

#### Rapport de stage – WEI LIU

# The Research of non-smooth control on structural vibration (part of control)

Dans l'éstablishment: Modern control technology lab, Faculty of Mechanical and Electric Engineering, Guangzhou University, Guangzhou(Canton) China

Master Electronique, énergie électrique, automatique Génie des Systèmes Automatisés (GSA)

Année 2017-2019

A l'université Claude Bernard Lyon1

## **PLAN**

1. Remerciements	3
2. Sommaire de stage	4
3. Introdution	5
4. Objectifs de la recherche	9
5. Matériel utilisé pentant stage	10
6. Développement de sujet	11
7. Analyse des données	39
8. Conclusion	41
9. Insuffisances et Commentaire personnel	41
10. Référence	42

#### 1. Remerciements



Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de mon stage et qui ont apporté leur aide lors de la rédaction de ce rapport. Je voudrais dans un premier temps remercier, ma reponsable professeur QI WANG et son assistant docteur JIANHUI WANG, pour avoir assuré la partie théorique de celleci. Madame QI WANG et Monsieur JIANHUI WANG qui à travers son rôle de tutrice, m'a beaucoup appris sur les défis à relever dans le monde des affaires. Ils sont partagé ses connaissances et expériences dans ce milieu, tout en m'accordant sa confiance et une large indépendance dans l'exécution de missions valorisantes. Je lui suis très reconnaissante pour ce qu'elle m'a transmis et qui me servira beaucoup à l'avenir. En plus, un grand merci à mon binôme YU LIU, qui est aussi mon camarade à Lyon1, il a été d'un grand soutien dans l'élaboration de ce stage et durant toute cette expérience au labo.

#### 2. Sommaire de stage

En fait, mon expérience de recherche de stage n'est pas très réussi, mais il existe deux possibilités proches: l'une consiste à effectuer des travaux de recherche dans le laboratoire du département de contrôle électronique de Volkswagen en Allemagne, une autre est de suivre l'un de mes professeurs lors de mon échange en Canada effectuant un stage sur le thème de Machine Learning. Il était tellement arrivé mais à la fin qu'il n'a pas été mis en œuvre pour pour certaines raisons imprévues. Alors, finalement, j'ai retrouvé ma maitre précédente quand j'étais au premier cycle et avec son consentement et ses arrangements, j'ai effectué un stage de recherche sur l'un de ses projets existants.

Donc, du 31 mai, j'ai effectué un stage au sein de labo Modern Control Technology situé à Guangzhou University en Chine. Mon stage au labo (Modern control technology lab of Guangzhou University), c'est un labo appartenant à faculté de mecanique et electrique à l'université de Guangzhou(Canton). Le labo comprend à plusieur parties : Modern control and simulation technique lab, process control lab, electrical sustainable power lab etc. Pendant mon stage, ma tâche principale est de mener des recherches et de pratiquer sur les sujets assignés par les instructeurs. En même temps, lors de l'ouverture du laboratoire, je serai également moniteur de laboratoire pour aider les étudiants à résoudre leurs problèmes.

Ma tâche principale viser à supprimer les effets néfastes pour la construction dans une onde sismique en utilisant matlab avec un algorithme de non-smooth control et inverse system method. En fait, c'est une petite partie de un projet principalement effectué par Centre national de tremblement de terre à Guangzhou University et collaboré avec la faculité mécanique et électrique de Guangzhou University. A part de développer le program basé sur les paramètres de données fournis et les articles associés, en fin je comparerai le résultat à d'autres méthodes de contrôle afin de souligner l'avantage de la méthode de contrôle proposée. De plus, je vais également appliquer la théorie de la stabilité en temps fini pour prouver sa rationalité inhérente, ce qui signifie que le système en boucle fermée de la structure du bâtiment sera stable avec l'algorithme de contrôle proposé dans une influence externe. En matière de la partie de observateur (extended state observer) sera plutôt présenté par mon binôme YU LIU. Mais nous coopérons tout au long du projet.

#### 3. Introdution

#### Subjet

The Research of non-smooth control on structural vibration (part of control)

#### Importance de la recherche (Research significance)

(1) Actuellement, la méthode appropriée de contrôle des vibrations structurelles est adoptée pour réduire la réponse de la structure aux charges dynamiques (telles que les tremblements de terre ou les tempêtes de vent), pour répondre aux exigences de sécurité des structures et de confort de la vie des personnes, et est devenue la priorité la plus importante le monde. Un des problèmes majeurs à prendre en compte. Du point de vue du contrôle de la demande d'énergie externe, le contrôle des vibrations structurelles est divisé en contrôle passif, contrôle actif, contrôle semi-actif et contrôle mixte. Outre le contrôle passif, les forces de contrôle dans les trois autres modes de contrôle sont générées en tout ou en partie en fonction du signal de retour d'état en temps réel, conformément à une loi de contrôle prédéfinie. L'effet de contrôle de structure active est meilleur. En théorie, la réponse sismique de la structure peut être réduite d'environ 50% à 70%. Il a une forte capacité d'adaptation à l'environnement, mais il dépend complètement de l'énergie externe. La stabilité en boucle fermée est pire que les autres méthodes. En contrôle passif, le contrôle n'est pas généré par le retour. Ses principaux avantages sont son faible coût, l'absence de consommation d'énergie externe et son impact sur la stabilité structurelle. L'inconvénient est que l'adaptabilité et l'effet de contrôle sur les changements environnementaux ne sont pas aussi performants que d'autres schémas. Le contrôle hybride fait référence à l'utilisation du contrôle actif pour compléter et améliorer les performances du contrôle passif.

Grâce à la combinaison du contrôle passif, les besoins en énergie dans le schéma de contrôle totalement actif sont réduits. Le contrôle semi-actif inclut généralement des équipements contrôlables nécessitant peu d'énergie, tels que des amortisseurs à orifice variable, etc. L'énergie externe requise est généralement beaucoup plus petite que le contrôle actif.

Aujourd'hui, alors que la structure évolue dans une direction plus haute et plus complexe, la technique de contrôle actif avec une large gamme d'application et un bon contrôle des effets de vibration a retenu l'attention. Du point de vue de la

composition matérielle et logicielle, ces méthodes peuvent être divisées en deux parties: dispositif de contrôle et algorithme de contrôle. De nombreux dispositifs de commande ont été appliqués avec succès en ingénierie pratique. Cependant, il est urgent de mener des recherches sur les algorithmes de contrôle en tant que facteur clé. Les algorithmes de contrôle actif structurel nécessitent généralement l'établissement de modes de vibration structurels précis.

Les structures de génie civil comprennent des membres structurels stressés et des membres non structurels non stressés. Les calculs de conception structurelle et la modélisation de contrôle ne prennent généralement pas en compte les effets des éléments non structurels. Par conséquent, les éléments structurels non structurels et les changements de masse réels affecteront la structure après l'achèvement. Le modèle mathématique du contrôle des vibrations. De plus, la structure réelle peut entrer dans la non-linéarité sous la force dynamique élevée telle qu'un tremblement de terre, la résistance et la rigidité de l'élément structurel peut être dégradée et le modèle de la structure réelle est difficile à corriger.

Par conséquent, la recherche ne repose pas sur des modèles mathématiques précis et présente des caractéristiques telles que l'incertitude et la non-linéarité des paramètres du système. L'algorithme de contrôle des vibrations structurelles à forte adaptabilité, c'est-à-dire une grande robustesse, est conçu et sa structure spécifique est étudiée. L'effet de contrôle de l'amortissement est un travail très important.

