選擇權 - 評價與應用

Efficient Analytic Approximation of American Option Values
Barone-Adesi and Whaley (BAW, 1987)

教師：江彌修 老師

TA : 曾子維

12/7/2023

美式選擇權評價

美式選擇權評價

- 美式選擇權(American option) 與歐式選擇權唯一不同之處，在於選擇權持有人(holder) 擁有提早履約(early exercise) 的權利。由於賦予更多的權利，美式選擇權的價值會比同樣規格的歐式選擇權契約昂貴。
- **特例**: 美式買權在Black-Scholes 模型下（**不支付股利**），可被證明出不值得提早履約，因此美式買權與歐式買權的價值在此條件下是相等的。

- **美式選擇權定價公式**:
  - 美式選擇權具有提前執行的權利，因此相對於歐式的到期執行的條件，複雜度增加不少。
  - 提前執行的時機本身就帶有不確定性，加上資產價格的不確定性，即具有雙重的隨機性。

- 美式選擇權(American option) 的價值函數，記為 $P_{am}(t,x)$，可被定義為以下聯立方程組的解:

$$\begin{cases} L_{\mathrm{BS}} P_{\mathrm{am}}(t,x) = 0, & x > x^\star(t), \\ P_{\mathrm{am}}(t,x) = (K-x)^+, & x \le x^\star(t) \end{cases}$$

- 其中臨界股價 $x^*(t)$ 也是未知的。
- 這類的聯立偏微分方程組的問題稱之為「自由邊界問題」(free boundary problem) ，此方程式至今尚無封閉解。不過，它仍然有機率的表示式:

$$P_{\mathrm{am}}(t,x) = \sup_{t \le \tau \le T} E^\star \left[e^{-r(T-t)} (K - S_\tau)^+ | S_t = x \right]$$

- 其中 τ 是**停止時間(stopping time)**: 契約可以被履約的時間。

- **探討 BS P.D.E.**
  - 滿足此以下 P.D.E. 的 $V(S,t)$ 均有公式。

$$\text{BS P.D.E.}: \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

or

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0$$

其中，若 $V(S,t) = V(S)$，也就是說 V 與 t 是獨立的，因此 $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$，則代入 BS P.D.E.如下：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

此為一「二階 O.D.E.」（非線性），可將其轉換為線性 O.D.E.，得其簡易之解析解。

Linearity of BS P.D.E.

- BS P.D.E.是一個符合線性關係的 P.D.E.。
- 假設 $C(S,t)$ 及 $P(S,t)$ 皆是服從 BS P.D.E.之選擇權商品，L_{BS} 爲 BS 運算子 (BS operator)，則 $L_{BS}(aC+bP)$ 為一個由 $C(S,t)$ 與 $P(S,t)$ 組成之投資組合，其中 a,b ∈ R，證明如下:

$$
\begin{aligned}
L_{BS}(aC+bP) &= \frac{\partial}{\partial t}(aC+bP) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2}(aC+bP) + rS\frac{\partial}{\partial S}(aC+bP) - r(aC+bP) \\
&= (aC_t + bP_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 (aC_{SS} + bP_{SS}) + rS(aC_S + bP_S) - r(aC+bP) \\
&= a\left(C_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + rSC_S - rC\right) + b\left(P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 P_{SS} - rP\right) \\
&= aL_{BS}(C) + bL_{BS}(P)
\end{aligned}
$$

- 因此我們得到 BS P.D.E. 具有線性之性質。

BSM model

- BSM 模型之假設一延襲 BS 模型之假設，無險成長率 r 及標的資產之持有成本 b 皆為常數，且標的資產的價格過程服從隨機微分方程(S.D.E.)，如下:

$$\frac{dS}{S} = \alpha dt + \sigma dz$$

- BSM P.D.E. ： $V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + bSV_S - rV = 0$

- 若以買權為例，則 BS 與 BSM 差異如下：

$$BS: C_E(S,T) = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$
$$BSM: C_E(S,T) = Se^{-(r-b)T} \cdot N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$

