(t^{\alpha-1}e^{\lambda t}) &= p(t^{\alpha-1}e^{\lambda t})-\lambda t^{\alpha-1}e^{\lambda t}\\ &= (\alpha-1)t^{\alpha-2}e^{\lambda t}+\lambda t^{\alpha-1}e^{\lambda t}-\lambda t^{\alpha-1}e^{\lambda t}\\ &= (\alpha-1)t^{\alpha-2}e^{\lambda t}\end{aligned}$$

Soit $j\in\{1,\dots,\alpha-1\}$. Pour $j=1$, on vient de montrer que :

$$(p-\lambda \mathrm{Id}_E\ )^j(t^{\alpha-1}e^{\lambda t})=(\alpha-1)t^{\alpha-1-j}e^{\lambda t}$$

Pour $j\geqslant 2$, supposons que :

$$(p-\lambda \mathrm{Id}_E\ )^j(t^{\alpha-1}e^{\lambda t})=(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-j)t^{\alpha-1-j}e^{\lambda t}$$

et montrons que cette relation reste vraie au rang $j+1$.

$$\begin{aligned}(p-\lambda \mathrm{Id}_E\ )^{j+1}(t^{\alpha-1}e^{\lambda t}) &= (p-\lambda \mathrm{Id}_E\ )((\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-j)t^{\alpha-1-j}e^{\lambda t})\\ &= (\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-j)(p(t^{\alpha-1-j}e^{\lambda t})-\lambda t^{\alpha-1-j}e^{\lambda t})\\ &= (\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-j)(\alpha-1-j)t^{\alpha-1-(j+1)}e^{\lambda t}\end{aligned}$$

La relation est donc vraie au rang $j+1$ et on conclut qu'elle est vraie pour tout $j\in\{1,\dots,\alpha\}$. En prenant $j=\alpha$, on obtient la relation désirée. □

De ce lemme on déduit immédiatement que pour tout $P_i\in\mathbb{C}_{\alpha_i-1}[X]$, la fonction $t\longmapsto e^{\lambda_i t}P_i(t)\in S_{\mathcal{H}}$.

□