- (2) Le contrôle non lisse a une forte capacité anti-ingérence, une forte robustesse et une convergence en temps fini. Il convient très bien à la conception de systèmes de contrôle des vibrations structurelles. Après des années de développement, des spécialistes nationaux et étrangers ont proposé ou appliqué diverses méthodes efficaces pour différentes conditions d'application. Selon la situation connue du modèle mathématique de l'objet contrôlé et des informations d'interférence externe, les méthodes de contrôle couramment utilisées sont les suivantes:
- 1) Régulateur linéaire quadratique (LQR), linéaire quadratique gaussien-lqg. Le modèle mathématique d'une telle méthode est déterminé comme étant invariant et le compromis entre l'ampleur du contrôle et la réponse du processus de transition s'écrit sous la forme d'une fonction objective quadratique permettant

d'optimiser la cible. Sur la base du LQR, LQG prend en compte l'influence des interférences externe et utilise le filtre de Kálmán pour éliminer les interférences.

- 2) Contrôle adaptatif. Parce que tout objet contrôlé ne peut pas être complètement précis lors de la modélisation, le modèle est traité par réduction modale, linéarisation de facteur non linéaire, etc., et la structure réelle est très différente. L'incertitude du modèle est souvent un problème inévitable. L'incertitude comprend en fait l'incertitude des paramètres, l'incertitude structurelle et diverses perturbations externes. Le système de contrôle conçu doit pouvoir faire face à ces incertitudes afin d'avoir peu d'impact sur les performances dynamiques du système, ce qui exige que le système soit robuste (Robust). Le contrôle adaptatif concerne principalement l'incertitude des paramètres à l'intérieur du système, tel que le contrôle adaptatif de référence de modèle (MRAC) et le contrôle du retournement automatique. Ces méthodes utilisent la mesure du signal de perturbation pour ajuster les paramètres du contrôleur via le "mécanisme adaptatif" et "en ligne", permettant ainsi de modifier les caractéristiques du système.
- 3) Contrôle robuste. Le contrôleur robuste a une analyse systématique et une théorie de conception à la fois pour l'incertitude des paramètres et pour la dynamique non modélisée. Cependant, le contrôleur robuste ne s'adapte pas automatiquement à la partie incertaine du système, mais selon La partie déterministe du contrôleur de conception du système le rend plus robuste à la partie incertaine, de sorte que la conception du contrôle est souvent trop conservatrice et complexe pour la "pire des cas", et parce que le contrôleur luimême ne suit pas les incertitudes du système le changement en temps réel, donc l'incertitude du système à laquelle il peut faire face est limitée. Ces méthodes sont également considérées méthode de la valeur singulière structurelle pour

l'incertitude structurelle.

4) Contrôle du sliding mode. La méthode consiste à concevoir un contrôleur avec une loi de commande linéaire dans un système linéaire, mais une analyse théorique montre que, pour que les performances du système atteignent des performances optimales sous certains indicateurs, une commande non linéaire est souvent utilisée et la loi de commande linéaire ne peut pas être totalement utilisée. exercer le contrôleur. Par exemple, le contrôle du temps le plus court devrait adopter le contrôle du type Bang-Bang. Selon certaines règles de commutation

logique, la quantité de contrôle est commutée entre des valeurs maximales positives et négatives, ce qui utilise pleinement l'énergie de contrôle et élimine rapidement l'erreur système. Ce type de méthode de contrôle non linéaire est plus largement utilisé dans le contrôle des vibrations structurelles. La commande en mode coulissant construit le contrôleur en construisant une surface de commutation et une loi d'approche de conception afin de garantir que la trajectoire du système puisse satisfaire à la condition d'arrivée, entrer dans la surface de commutation dans un temps limité et générer un mouvement en mode coulissant pour répondre aux exigences de conception. La méthode est totalement robuste aux paramètres de perturbation et de perturbation externe du système, ou invariante et totalement adaptative. Cet avantage unique lui a donné une forte vitalité et est utilisé dans de nombreux domaines de l'ingénierie. Le procédé comporte également un large éventail de systèmes et de tâches de contrôle applicables aux systèmes linéaires et non linéaires, aux systèmes continus et discrets, aux systèmes déterministes et incertains, aux systèmes de paramètres localisés et distribués et aux systèmes synchrones et à retardement. Les tâches de contrôle applicables incluent la stabilisation, le suivi des mouvements et le suivi des modèles.

Comme pour tout, le contrôle de sliding mode a ses inconvénients. La commutation à grande vitesse du commutateur de mode coulissant des deux côtés du mode coulissant en fonction de la perturbation peut provoquer des vibrations indésirables et affecter les performances du système. Bien que l'effet de la conversation puisse être réduit en utilisant une méthode de traitement en continu. cette méthode de traitement réduit également l'anti-ingérence et la robustesse du système face à l'incertitude du modèle. D'autre part, la commande de mode coulissant peut garantir que l'état du système atteint la surface de glissement dans le mouvement de sliding mode dans un temps limité, mais le mouvement de sliding mode présent généralement une stabilité asymptotique et ne peut pas garantir que tous les états du système atteignent. le point d'équilibre du système dans un temps limité. En fait, le contrôle en mode glissant est un contrôle en rétroaction non lisse typique (en fait, un contrôle non continu), qui est plus important pour l'étude du contrôle nom général plus général. En concevant une loi de commande continue non lisse, d'une part, les avantages des méthodes de commande non continues, telles que les caractéristiques de convergence en temps fini, la robustesse robuste, etc., d'autre part, peuvent réduire l'influence des caractéristiques discontinues. sur les performances du système, comme le phénomène de bavardage mentionné cidessus. À l'heure actuelle, le contrôle continu non continu a été étudié et appliqué

dans certains domaines, mais il n'existe aucun rapport sur l'application du contrôle des vibrations structurelles.

Le système lisse peut être considéré comme un cas particulier des systèmes non lisses. La théorie des systèmes non linéaires existante étudie principalement les systèmes lisses, tels que la méthode de la géométrie différentielle, la méthode de l'algèbre différentielle, la théorie de Lyapunov, etc. Relativement parlant, l'analyse et le contrôle des systèmes non lisses sont relativement en retard en raison du manque d'outils mathématiques efficaces dans le passé et de la variété de types non lisses. D'autre part, une rétroaction non lisse peut stabiliser le système dans lequel une rétroaction lisse ne peut pas être stabilisée (comme un type de système sous actionné) dans certains cas, et peut fournir des propriétés telles qu'une convergence dans le temps fini et une anti-interférence forte. de sorte que les performances non lisses fournissent pas des systèmes lisses de bonne qualité. Par conséquent, la recherche sur les systèmes non lisses et les conceptions de rétroaction non lisses à une signification théorique et pratique importante.

## 4. Objectifs de la recherche

Les structures des bâtiments deviennent de plus en plus complexes, en particulier pour les gratte-ciel. La complexité couvre les propriétés de distribution inhérentes, les paramètres, les incertitudes et les fortes perturbations externes. En attendant, des exigences de performances de contrôle plus élevées sont requises. Toutes ses caractéristiques apportent de nouveaux défis à la technique de contrôle des vibrations structurelles. Ce projet utilise une approche de contrôle des vibrations sans lissage, comprenant les aspects suivants:

(1) une analyse plus approfondie doit être menée pour les structures typiques et les exigences de performances de contrôle, afin de fournir une description mathématique générale avec des incertitudes sur les paramètres.

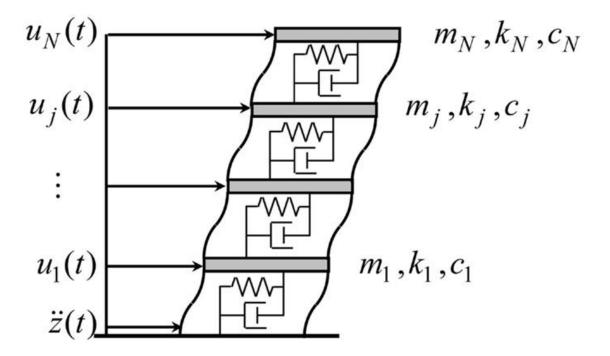
- (2) Dans les contraintes prescrites, une méthode de contrôle non lisse sera utilisée pour concevoir les lois de contrôle de stabilisation et de régulation de sortie pour les systèmes incertains avec de fortes perturbations externes. L'objectif de conception est d'améliorer les performances des systèmes, telles que des réponses rapides aux perturbations externes, une grande robustesse face aux incertitudes.
- (3) La technique de l'observateur d'état étendu du contrôle du rejet de perturbation automatique sera utilisée pour concevoir l'algorithme d'estimation des informations d'état et de distrubance qui sera utilisé pour estimer les informations d'état et de perturbation en temps réel dans l'application de la loi de commande.
- (4) Sur la base des recherches mentionnées ci-dessus, la synthèse du contrôle des vibrations structurelles sera réalisée en même temps que la conception du logiciel pour les algorithmes, et la synthèse sera vérifiée par simulation numérique.
- (5) Enfin, la synthèse sera vérifiée par des expériences physiques. Les résultats de recherche attendues peuvent être appliquées efficacement à la conception des systèmes de contrôle des vibrations structurelles avec une performance de contrôle améliorée.

