Оптимизационные задачи в ритейле

Привет, Habr! На связи отдел аналитики данных X5 Tech.

Сегодня мы поговорим об очень интересном разделе прикладной математики — оптимизации.

Цели данной статьи:

- рассказать про задачи в ритейле, которые могут решаться методами оптимизации,
- продемонстрировать, как модельная задача ценообразования решается пакетами **Pyomo** и **SciPy**,
- сравнить производительность солверов* Pyomo и SciPy на примере поставленной задачи.

Прим. Солвер (от англ. Solver) - программа, скомпилированная под выбранную платформу, для решения математической задачи.

Так как данная тема достаточно обширна, то помимо данной статьи (статья 1) мы планируем написать ещё две:

```
1) Статья 2: Сравнение open-source солверов на примере задачи
ритейла.
2) Статья 3: Решение модельной задачи ценообразования
оптимизаторами в различных постановках.
```

Примеры задач

Практически каждый человек ежедневно решает оптимизационные задачи даже не задумываясь об этом. Пара примеров:

Закупка. Как правило, мы хотим минимизировать наши расходы для приобретения необходимых товаров, но при условии, чтобы эти товары были максимально полезны. Полезность здесь у каждого своя: для одних она определяется количеством растительных жиров, для других — минимальной суммарной стоимостью корзины, для третьих — наличием привычных товаров, и тд.

Отпуск. Во время ограниченного отпуска мы хотим распределить свой маршрут так, чтобы посетить всё, что запланировали с минимальными временными затратами на дорогу, и при этом не забыть позагорать на пляже.

Бизнес требования часто приводят к задаче многокритериальной оптимизации и задаче оптимального управления. В таких постановках решения, найденные методами оптимизации, чрезвычайно полезны для принятия решений. Для иллюстрации приведём несколько задач из области ритейла, которые могут быть сформулированы в виде задачи оптимизации.

Ценообразование. Поиск оптимальной конфигурации цен с учетом ценового позиционирования, допустимых ценовых диапазонов для каждого товара и набора бизнес-ограничений. Цены должны максимизировать суммарный доход, а прибыль быть не ниже на заданного уровня.

Оптимальное распределение маркетингового бюджета. Реализовать максимально эффективно выделенный на маркетинговые активности бюджет. Есть несколько каналов для рекламных акций, цель — инвестировать бюджет так, чтобы суммарный доход со всех коммуникаций был максимален. Необходимо учесть ограничения на предельную нагрузку на канал, допустимое количество коммуникаций для каждого клиента и пр.

Планирование ассортимента. Подобрать полочный ассортимент товаров так, чтобы максимизировать оборот с учетом полочного пространства и других характеристик магазина.

Закупка товаров. Задача — распределить бюджет, выделенный на закупки так, чтобы поддерживать товарооборот, заданный уровень доступности товаров и при этом достигнуть определенных финансовых показателей.

Логистика. Задача — найти оптимальный график доставки продуктов с учётом вместимости грузовиков, затрат на логистику и тд.

Общая постановка задачи и её разновидности

Прежде всего рассмотрим постановку задачи в общем виде:

x - вектор размерности n, $x \in X$ - допустимое множество значений этих переменных.

$f(x) \rightarrow \min(\max)$, $f(\cdot)$ - целевая функция

$g_i(x) \leqslant 0,\ i = 1..m$ - ограничения вида неравенств

$h_i(x) = 0,\ j = 1..k$ - ограничения вида равенств

Исходя из практики можно разложить данную постановку на несколько классов в зависимости от вида целевой функции, ограничений и X:

- **Безусловная оптимизация** $g_i(x), h_j(x)$ - отсутствуют, $X = \mathbb{R}^n$;
- **LP** (linear programming) - линейное программирование. $f(x), g_i(x), h_j(x)$ - линейные функции, $X = \mathbb{R}^n_+$;
- **MILP** (mixed integer linear programming) - смешанное целочисленное линейное программирование, это задача LP в которой только часть переменных являются целочисленными;
- **NLP** (nonlinear programming) - нелинейное программирование, возникает когда хотя бы одна из функций $f(x),\ g_i(x),\ h_j(x)$ нелинейна;

- **MINLP** (mixed integer nonlinear programming) - смешанное целочисленное нелинейное программирование, возникает как и в MILP, когда часть переменных принимает целочисленные значения;

NLP в свою очередь можно подробить еще на множество разных классов в зависимости от вида нелинейности и выпуклости.

Подробнее о том, как получаются различные виды задачи ценообразования исходя из бизнес-формулировки, мы будем говорить в статье 3.

Оптимизация модельной задачи ценообразования

Разобравшись с различными видами постановок оптимизационных задач, перейдём к построению модели ценообразования.

