

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА
«ПРИКЛАДНЫЕ ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА»

Кафедра вычислительной физики.

Чеботарёв Павел Андреевич

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ ПОЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ УРОВНЯМИ В МНОГОМОДОВОМ ПОЛЕ

Бакалаврская работа

Научный руководитель:
к.ф.-м.н.
Антипов А. Г.

Рецензент:
доцент, к.ф.-м.н.
Яковлева В. И.

Санкт-Петербург
2023 г.

Содержание

Введение	3
1 Решение стандартного и упрощённого динамического уравнения матрицы плотности	4
2 Спектральный анализ внедиагональных элементов матрицы плотности	6
3 Количественная оценка величины искажений спектра при переходе от стандартного уравнения к упрощённому	11
3.1 Эволюция спектра при изменении отстройки центральной частоты воздействующего поля и частоты перехода	11
3.2 Асимптотическое поведение ошибки при больших значениях отстройки	12
3.3 Эволюция спектра при изменении количества мод воздействующего излучения	18
4 Проверка значения ошибки при нулевой моде воздействующего излучения с помощью аналитических методов	19
4.1 Обоснование алгоритма построения аналитического решения	19
4.2 Решение рассматриваемой задачи для случая монохроматического поля с помощью аналитических методов	22
5 Количественная оценка величины искажений спектра при переходе от стандартного уравнения к упрощённому в зависимости от частоты воздействующего излучения	26
5.1 Зависимость ошибки от частоты воздействующего излучения при нулевой моде воздействующего излучения	26
5.2 Зависимость ошибки от частоты воздействующего излучения в случае нескольких мод воздействующего излучения	32
Выводы	35
Приложения	36

Введение

Применение матрицы плотности необходимо, когда состояние квантомеханической системы не может быть описано волновой функцией, т.е., когда рассматриваемая система находится в смешанном состоянии. В качестве примера смешанного состояния можно рассмотреть среду, состоящую из молекул, находящихся на верхнем и на нижнем уровнях энергии перехода. Тогда в разных случаях диполи таких молекул будут колебаться в разных фазах (грубо говоря, рассматриваемая среда состоит из неполяризованного набора частиц) и такая среда будет соответственно по-разному взаимодействовать со светом. Для описания взаимодействия такой среды с несколькими энергетическими уровнями с излучением применима матрица плотности. [1]

Большую часть внимания следует уделить внедиагональным элементам матрицы плотности, так как они непосредственно описывают колебания дипольного момента рассматриваемой системы, то есть определяют оптические свойства нашей среды – дисперсию и поглощение.

В нашем случае среда полагается квантовой с двумя энергетическими уровнями, а излучение, с которым она взаимодействует, – классическим. Под целью работы подразумевается решение обычного и упрощённого матричного дифференциального уравнения, описывающего динамику взаимодействия среды и излучения, разложение внедиагональных элементов полученных матриц плотности в спектр и вычисление зависимостей искажений спектра от входных параметров для выяснения области применимости приближения вращающейся волны.

В упрощённом динамическом уравнении матрицы плотности присутствует лишь один коммутатор с оператором возмущения, описывающим излучение, взаимодействующее со средой. При более детальном рассмотрении во время реальных экспериментов выделяют два коммутатора с разными операторами возмущения: низкочастотный, зависящий от разности частоты перехода и средней частоты воздействующего на среду излучения, и высокочастотный, зависящий от суммы этих величин. Для упрощения уравнений высокочастотную составляющую зачастую отбрасывают и рассматривают динамическое уравнение матрицы плотности с одним низкочастотным оператором возмущения. Такое преобразование носит название приближения вращающейся волны.

Поставленные задачи:

1. Решение начального динамического уравнения для матрицы плотности с помощью численных методов.
2. Нахождение спектров мнимой и вещественной части внедиагональных элементов матрицы плотности с помощью преобразования Фурье.
3. Исследование зависимости искажений спектров при отбрасывании высокочастотного коммутатора из начального уравнения от разности частоты излучения и частоты перехода с наглядным обоснованием полученной зависимости.
4. Исследование зависимости искажений спектров при отбрасывании высокочастотного коммутатора из начального уравнения от количества мод воздействующего излучения с наглядным обоснованием полученных значений.
5. Аналитическое представление поставленной задачи для случая монохроматического поля.
6. Исследование зависимости искажений спектров при отбрасывании высокочастотного коммутатора из начального уравнения от частоты воздействующего излучения.

Актуальность данной работы заключается в том, что рассматриваемое описание взаимодействия среды с излучением используется для расчёта лазерных систем.

1 Решение стандартного и упрощённого динамического уравнения матрицы плотности

Построим для начала обычное уравнение.

Пусть имеется матрица плотности:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & \rho_{12}(t) \\ \rho_{21}(t) & \rho_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

тогда обычное динамическое уравнение:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i [V^-, \rho] - i [V^+, \rho] - \rho + L, \quad (2)$$

где операторы возмущения:

$$V^- = \begin{pmatrix} 0 & V e^{i(w-\omega)t} \\ V e^{-i(w-\omega)t} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$V^+ = \begin{pmatrix} 0 & V e^{i(w+\omega)t} \\ V e^{-i(w+\omega)t} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где V описывает излучение, w – частота излучения, а ω – частота перехода.

Излучение описывается таким образом:

$$V = \Omega \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^M \cos(m\Delta t) \right), \quad (5)$$

где все параметры вещественные и заранее известны, но важно понимать, что Δ – фиксированное расстояние между частотами гармоник излучения.

Упрощённое уравнение можно получить, отбросив слагаемое s в уравнении (2).

Раскрывая коммутаторы, получим систему дифференциальных уравнений для обычного уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d\rho_{11}}{dt} = -iV\rho_{21} (e^{i(w-\omega)t} + e^{-i(w+\omega)t}) + iV\rho_{12} (e^{-i(w-\omega)t} + e^{i(w+\omega)t}) - \rho_{11} + L_{11} \\ \frac{d\rho_{12}}{dt} = -iV\rho_{22} (e^{i(w-\omega)t} + e^{-i(w+\omega)t}) + iV\rho_{11} (e^{i(w-\omega)t} + e^{-i(w+\omega)t}) - \rho_{12} + L_{12} \\ \frac{d\rho_{21}}{dt} = -iV\rho_{11} (e^{-i(w-\omega)t} + e^{i(w+\omega)t}) + iV\rho_{22} (e^{-i(w-\omega)t} + e^{i(w+\omega)t}) - \rho_{21} + L_{21} \\ \frac{d\rho_{22}}{dt} = -iV\rho_{12} (e^{-i(w-\omega)t} + e^{i(w+\omega)t}) + iV\rho_{21} (e^{i(w-\omega)t} + e^{-i(w+\omega)t}) - \rho_{22} + L_{22} \end{cases}. \quad (6)$$