## 5. Matériel utilisé pentant stage

PC et logiciel Matlab R2013b

## 6. Développement de sujet

6.1 Modélisation mathématique d'un bâtiment à structure non linéaire prenant en compte les effets vibratoires des ondes sismiques (El centro)



Exemple: modèle du bâtiment à cisaillement N-story avec amortissement Visqueux

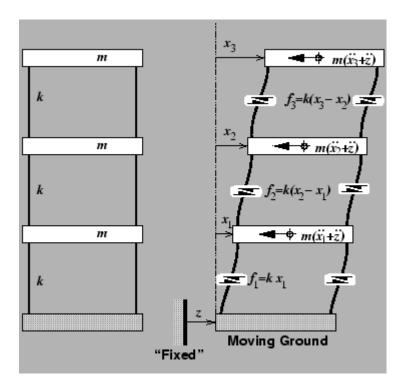
La figure ci-dessus montre une photo et un schéma du modèle de construction à n étages. Le modèle comprend:

- 1) n "étages" rigides avec un certain poids m
- 2) "colonnes" flexibles
- 3) une base "sol" qui oscille de manière sinusoïdale.

Lorsqu'un étage se déplace latéralement par rapport à l'étage inférieur, les colonnes se plient, créant des forces de "cisaillement" latérales, dans les colonnes.

La flexion de ces colonnes est semblable à l'extension d'un ressort, on peut généralement supposer que la force de cisaillement dans les colonnes est constante sur la hauteur des colonnes et que la force de cisaillement f est proportionnelle à la déformation de la colonne, x.

En d'autres termes, la force de cisaillement augmente linéairement avec la déformation de la colonne. La rigidité au cisaillement k de la colonne est cette constante de proportionnalité, et f=kx. Les forces de cisaillement dans les colonnes agissent sur la masse des étages, à chaque connexion étage-colonne. Ces forces contribueront à l'accélération totale, a, des masses de plancher m, f=ma



Une exemple simple de struture avec 3 étages

Pour développer les équations différentielles du mouvement, nons examinons à séparer les forces appliquées à chaque masse et nous supposons n=3 (nombre d'étage) comme l'image ci-dessus. À partir de la première masse (qui est déplacée d'une distance x1 par rapport au sol, à n'importe quel moment dans le temps t),

les forces des colonnes situées au-dessous de la masse sont f1=kx1 s'agissant à gauche et les forces f2(t)=k\*(x2(t)-x1(t)) des colonnes situées au-dessus de la masse agissent à droite. De plus, cette masse étant en accélération, elle subit des forces d'inertie. La force d'inertie du premier étage est sa masse multipliée par son accélération totale. L'accélération totale est l'accélération de la première masse par rapport au sol $\frac{d^2x1(t)}{dt^2}=\ddot{x}$ 1 =plus l'accélération du sol  $\frac{d^2z(t)}{dt^2}=\ddot{z}$ 2. La force d'inertie s'opposera à cette accélération et agira à gauche avec une magnitude  $m(\ddot{x}1(t)+\ddot{z}(t))$ 1. Nous pouvons maintenant écrire les équations du mouvement pour cette première masse.

$$m(\ddot{x1}(t) + \ddot{z}(t)) + kx1(t) - k((x2(t) - x1(t))) = 0$$

Nous répétons ce processus pour la deuxième masse. Les forces sur la deuxième masse des colonnes ci-dessous sont  $f2(t) = k\left(\left(x2(t) - x1(t)\right)\right)$  agissant à gauche. À partir des colonnes situées au-dessus de la deuxième masse, les forces sont  $f3(t) = k\left(\left(x3(t) - x2(t)\right)\right)$  agissant à droite. La force d'inertie sur la deuxième masse est  $m(x^2(t) + z^2(t))$  qui agit à gauche. La somme des forces sur la deuxième masse nous donne

$$m\left(\ddot{x2}(t) + \ddot{z}(t)\right) + k(x2(t) - x1(t)) - k(x3(t) - x2(t)) = 0$$

Répétez et cela nous permet d'avoir l'expression N étage.

Donc les trois équations peuvent être réécrites simplement en réorganisant les termes,

$$m\ddot{x}\dot{1}(t) + 2kx1(t) - kx2(t) = -m\ddot{z}(t)$$

$$m\ddot{x}\dot{2}(t) - kx1(t) + 2kx2(t) - kx3(t) = -m\ddot{z}(t)$$

$$mx\ddot{3}(t) - kx2(t) + kx3(t) = -m\ddot{z}(t)$$

Ces équations peuvent à leur tour être écrites à l'aide de matrices,

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x1} \\ \ddot{x2} \\ \ddot{x3} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = -\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou, en bref,

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = -M1\ddot{z}(t)$$

Où x(t) est le vecteur de déplacement, M est la matrice de masse, K est la matrice de rigidité, 1 est un vecteur colonne de uns.

Cependant, pour décrire plus précisément le modèle, nous devons également inclure les effets de l'amortissement, dont nous parlerons plus loin. Ensuite, nous allons résoudre l'équation différentielle pour trouver les fréquences naturelles et les formes de mode du modèle afin de comprendre la réponse du modèle en conditions sismiques.

Comme indiqué précédemment, les tremblements de terre peuvent être particulièrement désastreux pour les bâtiments par résonance. Cependant, la plupart des structures ont un certain amortissement, ce qui aide à limiter la résonance. L'amortissement des bâtiments se produit de manières incroyablement diverses et peut incorporer de nombreux types de mécanismes. Par exemple, voici les sources d'amortissement:

Air: La traînée visqueuse de la structure se déplaçant dans l'air.

Colonnes: Peut avoir une certaine viscoélasticité.

Rendement structurel: L'énergie absorbée par la cession de parties d'une structure peut réduire considérablement les vibrations lors d'un séisme.

De graves tremblements de terre entraînent la perte d'éléments structurels, ce qui ajoute un amortissement important.

Des structures bien conçues céderont de manière contrôlée.

Étant donné que l'amortissement est très compliqué et que ses effets sont souvent secondaires par rapport aux propriétés d'inertie (masse) et de rigidité, il est courant de supposer que les forces d'amortissement augmentent proportionnellement à la vitesse  $f=cv=c\dot{x}$ . De plus, il est assez commode et courant de décrire l'amortissement du système structural par une matrice d'amortissement proportionnelle à la matrice de masse et à la matrice de rigidité, C=aM+bK, où

les constantes a et b sont des constantes de proportionnalité. Ce type d'amortissement est appelé amortissement proportionnel. Pour le modèle de laboratoire, il est facile de constater que l'amortissement peut être décrit très précisément par une simple matrice diagonale.

$$C = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Comme la matrice de masse est également diagonale, nous appelons ce type d'amortissement un amortissement proportionnel à la masse. Physiquement, ce type de matrice d'amortissement indique que la majeure partie de l'amortissement appliqué à la structure est due à la traînée visqueuse de la structure se déplaçant dans l'air. Nous appelons cet amortissement aérodynamique. Vous pouvez imaginer ce type d'amortissement comme un ensemble de "dash-pots" visqueux reliant chaque masse à un point stationnaire. Y compris les effets de l'amortissement, les équations matricielles du mouvement sont écrites

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x} + Kx(t) = -M1\ddot{z}(t)$$

Où  $\ddot{z}$  accélérations au sol des tremblements de terre.

