# Preuve du théorème de Thalès avec les aires (Euclide)

hypothèses

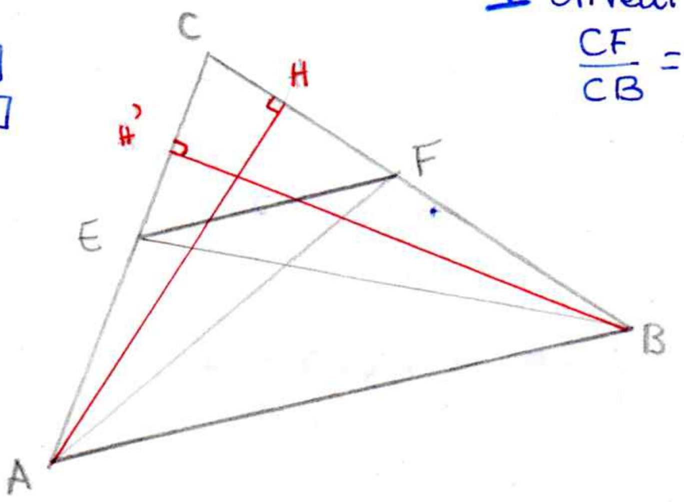
ABC, un triangle

$(EF) // (AB)$

avec $E \in [AC]$

$F \in [BC]$

**I** On veut montrer que $\dfrac{CF}{CB} = \dfrac{CE}{CA}$




• On a : $\mathcal{A}(ABE) = \mathcal{A}(ABF)$ ① ( même base [AB], m̂ hauteur car (AB)// EF)

• On considère la hauteur [BH'] et la hauteur [AH] :

On a $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{AH \times BC}{2} = \dfrac{BH' \times AC}{2}$ ②

On a aussi : $\mathcal{A}(BCE) = \dfrac{BH' \times CE}{2}$ et $\mathcal{A}(ACF) = \dfrac{AH \times CF}{2}$ ③

Par ailleurs $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ACF) + \underbrace{\mathcal{A}(AFB)} = \mathcal{A}(BCE) + \underbrace{\mathcal{A}(BEA)}$ = d'après ①

donc $\mathcal{A}(ACF) = \mathcal{A}(BCE)$

en remplaçant grâce à ③ : $\dfrac{BH' \times CE}{2} = \dfrac{AH \times CF}{2} \Rightarrow \dfrac{AH}{BH'} = \dfrac{CE}{CF}$

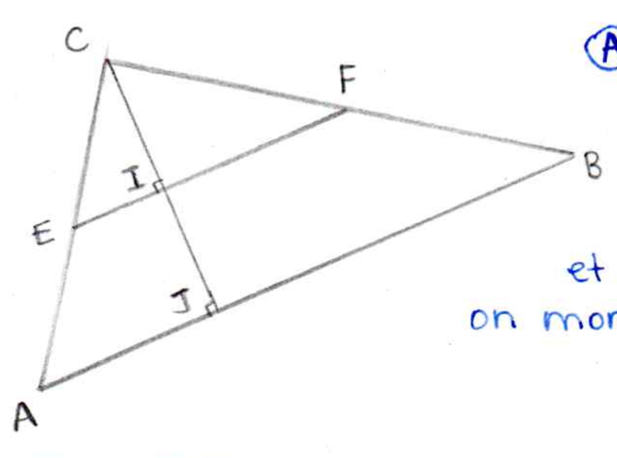
de ② on obtient $\dfrac{AH \times BC}{2} = \dfrac{BH' \times AC}{2} \Rightarrow \dfrac{AH}{BH'} = \dfrac{AC}{BC}$

on tire donc : $\dfrac{CE}{CF} = \dfrac{AC}{BC}$ d'où l'égalité recherchée : $\boxed{\dfrac{CF}{CB} = \dfrac{CE}{CA}}$

**II** On veut montrer la $3^e$ inégalité de rapports :

$\dfrac{CF}{CB} = \dfrac{CE}{CA} = \dfrac{EF}{AB}$

On introduit la hauteur issue de C, qui coupe [EF] en I et [AB] en J.




Ⓐ Dans le triangle rectangle JBC, on montre que $\dfrac{CI}{CJ} = \dfrac{IF}{JB}$ ①

et en utilisant la demarche du I on montre aussi que $\dfrac{CF}{CB} = \dfrac{CI}{CJ}$