Corrigé RMS 2024

Alexis Lecordier Mai 2025

Note sur les intitulés des exercices :
Les lettres qui précèdent les énoncés indiquent la provenance de l'exercice :
- **X** : École polytechnique
- **U** : ENS Ulm
- **L** : ENS Lyon
- **S** : ENS Paris-Saclay
- **R** : ENS Rennes

Corrigé personnel qui retrace l'évolution de la pensée du narrateur au cours de sa résolution, le narrateur le juge "solide" (sans laisser de définition de solidité). S'il te semble friable à certains endroits [ou partout ? Impossible frère...], fais-le moi savoir, mais sache que... : alexislcrd@gmail.com. *Le narrateur a délibérément enlever les étoiles de difficulté.*

Exercice – ULSR

On étend de façon naturelle la valuation 2-adique v_2 à $\mathbb{Q}$. Pour un entier N, soit :

$$H_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

Calculer $v_2(H_N)$.

Proposition de corrigé :

Premièrement, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$H_N = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{N} = H_{N-1} + \frac{1}{N}$$

Notons $H_{N-1} = \frac{p}{q}$ écrit en fraction irréductible, ainsi on peut réécrire H_{N-1} sous la forme $\dfrac{a}{2^b d}$, avec :

$$\gcd(a,2) = 1, \quad \gcd(2,d) = 1, \quad b = -v_2(H_{N-1}) \in \mathbb{Z} \text{ à priori.}$$

Toutefois si l'on avait b entier naturel, alors $H_N = \frac{aN+2^b d}{2^b dN}$. Ainsi en supposant ensuite N impair, on aurait $2 \nmid aN + 2^b d$, car $\gcd(a,2) = 1$, ainsi dans ce cas $v_2(H_N) = v_2(H_{N-1})$, car $gcd(2,d) = 1$. En calculant pour quelques valeurs $v_2(H_N)$, on "sent" que b est un entier naturel. Montrons alors par récurrence sur l'entier N que $v_2(H_N) \leq 0$ (**Lemme 1**).
<u>Initialisation en N=1</u> : jugée triviale
<u>Hérédité</u> : Soit N ≥ 2, supposons le résultat vrai au rang N-1, montrons le au rang N.
En gardant l'écriture qu'on avait précédement, $H_N = \frac{aN+2^b d}{2^b dN}$ (avec N impair ou pair ici parcontre). Par "extension" de v_2 de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$, $v_2(H_N) = v_2(\frac{aN+2^b d}{2^b dN}) = v_2(aN + 2^b d) - v_2(2^b dN)$, si N

est impair alors le résultat est trivial. Si N est pair, le calcul donne $v_2(H_N) = v_2(aN + 2^b d) - v_2(2^b dN) = min(v_2(N), b) - (v_2(N) + b))$.
Si $min(v_2(N), b) = b$ alors $v_2(H_N) = -v_2(N) \leq 0$, car N $\in \mathbb{N}$.
Sinon si $min(v_2(N), b) = v_2(N)$ alors $v_2(H_N) = -b \leq 0$, par hypothèse de récurrence.
Conclusion : Ok !
Donc on a établi par le **Lemme 1** que si N est impair, $v_2(H_N) = v_2(H_{N-1})$. On sait alors que $(v_2(H_N))$ est une suite par paliers. En calculant les valuations 2-adiques pour plusieurs valeurs, on conjecture le résultat suivant :

$$v_2(H_n) = -k \quad \text{pour } n = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i + 1 = 2^{k-1} + 1 \text{ à } \sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^k \text{ occurrences consécutives.}$$

C'est-à-dire $v_2(H_n) = -\lfloor \log_2(n) \rfloor$, pour tout entier naturel n.

Montrons le résultat par récurrence (on ne fait que l'hérédité mes frères). Soit n un entier naturel non nul, On a $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$ donc $v_2(H_{n+1}) = min(v_2(H_n), v_2(\frac{1}{n+1})) = min(-\lfloor \log_2(n) \rfloor, v_2(\frac{1}{n+1}))$ (par hypothèse de récurrence).
Or $v_2(\frac{1}{n+1}) = -v_2(n+1) \geq -\lfloor \log_2(n+1) \rfloor$.
Et si n+1 n'est pas une puissance de 2, alors $\lfloor \log_2(n+1) \rfloor = \lfloor \log_2(n) \rfloor$.
Sinon si $n+1 = 2^k$, alors $v_2(n+1) = k = \log_2(n+1)$, donc : $v_2\left(\frac{1}{n+1}\right) = -k = -\lfloor \log_2(n+1) \rfloor \leq -\lfloor \log_2(n) \rfloor$
Donc dans tout les cas, $v_2(\frac{1}{n+1}) \leq -\lfloor \log_2(n) \rfloor$. Donc $v_2(H_{n+1}) = -\lfloor \log_2(n+1) \rfloor$
CQFD

Exercice – U

Soit $(m, n, p) \in \mathbb{N}^3$, avec p un nombre premier supérieur ou égal à 5, et m premier avec p.

a) Montrer que :
$$\binom{np}{m} \equiv 0 \pmod p$$

b) Montrer que :
$$\binom{np}{mp} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{p}{k} \binom{mp}{kp}$$

c) Montrer que :
$$\binom{np}{mp} \equiv \binom{n}{m} \pmod{p^2}$$

L'objectif de la suite est de montrer que :
$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^3}$$

d) Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, p-1\}$,
$$\frac{p}{k} + \frac{p}{p-k} \equiv 0 \pmod p$$

e) Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{(p-1)!}{k} \right)^2 \equiv 0 \pmod p$$

f) Conclure.

Proposition de corrigé :

Exercice – L

Proposition de corrigé :