Corrigé RMS 2024

Alex6oko L. Mai 2025

Note sur les intitulés des exercices :
Les lettres qui précèdent les énoncés indiquent la provenance de l'exercice :
— **X** : École polytechnique
— **U** : ENS Ulm
— **L** : ENS Lyon
— **S** : ENS Paris-Saclay
— **R** : ENS Rennes

Corrigé personnel qui retrace l'évolution de la pensée du narrateur au cours de sa résolution, le narrateur le juge "solide" (sans laisser de définition de solidité). S'il te semble friable à certains endroits [ou partout ? Impossible frère...], fais-le moi savoir, mais sache que... : alexislcrd@gmail.com. *Le narrateur a délibérément enlevé les étoiles de difficulté.*

Exercice – ULSR

On étend de façon naturelle la valuation 2-adique v_2 à $\mathbb{Q}$. Pour un entier N, soit :

$$H_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

Calculer $v_2(H_N)$.

Proposition de corrigé :

Premièrement, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$H_N = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{N} = H_{N-1} + \frac{1}{N}$$

Notons $H_{N-1} = \frac{p}{q}$ écrit en fraction irréductible, ainsi on peut réécrire H_{N-1} sous la forme $\frac{a}{2^b d}$, avec :

$$\gcd(a,2) = 1, \quad \gcd(2,d) = 1, \quad b = -v_2(H_{N-1}) \in \mathbb{Z} \text{ à priori.}$$

Toutefois si l'on avait b entier naturel, alors $H_N = \frac{aN+2^b d}{2^b dN}$. Ainsi en supposant ensuite N impair, on aurait $2 \nmid aN + 2^b d$, car
$\gcd(a,2) = 1$, ainsi dans ce cas $v_2(H_N) = v_2(H_{N-1})$, car $gcd(2,d) = 1$. En calculant pour quelques valeurs $v_2(H_N)$, on "sent" que b est un entier naturel.
Montrons alors par récurrence sur l'entier N que $v_2(H_N) \leq 0$ (**Lemme 1**).
Initialisation en N=1 : jugée triviale

Hérédité : Soit N ≥ 2, supposons le résultat vrai au rang N-1, montrons le au rang N.
En gardant l'écriture qu'on avait précédement, $H_N = \frac{aN+2^b d}{2^b dN}$ (avec N impair ou pair ici

parcontre). Par "extension" de v_2 de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$, $v_2(H_N) = v_2(\frac{aN+2^bd}{2^bdN}) = v_2(aN+2^bd) - v_2(2^bdN)$, si N est impair alors le résultat est trivial. Si N est pair, le calcul donne $v_2(H_N) = v_2(aN+2^bd) - v_2(2^bdN) = min(v_2(N), b) - (v_2(N) + b))$.
Si $min(v_2(N), b) = b$ alors $v_2(H_N) = -v_2(N) \leq 0$, car N $\in \mathbb{N}$.
Sinon si $min(v_2(N), b) = v_2(N)$ alors $v_2(H_N) = -b \leq 0$, par hypothèse de récurrence.

Conclusion : Ok !
Donc on a établi par le **Lemme 1** que si N est impair, $v_2(H_N) = v_2(H_{N-1})$. On sait alors que $(v_2(H_N))$ est une suite par paliers (de taille au moins 2 quand n est plus grand que 2). En calculant les valuations 2-adiques pour plusieurs valeurs, on conjecture le résultat suivant :

$$v_2(H_n) = -k \quad \text{pour } n = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i + 1 = 2^{k-1} + 1 \text{ à } \sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^k \text{ occurrences consécutives.}$$

C'est-à-dire $v_2(H_n) = -\lfloor \log_2(n) \rfloor$, pour tout entier naturel n.

Montrons le résultat par récurrence (on ne fait que l'hérédité mes frères). Soit n un entier naturel non nul, On a $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$ donc $v_2(H_{n+1}) = min(v_2(H_n), v_2(\frac{1}{n+1})) =$ min(-$\lfloor \log_2(n) \rfloor, v_2(\frac{1}{n+1})$) (par hypothèse de récurrence).

Or $v_2(\frac{1}{n+1}) = -v_2(n+1) \geq -\lfloor \log_2(n+1) \rfloor$.
Et si n+1 n'est pas une puissance de 2, alors $\lfloor \log_2(n+1) \rfloor = \lfloor \log_2(n) \rfloor$.
Sinon si $n+1 = 2^k$, alors $v_2(n+1) = k = \log_2(n+1)$, donc : $v_2\left(\frac{1}{n+1}\right) = -k = -\lfloor \log_2(n+1) \rfloor \leq -\lfloor \log_2(n) \rfloor$
Donc dans tout les cas, $v_2(\frac{1}{n+1}) \leq -\lfloor \log_2(n) \rfloor$. Donc $v_2(H_{n+1}) = -\lfloor \log_2(n+1) \rfloor$
CQFD

Exercice – ULSR

Soit $(m,n,p) \in \mathbb{N}^3$, avec p un nombre premier supérieur ou égal à 5, et m premier avec p.

a) Montrer que :
$$\binom{np}{m} \equiv 0 \pmod p$$

b) Montrer que :
$$\binom{np}{mp} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p(n-1)}{mp-k}\binom{p}{k}$$

c) Montrer que :
$$\binom{np}{mp} \equiv \binom{n}{m} \pmod{p^2}$$

L'objectif de la suite est de montrer que :
$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^3}$$

d) Montrer que :
$$\forall k \in [\![1,p]\!], \quad \binom{p-1}{k-1} \equiv \pm 1 \pmod p.$$

e) Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{(p-1)!}{k}\right)^2 \equiv 0 \pmod p$$

f) Conclure.