И для упрощённого:

$$\begin{cases} \frac{d\rho_{11}}{dt} = -iV\rho_{21} e^{i(w-\omega)t} + iV\rho_{12} e^{-i(w-\omega)t} - \rho_{11} + L_{11} \\ \frac{d\rho_{12}}{dt} = -iV\rho_{22} e^{i(w-\omega)t} + iV\rho_{11} e^{i(w-\omega)t} - \rho_{12} + L_{12} \\ \frac{d\rho_{21}}{dt} = -iV\rho_{11} e^{-i(w-\omega)t} + iV\rho_{22} e^{-i(w-\omega)t} - \rho_{21} + L_{21} \\ \frac{d\rho_{22}}{dt} = -iV\rho_{12} e^{-i(w-\omega)t} + iV\rho_{21} e^{i(w-\omega)t} - \rho_{22} + L_{22} \end{cases}. \quad (7)$$

Решить эти уравнения можно, например, методом Рунге-Кутты 4-го порядка по правилу 3/8 (по таблице Бутчера) [2], этот метод как раз и был мною использован. В качестве начальных условий для матрицы плотности возьмём единичную матрицу, а постоянную матрицу L , отвечающую за накачку на уровне энергии, заполним так:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Реализовать данный метод можно в ПО MATLAB (также была написана программа на языке C++ с использованием OpenMP, исходный код представлен в Листинге 1). На выходе получим массив матриц, где каждая матрица будет соответствовать своему узлу заданной сетки времени. В качестве проверки правильности решения уравнения матрицы плотности необходимо рассмотреть её элементы в каждый момент времени. Диагональные элементы должны быть вещественными, а внедиагональные – комплексно сопряжёнными в силу свойств оператора матрицы плотности.

2 Спектральный анализ внедиагональных элементов матрицы плотности

Для реализации данной задачи в ПО MATLAB можно воспользоваться встроенным быстрым преобразованием Фурье (FFT), либо же прибегнуть к простому суммированию полученных решений внедиагональных элементов матрицы плотности на дискретных частотах, кратных Δ , с домножением на комплексную экспоненту (т.е. интегрированию).

В моем случае величина Δ была равна 0.3. Спектр внедиагональных элементов интересует нас лишь на частотах, кратных Δ , следовательно, необходимо провести решение матрицы плотности на сетке времени так, чтобы в период $T_n = \frac{2\pi}{\Delta}$ попадало целое число шагов этого решения.

При этом, важно помнить, что необходимо проводить решение по некоторому количеству периодов T_n , поскольку на первых нескольких периодах могли остаться следы переходных неперiodических процессов, ведь для получения спектров методом преобразования Фурье мы должны считать, что полученные решения за период T_n являются решениями бесконечной периодической функции.

Также необходимо учесть, что преобразование Фурье необходимо проводить с достаточной точностью, т.е. брать столько шагов решения дифференциального уравнения на период, сколько хватит для достаточно точного нахождения необходимого количества компонент спектра. Так, например, если взять 100 решений на период T_n , то с достаточной степенью точности с помощью преобразования Фурье можно получить только лишь компоненты, соответствующие нулевой, базовой и удвоенной базовой частоте Δ .

В моем случае при таких условиях на один период T_n приходилось 20000 шагов решения динамического уравнения матрицы плотности методом Рунге-Кутты (при этом всего периодов в сетке времени было взято 10 штук), что позволяет достаточно точно считать спектры примерно до 400-ой компоненты. Далее нужно воспользоваться преобразованием Фурье таким образом:

$$C_k(f_k) = \sum_{n=1}^{20000} \rho_{12_{n_k}} e^{2\pi i f_k t_n} . \quad (9)$$

Суммирование проводится по решениям на последнем периоде базовой частоты для каждой k -ой дискретной частоты, кратной Δ . В моём случае я брал диапазон от -420Δ до 420Δ (несмотря на заявленную точность до 400-ой компоненты, решения для такого разрешения по компонентам впоследствии оказались достаточно точными).

Так как масштаб на частотной оси определяется базовой частотой Δ , частоту излучения w и частоту перехода ω логично выбирать кратными Δ .

Далее полученный спектр необходимо разделить на две вещественные последовательности: его вещественную и мнимую части, и отдельно рассмотреть их зависимость от частот, кратных Δ . Именно такие зависимости будут полезны при исследовании среды. Например, отрицательное значение мнимой части спектра внедиагонального элемента матрицы плотности на определённой частоте указывает на поглощение на этой частоте и т.д.

Рассмотрим спектры при нулевой разности частоты излучения w и частоты перехода ω .

Полученные спектры для частоты излучения $w = 100\Delta$ при частоте оптического резонатора $\omega = 100\Delta$ представлены на рис. 1.

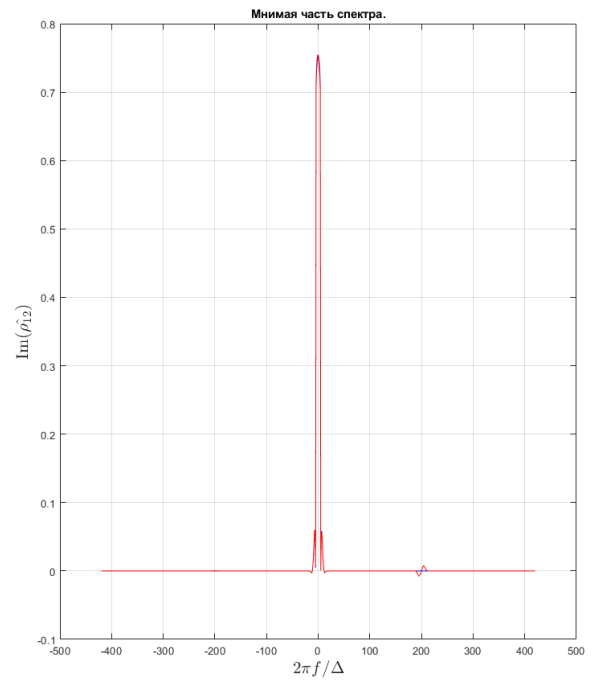
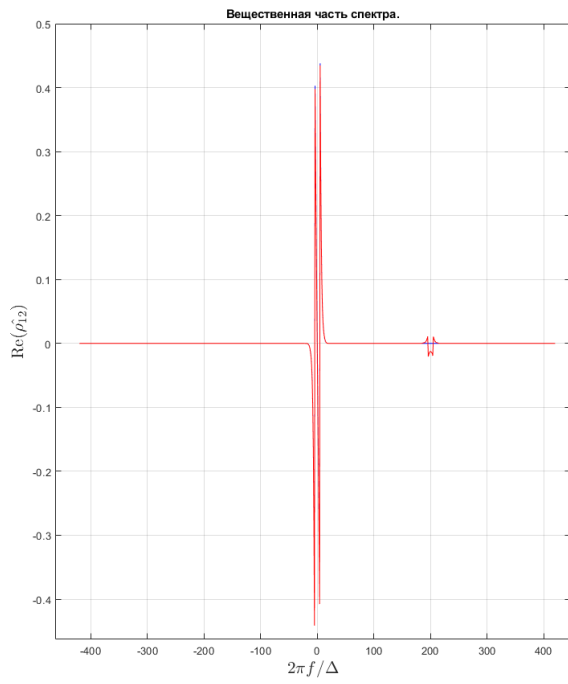


Рис. 1: Сравнение вещественной и мнимой частей спектра внедиагональных элементов при решении обычного (красный) и упрощённого (синий) динамического уравнения матрицы плотности при нулевой разности w и ω .