American Option 之特性與分析

- 美式選擇權與歐式選擇權最大的差異就在於提前履約的特性(權利)，使得美式選擇權的評價無法存在解析解(closed form solution)，但由於提前履約的特性，**美式選擇權的價值必定會大於等於歐式選擇權之價值**。以下為 BSM 模型中, 考慮 $b < r$ 及 $b \geq r$ 情況下，可得此結論 :
  - **考慮 $b < r$ (有股利發放,** $b=r-d$) 之情況:

$$C_E = S \cdot e^{-(r-b)T} - X \cdot e^{-rT}$$
$$C_A = S - X$$

  - 由於 $r-b < r$，可知經過折現因素所得之歐式買權必定會小於等於美式買權，因此美式買權會有提前履約之可能。

American Option 之特性與分析

- **考慮 $b \geq r$**，也等同於考慮 $b = r$（**無股利發放**）之情況:

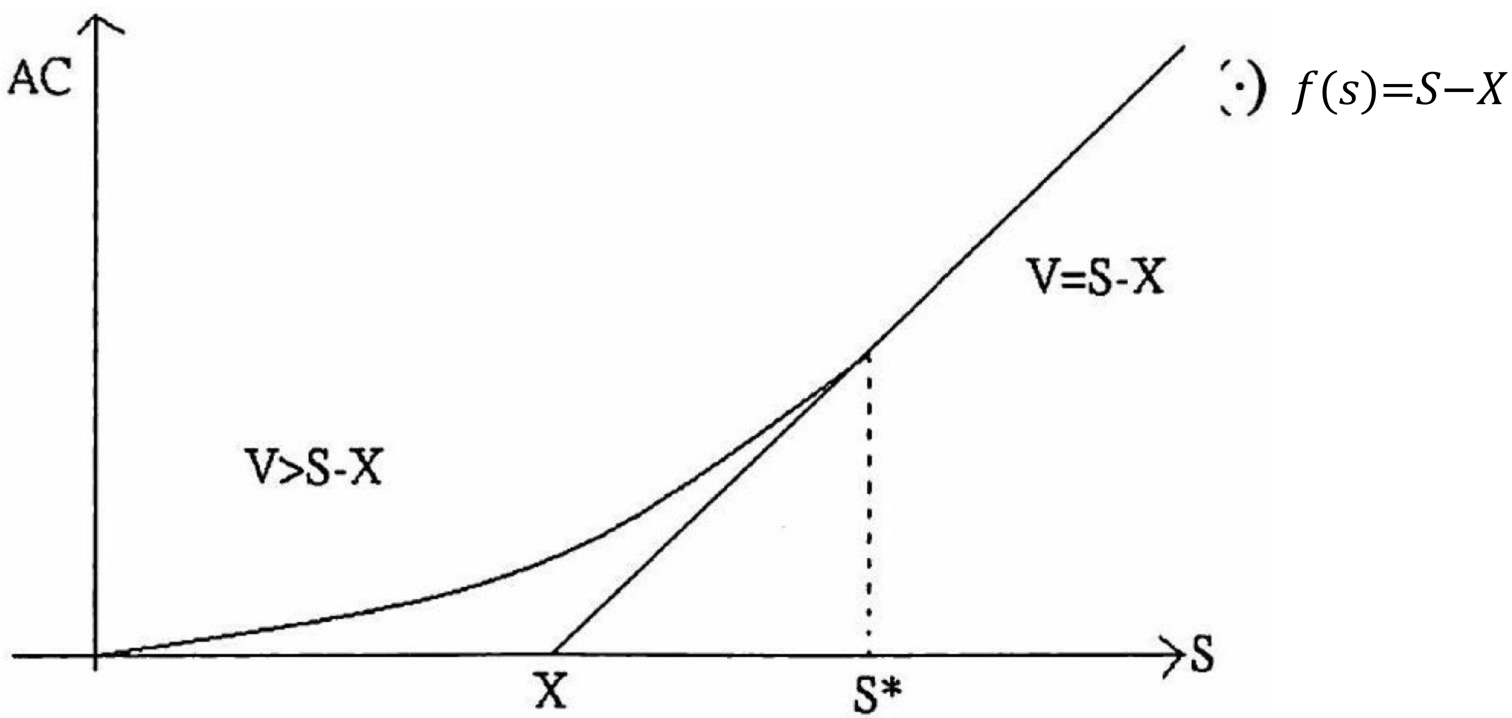
$$C_E = S - X \cdot e^{-rT}$$
$$C_A = S - X$$