L'analyse ci-dessus nous donne une compréhension préliminaire du mouvement architectural, c'est-à-dire de son équation différentielle de mouvement.

Comme analyser ci-dessus, La construction à n degré de liberté avec contrôle d'entrée sous l'action d'ondes sismiques horizontales

L'équation de mouvement de la structure est exprimée comme suivant

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = B_g \ddot{X}_g + B_u U \qquad (1)$$

Où  $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$  est le vecteur de déplacement structurel du bâtiment par rapport au sol, où  $x_i (i=1,2,\cdots n)$  est le déplacement structurel du bâtiment par rapport au sol: M, C, K, respectivement, la matrice de masse dimensionnelle n  $\times$  n, la matrice d'amortissement et la matrice de rigidité de le bâtiment;  $B_g = -MI_g$  est l'accélération sismique au sol. Matrice de transformation, dans laquelle le

vecteur de position d'accélération sismique  $I_g$  est un vecteur de colonne n  $\times$  1 dont les éléments sont tous égaux à 1;  $\ddot{X}_g$  est une entrée d'accélération sismique au sol;  $B_u$  est une matrice de position du contrôleur n  $\times$  n; U est un vecteur d'entrée de force de contrôle n  $\times$  1.

Dans le modèle de cisaillement physique réel, il existe une hystérésis non linéaire entre les couches. Par conséquent, l'équation de mouvement non linéaire peut être exprimée comme suivant:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + F_{s}(X) = B_{g}\ddot{X}_{g} + B_{u}U \quad (2)$$

Où  $F_s(X)$  est le lien de résilience d'hystérésis à modéliser.

Dans l'étude de la modélisation des caractéristiques d'hystérésis, de nombreux modèles d'hystérésis ont été proposés, tels que le modèle de Preisach, le modèle PI et le modèle de Bouc-Wen. Le modèle Preisach et le modèle PI sont des modèles d'hystérésis superposés par plusieurs opérateurs différents. Le nombre d'opérateurs affecte la précision du modèle. La fonction de pondération nécessite une grande quantité de données pour l'identifier. Le modèle de Bouc-Wen est décrit par des équations différentielles et son entrée est implicite dans l'expression de l'équation différentielle du modèle. La relation de transition en douceur entre la force de restauration de l'hystérésis et la déformation de déplacement relatif est également conforme aux pratiques d'ingénierie. Par conséquent, ce modèle est adopté dans ce document.

La i-ème couche de la force d'hystérésis est

$$Fs(t) = \alpha_i k_i x_i + (1 - \alpha_i) k_i D_{v} v_i$$

Où  $\alpha_i$  est le rapport entre la rigidité après la limite d'élasticité et la rigidité avant la limite d'élasticité de la ième couche;  $k_i$  est la rigidité élastique de la i-ème couche,

A est le déplacement de rendement ultime de la ième couche et est généralement défini comme une constante; v<sub>i</sub> est le composant sans dimension d'hystérésis dans la déformation de la i-ème couche, qui aussi satisfait à

$$\dot{v}_{i} = D_{v_{i}}^{-1} (A_{i} \dot{x}_{i} - \beta_{i} |\dot{x}_{i}| |v_{i}|^{n_{i}-1} v_{i} - \gamma_{i} \dot{x}_{i} |v_{i}|^{n_{i}})$$
 (3)

Où  $A_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $n_i$  est une constante liée à l'hystérésis.

La force de rappel  $F_{\rm s}(X)$  peut être décomposée en une partie élastique et une partie hystérétique de la manière suivante:

$$F^{el}(t) = a * k_i x = k_e x$$

et

$$F^{h}(t) = (1 - a) * k_{i}D_{vi}v_{i} = k_{v}v$$

Par conséquent, le modèle mathématique de la structure non linéaire du bâtiment peut être décrit comme suivant:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + K_{\rho}X + K_{V}V = B_{\sigma}\ddot{X}_{\sigma} + B_{\eta}U \qquad (4)$$

Où

- 1)  $V = [v_1, v_2 \dots, v_n]^T$  est le vecteur d'hystérésis de chaque couche;
- 2)  $K_e$  correspond à la matrice de rigidité dimensionnelle n x n de X

$$K_{e}(i,i-1) = -\alpha_{i}k_{i}, (i = 2,3,\cdots n)$$

$$K_e(i,i) = \alpha_i k_i + \alpha_{i+1} k_{i+1}, (i = 1,2,\cdots n)$$

$$K_{e}(i, i+1) = -\alpha_{i}k_{i+1}, (i = 1, 2, \dots n-1)$$

Les autres sont zéro

3)  $K_V$  corresponds to the n  $\mathbf x$  n-dimensional hysteresis stiffness matrix of V

$$K_{V}(i,i-1) = -(1-\alpha_i)k_iD_{v_i}, (i=2,3,\cdots n)$$

$$K_V(i,i) = (1-\alpha_i)k_iD_{v_i} + (1-\alpha_{i+1})k_{i+1}D_{v_{i+1}}, (i=1,2,\cdots n)$$

$$K_{V}(i,i+1) = -(1-\alpha_{i+1})k_{i+1}D_{v_{i+1}}, (i=1,2,\cdots n-1)$$

Les autres sont zéro

## 6.2 Conception de la méthode de contrôle du système et analyse de la stabilité

Définir des variables d'état  $Z = [\overline{Z}_1, \overline{Z}_2, \overline{Z}_3]^T$ , dont

$$\overline{Z}_1 = [\overline{z}_{11}, \overline{z}_{12}, \cdots, \overline{z}_{1n}]^T = X , \quad \overline{Z}_2 = [\overline{z}_{21}, \overline{z}_{22}, \cdots, \overline{z}_{2n}]^T = \dot{X} , \quad \overline{Z}_3 = [\overline{z}_{31}, \overline{z}_{32}, \cdots, \overline{z}_{3n}]^T = V$$

Puisque

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + K_{e}X + K_{V}V = B_{g}\ddot{X}_{g} + B_{u}U$$

Ensuite, l'équation de l'espace d'états peut être exprimée sous la forme

$$\dot{Z} = A(Z) + W\ddot{X}_{g} + BU \tag{5}$$

$$A(Z) = \begin{bmatrix} \overline{Z}_2 \\ -M^{-1}(C\overline{Z}_2 + K_e\overline{Z}_1 + K_V\overline{Z}_3) \\ \dot{\overline{Z}}_3 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 0 \\ -I_g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_u \\ 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant la méthode du système inversé, nous definous la variable Y=X, donc

$$\begin{cases}
\dot{Y} = \dot{X} \\
\ddot{Y} = M^{-1} \left[ -K_e - C - K_V \right] Z - I_g \ddot{x}_g + M^{-1} B_u U = h(Z, U)
\end{cases}$$
(6)

Selon l'équation (6) ci-dessus,  $\ddot{Y}$  représente U et  $\overline{U} = \ddot{Y}$ ,  $\ddot{x}_g$  est considéré comme le terme de perturbation externe du système de structure de bâtiment. Laissez la quantité de contrôle U être:

$$U = B_u^{-1} ( \begin{bmatrix} K_e & C & K_V \end{bmatrix} Z - M I_g \ddot{x}_g + M \overline{U} )$$
 (7)

En substituant l'équation (7) à (5)

$$\dot{Z} = A(Z) + W\ddot{X}_g + BB_u^{-1} (\begin{bmatrix} K_e & C & K_V \end{bmatrix} Z - MI_g \ddot{x}_g + M\overline{U})$$
(8)

Par conséquent, l'équation d'état du système inverse de second ordre du système d'origine (5) peut s'écrire comme suivante:

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = \dot{X} \\ \dot{Z}_2 = \ddot{X} = \overline{U} \end{cases} \tag{9}$$

La matrice d'état d'équation du système et la matrice d'entrée de contrôle sont respectivement

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{n \times n} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n \times n} \end{bmatrix}$$

Il est facile de savoir par le jugement de rang que le système est contrôlable, il est donc possible de supprimer efficacement les vibrations de la structure non linéaire du bâtiment en concevant la quantité de contrôle.