Для более наглядного сравнения спектров при переходе от упрощённого уравнения к стандартному, наложим спектры друг на друга и рассмотрим их отклонения друг от друга в окрестностях $\frac{w-\omega}{\Delta}$, $\frac{w+\omega}{\Delta}$ и $-\frac{w+\omega}{\Delta}$ (рис. 2, 3 и 4).

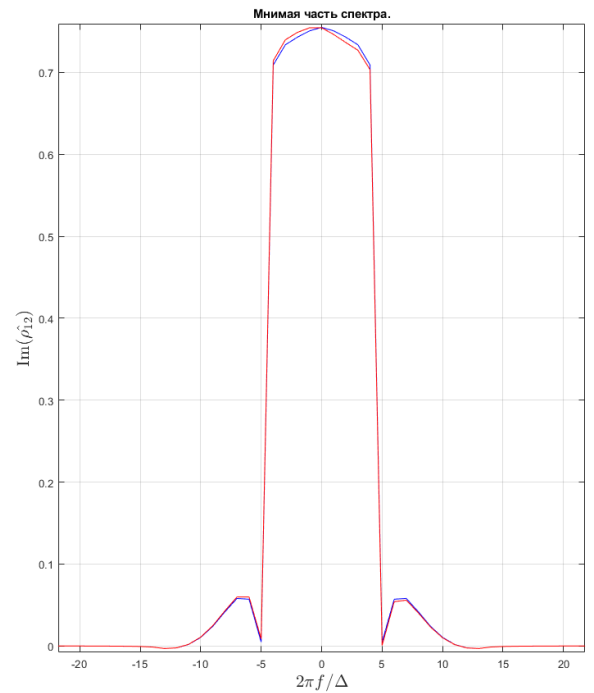
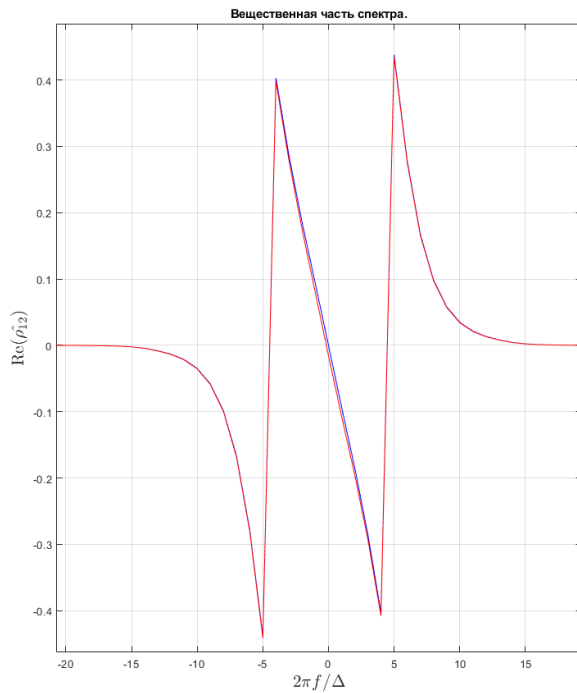


Рис. 2: Сравнение вблизи $\frac{w-\omega}{\Delta}$ спектров внедиагональных элементов динамического уравнения матрицы плотности при переходе от упрощённого уравнения к стандартному.

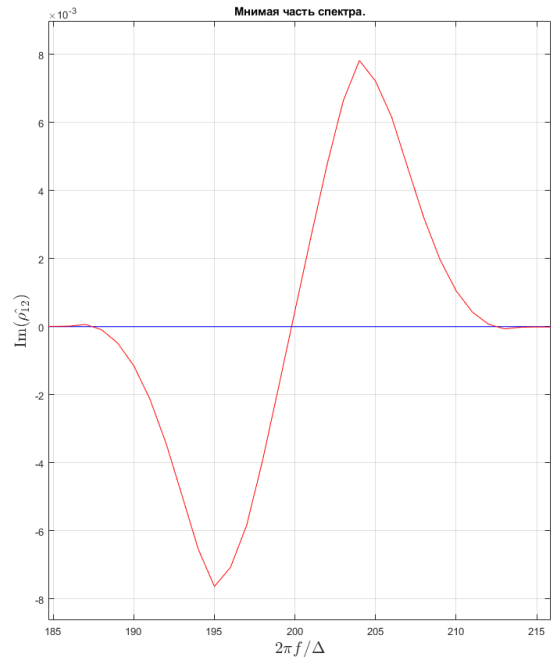
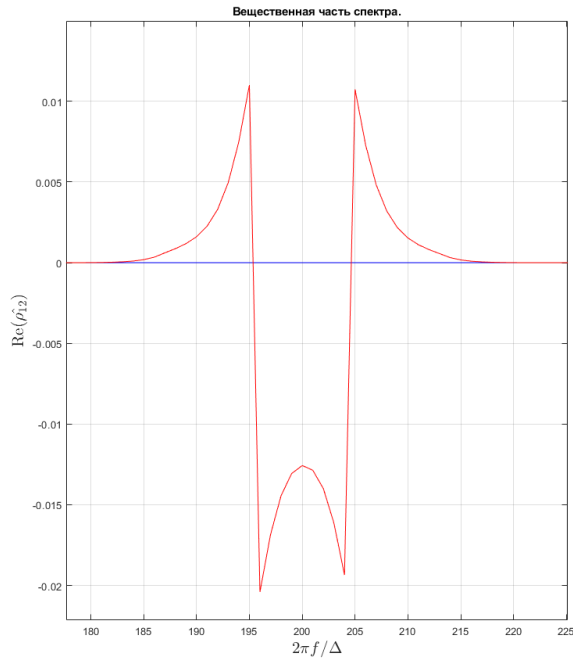


Рис. 3: Сравнение вблизи $\frac{w+\omega}{\Delta}$ спектров внедиагональных элементов динамического уравнения матрицы плотности при переходе от упрощённого уравнения к стандартному при нулевой разности w и ω .

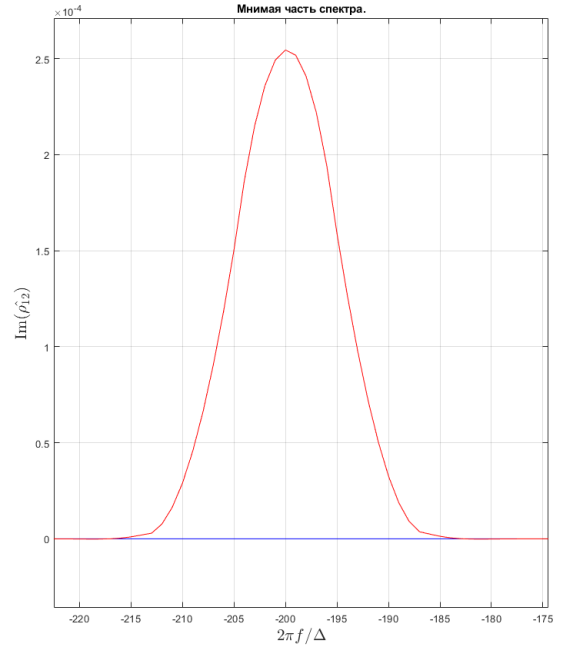
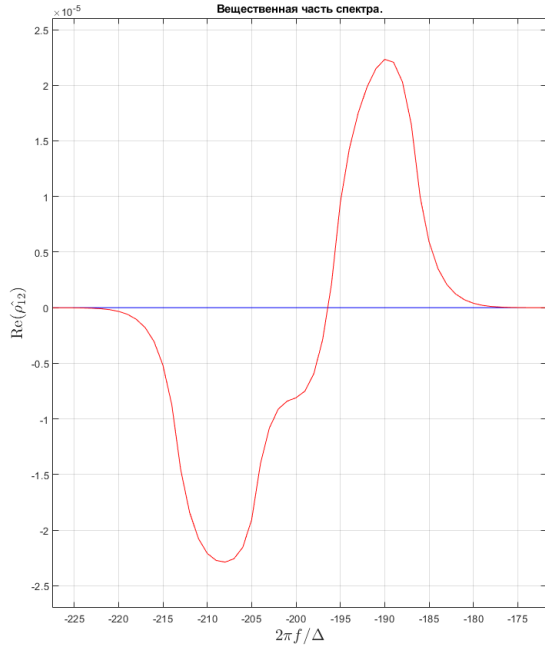