- 可得 $C_A < C_E$ ，因此在無股利發放之況下，美式買權不會提前履約，其價值等同於續抱至到期之歐式買權價值相同。但考慮賣權：

$$P_E = Xe^{-rT} - S$$
$$P_A = X - S$$

- 由於歐式賣權之價值存在折現因素，美式賣權價值可能大於歐式賣權，因此即使無股利發放，美式賣權仍存在提前履約之可能。

- 由於多了時間價值，美式選擇權的價值必大於等於其內涵價值，可表示為 $V(S,t) \geq f(S)$，其中 V 爲美式選擇權的價值；$f(\cdot)$ 爲其 payoff 函數。以下分析美式選擇權的價格行為(以買權為例)，美式買權之價格過程如下圖:



American Option 之特性與分析

- 若 $V(S,t) = f(s)$，表示提早履約的情況發生，則 $d\pi_t \leq r\pi_t d_t$，導致其 BS P.D.E. 等號不成立：

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rsV_S - rV \leq 0$$
$$\text{and } V = S - X$$

- 換言之，必存在一個標第資產的臨界值，當標的資產價值大於此臨界值，則美式買權持有人會選擇提前履約，獲得 $V=S-X$ 之報酬；相反的，假如標的資產價值小於此臨界值，則美式買權持有人會繼續值有，而由於時間價值因素，$V>S-X$。

美式模型可解析性

- 首先定義 $C_A(S,T)$ 為美式買權之價值； $C_E(S,T)$ 為歐式買權之價值，$\varepsilon(S,T)$ 為美式買權提早履約的溢酬。假設 C_A 與 C_E 皆服從 BS P.D.E. 的前提之下，美式與歐式之價差(溢酬)表示如下：

$$\varepsilon(S,T) = C_A(S,T) - C_E(S,T) \tag{7}$$

根據前述 BS P.D.E.之線性特質，$\varepsilon(S,T)$ 亦服從 BS P.D.E.：

$$\rightarrow \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \varepsilon_{SS} - r\varepsilon + bS\varepsilon_S + \varepsilon_t = 0 \tag{8}$$

Second, equation (8) is multiplied by $2/\sigma^2$, and, third, the notational substitutions $M = 2r/\sigma^2$ and $N = 2b/\sigma^2$ are made. Equation (8) now reads as

$$\rightarrow S^2 \varepsilon_{SS} - M\varepsilon + NS\varepsilon_S - \frac{M}{r}\varepsilon_T = 0 \tag{9}$$

- 由於影響美式選擇權之因素為其時間價值及標的資產價格，時間價值部份尤其重要，故將時間影響因素額外表示:

$$\text{令 } \varepsilon = K(T)f(S,K(T)) \text{ 則 } \varepsilon_S = Kf_S, \varepsilon_{SS} = Kf_{SS}, \varepsilon_T = K_T f + Kf_K K_T)$$

$$\to S^2Kf_{SS} - MKf + NSKf_S - \frac{M}{r}(K_T f + Kf_K K_T) = 0$$

$$\to S^2 f_{SS} + NSf_S - Mf\left(1 + \frac{K_T}{rK} + \frac{f_K K_T}{rf}\right) = 0$$

$$\to S^2 f_{SS} + NSf_S - Mf\left(1 + \frac{K_T}{rK}\left(1 + \frac{Kf_K}{f}\right)\right] = 0 \qquad (10)$$

- 而 $K(T) = 1 - e^{-rt}$ 服從指數分配，用來刻劃履約行為，為在持有到期時間內履約一次之機率。

美式模型可解析性

令 $K(T) = 1 - e^{-rt} \rightarrow K_T = re^{-rT}$

$$\rightarrow S^2 f_{SS} + NSf_S - Mf\left(1 + \frac{e^{-rT}}{K}\left(1 + \frac{Kf_K}{f}\right)\right] = 0$$

$$\rightarrow S^2 f_{SS} + NSf_S - Mf - Mf\frac{e^{-rT}}{K} - Me^{-rT} f_K = 0$$

$$\rightarrow S^2 f_{SS} + NSf_S - Mf\left(1 + \frac{1-K}{K}\right) - Me^{-rT} f_K = 0$$

$$\rightarrow S^2 f_{SS} + NSf_S - \frac{Mf}{K}(K + 1 - K) - M(1-K)f_K = 0$$

$$\rightarrow S^2 f_{SS} + NSf_S - \frac{Mf}{K} - M(1-K)f_K = 0 \qquad (11)$$

美式模型可解析性

- 考慮到期時間可視爲只有未到期 (T→∞) 與到期 (T→0) 兩種情況，

  $M(1-K)f_K$ 項及 $\frac{Mf}{K}$ 在此二狀態之型態如下：

  - 當 $T\to\infty$，$K(T)\to 1$，$1-K=0$
  - 當 $T\to 0$，$K(T)\to 0$，$f(S,K)\approx f(S)$，$f_K=0$

$$\to S^2 f_{SS} + NSf_S - \boxed{\frac{Mf}{K}} - \boxed{M(1-K)f_K} = 0 \qquad (11)$$