Selon équation(9), on défini  $\overline{U} = [\overline{u}_1, \overline{u}_2, \cdots, \overline{u}_n]^T$ , Le système combiné peut être décrit comme les n sous-systèmes suivants:

$$\begin{cases} \dot{\overline{z}}_{11} = \overline{z}_{21} \\ \dot{\overline{z}}_{21} = \overline{u}_1 \end{cases}, \begin{cases} \dot{\overline{z}}_{12} = \overline{z}_{22} \\ \dot{\overline{z}}_{22} = \overline{u}_2 \end{cases}, \cdot \cdot \cdot \begin{cases} \dot{\overline{z}}_{1n} = \overline{z}_{2n} \\ \dot{\overline{z}}_{2n} = \overline{u}_n \end{cases}$$

Les méthodes de contrôle non lisses suivantes sont appliquées à tout i-ème sous-système:

$$u = -k_1 \cdot \operatorname{sign}(\overline{z}_{1i}) \cdot |\overline{z}_{1i}|^{a_1} - k_2 \cdot \operatorname{sign}(\overline{z}_{2i}) \cdot |\overline{z}_{2i}|^{a_2}$$

où 
$$k_1 > 0$$
,  $k_2 > 0$ ,  $\alpha = \frac{\alpha_2}{2 - \alpha_2}$ ,  $0 < \alpha_2 < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 

Selon les équations (9) et (10), la fonction de Lyapunov du ième soussystème est sélectionnée comme suivante:

$$V_{i}(\bar{z}_{1i}, \bar{z}_{2i}) = \frac{k_{1}}{1+\alpha_{1}} |\bar{z}_{1i}|^{1+\alpha_{1}} + \frac{1}{2}\bar{z}_{2i}^{2}$$
 (11)

Dérivée de l'équation (11)

$$\dot{V}_i(\bar{z}_{1i}, \bar{z}_{2i}) = -k_2 |\bar{z}_{2i}|^{1+\alpha_2}$$
 (12)

Selon le principe d'invariance, l'ensemble invariant maximal du i-ème soussystème est, de sorte que le i-ème sous-système est globalement asymptotiquement stable. Sur cette base, les équations suivantes sont établies:

$$\begin{cases}
\rho_1 + \eta = \rho_2 \\
\rho_2 + \eta = \rho_1 \cdot \alpha_1 = \rho_2 \cdot \alpha_2
\end{cases}$$
(13)

Quand  $\rho_1 = 2 - \alpha_2$ ,  $\rho_2 = 1$  Fig.  $\eta = \alpha_2 - 1 \le 0$ 

En supposant  $f(\bar{z}_{1i}, \bar{z}_{2i}) = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{\bar{z}}_{1i} & \dot{\bar{z}}_{2i} \end{bmatrix}^T$ , donc:

$$f(\varepsilon^{\rho_{1}}\overline{z}_{1i},\varepsilon^{\rho_{2}}\overline{z}_{2i}) = \begin{bmatrix} \varepsilon^{\rho_{2}}\overline{z}_{2i} \\ -k_{1}\varepsilon^{\rho_{1}\alpha_{1}}sign(\overline{z}_{1i})|\overline{z}_{1i}|^{\alpha_{1}} -k_{2}\varepsilon^{\rho_{2}\alpha_{2}}sign(\overline{z}_{2i})|\overline{z}_{2i}|^{\alpha_{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon^{\rho_{1}+\eta} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\rho_{2}+\eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{z}_{2i} \\ -k_{1}sign(\overline{z}_{1i})|\overline{z}_{1i}|^{\alpha_{1}} -k_{2}sign(\overline{z}_{2i})|\overline{z}_{2i}|^{\alpha_{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{\rho_{1}+\eta}f_{1}(\overline{z}_{1i},\overline{z}_{2i}) \\ \varepsilon^{\rho_{2}+\eta}f_{2}(\overline{z}_{1i},\overline{z}_{2i}) \end{bmatrix}$$

$$(14)$$

C'est-à-dire que  $f(\bar{z}_{li}, \bar{z}_{2i})$  satisfait à l'homogénéité, le sous-système est un système homogène et a un degré négatif. Selon la théorie de la stabilité en temps fini, le ième sous-système est globalement stable en temps fini. Comme les n ci-dessus ont la même structure et sont indépendants les uns des autres. Par conséquent, le système (9) est également stable pour le temps fini global.

#### 6.3 Simulation numérique en utilisant Matlab

Afin de vérifier l'efficacité de la méthode de contrôle ci-dessus, un bâtiment de huit étages effecté par un tremblement de terre a été utilisé comme objet contrôlé, et des simulations numériques ont été effectuées de trois manières: non contrôlée, contrôle LQR et contrôle non-smooth. Le schéma de principe de la structure du bâtiment est présenté dans la figure. La structure performance sont :

Temp de simulation :30 (unit é s).

La masse de chaque couche est: m i = 345,6 (unit ét), la rigidit é avant le rendement de chaque couche est  $ki = 3.4 \times 105, 3.26 \times 105, 2.85 \times 105, 2.69 \times 105, 2.43 \times 105, 2.07 \times 105, 1.69 \times 105, 1.37 \times 105$  (unit é kN / m).

Le rapport entre la rigidité apr ès élasticité et la rigidité avant élasticité est  $\alpha_1$  = 0.1; Le coefficient d'amortissement de chaque étage est de 490, 467, 410, 386, 348, 298, 243,196(unité kN s/m).

Déformation limite d'élasticité de chaque étage  $D_{y_i} = 2.4$ , 2.3, 2.2, 2.1, 2.0, 1.9, 1.7, 1,5 (unit ét cm).

Paramètres de forme de la courbe d'hyst ér ésis de chaque étage de la structure  $a_i=1$ ,  $\beta_i=0.5$ ,  $\gamma_i=0.5$ ,  $n_i=95$ .

Le système est soumis au signal de perturbation externe, l'onde sismique El Centro, et sa valeur maximale d'acc étation est  $\alpha_{max} = 3,417$  m/s.

En supposant $e_{n*n}$  est la matrice d'identique, les parametres des paramètres de la méthode de contrôle non lisse a1=0.43, a2=0.6, k1=3, k2=2;

Dans la méhode de contrôle LQR, s'électionnez la meilleure matrice de pond ération pour state space en fonction du test

$$\begin{bmatrix} K_e & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

Et la matrice de pond ération pour state space  $R = 10^{-6} * e_{8*8}$ 

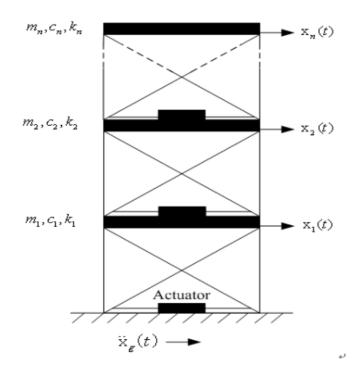
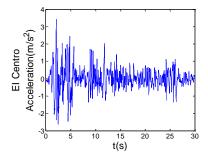