Рис. 4: Сравнение вблизи $-\frac{w+\omega}{\Delta}$ спектров внедиагональных элементов динамического уравнения матрицы плотности при переходе от упрощённого уравнения к стандартному при нулевой разности w и ω .

По рис. 2, 3 и 4 можно заметить, что на спектрах внедиагональных элементов стандартного уравнения присутствуют средние по амплитуде импульсы в зоне высоких частот вблизи 200-ой компоненты, т.е. вблизи частоты $w + \omega$, и совсем небольшие вблизи -200 компоненты, т.е. вблизи частоты $-(w + \omega)$, в то время как на спектрах внедиагональных элементов упрощённого уравнения вблизи этих компонент ничего не наблюдается. Также вблизи частоты $w - \omega$ присутствуют некоторые отклонения (совсем малые) для вещественной и мнимой части при переходе от стандартного уравнения к упрощённому. Эти выводы согласуются с видом решаемых уравнений в п. 1. Так же, исходя из вида этих уравнений, можно сказать, что при уменьшении w от 100Δ до 0 основной импульс будет двигаться в положительную сторону по оси частот, а дополнительные импульсы в стандартном уравнении – сдвигаться к нему. При $w = 0$, т.е. при значении отстройки $w - \omega = -100\Delta$, дополнительные импульсы в стандартном уравнении

сольются с основным и, при дальнейшем уменьшении w , импульсы будут расходиться, при этом основной – в отрицательную сторону.

Из-за того, что дополнительный импульс перекрывается основным, на графике зависимости искажений спектров при переходе от стандартного уравнения к упрощённому от разности w и ω будет ожидать “провал” в окрестности значения -100Δ (график зависимости искажений спектров от $w - \omega$ будет получен в п. 3.1).

Так же необходимо посмотреть, что будет происходить со спектрами при увеличении w .

Рассмотрим спектры при $w = 200\Delta$ (рис. 5).

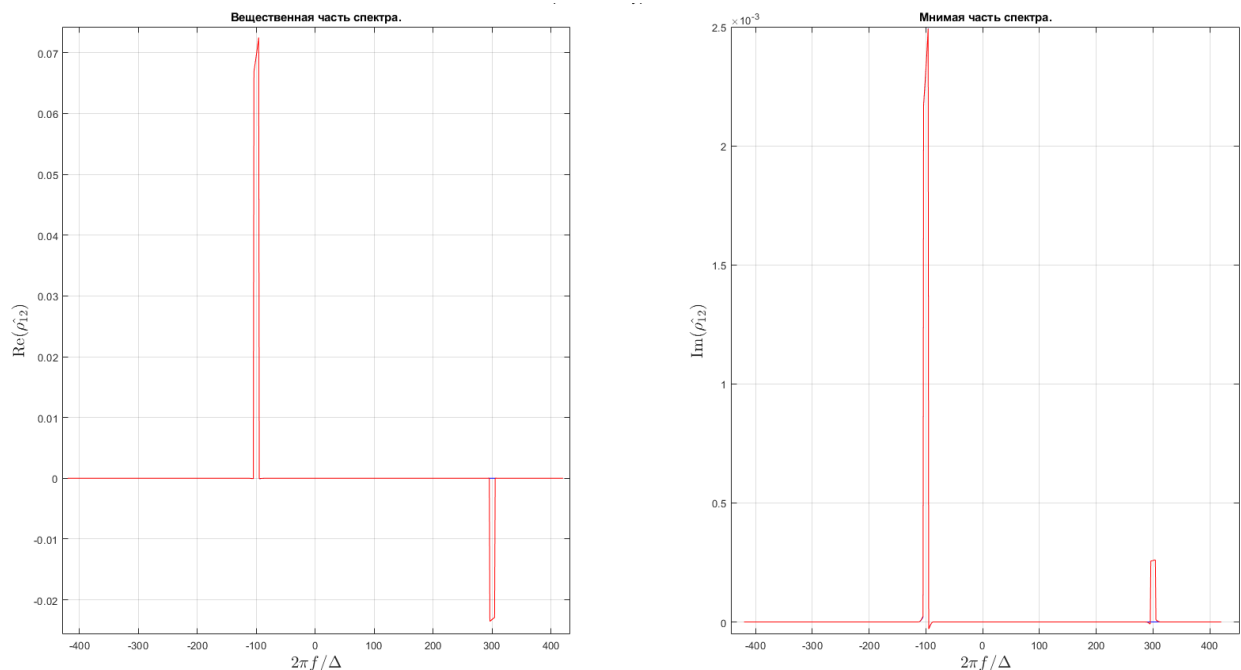


Рис. 5: Сравнение вещественной и мнимой частей спектра внедиагональных элементов при решении обычного (красный) и упрощённого (синий) динамического уравнения матрицы плотности при $w = 200\Delta$, $\omega = 100\Delta$.

Таким образом, при увеличении w , в стандартном уравнении основной импульс движется в отрицательную сторону по оси частот, а дополнительный с большой амплитудой – в положительную, и при этом он будет расти. Дополнительный импульс с малой амплитудой на рис. 5 не может наблюдаться, так как он вышел за пределы рассматриваемой области. В дальнейшем для наглядной оценки искажений им можно пренебрегать в силу малости его амплитуды относительно остальных двух импульсов, возникающих при решении стандартного уравнения. Как можно заметить, **упрощённое уравнение описывает основной импульс по амплитуде**. Забегая вперед, при дальнейшем увеличении частоты излучения w , дополнительный импульс будет расти вместе с количественной оценкой искажений.

Довольно интересный эффект будет также наблюдаться при расхождении дополнительных импульсов. Рассмотрим спектры при $w = -20\Delta$ (рис. 6).