- $M(1-K)f_K$ 項與時間之關係是可以省略的，$\frac{Mf}{K}$ 項只會在 $T\to 0$ 時無定義，但考慮實際經濟情況，仍予以保留，因此原式 P.D.E.可簡化如下：

$$S^2 f_{SS} + NSf_S - \frac{Mf}{K} = 0 \qquad (12)$$

求解 O.D.E.

- 由上述經濟意涵，合理簡化為二階 O.D.E.後，其解的形式已確知為「aS^q」，因此進行以下求解：

令 $f = aS^q \rightarrow f_S = aqS^{q-1}, f_{SS} = aq(q-1)S^{q-2}$

代回 O.D.E 可得: $aS^q\left[q^2 + (N-1)q - \frac{M}{K}\right] = 0$ (13)

因此確知可解出兩個獨立解分別為：

$$q_1 = \frac{-(N-1) - \sqrt{(N-1)^2 + \frac{4M}{K}}}{2} < 0 \qquad q_2 = \frac{-(N-1) + \sqrt{(N-1)^2 + \frac{4M}{K}}}{2} > 0$$

- 因此，O.D.E 解之型態為 $f(S) = a_1 S^{q_1} + a_2 S^{q_2}$

求解 O.D.E.

- 買權的價值與標的資產價格成正比, 當標的資產價格 $\rightarrow 0$ 時, 買權價格也 $\rightarrow 0$ 。
- 假設 $a_1 \neq 0$，則因 $q_1 < 0$，當 $S \rightarrow 0$ 時， $a_1 S^{q_1} \rightarrow \infty$， $f(S) \rightarrow \infty$，亦即，$S \rightarrow 0$ ， $\varepsilon_c \rightarrow \infty$，不符合經濟意義，因此 $a_1 = 0$ ，而解可以寫成 $Ka_2 S^{q_2}$ ，美式買權與歐式買權的關係也進一步得之為：

$$C_A(S,T) = C_E(S,T) + Ka_2 S^{q_2} \qquad (15)$$

- 賣權的價值與標的資產價格成反比。當標的資產價格 $\rightarrow \infty$，賣權價格也 $\rightarrow 0$。假設 $a_2 \neq 0$，則因 $q_2 > 0$，當 $S \rightarrow \infty$ 時， $a_2 S^{q_2} \rightarrow \infty$， $f(S) \rightarrow \infty$ (不合)，因此 $a_2 = 0$ ，而解可以寫成 $Ka_1 S^{q_1}$ ，美式賣權與歐式賣權的關係為： $P(S,T) = p(S,T) + Ka_1 S^{q_1}$

求解 Critical Commodity Price S^*

- 由前述美式選擇權價格之性質，可得知在 $S \to S^*$ 時，$V(S,t)$ 會漸近 $(S-X)$，因此在 $S = S^*$ 時，$V(S,t)$ 與 $(S-X)$ 的斜率相同:

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}(S-X)$$

- 所以可得：

$$1 = e^{-(r-b)T} \cdot N(d1) + Kq_2 a_2 S^{q_2-1} \qquad (17)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial S}[C_E(S,T)] &= \frac{\partial}{\partial S}\left[S \cdot e^{-(r-b)T} \cdot N(d_1) - Xe^{-rT} \cdot N(d_2)\right] \\
&= e^{-(r-b)T} \cdot N(d1) + Se^{-(r-b)T} \cdot \frac{\partial d1}{\partial S} \cdot \frac{\partial}{\partial d1} N(d_1) - Xe^{-rT} \cdot \frac{\partial d2}{\partial S} \cdot \frac{\partial}{\partial d2} N(d_2) \\
&= e^{-(r-b)T} \cdot N(d1) + Se^{-(r-b)T} \cdot \frac{\partial d1}{\partial S} n(d_1) - Xe^{-rT} \cdot \frac{\partial d2}{\partial S} \cdot n(d_2)
\end{aligned}$$