Schéma de modèle simple de la structure de bâtiment non linéaire

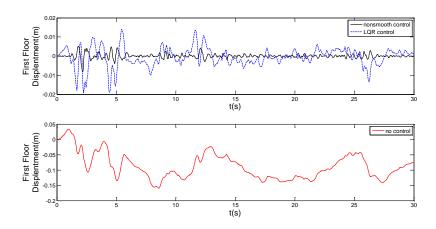
#### Résultats

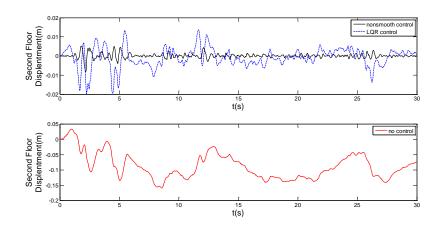
Les courbes de simulation de la réponse au déplacement, à la vitesse ,à l'accélération du sol, la force appliqué correspondante et quelques parties intéressantes dans trois conditions de contrôle non lisse, de contrôle LQR et de non contrôle sont illustrées dans les figures suivantes

#### Entrée (El Centro seismic wave)

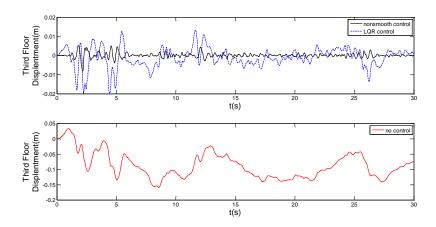


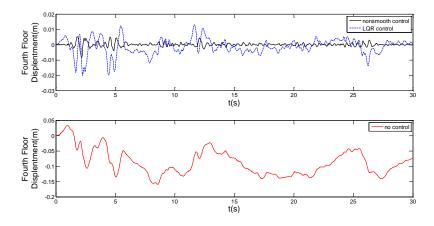
#### Traces de déplacement sous l'action d'ondes sismiques (étage de 1 à 8) Étage1



