Preuve de ① $\frac{CI}{CJ} = \frac{IF}{JB}$:

on a $\mathcal{A}(CJB) = \frac{CJ \times JB}{2}$ (triangle rectangle en J)

on a aussi $\mathcal{A}(CJB) = \mathcal{A}(CIF) + \mathcal{A}(IJBF)$

$$= \underbrace{\frac{CI \times IF}{2}}_{\substack{CIF \\ \text{rect en } I}} + \underbrace{\frac{(IF+JB)}{2} \times IJ}_{\text{aire trapèze}}$$

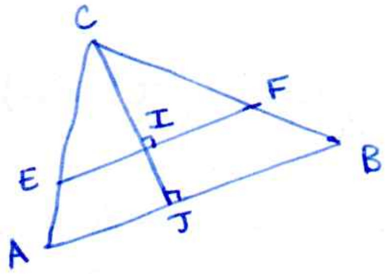
$$\frac{CJ \times JB}{2} = \frac{CI \times IF}{2} + \frac{(IF+JB) \times IJ}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad CJ = \frac{CI \times IF}{JB} + \left(\frac{IF}{JB} + 1\right) \times (CJ - CI)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{CJ} = \frac{IF}{JB}\left(\cancel{CI} + CJ - \cancel{CI}\right) + \cancel{CJ} - CI$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \frac{IF}{JB} \times CJ - CI$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{CI}{CJ} = \frac{IF}{JB}}$$



Ⓑ de facon symétrique, dans le triangle ACJ rect en J on obtient : $\frac{EI}{AJ} = \frac{CI}{CJ} = \frac{CE}{CA}$.

il nous manque pour finir : $\frac{EF}{AB} = \frac{CE}{CA} = \frac{CF}{CB}$

$\to \frac{EI+IF}{AJ+JB}$

on decompose l'aire de ABC :

$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ECF) + \mathcal{A}(EABF)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{CJ \times AB}{2} = \frac{CI \times EF}{2} + \frac{(EF+AB)}{2} \times IJ$$

$$\Leftrightarrow \quad CJ = CI \times \frac{EF}{AB} + \left(\frac{EF}{AB} + 1\right) \times IJ$$

$$\Leftrightarrow \quad CJ = \frac{EF}{AB}\left(CI + IJ\right) + IJ$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{CJ - IJ}_{CI} = \frac{EF}{AB} \times CJ$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{EF}{AB} = \frac{CI}{CJ}}$$

en rassemblant tous les resultats, on a au final :

$$\boxed{\frac{EF}{AB} = \frac{CE}{CA} = \frac{CF}{CB}}$$