求解 Critical Commodity Price S^*

其中， $\frac{\partial d1}{\partial S}=\frac{\partial d2}{\partial S}=\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial S}[C_E(S,T)] = e^{-(r-b)T}N(d_1) + Se^{-(r-b)T}\cdot n(d_1)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}} - Xe^{-rT}n(d_2)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}$$

$$= e^{-(r-b)T}\left[N(d_1)+\frac{n(d_1)}{\sigma\sqrt{T}}\right] - Xe^{-rT}\frac{n(d_2)}{S\sigma\sqrt{T}}$$

$$\because n(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_2^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\cdot e^{\sigma\sqrt{T}d_1-\frac{\sigma^2}{2}T}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\cdot e^{\ln\left(\frac{S}{X}\right)+\left(b+\frac{\sigma^2}{2}\right)T-\frac{\sigma^2}{2}T}$$

$$= n(d_1)\left(\frac{S}{X}\right)e^{bT}$$

求解 Critical Commodity Price S^*

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial S}[C_E(S,T)] = e^{-(r-b)T}N(d_1) + e^{-(r-b)T} \cdot n(d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} - Xe^{-rT}n(d_2) \cdot \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}$$

$$= e^{-(r-b)T}N(d_1) + e^{-(r-b)T} \cdot n(d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} - Xe^{-rT} \cdot n(d_1)\frac{S}{X}e^{bT} \cdot \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}$$

$$= e^{-(r-b)T}N(d_1) + \boxed{e^{-(r-b)T} \cdot n(d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} - e^{-rT} \cdot n(d_1)e^{bT} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}}$$

$= e^{-(r-b)T}N(d_1)$ ∴ 求得 $\frac{\partial}{\partial S}[C_E(S,T)] = e^{-(r-b)T}N(d_1)$

求解 Critical Commodity Price S^*

$$\text{i.e.}\ \frac{\partial}{\partial S}(S^* - X) = \frac{\partial}{\partial S}\left[c(S,T) + K a_2 S^{q_2}\right]$$

From (15) $C_A(S,T) = C_E(S,T) + K a_2 S^{q_2}$

$$1 = e^{-(r-b)T} \cdot N(d1) + K q_2 a_2 S^{q_2 - 1} \qquad (17)$$

$$\boldsymbol{a_2 = \{1 - e^{(b-r)T}\mathrm{N}[d_1(S^*)]\}/Kq_2 S^{*q_2-1}.} \qquad (18)$$

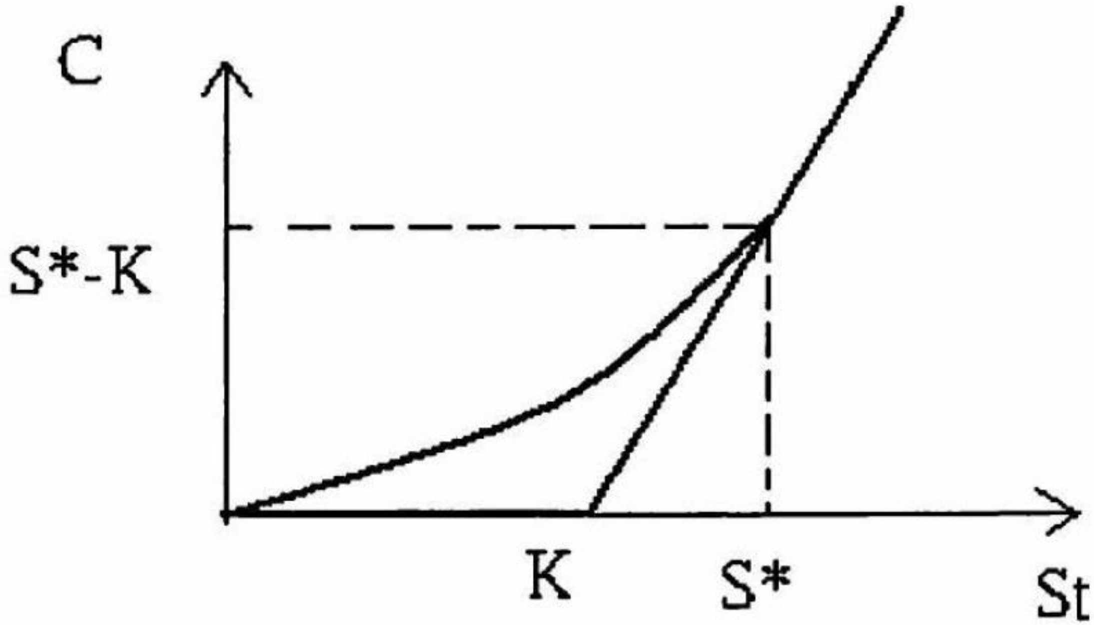
- Substituting (18) into (15) and simplifying results

