



## Corrigé RMS 2024

Alexis Lecordier Mai 2025

---

### Note sur les intitulés des exercices :

Les lettres qui précèdent les énoncés indiquent la provenance de l'exercice :

- **X** : École polytechnique
- **U** : ENS Ulm
- **L** : ENS Lyon
- **S** : ENS Paris-Saclay
- **R** : ENS Rennes

*Corrigé personnel qui retrace l'évolution de la pensée du narrateur au cours de sa résolution, le narrateur le juge "solide" (sans laisser de définition de solidité). S'il te semble friable à certains endroits [ou partout ? Impossible frère...], fais-le moi savoir, mais sache que... : alexislcrd@gmail.com. Le narrateur a délibérément enlever les étoiles de difficulté.*

### Exercice – ULSR

On étend de façon naturelle la valuation 2-adique  $v_2$  à  $\mathbb{Q}$ . Pour un entier  $N$ , soit :

$$H_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$$

Calculer  $v_2(H_N)$ .

### Proposition de corrigé :

Premièrement, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$H_N = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{N} = H_{N-1} + \frac{1}{N}$$

Notons  $H_{N-1} = \frac{p}{q}$  écrit en fraction irréductible, ainsi on peut réécrire  $H_{N-1}$  sous la forme  $\frac{a}{2^b d}$ , avec :

$$\gcd(a, 2) = 1, \quad \gcd(2, d) = 1, \quad b = -v_2(H_{N-1}) \in \mathbb{Z} \text{ à priori.}$$

Toutefois si l'on avait  $b$  entier naturel, alors  $H_N = \frac{aN+2^b d}{2^b dN}$ . Ainsi en supposant ensuite  $N$  impair, on aurait  $2 \nmid aN + 2^b d$ , car

$\gcd(a, 2) = 1$ , ainsi dans ce cas  $v_2(H_N) = v_2(H_{N-1})$ , car  $\gcd(2, d) = 1$ . En calculant pour quelques valeurs  $v_2(H_N)$ , on "sent" que  $b$  est un entier naturel.

Montrons alors par récurrence sur l'entier  $N$  que  $v_2(H_N) \leq 0$  (**Lemme 1**).

Initialisation en  $N=1$  : jugée triviale

Hérédité : Soit  $N \geq 2$ , supposons le résultat vrai au rang  $N-1$ , montrons le au rang  $N$ .

En gardant l'écriture qu'on avait précédemment,  $H_N = \frac{aN+2^b d}{2^b dN}$  (avec  $N$  impair ou pair ici

parcontre). Par "extension" de  $v_2$  de  $\mathbb{Z}$  à  $\mathbb{Q}$ ,  $v_2(H_N) = v_2(\frac{aN+2^b d}{2^b dN}) = v_2(aN+2^b d) - v_2(2^b dN)$ , si  $N$  est impair alors le résultat est trivial. Si  $N$  est pair, le calcul donne  $v_2(H_N) = v_2(aN+2^b d) - v_2(2^b dN) = \min(v_2(N), b) - (v_2(N) + b)$ .

Si  $\min(v_2(N), b) = b$  alors  $v_2(H_N) = -v_2(N) \leq 0$ , car  $N \in \mathbb{N}$ .

Sinon si  $\min(v_2(N), b) = v_2(N)$  alors  $v_2(H_N) = -b \leq 0$ , par hypothèse de récurrence.

Conclusion : Ok !

Donc on a établi par le **Lemme 1** que si  $N$  est impair,  $v_2(H_N) = v_2(H_{N-1})$ . On sait alors que  $(v_2(H_N))$  est une suite par paliers (de taille au moins 2 quand  $n$  est plus grand que 2). En calculant les valuations 2-adiques pour plusieurs valeurs, on conjecture le résultat suivant :

$$v_2(H_n) = -k \quad \text{pour } n = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i + 1 = 2^{k-1} + 1 \text{ à } \sum_{i=0}^k 2^i = 2^k \text{ occurrences consécutives.}$$

C'est-à-dire  $v_2(H_n) = -\lfloor \log_2(n) \rfloor$ , pour tout entier naturel  $n$ .

Montrons le résultat par récurrence (on ne fait que l'hérédité mes frères). Soit  $n$  un entier naturel non nul, On a  $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$  donc  $v_2(H_{n+1}) = \min(v_2(H_n), v_2(\frac{1}{n+1})) = \min(-\lfloor \log_2(n) \rfloor, v_2(\frac{1}{n+1}))$  (par hypothèse de récurrence).

Or  $v_2(\frac{1}{n+1}) = -v_2(n+1) \geq -\lfloor \log_2(n+1) \rfloor$ .

Et si  $n+1$  n'est pas une puissance de 2, alors  $\lfloor \log_2(n+1) \rfloor = \lfloor \log_2(n) \rfloor$ .

Sinon si  $n+1 = 2^k$ , alors  $v_2(n+1) = k = \log_2(n+1)$ , donc :  $v_2(\frac{1}{n+1}) = -k = -\lfloor \log_2(n+1) \rfloor \leq -\lfloor \log_2(n) \rfloor$

Donc dans tout les cas,  $v_2(\frac{1}{n+1}) \leq -\lfloor \log_2(n) \rfloor$ . Donc  $v_2(H_{n+1}) = -\lfloor \log_2(n+1) \rfloor$

CQFD

## Exercice – U

Soit  $(m, n, p) \in \mathbb{N}^3$ , avec  $p$  un nombre premier supérieur ou égal à 5, et  $m$  premier avec  $p$ .

a) Montrer que :

$$\binom{np}{m} \equiv 0 \pmod{p}$$

b) Montrer que :

$$\binom{np}{mp} = \sum_{k=0}^p \binom{p(n-1)}{mp-k} \binom{p}{k}$$

c) Montrer que :

$$\binom{np}{mp} \equiv \binom{n}{m} \pmod{p^2}$$

L'objectif de la suite est de montrer que :

$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^3}$$

d) Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \binom{p-1}{k-1} \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

e) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left( \frac{(p-1)!}{k} \right)^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

f) Conclure.

### Proposition de corrigé :

a) Premièrement, on élague tout les cas pathologiques (qui sont triviaux car  $p|0$ ) en prenant  $m$  dans  $\llbracket 1, np \rrbracket$ . Ensuite, un exo classique, que l'on nommera **Lemme uno**, consiste à montrer que si  $\gcd(m, p) = 1$ , alors  $p \mid \binom{p}{m}$ . Le narrateur le laisse en guise d'exercice, il suffit d'appliquer la Formule du pion + le lemme de Gauss. Avec le **Lemme uno**, on a gratuitement (si vous savez le montrer) le cas  $n=1$ .

Pour  $n \geq 2$ . Il suffit d'observer que  $\binom{p}{m} \mid \binom{np}{m}$  (développer les coefficients binomiaux pour s'en convaincre). Donc  $p$  divise  $\binom{np}{m}$ .

b) Par un raisonnement combinatoire :

On veut prendre  $mp$  éléments d'un ensemble  $E$  à  $np$  éléments, soit. Considérons  $F$  un sous-ensemble de  $E$  à  $p$  éléments. Prendre  $mp$  éléments de  $E$ , revient à prendre  $k$  éléments de  $F$  (pour  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ ), puis à compléter indépendamment avec  $mp-k$  éléments dans  $E \setminus F$  de cardinal  $pn-p$ .

D'où :

$$\binom{np}{mp} = \sum_{k=0}^p \binom{p(n-1)}{mp-k} \binom{p}{k} \quad (\text{Identité de Vandermonde})$$

c)

**Proposition de corrigé :**