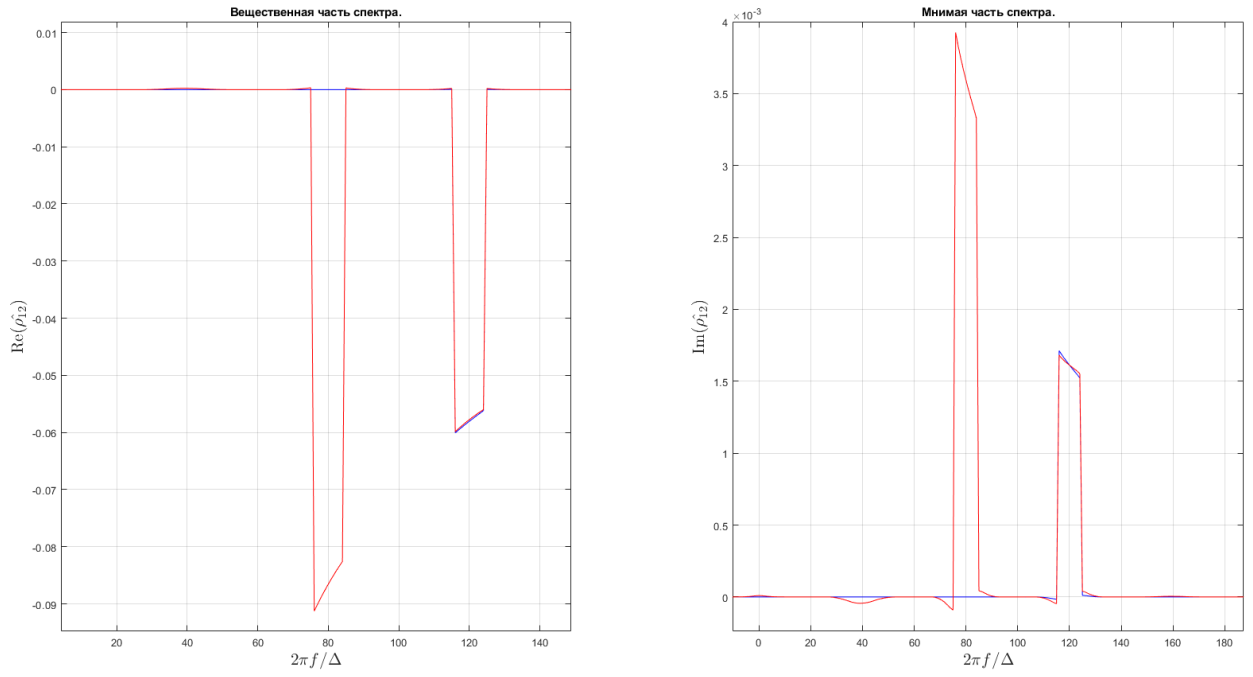


Рис. 6: Сравнение спектров внедиагональных элементов динамического уравнения матрицы плотности при переходе от упрощённого уравнения к стандартному при $w = -20\Delta$.

Таким образом, исходя из рис. 6, можно сделать вывод, что упрощённое уравнение при переходе w в отрицательные значения, начинает описывать импульс с меньшей амплитудой относительно основного импульса в точном уравнении. Забегая вперёд, именно по этой причине, при дальнейшем сильном увеличении отрицательной частоты излучения w , количественная оценка искажений будет уменьшаться, так как описываемый упрощённым уравнением импульс будет становиться по амплитуде всё больше относительно основного импульса, возникающего при решении точного уравнения.

3 Количественная оценка величины искажений спектра при переходе от стандартного уравнения к упрощённому

3.1 Эволюция спектра при изменении отстройки центральной частоты воздействующего поля и частоты перехода

Количественная оценка искажений выводится отдельно для мнимой и вещественной части спектра внедиагональных элементов матрицы плотности. Её можно получить как корень частного суммы квадратов отклонений двух дискретизированных функций на каждой компоненте и суммы квадратов компонентов, то есть:

$$K_{\text{Re}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{k=n} (\text{Re}(|C_{k\text{regular}}|) - \text{Re}(|C_{k\text{simplified}}|))^2}{\sum_{k=1}^{k=n} (\text{Re}(C_{k\text{regular}}))^2}}, \quad (10)$$

$$K_{\text{Im}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{k=n} (\text{Im}(|C_{k\text{regular}}|) - \text{Im}(|C_{k\text{simplified}}|))^2}{\sum_{k=1}^{k=n} (\text{Im}(C_{k\text{regular}}))^2}}. \quad (11)$$

Имея зависимость ошибки от параметра, который в нашем случае является отстройкой $w - \omega$, можно судить о том, насколько оправдано использование упрощённого динамического уравнения матрицы плотности: даёт ли оно достаточно точный результат по сравнению со стандартным динамическим уравнением и при каких значениях отстройки имеет смысл им пользоваться. Для изучения зависимости искажений K_{Re} и K_{Im} от $(w - \omega)$ сначала посмотрим их зависимость при значениях разности от -200Δ до 200Δ (рис. 7).

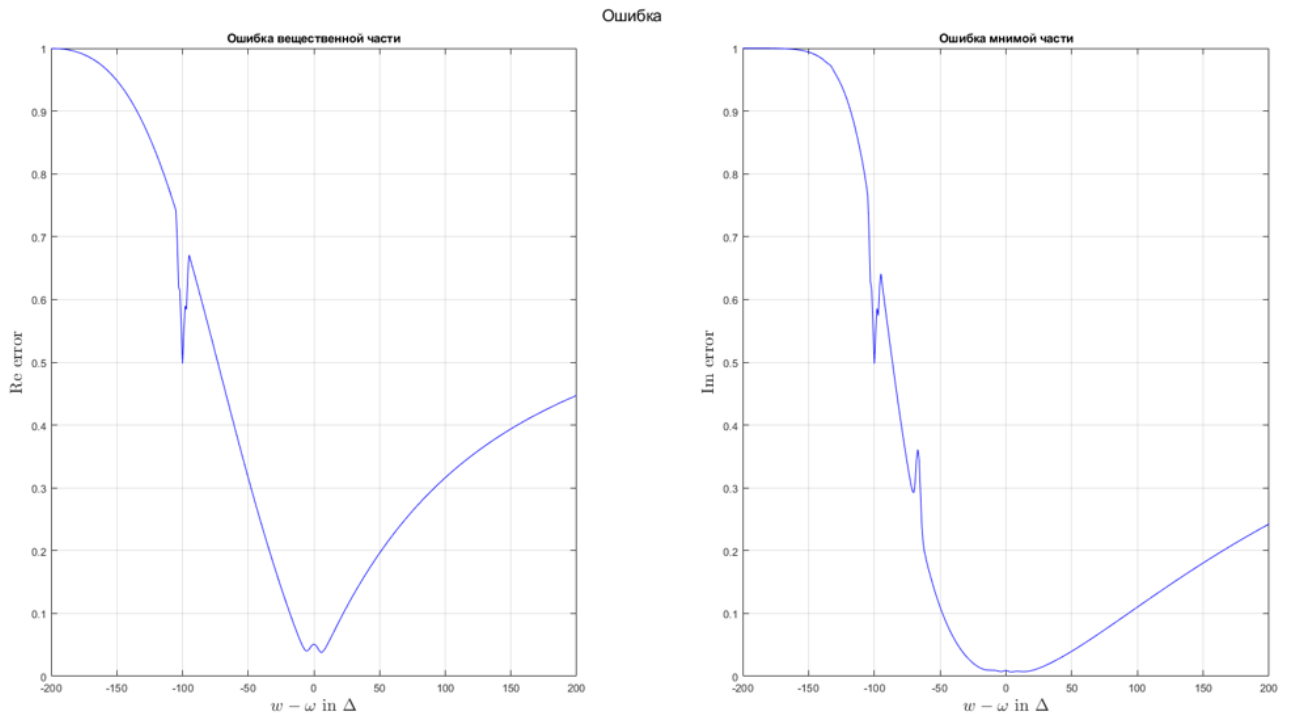


Рис. 7: Зависимость количественной оценки искажений вещественной и мнимой части спектра при переходе от обычного динамического уравнения матрицы плотности к упрощённому в диапазоне от -200Δ до 200Δ .