$$= C_E + K \cdot \frac{1 - e^{-(r-b)T} \cdot N(d1)}{K q_2 S^{*q_2 - 1}} \cdot S^{q_2}$$

$$= C_E + \left[1 - e^{-(r-b)T} \cdot N(d_1)\right] \cdot \frac{S^*}{q_2} \cdot \left(\frac{S}{S^*}\right)^{q_2}$$

$$= C_E + A_2 \cdot \left(\frac{S}{S^*}\right)^{q_2} \quad 令\ A_2 = \left[1 - e^{-(r-b)T} \cdot N(d_1)\right] \cdot \frac{S^*}{q_2}$$

求解 Critical Commodity Price S^*



$$C(S,\ T) = c(S,\ T) + A_2(S/S^*)^{q_2}, \quad \text{when } S < S^*, \text{ and}$$

$$C(S,\ T) = S - X, \qquad \text{when } S \geq S^*, \tag{20}$$

- **求解 $\boldsymbol{C_A}$:**

$$C_A = S^* - X = c(S^*, T) + \{1 - e^{(b-r)T}\mathrm{N}[d_1(S^*)]\}S^*/q_2. \qquad (19)$$

$$\mathrm{LHS}(S_i) = S_i - X, \quad \text{and} \qquad (26a)$$

$$\mathrm{RHS}(S_i) = c(S_i, T) + \{1 - e^{(b-r)T}\mathrm{N}[d_1(S_i)]\}S_i/q_2, \qquad (26b)$$

- 則求解的函數為$F(S^*) = LHS(S^*) - RHS(S^*)$,並利用牛頓法(Newton‘s Method) 求解之。

$$\therefore F(S_i) = (S_i - X) - C_E(S_i, T) - \frac{S_i}{q_2}\left[1 - e^{-(r-b)T} \cdot N(d_1)\right]$$

