

Corrigé du Concours Maths II 2025

Filière PC

Lecordier Alexis
alexislcrd@gmail.com

19/05/25

Préliminaires

Question 1

Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, la suite $\left(\frac{1}{p^k + q^k}\right)_k$ est décroissante, tend vers 0 et est à termes positifs. Donc par Critère Spécial sur les Séries Alternées, $\sum u_k$ converge.

Question 2

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k dt, \text{ car } t \in]0, 1[. \\ \text{Or, } \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k dt &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k dt + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^k dt \\ &= \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^k dt + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^k dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} dt + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-t)^k dt \\ &= \phi_{1,1}(n) + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-t)^k dt\end{aligned}$$

On reconnaît $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-t)^k dt$ le reste d'une série géométrique convergente car $t \in]0, 1[$.

Il vaut $\frac{(-t)^{n+1}}{1-t}$ (il suffit de factoriser par $(-t)^{n+1}$ le reste et procéder à une réindexation).

En conclusion, on a montré que $\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt = \phi_{1,1}(n)$

Question 3

$\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$, puis pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On considère la fonction

$$t \mapsto \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}$$

définie sur $[0, 1]$. Elle est continue par morceaux sur ce segment.

Pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left| \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \right| \leq \frac{1}{1+t}.$$

On définit la fonction dominatrice $\psi(t) = \frac{1}{1+t}$, qui est continue par morceaux sur $[0, 1]$ et intégrable sur cet intervalle.

Par le théorème de convergence dominée, on peut donc permuter limite et intégrale :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt = \int_0^1 0 dt = 0.$$

Ainsi, en passant à la limite $S_{1,1} = \ln(2)$

Question 4

$$\text{Soit } q \geq 2, S_{1,q} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+q}$$

$$= \sum_{i=k+q-1}^{+\infty} \frac{(-1)^{q-i-1}}{i+1}$$

$$= -(-1)^q \sum_{k=q-1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}$$

$$= -(-1)^q \left(- \sum_{k=0}^{q-2} \frac{(-1)^i}{i+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} \right)$$

$$= -(-1)^q \left(- \sum_{k=0}^{q-2} \frac{(-1)^i}{i+1} + S_{1,1} \right)$$

$$= (-1)^q (\phi_{1,1}(q-2) - \ln(2)) \text{ (d'après la question 3)}$$

1. Expression de $S_{p,q}$ sous la forme d'une intégrale**Question 5**

Fixons $t \in \mathbb{R}^+$,

l'application qui à x associe $\frac{x^{(t+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}}$ est continue sur $[0,1]$ (car $\alpha_{p,q} > 0$), donc $I_{p,q}$ est définie sur \mathbb{R}^+ .

Puis l'application qui à t associe $\frac{x^{(t+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}}$ est continue sur \mathbb{R}^+ , et pour $t \in \mathbb{R}^+$ fixé, et pour tout $x \in [0, 1]$, $\left| \frac{x^{(t+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}} \right| \leq \frac{1}{1+x^{\alpha_{p,q}}} = \phi(x)$, ϕ étant continue par morceaux et intégrable sur $[0, 1]$, on a par Continuité Sous Le Signe Intégrale que $I_{p,q}$ est continue sur \mathbb{R}^+ .

Question 6

L'hypothèse de domination est déjà effectuée à la question précédente. Ensuite, pour n fixé dans \mathbb{N}^* , chaque fonction qui à x associe $\frac{x^{(n+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}}$ est intégrable sur $[0, 1]$ et convergent simplement vers la fonction $\frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_{\{x=1\}}$. (d'intégrale nulle).

Donc par Convergence Dominée : $I_{p,q}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Question 7

Soit $x \in [0, 1]$, en tant que somme géométrique : $\sum_{k=0}^n (-x^{\alpha_{p,q}})^k = \frac{1 - (-x^{\alpha_{p,q}})^{n+1}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}}$

$$\text{Donc } (-1)^n I_{p,q}(n) + \int_0^1 \frac{1}{1+x^{\alpha_{p,q}}} dx = \int_0^1 \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{\alpha_{p,q}(n+1)}}{1+x^{\alpha_{p,q}}} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-x^{\alpha_{p,q}})^k dx.$$

On peut intervertir la somme et l'intégrale car la fonction qui à x associe $(-x^{\alpha_{p,q}})^k$ (à k fixé) est continue sur $[0, 1]$, et la somme est finie.

$$\text{D'où, } (-1)^n I_{p,q}(n) + \int_0^1 \frac{1}{1+x^{\alpha_{p,q}}} dx = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-x^{\alpha_{p,q}})^k dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\alpha_{p,q}k + 1} = q \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{pk + q} = q \cdot \phi_{p,q}(n).$$