Как и ожидалось в п. 2, при значении разности в окрестности -100Δ происходит “провал” на обоих графиках искажений, а при дальнейшем уменьшении частоты излучения w , ошибка стремится к единице.

На рис. 7 можно заметить небольшой всплеск в искажениях мнимой части при значении разности в окрестности -65Δ , можно проверить это значение на графиках спектров (рис. 8).

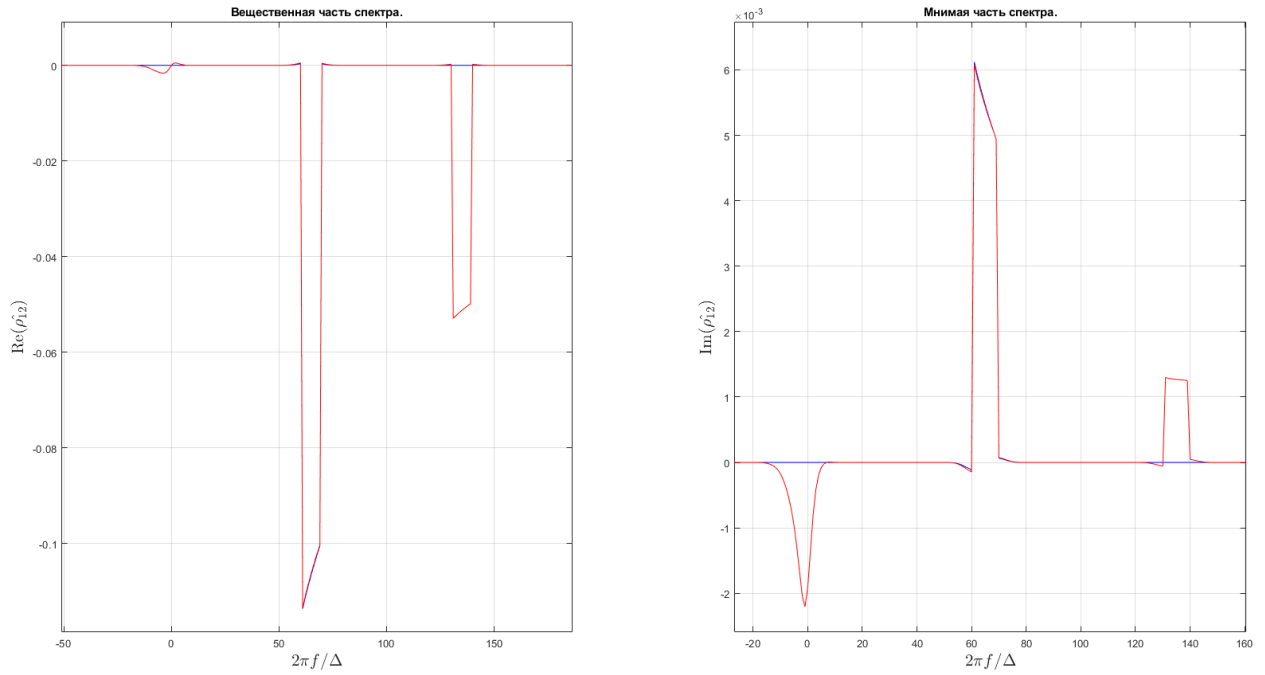


Рис. 8: Мнимая и вещественная часть спектра внедиагональных элементов при решении стандартного динамического уравнения матрицы плотности при $w = 35\Delta$, $\omega = 100\Delta$.

На рис. 8 можно заметить, что и у мнимой, и у вещественной части спектра внедиагональных элементов решения стандартного динамического уравнения матрицы плотности присутствует ещё один дополнительный импульс в окрестности нуля на частотной оси. Такой эффект может происходить из-за того, что частота основного импульса оказывается приблизительно равной частоте дополнительного.

Из-за этого эффекта в искажениях мнимой части наблюдается явный всплеск из-за достаточно большой амплитуды дополнительного импульса в окрестности нуля, в то время как искажения вещественной части практически не имеют всплеска из-за малой амплитуды возникшего импульса.

3.2 Асимптотическое поведение ошибки при больших значениях отстройки

Теперь рассмотрим, что будет происходить на графике зависимости искажений от разности частот при сильном увеличении частоты излучения w (рис. 9).

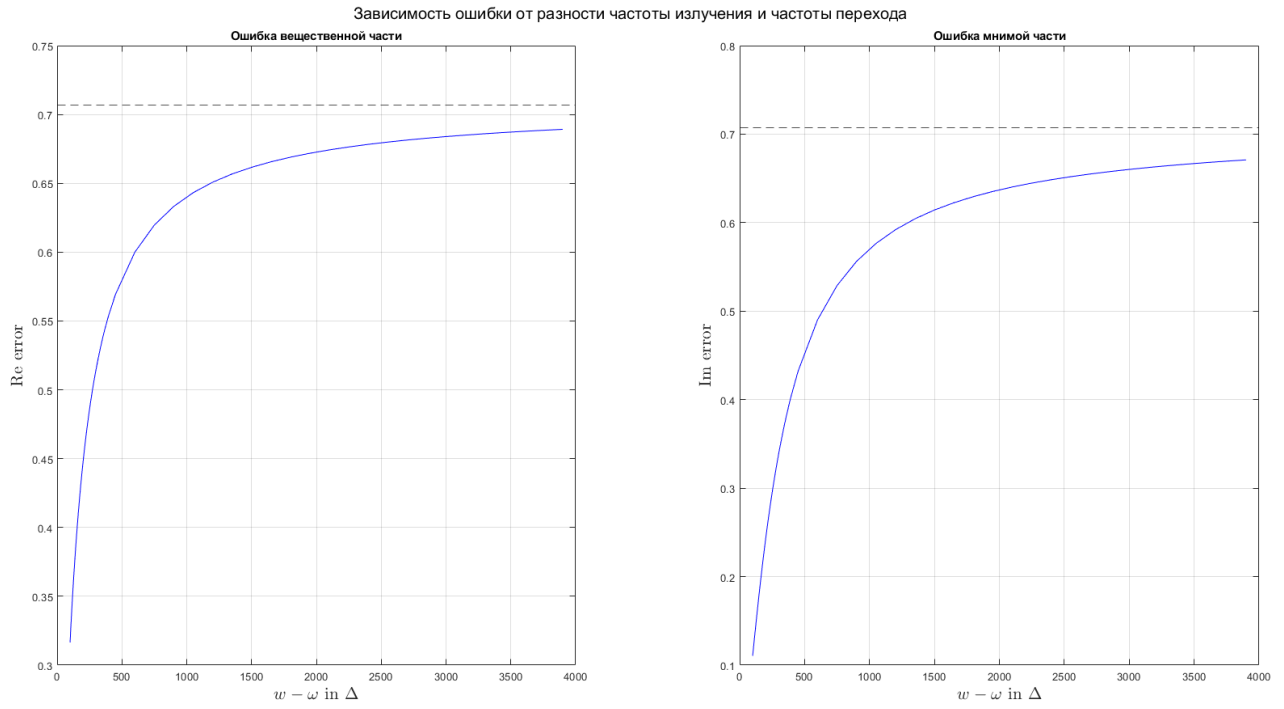


Рис. 9: Зависимость количественной оценки искажений вещественной и мнимой части спектра при переходе от обычного динамического уравнения матрицы плотности к упрощённому в диапазоне отстройки от 100Δ до 3900Δ .