Предположим, что для товара i известно значение эластичности E_i, а спрос задаётся следующей зависимостью:

$$Q_i(P_i) = Q_{0,i} \exp\left(E_i \cdot \left(\frac{P_i}{P_{0,i}} - 1\right)\right). \tag{1}$$

Введём обозначения:

- n - количество товаров,
- C_i - себестоимость i-го товара,
- $Q_i, Q_{0,i}$ - спрос по новой P_i и текущей $P_{0,i}$ ценам, соответственно,
- $x_i = P_i \ / \ P_{0,i}$.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим задачу с одним ограничением сложного вида и ограничения на переменные.

Задача — найти такой набор новых цен, чтобы:

- максимизировать оборот со всех товаров,
- общая прибыль осталась на прежнем уровне,
- цены лежали в заданных границах (индекс ***l*** и ***u*** - для нижней и верхней, соответственно).

Тогда оптимизационную задачу можно записать следующей системой:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot Q_i(x_i) \to \max_x, \\ \sum_{i=1}^{n} (P_i - C_i) \cdot Q_i(x_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} (P_{0,i} - C_i) \cdot Q_{0,i}, \\ x_i \in [x_i^l, x_i^u], \ i = 1..n \end{cases}$$

Реализация модели в Pyomo и SciPy

Для демонстрации решения необходимы данные.

Реальные данные мы использовать не можем из-за NDA, поэтому будем генерировать их из случайных распределений (функция generate_base_data), исходя из наших представлений о возможных значениях величин в фуд-ритейле.

▶ Пример данных для NLP постановки:

SciPy и Pyomo имеют разные интерфейсы, чтобы как-то унифицировать работу с ними, будем наследоваться от базового класса, код класса.

Методы, которые необходимо реализовать для каждого солвера:

- init_objective - задание целевой функции,
- init_constraints - статические ограничения,
- add_constraints - динамические ограничения,
- solve - поиск оптимального решения.

Опишем далее отличия в реализации этих методов в SciPy и Pyomo.

Другие примеры из официальной документации можно найти здесь, для Pyomo и здесь, для SciPy.

Задание целевой функции

В SciPy оптимизатор работает в режиме минимизации, поэтому суммарный оборот берём со знаком "-".

В Pyomo функцию пересчёта суммарного оборота необходимо передать в переменную expr объекта pyo.Objective.

```
# SciPy
def objective(x):
    return -sum(self.P * x * self.Q * self._el(self.E, x))

# Pyomo
objective = sum(self.P[i] * self.model.x[i] * self.Q[i] *
self._el(i) for i in range(self.N))
self.model.obj = pyo.Objective(expr=objective, sense=pyo.maximize)
```

Задание ограничений

Ограничение на суммарную прибыль задаётся в методе init_constraints.

Для SciPy ограничения передаются через NonlinearConstraint или LinearConstraint().

Для Pyomo ограничения передаются через pyo.Constraint().

```
# SciPy
def init_constraints(self):
    def con_mrg(x):
        m = sum((self.P * x - self.C) * self.Q * self._el(self.E,
x))
```

```
        return m
    constr = NonlinearConstraint(con_mrg, self.m_min, np.inf)
    self.constraints.append(constr)

# Pyomo
con_mrg_expr = sum((self.P[i] * self.model.x[i] - self.C[i]) *
self.Q[i] * self._el(i)
                   for i in range(self.N)) >= self.m_min
self.model.con_mrg = pyo.Constraint(rule=con_mrg_expr)
```

Поиск решения

В SciPy задача оптимизации запускается через метод minimize, а в Pyomo через проинициализированный объект SolverFactory методом solve.

```
# SciPy
result = minimize(self.obj, self.x0,  method='cobyla',
constraints=self.constraints)

# Pyomo
solver = pyo.SolverFactory(solver, tee=False)
result = solver.solve(self.model)
```