$$\rightarrow S_{i+1} = S_i - \frac{F(S_i)}{F'(S_i)}$$

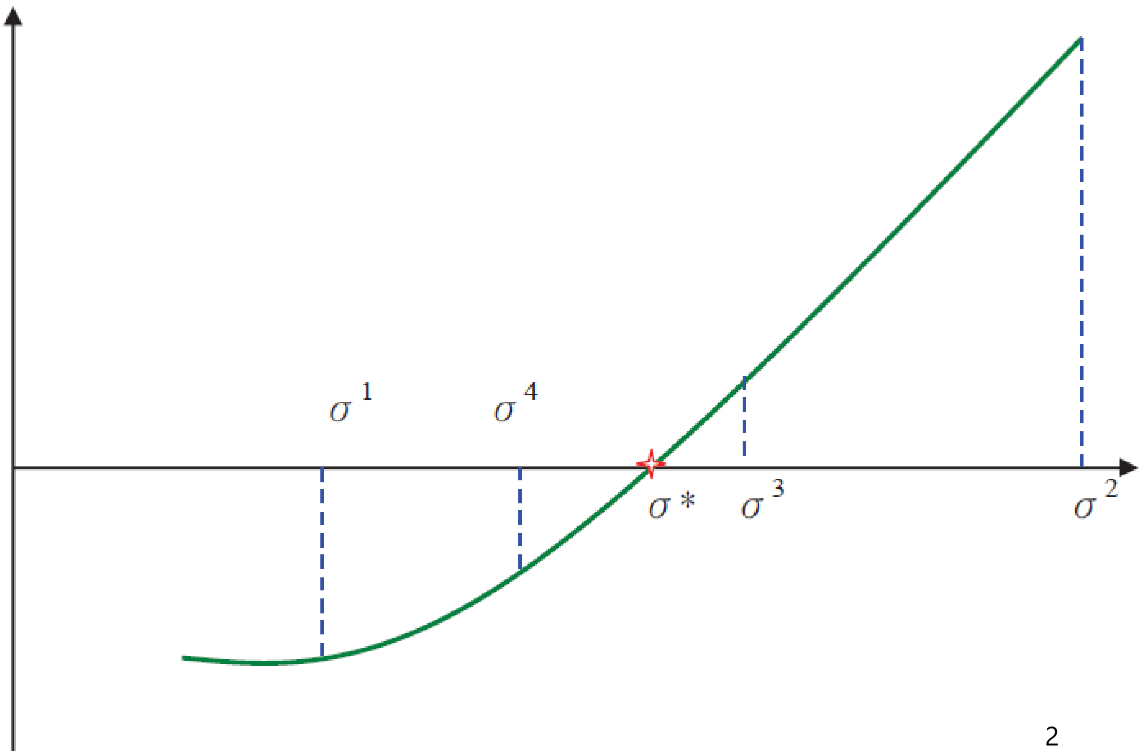
(Review) Bisection Method

- 已知 C*，要求 σ *，如下式

$$C^* = f(S, K, T, r_d, r_f, \sigma^*)$$

- 轉化為下式求根

$$g(\sigma^*) = f(S, K, T, r_d, r_f, \sigma^*) - C^* = 0$$



利用數值方法解出 S^*

其中 $F'(S_i) = \frac{\partial}{\partial S_i}[LHS(S^*) - RHS(S^*)]$

$$= 1 - \frac{\partial}{\partial S_i} C_E(S_i T) - \frac{1}{q_2}\left[1 - e^{-(r-b)T} \cdot N(d_1)\right] + \frac{S_i}{q_2}\left[e^{-(r-b)T} \cdot \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \cdot \frac{\partial d_1}{\partial S_i}\right]$$

$$= 1 - \left[e^{-(r-b)T} \cdot N(d_1) + \frac{1}{q_2} - \frac{e^{-(r-b)T} \cdot N(d_1)}{q_2} - \frac{S_i}{q_2} e^{-(r-b)T} n(d_1) \cdot \frac{1}{S_i \sigma \sqrt{T}}\right]$$

$$= 1 - \left\{e^{-(r-b)T} \cdot N(d_1)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right) + \frac{1}{q_2}\left[1 - \frac{e^{-(r-b)T} \cdot n(d_1)}{\sigma\sqrt{T}}\right]\right\}$$

$$= 1 - b_i \text{ 設 } b_i = e^{-(r-b)T} \cdot N(d_1)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right) + \frac{1}{q_2}\left[1 - \frac{e^{-(r-b)T} \cdot n(d_1)}{\sigma\sqrt{T}}\right] \qquad (27)$$

$$\therefore S_{i+1} = S_i - \frac{F(S_i)}{F'(S_i)} = S_i \boxed{- \frac{LHS(S_i) - RHS(S_i)}{1 - b_i}}$$

$$= \frac{S_i(1 - b_i) - S_i + X + RHS(S_i)}{1 - b_i} = \frac{b_i S_i + X + RHS(S_i)}{1 - b_i} \qquad (28)$$

利用數值方法解出 S^*

- 牛頓法的停止條件假設為 10^{-5}

$$|\,\mathrm{LHS}(S_i) - \mathrm{RHS}(S_i)\,|/X < 0.00001. \tag{29}$$

牛頓法之起始點(seed value)

- The iterative technique outlined here converges reasonably quickly by setting the seed value S_1 equal to the option's exercise price X.
- However, can be improved by using a starting point closer to the solution.

$$S^* - X = c(S^*, T) + \{1 - e^{(b-r)T}\mathrm{N}[d_1(S^*)]\}S^*/q_2. \qquad (19)$$

take limit, $\lim_{T\to\infty}(S - X) = \lim_{T\to\infty}\left\{C(S,T) + \frac{S}{q_2}\left[1 - e^{-(r-b)T}\cdot N(d_1)\right]\right\}$

$$\begin{aligned} S - X &= \lim_{T\to\infty}\left[Se^{-(r-b)T}N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)\right] + \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{S}{q_2}\left[1 - e^{-(r-b)T}\cdot N(d_1)\right]\right\} \\ &= S\cdot\lim_{T\to\infty}e^{-(r-b)T}N(d_1) - X\cdot\lim_{T\to\infty}e^{-rT}\cdot N(d_2) + \frac{S}{q_2} - \lim_{T\to\infty}\frac{S}{q_2}e^{-(r-b)T}N(d_1) \\ &= S\cdot 0 - X\cdot 0 + \frac{S}{q_2} - 0 \\ &= \frac{S}{q_2} \end{aligned}$$