Из рис. 9 видно, что искажения как мнимой, так и вещественной части спектра стремятся в асимптотике к $\frac{1}{\sqrt{2}}$ снизу. Действительно, при $w \gg \omega$ основной импульс, описываемый упрощённым уравнением, становится приблизительно равным по амплитуде дополнительному. В таком случае, опираясь на формулы (10) и (11), такое значение и должно получаться в асимптотике для обоих искажений. Проверим спектры для стандартного уравнения при значении $w = 3900\Delta$ (рис. 10, 11).

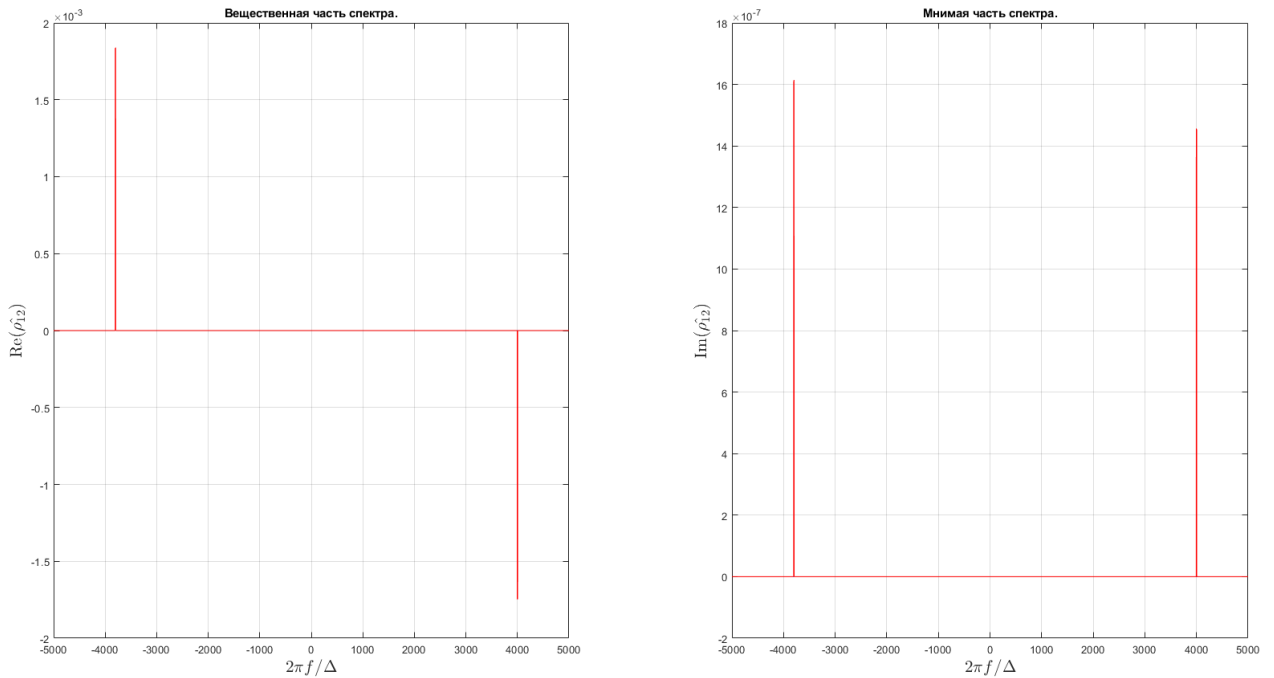


Рис. 10: Мнимая и вещественная части спектра внедиагональных элементов при решении упрощённого и стандартного динамического уравнения матрицы плотности при $w = 3900\Delta$, $\omega = 100\Delta$.

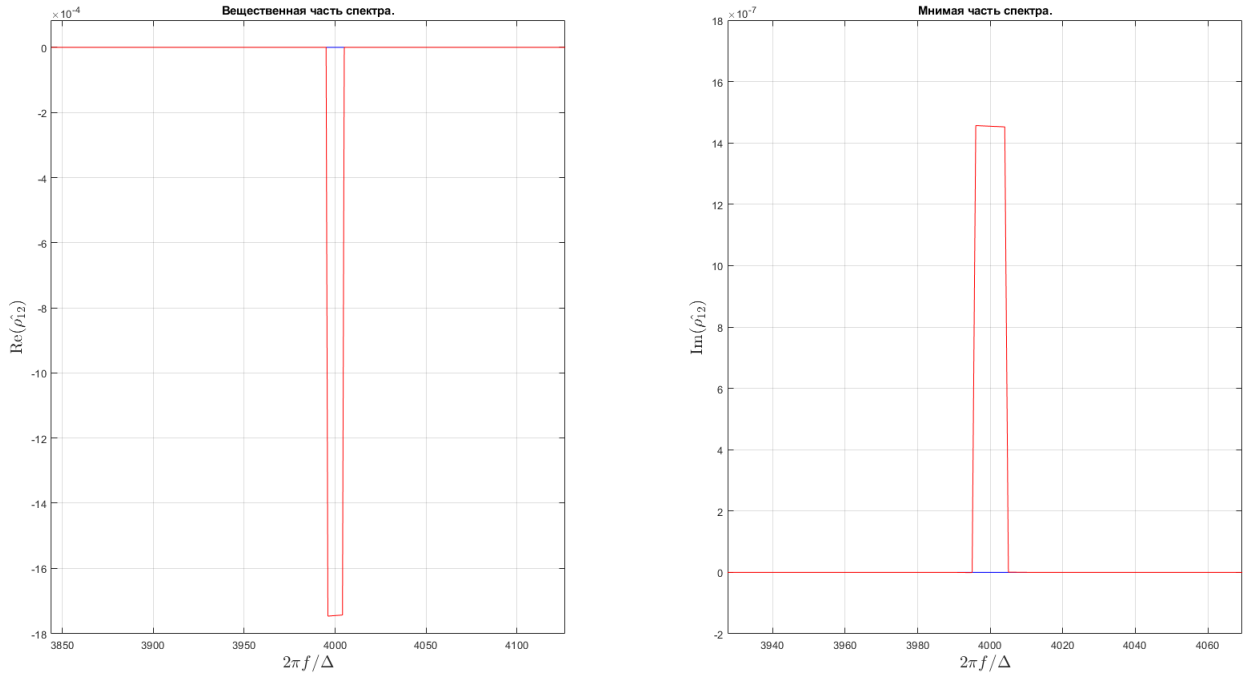


Рис. 11: Сравнение спектров внедиагональных элементов при решении упрощённого и стандартного динамического уравнения матрицы плотности вблизи дополнительного импульса при $w = 3900\Delta$, $\omega = 100\Delta$.

