

Corrigé RMS 2024

Alex6oko L. Mai 2025

Note sur les intitulés des exercices :

Les lettres qui précèdent les énoncés indiquent la provenance de l'exercice :

— X : École polytechnique

 $-\mathbf{U}: \mathrm{ENS}\;\mathrm{Ulm}$

- **L** : ENS Lyon

— **S** : ENS Paris-Saclay

 $-\mathbf{R}: \mathrm{ENS}\ \mathrm{Rennes}$

Corrigé personnel qui retrace l'évolution de la pensée du narrateur au cours de sa résolution, le narrateur le juge "solide" (sans laisser de définition de solidité). S'il te semble friable à certains endroits [ou partout? Impossible frère...], fais-le moi savoir, mais sache que...: alexisl-crd@gmail.com. Le narrateur a délibérément enlevé les étoiles de difficulté.

Exercice - ULSR

On étend de façon naturelle la valuation 2-adique v_2 à \mathbb{Q} . Pour un entier N, soit :

$$H_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$$

Calculer $v_2(H_N)$.

Proposition de corrigé:

Premièrement, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$H_N = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{N} = H_{N-1} + \frac{1}{N}$$

Notons $H_{N-1}=\frac{p}{q}$ écrit en fraction irréductible, ainsi on peut réécrire H_{N-1} sous la forme $\frac{a}{2^bd}$, avec :

$$\gcd(a,2)=1,\quad \gcd(2,d)=1,\quad b=-v_2(H_{N-1})\in\mathbb{Z} \text{ à priori}.$$

Toutefois si l'on avait b entier naturel, alors $H_N = \frac{aN + 2^b d}{2^b dN}$. Ainsi en supposant ensuite N impair, on aurait $2 \nmid aN + 2^b d$, car

gcd(a,2) = 1, ainsi dans ce cas $v_2(H_N) = v_2(H_{N-1})$, car gcd(2,d) = 1. En calculant pour quelques valeurs $v_2(H_N)$, on "sent" que b est un entier naturel.

Montrons alors par récurrence sur l'entier N que $v_2(H_N) \leq 0$ (Lemme 1).

Initialisation en N=1: jugée triviale

 $\underline{\text{H\'er\'edit\'e}}$: Soit N \geq 2, supposons le résultat vrai au rang N-1, montrons le au rang N. En gardant l'écriture qu'on avait précédement, $H_N=\frac{aN+2^bd}{2^bdN}$ (avec N impair ou pair ici

parcontre). Par "extension" de v_2 de \mathbb{Z} à \mathbb{Q} , $v_2(H_N) = v_2(\frac{aN+2^bd}{2^bdN}) = v_2(aN+2^bd) - v_2(2^bdN)$, si N est impair alors le résultat est trivial. Si N est pair, le calcul donne $v_2(H_N) = v_2(aN+2^bd) - v_2(aN+2^bd)$ $2^{b}d) - v_{2}(2^{b}dN) = min(v_{2}(N), b) - (v_{2}(N) + b)).$

Si $min(v_2(N), b) = b$ alors $v_2(H_N) = -v_2(N) \le 0$, car $N \in \mathbb{N}$.

Sinon si $min(v_2(N), b) = v_2(N)$ alors $v_2(H_N) = -b \le 0$, par hypothèse de récurrence.

Conclusion: Ok!

Donc on a établi par le **Lemme 1** que si N est impair, $v_2(H_N) = v_2(H_{N-1})$. On sait alors que $(v_2(H_N))$ est une suite par paliers (de taille au moins 2 quand n est plus grand que 2). En calculant les valuations 2-adiques pour plusieurs valeurs, on conjecture le résultat suivant :

$$v_2(H_n) = -k$$
 pour $n = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i + 1 = 2^{k-1} + 1$ à $\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^k$ occurrences consécutives.

C'est-à-dire $v_2(H_n) = -\lfloor \log_2(n) \rfloor$, pour tout entier naturel n.