Question 8

La suite $((-1)^n)_n$ est bornée et d'après la question 6, $I_{p,q}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$$\text{Donc } (-1)^n I_{p,q}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ et par passage à la limite, } S_{p,q} = \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{1}{1+t^{\alpha_{p,q}}} dt.$$

En posant le changement de variable C^1 , bijectif strictement monotone sur \mathbb{R}_+ : $u = t^{\frac{1}{q}}$.

$$\text{On obtient } S_{p,q} = \int_0^1 \frac{u^{q-1}}{1+u^p} du$$

2. Calcul des $S_{p,q}$ dans trois cas particuliers

Question 9

Soit $(p, q) \in E_1$, alors $p=q$ et $S_{p,q} = \int_0^1 \frac{u^{p-1}}{1+u^p} du$. En posant $x = u^p$ (changement de variable licite, par les mêmes arguments que question 8), $S_{p,q} = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \frac{\ln(2)}{p}$

Question 10

Soit $(p, q) \in E_2$, alors il existe λ dans \mathbb{N}^* tel que $q = p\lambda$, il en découle que pour n dans \mathbb{N}^* , $\phi_{p,q}(n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{pk+q} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{pk+p\lambda} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+\lambda} = \frac{1}{p} \phi_{1,\lambda}$.

Or vu que $\lambda \geq 2$, d'après la question 4, par passage à la limite on a :

$$S_{p,q} = (-1)^{\lambda-1} \left(\ln(2) - \sum_{k=0}^{\lambda-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$

Question 11

Supposons p pair, alors le polynôme $1 + X^p$ admet comme racines, les racines p -ième de -1 : $\{w_{p,0}, w_{p,2}, \dots, w_{p,p-1}\} = \{w_{p,0}, \dots, w_{p, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1}, \overline{w_{p,0}}, \overline{w_{p,2}}, \dots, \overline{w_{p, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1}}\}$. Par Théorème de décomposition en éléments simples (vu aussi que $p > q$) :

il existe $(b_0, \dots, b_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}) \in \mathbb{C}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}$ tel que $F(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1} \left(\frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X - \overline{\omega_{p,k}}} \right)$.

Dans le cas où p est impair, -1 est racine de $1 + X^p$, il existe alors $a_0 \in \mathbb{C}$ et (b_i) .

On aura par théorème de décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} F(X) &= \left(\prod_{k=0}^{p-1} \omega_{k,p} \right) \cdot \frac{a_0}{X+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \left(\frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X - \overline{\omega_{p,k}}} \right) \\ &= \frac{1 - (-1)^p}{2} \cdot \frac{a_0}{X+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \left(\frac{b_k}{X - \omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X - \overline{\omega_{p,k}}} \right) \end{aligned}$$

Question 12

Pour calculer a_0 , on multiplie l'expression précédente par $X+1$ et on l'évalue en -1 .

On trouve alors $a_0 = \frac{(-1)^{q-1}}{p}$. Ensuite pour $j \in \llbracket 0, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1 \rrbracket$, en multipliant

l'expression par $X - w_{p,j}$ et en faisant tendre X vers $w_{p,j}$, on a : $F(X) \cdot (X - w_{p,j}) \xrightarrow{X \rightarrow w_{p,j}} b_j$.

Mais on a aussi que $1 + X^p \underset{X \rightarrow w_{p,j}}{\sim} p w_{p,j}^{p-1} (X - w_{p,j})$ (en faisant un développement de

Taylor de $1 + X^p$ autour de $w_{p,j}$). Donc $b_j = \frac{w_{p,j}^{(q-p)}}{p} = \frac{e^{\frac{i(2j+1)\pi(q-p)}{p}}}{p} = \frac{e^{\frac{i(2j+1)\pi q}{p} - \frac{i(2j+1)\pi}{1}}}{p}$
 $= -\frac{1}{p} e^{iq\theta_j}$.