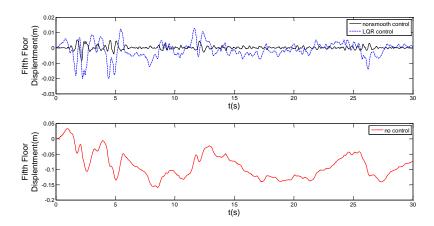


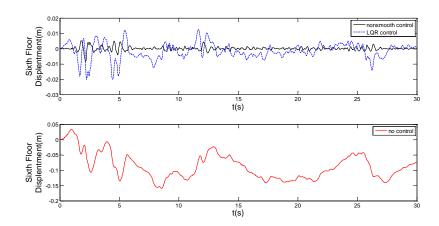
#### Étage3



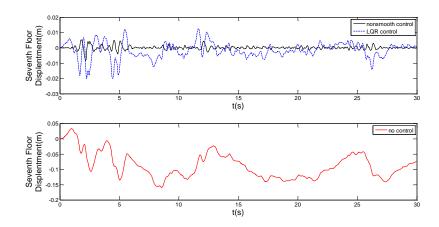


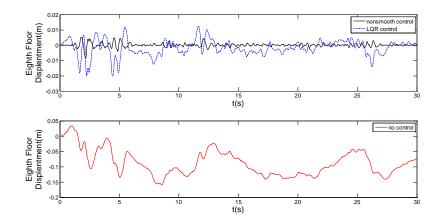
#### Étage5





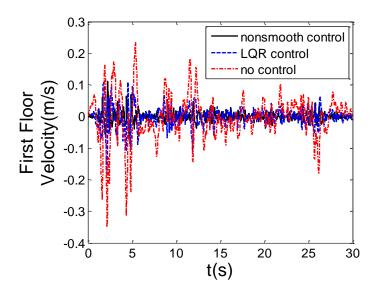
#### Étage7



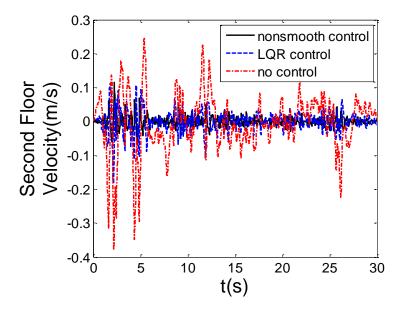


#### Traces de vitesse sous l'action d'ondes sismiques (étage de 1 à 8)

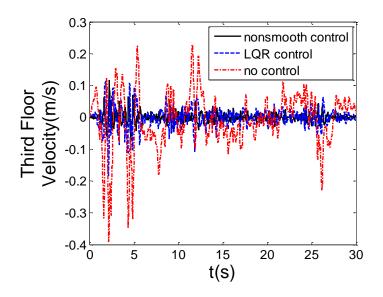
Étage 1



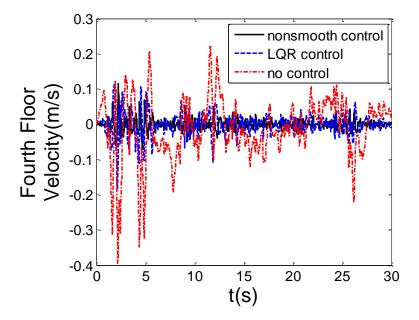
Étage 2



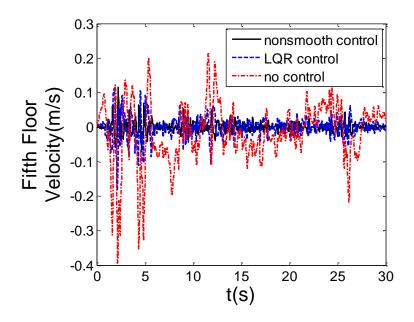
Étage 3



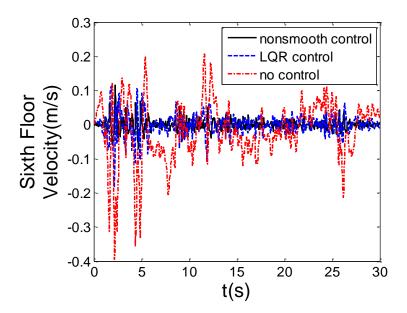
Étage 4



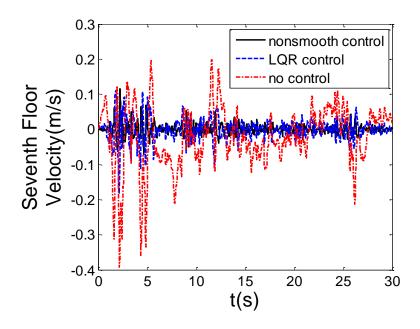
Étage 5



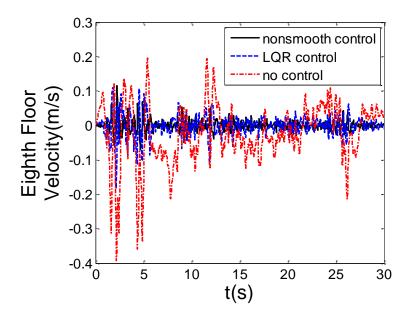
Étage 6



Étage 7

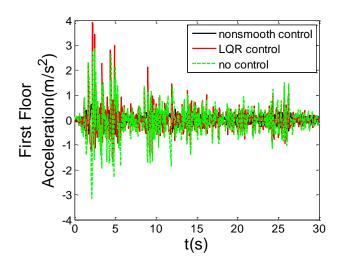


Étage 8

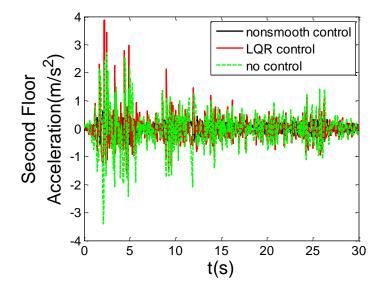


## Traces de l'accélération sous l'action d'ondes sismiques (étage de 1 à 8)

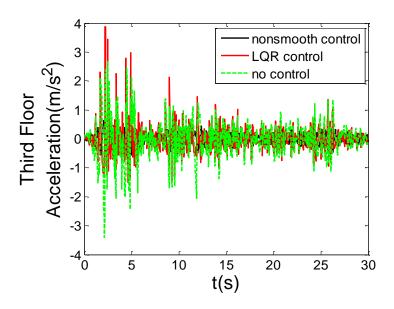
Étage 1



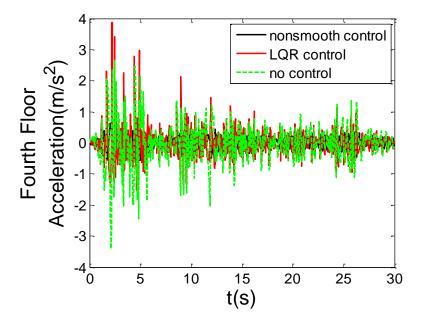
Étage 2



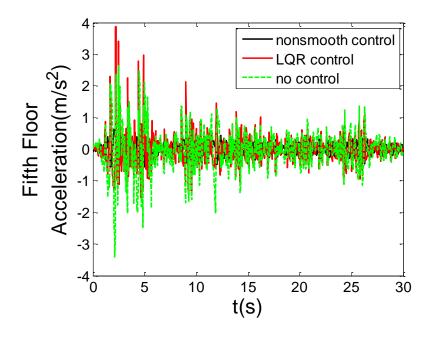
Étage 3



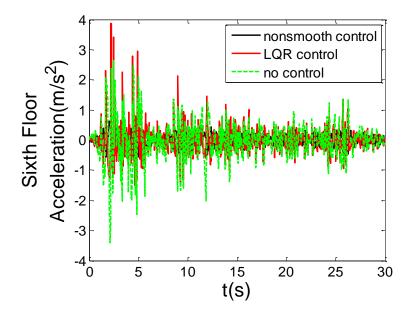
Étage 4



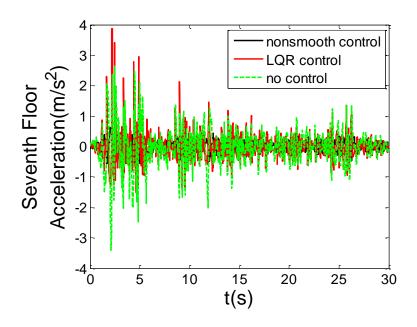
Étage 5



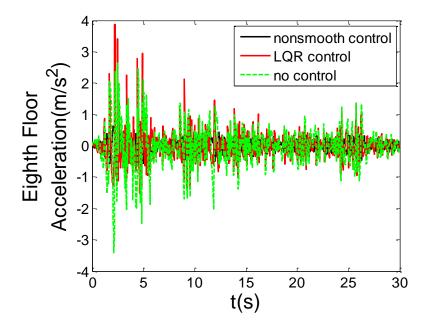
Étage 6



Étage 7

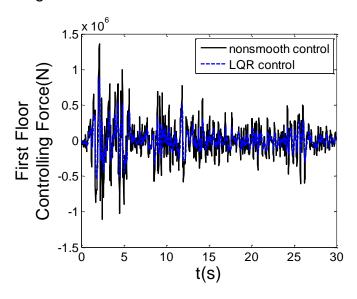


Étage 8

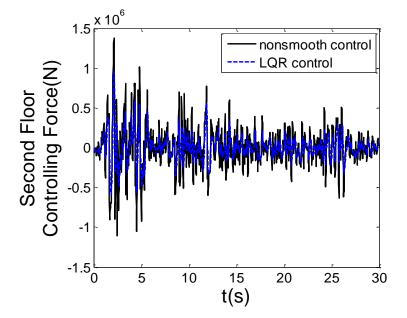


#### Trace de la force de control (de étage1 à 8)

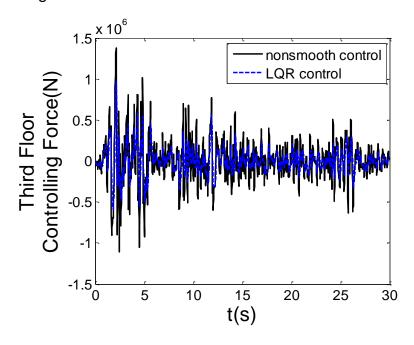
Étage 1



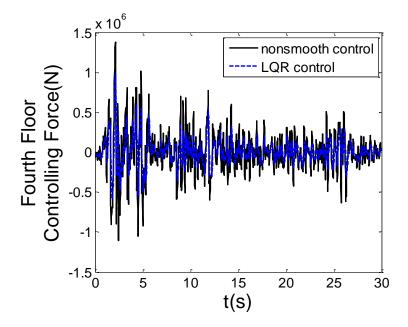
Étage 2



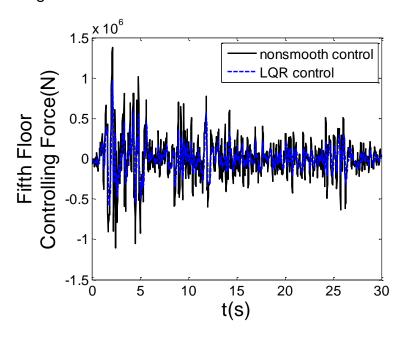
Étage 3



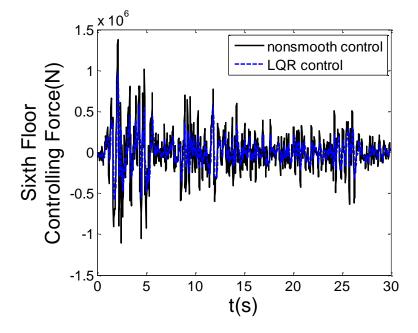
Étage 4



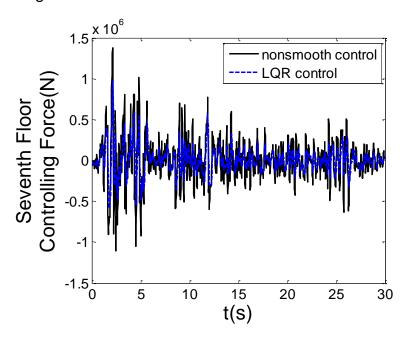
Étage 5



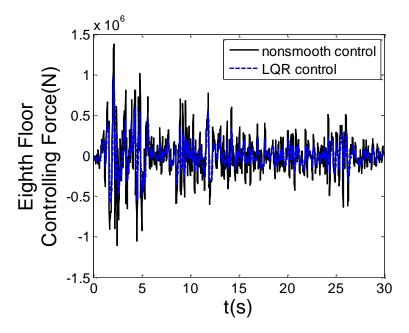
Étage 6



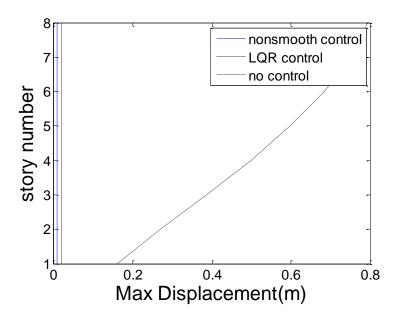
Étage 7



Étage 8



## Déplacement maximum dans chaque étage avec trois méthodes de contrôle différentes



## 7. Analyse des données

En fonction des les images ci-dessus, dans le cas de liaisons non linéaires d'hystérésis et de perturbations externes d'ondes sismiques, la première structure en couches du bâtiment peut supprimer efficacement les vibrations de la structure selon le procédé de control non-smooth, le sol se déplace peu violemment et l'accélération est également relativement faible. Le déplacement, la vitesse et l'accélération du sol ont tendance à être stables.

Comparée à la méthode de contrôle non-smooth, la méthode de contrôle LQR peut également supprimer le déplacement de la première couche, et le déplacement, la vitesse et l'accélération sont finalement stables et la force de contrôle est faible, mais l'accélération du plancher lien non linéaire. La valeur de la fluctuation est relativement grande.

Afin de mieux comparer et analyser l'effet global de la méthode de contrôle non-smooth et de la méthode de contrôle LQR, le déplacement maximal x max

et l'accélération maximale a max de chaque couche dans les résultats de la simulation ci-dessus sont comptés et montrés dans le tableau.