因此, $\boxed{S^*(\infty) = \frac{X}{1-\frac{1}{q_2(\infty)}}}$, where $q_2(\infty) = \frac{1}{2}\left[-(N-1) + \sqrt{(N-1)^2 + 4M}\right]$

牛頓法之起始點(seed value)

假設 $S(\triangle)-X$ 為在時間點 $T=\triangle$ 提早履約得到的利潤；

$[S(\triangle)-\mathrm{X}](1+\mathrm{r}\triangle)$為提早履約後，在時間點 T=0 時得到的利潤;

$E[S(0)-X \mid S(0)>\mathrm{X}]$ 持有到時間點 T=0 時的利潤；因此，持有者提早履約與否之決定發生在：

$$[S^*(\triangle)-X](1+r\triangle)=E[S^*(0)-X \mid S^*(0)>X] \qquad \text{(A2)}$$

To evaluate the right-hand side of (A2), represent the commodity price at the expiration of the option using the Cox-Ross-Rubinstein [7] risk-neutral binomial approach, that is,

$$S^*(0)=S^*(\Delta)(1+b\Delta \pm \sigma\sqrt{\Delta}). \qquad \text{(A3)}$$

The expected value of holding the call to expiration is

$$\mathrm{E}[\mathrm{S}^*(0)-\mathrm{X} \mid \mathrm{S}^*(0)>\mathrm{X}]=0.5\left[\mathrm{S}^*(\Delta)(1+\mathrm{b}\Delta+\sigma\sqrt{\Delta})-\mathrm{X}\right] \qquad \text{(A4)}$$

牛頓法之起始點(seed value)

- (A4) substituted into (A2)

$$\Rightarrow [S^*(\Delta) - X](1 + r\Delta) = 0.5\left[S^*(\Delta)(1 + b\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}) - X\right] \qquad \text{(A5)}$$

Rearranging equation (A5) to isolate $S^*(\Delta)$ provides

$$S^*(\Delta) = [X(1 + 2\Delta r)]/[1 + (2r - b)\Delta - \sigma\sqrt{\Delta}], \qquad \text{(A6)}$$

$$\begin{aligned} S^*(\Delta) &\approx X(1 + 2\Delta r)[1 - (2r - b)\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}] \\ &\approx X(1 + b\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}). \qquad \text{(A7)} \end{aligned}$$

To approximate S^* for arbitrary times to expiration, expand $S^*(0)$ around $S^*(\Delta)$, that is,

$$S^*(0) = \boxed{S^*(\Delta)} + (\delta S^*/\delta T)_{T=\Delta}\Delta. \qquad \text{(A8)}$$

By (A7)

牛頓法之起始點(seed value)

- (A7) substituted into (A8)

$$\delta S^*/\delta T = S^*(0)(b + \sigma/\sqrt{\Delta}) \qquad \text{(A9)}$$

$$\Rightarrow \frac{dS^*}{S} = \left(b + \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}}\right) dT$$

$$\Rightarrow ln\,S^*(T) - ln\,S^*(0) = bT + 2\sigma\sqrt{T}$$

$$\Rightarrow S^*(T) = S^*(0)e^{bT+2\sigma\sqrt{T}} = Xe^{bT+2\sigma\sqrt{T}}$$

牛頓法之起始點(seed value)

$$Xe^{bT+2\sigma\sqrt{T}}$$

$$= X + [S^*(\infty) - X]\frac{X}{[S^*(\infty) - X]}\left(bT + 2\sigma\sqrt{T}\right) = X + [S^*(\infty) - X](\text{-}h_2)$$

$$\overset{T\to 0\to h_2\to 0}{\approx} X + [S^*(\infty) - X]\left[1 - e^{h_2}\right] \qquad (A10)$$

where $h_2 = -\frac{X}{[S^*(\infty)-X]}\left(bT + 2\sigma\sqrt{T}\right)$,

and $-h_2 = \frac{X}{[S^*(\infty)-X]}\left(bT + 2\sigma\sqrt{T}\right) = 1 - (1 + h_2) \approx 1 - e^{h_2}$