Question 13

$$\begin{aligned} \text{Soit } k \in \llbracket 0, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1 \rrbracket, \quad \frac{b_k}{X - w_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X - \overline{w_{p,k}}} &= \frac{b_k \cdot (X - \overline{w_{p,k}}) + \overline{b_k} \cdot (X - w_{p,k})}{X^2 - (w_{p,k} + \overline{w_{p,k}}) + w_{p,k} \overline{w_{p,k}}} \\ &= \frac{X \cdot (b_k + \overline{b_k}) - b_k \overline{w_{p,k}} - \overline{b_k} w_{p,k}}{X^2 - (w_{p,k} + \overline{w_{p,k}}) + w_{p,k} \overline{w_{p,k}}} = \frac{X \cdot \left(\frac{-2}{p} \cos q\theta_k \right) - b_k \overline{w_{p,k}} - \overline{b_k} w_{p,k}}{X^2 - (w_{p,k} + \overline{w_{p,k}}) + w_{p,k} \overline{w_{p,k}}} \end{aligned}$$

Par le calcul, on a : $-b_k \overline{w_{p,k}} - \overline{b_k} w_{p,k} = \frac{1}{p} e^{-iq\theta_k} \cdot e^{\frac{i(2k+1)\pi}{p}} + \frac{1}{p} e^{iq\theta_k} \cdot e^{\frac{-i\pi(2k+1)}{p}}$
 $= \frac{1}{p} e^{-i(q-1)\frac{(2k+1)\pi}{p}} + \frac{1}{p} e^{i(q-1)\frac{(2k+1)\pi}{p}} = \frac{2}{p} \cos((q-1)\theta_k)$

Puis, $w_{p,k} \overline{w_{p,k}} = 1$ et $w_{p,k} + \overline{w_{p,k}} = 2 \cos \theta_k$.

Donc

$$F(X) = \frac{1 - (-1)^p}{2} \cdot \frac{(-1)^{q-1}}{p} \cdot \frac{1}{X+1} - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} F_k(X),$$

où, pour tout $0 \leq k \leq \lfloor p/2 \rfloor - 1$,

$$F_k(X) := \frac{\cos(q\theta_k)X - \cos((q-1)\theta_k)}{X^2 - 2 \cos(\theta_k)X + 1}.$$

Question 14

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1} \cos(q\theta_k) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1} \cos\left(q \frac{(2k+1)\pi}{p}\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1} \Re\left(\exp iq \frac{(2k+1)\pi}{p}\right) \\ &= \Re\left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1} \exp iq \frac{(2k+1)\pi}{p}\right) \\ &= \Re\left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1} \exp iq \frac{2k\pi}{p} \cdot \exp \frac{iq\pi}{p}\right) \\ &= \Re\left(\exp \frac{iq\pi}{p} \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1} (\exp iq \frac{2\pi}{p})^k\right) \\ &= \Re\left(\exp \frac{iq\pi}{p} \cdot \frac{1 - \exp iq \frac{2\pi \lfloor \frac{p}{2} \rfloor}{p}}{1 - \exp iq \frac{2\pi}{p}}\right) \end{aligned}$$

Or si p est pair, $1 - \exp iq \frac{2\pi \lfloor \frac{p}{2} \rfloor}{p} = 0$, et si p est impair $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor = \frac{p-1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{On trouve } \Re\left(\exp iq \frac{\pi \lfloor \frac{p}{2} \rfloor}{p} \cdot \frac{\exp -iq \frac{\pi \lfloor \frac{p}{2} \rfloor}{p} - \exp iq \frac{\pi \lfloor \frac{p}{2} \rfloor}{p}}{\exp -iq \frac{\pi}{p} - \exp iq \frac{\pi}{p}}\right) \\ &= \Re\left(\exp iq \frac{\pi \lfloor \frac{p}{2} \rfloor}{p} \cdot \frac{\sin \frac{q\pi(p-1)}{2p}}{\sin \frac{q\pi}{p}}\right) \\ &= \cos \frac{q\pi(p-1)}{2p} \frac{\sin \frac{q\pi(p-1)}{2p}}{\sin \frac{q\pi}{p}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\frac{q\pi(p-1)}{p})}{\sin(\frac{q\pi}{p})} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(q\pi - \frac{q\pi}{p})}{\sin(\frac{q\pi}{p})} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\frac{q\pi}{p})}{\sin(\frac{q\pi}{p})} = \frac{1}{2} = \frac{(-1)^{q-1}}{2} \text{ (car } q \text{ est impair)} \end{aligned}$$

Question 15

D'après la question 8, $S_{p,q} = \int_0^1 \frac{u^{q-1}}{1+u^p} du$. Alors à l'aide de la question 13, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(t) dt &= \int_0^1 \left[\frac{1-(-1)^p}{2} \cdot \frac{(-1)^{q-1}}{p} \cdot \frac{1}{t+1} - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} F_k(t) \right] dt \\ &= \frac{1-(-1)^p}{2} \cdot \frac{(-1)^{q-1}}{p} \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \int_0^1 F_k(t) dt \\ &= \frac{1-(-1)^p}{p} \cdot \frac{(-1)^{q-1}}{2} \ln(2) - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \left[\cos(q\theta_k) \ln \left(2 \sin \left(\frac{\theta_k}{2} \right) \right) - \frac{\pi}{2p} (p-1-2k) \sin(q\theta_k) \right] \end{aligned}$$

Or d'après la question 14, si p est impair, $\frac{(-1)^{q-1}}{2} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1} \cos(q\theta_k)$ et $\frac{1-(-1)^p}{2} = \frac{2}{p}$

Donc en développant le $\ln 2 \sin \theta_k = \ln 2 + \ln \sin \theta_k$ dans la somme à droite et par linéarité de la somme on a le résultat. De même, si p est pair, en développant le \ln , on a le résultat directement.