Montrons le résultat par récurrence (on ne fait que l'hérédité mes frères). Soit n un entier naturel non nul, On a $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$ donc $v_2(H_{n+1}) = min(v_2(H_n), v_2(\frac{1}{n+1})) = min(v_2(H_n), v_2(\frac{1}{n+1}))$ $\min(-\lfloor \log_2(n) \rfloor, v_2(\frac{1}{n+1}))$ (par hypothèse de récurrence).

Or $v_2(\frac{1}{n+1}) = -v_2(n+1) \ge -\lfloor \log_2(n+1) \rfloor$. Et si n+1 n'est pas une puissance de 2, alors $\lfloor \log_2(n+1) \rfloor = \lfloor \log_2(n) \rfloor$. Sinon si $n+1=2^k$, alors $v_2(n+1)=k=\log_2(n+1)$, donc : $v_2\left(\frac{1}{n+1}\right)=-k=-\lfloor \log_2(n+1) \rfloor$ 1) $| \leq -|\log_2(n)|$ Donc dans tout les cas, $v_2(\frac{1}{n+1}) \le -\lfloor \log_2(n) \rfloor$. Donc $v_2(H_{n+1}) = -\lfloor \log_2(n+1) \rfloor$ CQFD

Exercice – U

Soit $(m, n, p) \in \mathbb{N}^3$, avec p un nombre premier supérieur ou égal à 5, et m premier avec p.

a) Montrer que :

$$\binom{np}{m} \equiv 0 \pmod{p}$$

b) Montrer que:

$$\binom{np}{mp} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p(n-1)}{mp-k} \binom{p}{k}$$

c) Montrer que :

$$\binom{np}{mp} \equiv \binom{n}{m} \pmod{p^2}$$

L'objectif de la suite est de montrer que :

$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^3}$$

d) Montrer que:

$$\forall k \in [1, p], \quad \binom{p-1}{k-1} \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

e) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{(p-1)!}{k} \right)^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

f) Conclure.

Proposition de corrigé:

a) Premièrement, on élague tout les cas pathologiques (qui sont trivials car p|0) en prenant m dans [1, np]. Ensuite, un exo classique, que l'on nommera **Lemme uno**, consiste à montrer que si gcd(m, p) = 1, alors $p \mid \binom{p}{m}$. Le narrateur le laisse en guise d'exercise, il suffit d'appliquer la Formule du pion + le lemme de Gauss. Avec le **Lemme uno**, on a gratuitement (si vous savez le montrer) le cas n=1.

Pour $n \geq 2$. Il suffit d'observer que $\binom{p}{m} \mid \binom{np}{m}$ (développer les coefficients binomiaux pour s'en convaincre). Donc p divise $\binom{np}{m}$.

b) Par un raisonnement combinatoire:

On veut prendre mp élements d'un ensemble E à np élements, soit. Considérons F un sous -ensemble de E à p élements. Prendre mp élements de E, revient à prendre k élements de F (pour $k \in [0, p]$), puis à compléter indépendamment avec mp-k élements dans $E \setminus F$ de cardinal pn-p.

D'où:

$$\binom{np}{mp} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p(n-1)}{mp-k} \binom{p}{k} \quad \text{("Analogue" à l'identit\'e de Vandermonde)}$$

c) 60ko a trimé... En utilisant b), puisque on montre aisément (lecteur [...])

que p divise $\binom{p}{k}$ et p divise $\binom{p(n-1)}{mp-k},$ pour k $\in \llbracket 1,p-1 \rrbracket.$ Alors $\binom{np}{mp} \equiv \binom{p(n-1)}{p(m-1)} + \binom{p(n-1)}{mp} \bmod p^2.$

Maintenant, si l'on suppose par récurrence (l'initialisation uniquement pour le lecteur) que la formule qu'on veut montrer est vraie au rang n-1 et m premier avec p, on a : $\binom{p(n-1)}{p(m-1)} \equiv \binom{n-1}{m-1} \mod p^2 \text{ et } \binom{p(n-1)}{mp} \equiv \binom{n-1}{m} \mod p^2.$

 $\text{Donc }\binom{np}{mp} \equiv \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{mp} \ mod \ p^2, \text{ i.e (Formule de Pascal) } \binom{np}{mp} \equiv \binom{n}{m} \ mod \ p^2.$

Exercice – L

Proposition de corrigé: