Corrigé du Concours Maths II 2025
Filière PC

Lecordier Alexis
alexislcrd@gmail.com

19/05/25

Préliminaires

Question 1

Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, la suite $\left(\frac{1}{pk+q}\right)_k$ est décroissante, tend vers 0 et est à termes positifs. Donc par Critère Spécial sur les Séries Altérnées, $\sum u_k$ converge.

Question 2

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^k\,\mathrm{d}t$, car $t \in \,]0,1[$.

$$\text{Or, } \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^k\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k t^k\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-1)^k t^k\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k t^k\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-t)^k\,\mathrm{d}t$$

$$= \phi_{1,1}(n) + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-t)^k\,\mathrm{d}t$$

On reconnaît $\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-t)^k\,\mathrm{d}t$ le reste d'une série géométrique convergente car $t \in]0,1[$.

Il vaut $\dfrac{(-t)^{n+1}}{1-t}$ (il suffit de factoriser par $(-t)^{n+1}$ le reste et procéder à une réindexation).

En conclusion, on a montré que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \phi_{1,1}(n)$

Question 3

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = [ln(1+x)]_0^1 = ln(2)$, puis pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On considère la fonction

$$t \mapsto \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}$$

définie sur $[0,1]$. Elle est continue par morceaux sur ce segment.
Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|\frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\right| \leq \frac{1}{1+t}.$$

On définit la fonction dominatrice $\psi(t) = \frac{1}{1+t}$, qui est continue par morceaux sur $[0,1]$ et intégrable sur cet intervalle.
Par le théorème de convergence dominée, on peut donc permuter limite et intégrale :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Ainsi, en passant à la limite $S_{1,1} = ln(2)$

Question 4

Soit $q \geq 2$, $\displaystyle S_{1,q} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+q}$

$$\underset{i=k+q-1}{=} \sum_{k=q-1}^{+\infty} \frac{(-1)^{q-i-1}}{i+1}$$

$$= -(-1)^q \sum_{k=q-1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}$$
$$= -(-1)^q \left(-\sum_{k=0}^{q-2} \frac{(-1)^i}{i+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}\right)$$
$$= -(-1)^q \left(-\sum_{k=0}^{q-2} \frac{(-1)^i}{i+1} + S_{1,1}\right)$$
$$= (-1)^q \left(\phi_{1,1}(q-2) - ln(2)\right) \text{ (d'après la question 3)}$$

1. Expression de $S_{p,q}$ sous la forme d'une intégrale

Question 5

Fixons $t \in \mathbb{R}^+$,
l'application qui à x associe $\dfrac{x^{(t+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}}$ est continue sur [0,1] (car $\alpha_{p,q} > 0$), donc $I_{p,q}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$.

Puis l'application qui à t associe $\dfrac{x^{(t+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et pour $t \in \mathbb{R}^+$ fixé, et pour tout $x \in [0,1]$, $\left|\dfrac{x^{(t+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}}\right| \leq \dfrac{1}{1+x^{\alpha_{p,q}}} = \phi(x)$, ϕ étant continue par morceaux et intégrable sur [0,1], on a par Continuité Sous Le Signe Intégrale que $I_{p,q}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Question 6

L'hypothèse de domination est déjà effectuée à la question précédente. Ensuite, pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$, chaque fonction qui à x associe $\dfrac{x^{(n+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}}$ est intégrable sur [0,1] et convergent simplement vers la fonction $\frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_{\{x=1\}}$. (d'intégrale nulle).

Donc par Convergence Dominée : $I_{p,q}(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Question 7

Soit $x \in [0,1]$, en tant que somme géométrique : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x^{\alpha_{p,q}})^k = \frac{1-(-x^{\alpha_{p,q}})^{n+1}}{1+x^{\alpha_{p,q}}}$

Donc $\displaystyle(-1)^n I_{p,q}(n) + \int_0^1 \frac{1}{1+x^{\alpha_{p,q}}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}x^{\alpha_{p,q}(n+1)}}{1+x^{\alpha_{p,q}}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-x^{\alpha_{p,q}})^k\,\mathrm{d}x$.

On peut intervertir la somme et l'intégrale car la fonction qui à x associe $(-x^{\alpha_{p,q}})^k$ (à k fixé) est continue sur [0,1], et la somme est finie.

D'où, $\displaystyle(-1)^n I_{p,q}(n) + \int_0^1 \frac{1}{1+x^{\alpha_{p,q}}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-x^{\alpha_{p,q}})^k\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\alpha_{p,q}k+1} = q\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{pk+q} =$ $q \cdot \phi_{p,q}(n)$.

Question 8

La suite $((-1)^n)_n$ est bornée et d'après la question 6, $I_{p,q}(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Donc $(-1)^n I_{p,q}(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, et par passage à la limite, $\displaystyle S_{p,q} = \frac{1}{q}\int_0^1 \frac{1}{1+t^{\alpha_{p,q}}}\,\mathrm{d}t$.

En posant le changement de variable C^1, bijectif strictement monotone sur R+ : $u = t^{\frac{1}{q}}$.

On obtient $\displaystyle S_{p,q} = \int_0^1 \frac{u^{q-1}}{1+u^p}\,\mathrm{d}u$

2. Calcul des $S_{p,q}$ dans trois cas particuliers

Question 9

Soit $(p,q) \in E_1$, alors p=q et $\displaystyle S_{p,q} = \int_0^1 \frac{u^{p-1}}{1+u^p}\,\mathrm{d}u$. En posant $x = u^p$ (changement de variable licite, par les mêmes arguments que question 8), $\displaystyle S_{p,q} = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{ln(2)}{p}$

Question 10

Soit $(p,q) \in E_2$, alors il existe λ dans $\mathbb{N}^*$ tel que $q = p\lambda$, il en découle que pour n dans $\mathbb{N}^*$, $\phi_{p,q}(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{pk+q} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{pk+p\lambda} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+\lambda} = \frac{1}{p}\phi_{1,\lambda}$.

Or vu que $\lambda \geq 2$, d'après la question 4, par passage à la limite on a :
$S_{p,q} = (-1)^{\lambda-1}\left(ln(2) - \sum_{k=0}^{\lambda-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$

Question 11

Supposons p pair, alors le polynôme $1 + X^p$ admet comme racines, les racines p i-ème de -1 : $\{w_{p,0}, w_{p,2}, ..., w_{p,p-1}\} = \{w_{p,0}, ..., w_{p,\lfloor \frac{p}{2}-1 \rfloor}, \overline{w_{p,0}}, \overline{w_{p,2}}, ..., \overline{w_{p,\lfloor \frac{p}{2}-1\rfloor}}\}$. Par Théorème de décomposition en élements simples (vu aussi que p>q) :

il existe $(b_0, ..., b_{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}) \in \mathbb{C}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}$ tel que F(X)= $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2}\rfloor -1}\left(\frac{b_k}{X-\omega_{p,k}} + \frac{\bar{b}_k}{X-\overline{\omega_{p,k}}}\right)$.
Dans le cas où p est impair, -1 est racine de $1+X^p$, il existe alors $a_0 \in \mathbb{C}$ et (b_i). On aura par théorème de décomposition en élements simples :

$$\begin{aligned}
F(X) &= \left(\prod_{k=0}^{p-1}\omega_{k,p}\right)\cdot\frac{a_0}{X+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor p/2\rfloor -1}\left(\frac{b_k}{X-\omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X-\overline{\omega_{p,k}}}\right) \\
&= \frac{1-(-1)^p}{2}\cdot\frac{a_0}{X+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor p/2\rfloor -1}\left(\frac{b_k}{X-\omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X-\overline{\omega_{p,k}}}\right)
\end{aligned}$$

Question 12

Pour calculer a_0, on multiplie l'expression précédente par X+1 et on l'évalue en -1. On trouve alors $a_0 = \frac{(-1)^{q-1}}{p}$. Ensuite pour $j \in [\![0, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1]\!]$, en multipliant l'expression par X-$w_{p,j}$ et en faisant tendre X vers $w_{p,j}$, on a : $F(X)\cdot(X - w_{p,j}) \underset{X\to w_{p,j}}{\to} b_j$. Mais on a aussi que $1 + X^p \underset{X\to w_{p,j}}{\sim} p w_{p,j}^{p-1}(X - w_{p,j})$ (en faisant un développement de Taylor de $1+X^p$ autour de $w_{p,j}$). Donc $b_j = \frac{w_{p,j}^{(q-p)}}{p} = \frac{e^{\frac{i(2j+1)\pi(q-p)}{p}}}{p} = \frac{e^{\frac{i(2j+1)\pi q}{p} - \frac{i(2j+1)}{1}}}{p}$
$= -\frac{1}{p}e^{iq\theta_j}$.

Question 13

Soit $k \in [\![0, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1]\!]$, $\frac{b_k}{X - w_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X - \overline{w_{p,k}}} = \frac{b_k \cdot (X - \overline{w_{p,k}}) + \overline{b_k}\cdot(X - w_{p,k})}{X^2 - (w_{p,k} + \overline{w_{p,k}}) + w_{p,k}\overline{w_{p,k}}}$
$= \frac{X\cdot(b_k + \overline{b_k}) - b_k\overline{w_{p,k}} - \overline{b_k}w_{p,k}}{X^2 - (w_{p,k} + \overline{w_{p,k}}) + w_{p,k}\overline{w_{p,k}}} = \frac{X\cdot(\frac{-2}{p}\cos q\theta_k) - b_k\overline{w_{p,k}} - \overline{b_k}w_{p,k}}{X^2 - (w_{p,k} + \overline{w_{p,k}}) + w_{p,k}\overline{w_{p,k}}}$

Par le calcul, on a : $-b_k\overline{w_{p,k}} - \overline{b_k}w_{p,k} = \dfrac{1}{p}e^{-iq\theta_k}\cdot e^{\frac{i(2k+1)\pi}{p}} + \dfrac{1}{p}e^{iq\theta_k}\cdot e^{\frac{-i\pi(2k+1)}{p}}$
$= \frac{1}{p}e^{-i(q-1)\frac{(2k+1)\pi}{p}} + \frac{1}{p}e^{i(q-1)\frac{(2k+1)\pi}{p}} = \frac{2}{p}\cos\left((q-1)\theta_k\right)$

Puis, $w_{p,k}\overline{w_{p,k}} = 1$ et $w_{p,k} + \overline{w_{p,k}} = 2\cos\theta_k$.

Donc

$$F(X) = \frac{1-(-1)^p}{2}\cdot\frac{(-1)^{q-1}}{p}\cdot\frac{1}{X+1} - \frac{2}{p}\sum_{k=0}^{\lfloor p/2\rfloor -1} F_k(X),$$

où, pour tout $0 \le k \le \lfloor p/2\rfloor - 1$,

$$F_k(X) := \frac{\cos(q\theta_k)X - \cos((q-1)\theta_k)}{X^2 - 2\cos(\theta_k)X + 1}.$$

Question 14

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2}\rfloor -1}\cos(q\theta_k) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2}\rfloor -1}\cos\left(q\frac{(2k+1)\pi}{p}\right) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2}\rfloor -1}\Re\left(\exp iq\frac{(2k+1)\pi}{p}\right)\\
&= \Re\left(\textstyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2}\rfloor -1}\exp iq\frac{(2k+1)\pi}{p}\right)\\
&= \Re\left(\textstyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2}\rfloor -1}\exp iq\frac{2k\pi}{p}\cdot\exp\frac{iq\pi}{p}\right)\\
&= \Re\left(\exp\frac{iq\pi}{p}\cdot\textstyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2}\rfloor -1}(\exp iq\frac{2\pi}{p})^k\right)\\
&= \Re\left(\exp\frac{iq\pi}{p}\cdot\frac{1-\exp iq\frac{2\pi\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}{p}}{1-\exp iq\frac{2\pi}{p}}\right)\end{aligned}$$

Or si p est pair, $1-\exp iq\frac{2\pi\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}{p} = 0$, et si p est impair $\lfloor\frac{p}{2}\rfloor = \frac{p-1}{2}$

On trouve $\Re\left(\exp iq\dfrac{\pi\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}{p}\cdot\dfrac{\exp -iq\frac{\pi\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}{p} - \exp iq\frac{\pi\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}{p}}{\exp -iq\frac{\pi}{p} - \exp iq\frac{\pi}{p}}\right)$

$$\begin{aligned}&= \Re\left(\exp iq\frac{\pi\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}{p}\cdot\frac{\sin\frac{q\pi(p-1)}{2p}}{\sin\frac{q\pi}{p}}\right)\\
&= \cos\frac{q\pi(p-1)}{2p}\frac{\sin\frac{q\pi(p-1)}{2p}}{\sin\frac{q\pi}{p}}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(\frac{q\pi(p-1)}{p})}{\sin(\frac{q\pi}{p})}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(q\pi-\frac{q\pi}{p})}{\sin(\frac{q\pi}{p})}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(\frac{q\pi}{p})}{\sin(\frac{q\pi}{p})} = \frac{1}{2} = \frac{(-1)^{q-1}}{2}\ \text{(car q est impair)}\end{aligned}$$

Question 15

D'après la question 8, $S_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{q-1}}{1+u^p}\,du$. Alors à l'aide de la question 13, on a :
$\int_0^1 F(t)\,dt = \int_0^1 \left[\frac{1-(-1)^p}{2}\cdot\frac{(-1)^{q-1}}{p}\cdot\frac{1}{t+1} - \frac{2}{p}\sum_{k=0}^{\lfloor p/2\rfloor -1} F_k(t)\right] dt$
$= \frac{1-(-1)^p}{2}\cdot\frac{(-1)^{q-1}}{p}\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,dt - \frac{2}{p}\sum_{k=0}^{\lfloor p/2\rfloor -1}\int_0^1 F_k(t)\,dt$
$= \frac{1-(-1)^p}{p}\cdot\frac{(-1)^{q-1}}{2}\ln(2) - \frac{2}{p}\sum_{k=0}^{\lfloor p/2\rfloor -1}\left[\cos(q\theta_k)\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{2p}(p-1-2k)\sin(q\theta_k)\right]$

Or d'après la question 14, si p est impair, $\frac{(-1)^{q-1}}{2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{p}{2}\rfloor -1}\cos(q\theta_k)$ et $\frac{1-(-1)^p}{2} = \frac{2}{p}$

Donc en développant le $\ln 2\sin\theta_k = \ln 2 + \ln\sin\theta_k$ dans la somme à droite et par linéarité de la somme on a le résultat. De même, si p est pair, en développant le ln, on a le résultat directement.

Question 16

En remplaçant p par 2 et q par 1, on trouve $S_{2,1} = \dfrac{\pi}{4}$. Et en remplaçant p par 3, et q par 1 on trouve : $S_{3,1} = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} + \dfrac{\ln 2}{3}$

3. Quelques calculs de probabilités

Question 17

Par définition de E_n, $E_n = A_n \cup B_n \cup C_n$. Ensuite, les parties A_n, B_n et C_n sont deux à deux disjointes (les inégalités sont strictes dans la définition de B_n et C_n). Enfin, aucun de ces ensembles n'est vide. Donc $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme une partition de E_n.

Question 18 Question 2

La probabilité que deux entiers tirés dans $[\![1,n]\!]$ soit égaux est de $\dfrac{1}{n}$, car $|[\![1,n]\!]^2| = n^2$.
Donc $P(A_n) = \frac{1}{n}$. Ensuite, pour calculer $P(C_n)$, on raisonne de même par "cardinalité" , et on a $P(C_n) = \dfrac{\sum_{k=1}^{n-1} k}{n^2}\left(= \dfrac{\text{nombre de couples distincts tels que p>q}}{\text{nombres de couples}}\right)$
$= \dfrac{n-1}{2n}$

Question 19

$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = |\{k \in \{1,...,n\},\ p|k\}|$

Il en découle que $|\{(p,q) \in [\![1,n]\!]^2, p|q\}| = |\displaystyle\coprod_{k=0}^{n}\{k \in \{1,...,n\},\ p|k\}|$

Ainsi, $|B_n| = |\{(p,q) \in [\![1,n]\!]^2,\ p|q,\ \text{ et q>p}\}| = |\{(p,q) \in [\![1,n]\!]^2,\ p|q\}| - n$
$= |\displaystyle\coprod_{k=0}^{n}\{k \in \{1,...,n\},\ p|k\}| - n$

$$= \sum_{p=0}^{n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - n$$

Donc $P(B_n) = \dfrac{|B_n|}{n^2} = \dfrac{1}{n^2} \cdot \sum_{p=0}^{n} \left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor - \dfrac{1}{n}$.

Enfin, on a vu à la question 17 que A_n est incompatible avec B_n.
Donc $P(A_n \cup B_n) = P(A_n) + P(B_n) = \dfrac{|B_n|}{n^2} = \dfrac{1}{n^2} \cdot \sum_{p=0}^{n} \left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor$

Question 20

On considère la somme harmonique :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

On compare cette somme à l'intégrale de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ décroissante sur $[1, n]$.
On utilise la comparaison somme-intégrale :

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{1}$$

Autrement dit,

$$\ln n \leq H_n - 1 \leq \ln n + 1$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$$

Ce qui signifie :

$$H_n \sim \ln n \quad \text{quand } n \to +\infty$$

Question 21

Par définition de la partie entière :

$$\forall p \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{n}{p} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \leq \frac{n}{p}$$

Alors $\dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n^2} \sum_{p=0}^{n} \left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor \leq \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{p}$
Donc,par encadrement, avec le résultat de la question 19 :

$P(A_n \cup B_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{H_n}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$ (d'après la question 20)

Question 22

D'après la question 17, $P(E_n) = P(A_n \cup B_n) + P(C_n)$. Sauf que $P(A_n \cup B_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ car $ln(n) = \underset{n\to\infty}{o}(n)$, et $P(C_n) = \dfrac{n-1}{2n} \sim \dfrac{1}{2}$. Donc $P(E_n) \underset{n\to\infty}{\to} \dfrac{1}{2}$.

4. Vitesse de convergence des $S_{p,q}$

Question 23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{p,q}(n) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{(n+1)\alpha_{p,q}}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} dx$.
En posant, le changement de variable C^1, strictement monotone, bijectif sur $\mathbb{R}^+$ s=x^{n+1}, on a : $I_{p,q}(n) = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{s^{\alpha_{p,q}+(\frac{1}{n+1}-1)}}{1 + s^{\frac{\alpha_{p,q}}{n+1}}} ds$. En dominant l'intégrande continue, on a par convergence dominée que $I_{p,q}(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \displaystyle\int_0^1 s^{\alpha_{p,q}-1} ds = \dfrac{q}{2pn}$

Donc $R_{p,q}(n) \sim \dfrac{1}{2pn}$ (quand n tend vers l'infini)

Question 24

$|\dfrac{R_{p,q}(n+1) - 0}{R_{p,q}(n) - 0}| \underset{n\to\infty}{\to} 1$. La vitesse de convergence est alors infra-linéaire.