Question 16

En remplaçant p par 2 et q par 1, on trouve $S_{2,1} = \frac{\pi}{4}$. Et en remplaçant p par 3, et q par 1 on trouve : $S_{3,1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\ln 2}{3}$

3. Quelques calculs de probabilités**Question 17**

Par définition de E_n , $E_n = A_n \cup B_n \cup C_n$. Ensuite, les parties A_n, B_n et C_n sont deux à deux disjointes (les inégalités sont strictes dans la définition de B_n et C_n). Enfin, aucun de ces ensembles n'est vide. Donc $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme une partition de E_n .

Question 18

La probabilité que deux entiers tirés dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ soit égaux est de $\frac{1}{n}$, car $|\llbracket 1, n \rrbracket^2| = n^2$. Donc $P(A_n) = \frac{1}{n}$. Ensuite, pour calculer $P(C_n)$, on raisonne de même par "cardinalité", et on a $P(C_n) = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k}{n^2} (= \frac{\text{nombre de couples distincts tels que } p > q}{\text{nombre de couples}})$

$$= \frac{n-1}{2n}$$
Question 19

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = |\{k \in \{1, \dots, n\}, p|k\}|$$

Il en découle que $|\{(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, p|q\}| = |\bigcup_{k=1}^n \{k \in \{1, \dots, n\}, p|k\}|$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } |B_n| &= |\{(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, p|q, \text{ et } q > p\}| = |\{(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, p|q\}| - n \\ &= \left| \bigcup_{k=1}^n \{k \in \{1, \dots, n\}, p|k\} \right| - n \end{aligned}$$

$$= \sum_{p=1}^n \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - n$$

$$\text{Donc } P(B_n) = \frac{|B_n|}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{p=1}^n \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \frac{1}{n}.$$

Enfin, on a vu à la question 17 que A_n est incompatible avec B_n .

$$\text{Donc } P(A_n \cup B_n) = P(A_n) + P(B_n) = \frac{|B_n|}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{p=1}^n \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$$

Question 20

On considère la somme harmonique :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

On compare cette somme à l'intégrale de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ décroissante sur $[1, n]$.
On utilise la comparaison somme-intégrale :

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx + \frac{1}{1}$$

Autrement dit,

$$\ln n \leq H_n - 1 \leq \ln n + 1$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$$

Ce qui signifie :

$$H_n \sim \ln n \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

Question 21

Par définition de la partie entière :

$$\forall p \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{n}{p} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \leq \frac{n}{p}$$

$$\text{Alors } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{p} - \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^n \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{p}$$

Donc, par encadrement, avec le résultat de la question 19 :

$$P(A_n \cup B_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{H_n}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln n}{n} \quad (\text{d'après la question 20})$$

Question 22

D'après la question 17, $P(E_n) = P(A_n \cup B_n) + P(C_n)$. Sauf que $P(A_n \cup B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

car $\ln(n) = o(n)$, et $P(C_n) = \frac{n-1}{2n} \sim \frac{1}{2}$. Donc $P(E_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$.

4. Vitesse de convergence des $S_{p,q}$

Question 23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{p,q}(n) = \int_0^1 \frac{x^{(n+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}} dx$.

En posant, le changement de variable C^1 , strictement monotone, bijectif sur \mathbb{R}^+

$s=x^{n+1}$, on a : $I_{p,q}(n) = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{s^{\alpha_{p,q}+(\frac{1}{n+1}-1)}}{1+s^{\frac{\alpha_{p,q}}{n+1}}} ds$. En dominant l'intégrande continue,

on a par convergence dominée que $I_{p,q}(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n} \int_0^1 s^{\alpha_{p,q}-1} ds = \frac{q}{2pn}$

Donc $R_{p,q}(n) \sim \frac{1}{2pn}$ (quand n tend vers l'infini)

Question 24

$\left| \frac{R_{p,q}(n+1) - 0}{R_{p,q}(n) - 0} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. La vitesse de convergence est alors infra-linéaire.