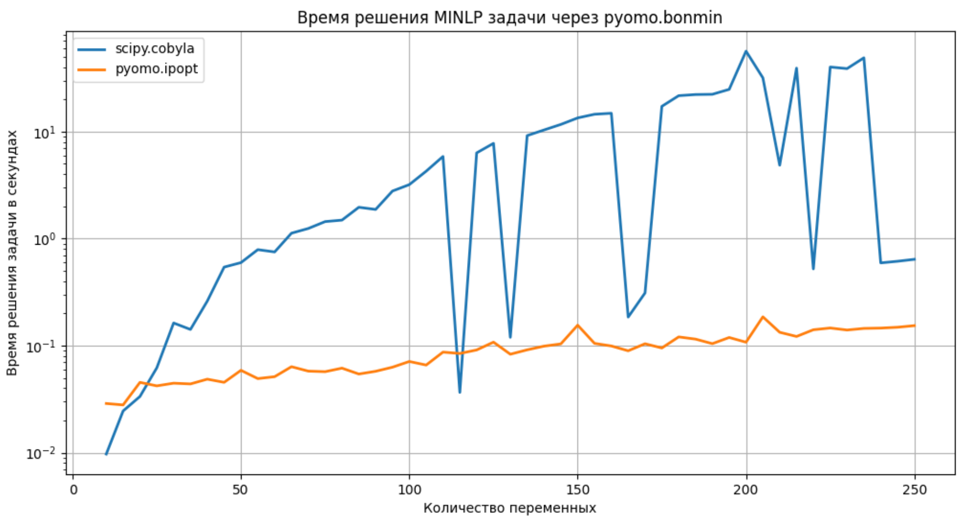
Расчёт и результаты

Так как оптимизаторы устанавливаются отдельно от python, то для получения аналогичных результатов можно воспользоваться Dockerfile, настроив контейнер, как описано в README проекта.

Для сравнения расчётов достаточно выполнить команду:

```
python runner.py -m compare
```

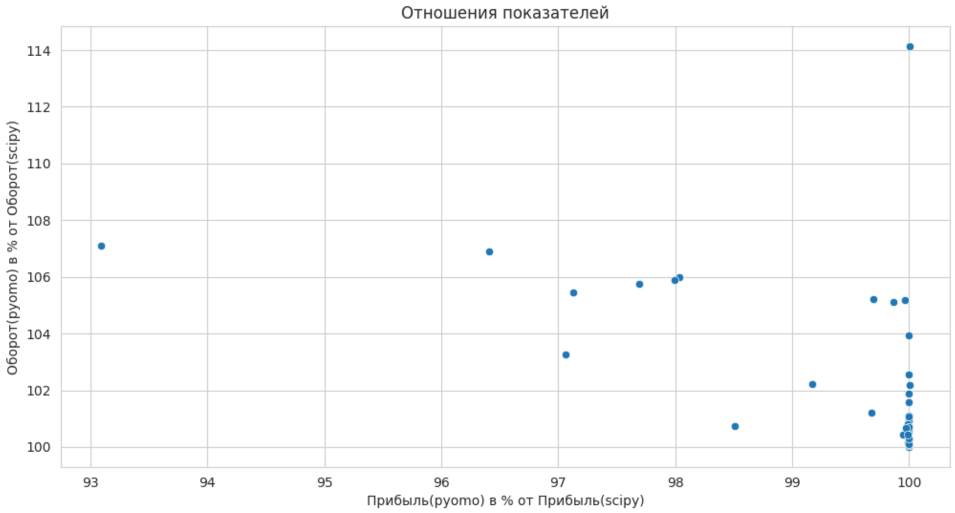
Зависимость длительности поиска оптимального решения от количества переменных представлена на графике ниже.



Из графика можно сделать вывод, что Pyomo с солвером ipopt значительно превосходит SciPy с cobyla при N > 50.

В некоторых точках SciPy.cobyla прерывается достаточно быстро, что видно из пилообразной формы. При этом выдаётся статус, что оптимальное решение не найдено.

Проанализируем отношения оборотов и прибыли для найденных решений. По оси y - отношение суммарного оборота при найденном решении Pyomo.ipopt к суммарному обороту при найденном решении SciPy.cobyla; по оси x - аналогичное отношение для суммарной прибыли.



Солвер Pyomo.ipopt в большинстве случаев достигает большего суммарного оборота, чем SciPy.cobyla, с Суммарная прибыль везде не ниже текущего уровня, что и требовалось в задаче.

Также хочется отметить, что Pyomo затрачивает много времени на подготовку данных во внутреннем формате для передачи во внешний солвер, что в некоторых случаях занимает больше времени, чем поиск решения. Об этом более детально в статье 2, в которой также затронем вопрос зависимости времени поиска решения от числа ограничений.

Заключение

В данной статье мы:

- Привели типичные примеры постановок задач оптимизации в области ритейла.
  ```
    Надеемся, что читателю станет легче распознавать подобные
  задачи в своей области.
  ```
- Показали, как можно решать задачу ценообразования с помощью Pyomo (код для статьи).
  ```
    Будем рады, если новичкам в моделировании данный материал
  упростит ознакомительный этап.
  ```
- Сравнили производительность солверов Pyomo.ipopt и Scipy.cobyla.
  ```
    Можно заметить существенную разницы в получаемых результатах,
  о чем не следует забывать на практике.
  ```

В следующей стать более детально обсудим другие open-source солверы для python, их различия в реализации и производительности.

Над статьей работали Антон Денисов, Михаил Будылин.