Proposition de corrigé :

a) Premièrement, on élague tout les cas pathologiques (qui sont trivials car p|0) en prenant m dans $[\![1,np]\!]$. Ensuite, un exo classique, que l'on nommera **Lemme uno**, consiste à montrer que si $\gcd(m,p)=1$, alors $p \mid \binom{p}{m}$. Le narrateur le laisse en guise d'exercise, il suffit d'appliquer la Formule du pion + le lemme de Gauss. Avec le **Lemme uno**, on a gratuitement (si vous savez le montrer) le cas n=1.

Pour $n \geq\ 2$. Il suffit d'observer que $\binom{p}{m} \mid \binom{np}{m}$ (développer les coefficients binomiaux pour s'en convaincre). Donc p divise $\binom{np}{m}$.

b) Par un raisonnement combinatoire :
On veut prendre mp élements d'un ensemble E à np élements, soit. Considérons F un sous -ensemble de E à p élements. Prendre mp élements de E, revient à prendre k élements de F (pour k $\in [\![0,p]\!]$), puis à compléter indépendamment avec mp-k élements dans $E\backslash F$ de cardinal pn-p.

D'où :
$$\binom{np}{mp} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p(n-1)}{mp-k}\binom{p}{k} \quad \text{(\textbf{"Analogue" à l'identité de Vandermonde})}$$

c) 6oko a trimé... En utilisant b), puisque on montre aisément (lecteur [...])

que p divise $\binom{p}{k}$ et p divise $\binom{p(n-1)}{mp-k}$, pour k $\in [\![1, p-1]\!]$. Alors $\binom{np}{mp} \equiv \binom{p(n-1)}{p(m-1)} + \binom{p(n-1)}{mp}$ $mod\, p^2$.

Maintenant, si l'on suppose par récurrence (l'initialisation uniquement pour le lecteur) que la formule qu'on veut montrer est vraie au rang n-1 et m premier avec p, on a :
$\binom{p(n-1)}{p(m-1)} \equiv \binom{n-1}{m-1}$ $mod\ p^2$ et $\binom{p(n-1)}{mp} \equiv \binom{n-1}{m}$ $mod\ p^2$.

Donc $\binom{np}{mp} \equiv \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$ $mod\ p^2$, i.e (Formule de Pascal) $\binom{np}{mp} \equiv \binom{n}{m}$ $mod\ p^2$.

d) Montrons le résultat par récurrence.

Initialisation : Triviale.

Hérédité : Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $k \in [\![2, p-1]\!]$.
Alors d'après la formule de Pascal $\binom{p-1}{k-1} + \binom{p-1}{k} = \binom{p}{k} \equiv 0$ $mod\ p$, d'après le **Lemme uno**.
Donc $\binom{p-1}{k} \equiv -\binom{p-1}{k-1} \equiv \pm 1$ $mod\ p$ (par hypothèse de récurrence).

Conclusion : Ok !

e) Le "(p-1) ! mod p" fait évidemment penser au **Théorème de Wilson** :

$\forall p \in \mathbb{P}, \quad (p-1)! \equiv -1 \pmod p$. (Le narrateur a le coeur sur la main et va vous donner une preuve de ce classique). Rapidement, on se place dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, (p-1) ! est le produit de tout les éléments (non nuls) de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Or $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps (p est premier), donc tout ses élements non nuls sont inversibles. Donc vu que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est commutatif, les élements se simplifie avec leur inverses dans le produit, si p-1 avait son inverse k représenté dans $[\![2, p-2]\!]$, alors (p-1)k=1 alors 1=k, ce qui est absurde ! Donc p-1 est son propre inverse ainsi que 1 et aucun autre (sinon si $k^2 = 1\ alors\ (k-1)(k+1) = 0\ alors$ k-1=0 ou k+1=0 i.e k=1 ou k=p-1). Il restera alors 1.(p-1)= -1 mod p.

Ainsi, on réécrit la somme $\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{(p-1)!}{k}\right)^2 \equiv \sum_{k=1}^{p-1} (k^{-1})^2 \mod p$. Sauf que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, sommer sur les inverses au lieu des élements en soi ne change rien. Cette somme vaut alors (modulo p) $\sum_{k=1}^{p-1} k^2 = \frac{p(p-1)(2p-1)}{6}$. Or 6|(p-1)(2p-1) (6oko invite le lecteur a montrer cela, c'est vite fait technique (penser à 6=2x3). On a alors montrer que $\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{(p-1)!}{k}\right)^2$ était divisible par p. CQFD

f) On a d'après b),

$$\binom{2p}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}^2 = \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k}^2 + 2 = 2 + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p^2}{k^2} \binom{p-1}{k-1}^2 \, (Form.\ du\ pion)$$

Or d'après d), $\forall k \in [\![1, p]\!], \quad \binom{p-1}{k-1} \equiv \pm 1 \pmod p$. Alors ce coefficient binomial ± 1 est un multiple de p. Il restera alors modulo p^3 : $2 \pm p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} = 2 \pm \frac{p^2}{((p-1)!)^2} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{((p-1)!)^2}{k^2}$. Or d'après e), $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{((p-1)!)^2}{k^2}$ est un multiple de p. Ainsi il ne restera que le 2 modulo p^3.

Exercice – L

On considère l'équation :

$$2^a + 3^b = 5^c \quad \text{où } (a,b,c) \in \mathbb{N}^3.$$

(a) Résoudre l'équation dans le cas où $a = b = c$.

(b) Traiter le cas où b est impair.

(c) Traiter le cas où c est impair.

(d) Traiter le cas général.

Proposition de corrigé :