Le tableau montre que lorsque la structure du bâtiment est dans une situation incontrôlée, son déplacement maximal et son accélération maximale sont importants, et le déplacement maximal de chaque étage dépasse le déplacement limite d'élasticité respectif; Lorsque la structure du bâtiment est dans la méthode de contrôle LQR, le déplacement maximal de chaque étage est effectivement réduit dans les limites d'élasticité, mais l'accélération maximale de chaque étage est considérablement accrue, ce qui montre que le LQR n'a pas efficacement réduit ou éliminé l'impact introduit par des liens non linéaires. Lorsque la structure du bâtiment est dans la méthode de contrôle non-smooth, le déplacement maximal et l'accélération maximale de chaque étage sont effectivement réduits. Le déplacement maximal est réduit de près de 60% par rapport à la méthode de contrôle LQR et l'accélération maximale est réduite de près de 84% par rapport à la méthode de contrôle LQR. Par conséquent, en comparant les résultats de la méthode de contrôle LQR et non contrôlé, la méthode de contrôle non-smooth permet de mieux protéger la structure du bâtiment effectée par le séisme en présence de liens non linéaires d'hystérésis.

Nombre	Dy(m)	Non-contrôle		LQR contrôle		Contrôle non lisse	
d' étages		Xmax(m)	Acc <sub>max</sub> (m/s <sup>2</sup> )	Xmax(m)	Acc <sub>max</sub> (m/s <sup>2</sup> )	Xmax(m)	$Acc_{max}(m/s^2)$
1	0.0240	0.1594	3.1431	0.0193	3.9036	0.0081	0.6255
2	0.0230	0.2705	3.4178	0.0198	3.8782	0.0083	0.6299
3	0.022	0.3857	3.4063	0.0200	3.8689	0.0083	0.6299
4	0.0210	0.4995	3.4131	0.0201	3.8654	0.0083	0.6298
5	0.0200	0.5985	3.4171	0.0201	3.8634	0.0083	0.6298
6	0.0190	0.6840	3.4175	0.0201	3.8622	0.0083	0.6298
7	0.0170	0.7525	3.4172	0.0201	3.8615	0.0083	0.6298
8	0.0150	0.7944	3.4170	0.0201	3.8611	0.0083	0.6298

#### 8. Conclusion

Nous avons appliqué la méthode de suppression des vibrations proposée à un bâtiment de 8 étages et avons sélectionné l'onde sismique EL CENTRO comme l'interférence (l'entrée externe Xgg). Dans le même temps, nous analysons et comparons avec la méthode non contrôlée et la méthode de contrôle LQR. Il montre que c'est une méthode efficace.

# 9. Insuffisances et Commentaire personnel

En général, ce que je fais ne prend compte pas l'observateur étendu (extended state observer) donc dans ce cas-la l'entrée externe de mon programme est prévue qui est plutôt analytique que pratique. Pour les cinq objectifs mentionnés ci-dessus, je pense personnellement que le niveau d'achèvement du projet actuel est acceptable. Le seul inconvénient est que la partie de l'observateur étendu est toujours défectueuse, il y a place à amélioration, bien que ce ne soit pas ma tâche. De plus, en raison de certaines difficultés du projet, i'ai passé beaucoup de temps sur la recherche de données et la référence de la littérature, ce qui a demandé beaucoup d'efforts. En ce qui concerne la programmation matlab, les progrès ne sont pas particulièrement déroulé avec succès, car il existe de nombreuses matrices. Cela m'a donc amené à déboguer tout le temps, ce qui montre également que mes compétences en matlab ne sont pas très compétentes. Au final, la partie dont ie suis responsable a été achevée, mais l'objectif étendu proposé par le tuteur au début n'a pas été atteint. Par exemple, en contrôlant le système pour atteindre un état stable dans un délai prédéterminé, je n'ai toujours aucune idée pour cela. Mais dans tous les cas, je suis très reconnaissant à le tuteur de m'avoir donné cette opportunité de participer à cette activité, qui m'a permis d'apprendre beaucoup de connaissances dans le domaine du contrôle.

#### 10. Référence

- [1] Zhou Fulin. Seismic Control in Engineering Structures [M]. Beijing: Seismological Press, 1997.
- [2] Ou Jinping. Structural Vibration Control-active, Semi- active and Intelligent Control [M]. Beijing: Science Press. 2003.
- [3] Li Xuefeng, Wang Bin. Research on Linear Quadratic Iterative Learning Control (LQILC) for Seismic Responses of Cable-stayed Bridge [J]. Earthquake engineering and engineering dynamics, 2015,35(1): 174-182.
- [4] Gao Weibing. Foundation of Variable Structure Control Theory [M]. Beijing: China Science and Technology Press, 1990.
- [5] LiChunwen, Miao Yuan, Feng Yuankun, et al. Inverse System Method for Nonlinear Systems Control (I) Single Variable Control Theory[J]. Control and Decision, 1997, 12(05):529-535.
- [6] LiChunwen, Miao Yuan, Feng Yuankun, et al. Inverse System Method for Nonlinear Systems Control (II): Multivariable Control Theory [J]. Control and Decision, 1997, 12(6):625-630,642.
- [7] Rosier L, Homogeneous Lyapunov Function for Homogeneous Continuous Vector Field [J]. Systems and Control Letters, 1992,19(6): 467-473.
- [8] Kawski M, Stabilizability and Nilpotent Approximations [C]. Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control, Austin, USA, 1988, 2: 1244-1248.
- [9] Hermes H. Homogeneous Coordinates and Continuous Asymptotically Stabilizing Feedback Controls [M]. Differential Equations: Stability and Control, 1991.
- [10] Ma Kemao. Design of Non-smooth Attitude Control Laws for Spacecraft [J]. Journal of Astronautics, 2012.33(6):713-719.
- [11] Liu Huixian, Ding Shihong, Li Shihua, et al. Finite-time Control of PMSM Position Servo System [J]. Electric Machines and Control, 2009, 13(03):424-430.
- [12] Wang Jianhui, Wang Qing, Ma Kemao. Non-smooth Controller Design for Permanent Magnet Synchronous Motors [J]. Computer Simulation, 2016, 33(03):227-230+263.
- [13] Yang J N, Li Z, Vongchavalitkul S. Generalization of Optimal Control Theory: Linear and Nonlinear Control [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1994, 120(2):266-283.
- [14] An K, Cai G, Discretization of Preisach Hysteresis Model [J]. Journal of Central South University, 2015(22): 4724–4730.[15] Su C Y, Wang Q Q, Chen X K, et al. Adaptive Variable Structure Control of a Class of Nonlinear Systems with Unknown Prandtl-Ishlinskii Hysteresis [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 12(50):2069–2073.
- [16] Zhao Xinlong, LI Zhi, Su Chunyi. Adaptive Control for Nonlinear System with Hysteresis Based on Bouc-wen Model [J]. Journal of System Science and Mathematical Sciences, 2014, 34(12):1496-1507.
- [17] Bhat S P, Bernstein D S, Finite-time Stability of Homogeneous Systems [C]. Proceedings of the American Control Conference. Albuquerque, New Mexico, USA, 1997: 2513-2514.
- [18] Kemao, He Fenghua, Yao Yu. Estimation of Target Maneuver Acceleration and Guidance Law Implementation in Homing Terminal Guidance [J]. Journal of Astronautics, 2009, 30(6):2213-2219.
- [19] IKHOUANE, Fayçal; MAÑOSA, Víctor; RODELLAR, José. Dynamic properties of the hysteretic Bouc-Wen model. Systems & control letters, 2007, 56.3: 197-205.
- [20] Ismail, Mohammed & Ikhouane, Fayçal & Rodellar, José. (2009). The Hysteresis Bouc-Wen Model, a Survey. Archives of Computational Methods in Engineering. 16. 161-188. 10.1007/s11831-009-9031-8.
- [21] CLARKE, Francis. Nonsmooth analysis in control theory: a survey. European Journal of Control, 2001, 7.2-3: 145-159.