На рис. 10 и 11 можно заметить, что дополнительный импульс близок по значению к основному, что подтверждает вывод об асимптотическом значении.

Теперь рассмотрим, что будет происходить на графике зависимости искажений от разности частот при высокой отрицательной частоте излучения w (рис. 12).

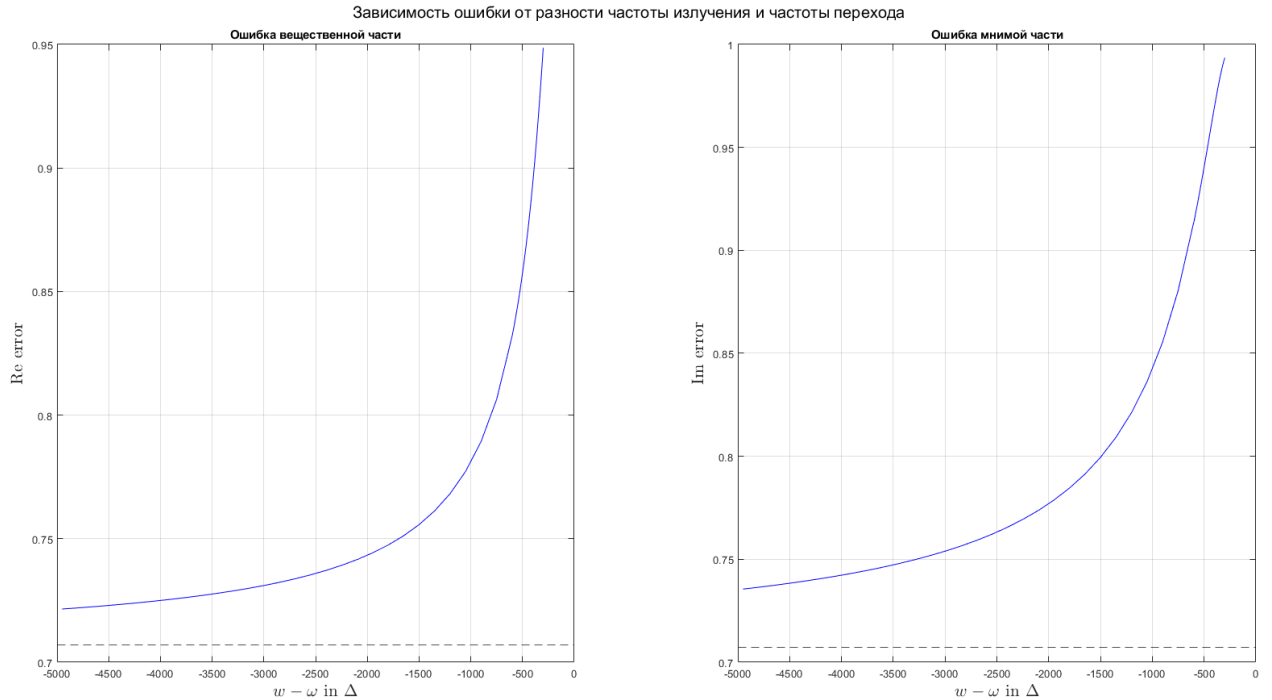


Рис. 12: Зависимость количественной оценки искажений вещественной и мнимой части спектра при переходе от обычного динамического уравнения матрицы плотности к упрощённому в диапазоне отстройки от -4800Δ до -300Δ .

Действительно, при $|w| \gg \omega$, дополнительный импульс, описываемый упрощённым уравнением, становится приблизительно равным по амплитуде основному. В таком случае, опираясь на формулы (10) и (11), такое значение и должно получаться в асимптотике для обоих искажений. Проверим спектры при

значении $w = -3800\Delta$ (рис. 13, 14).

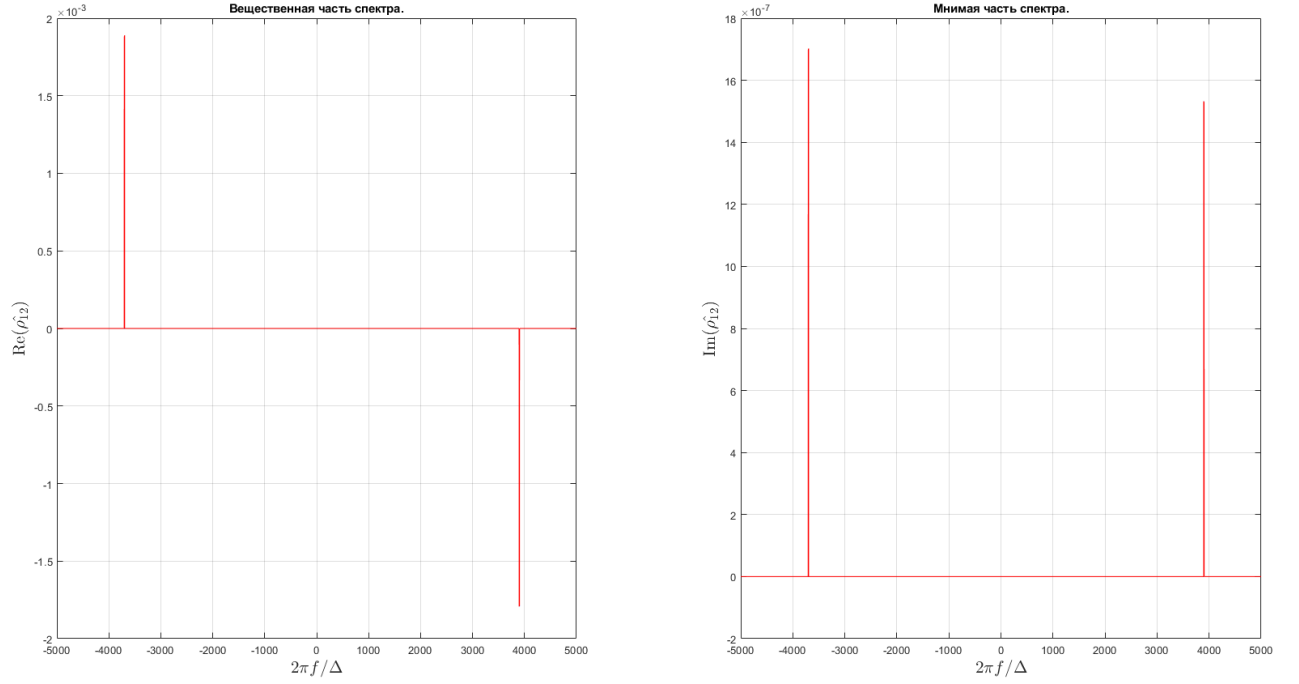


Рис. 13: Мнимая и вещественная части спектра внедиагональных элементов при решении упрощённого и стандартного динамического уравнения матрицы плотности при $w = -3800\Delta$, $\omega = 100\Delta$.

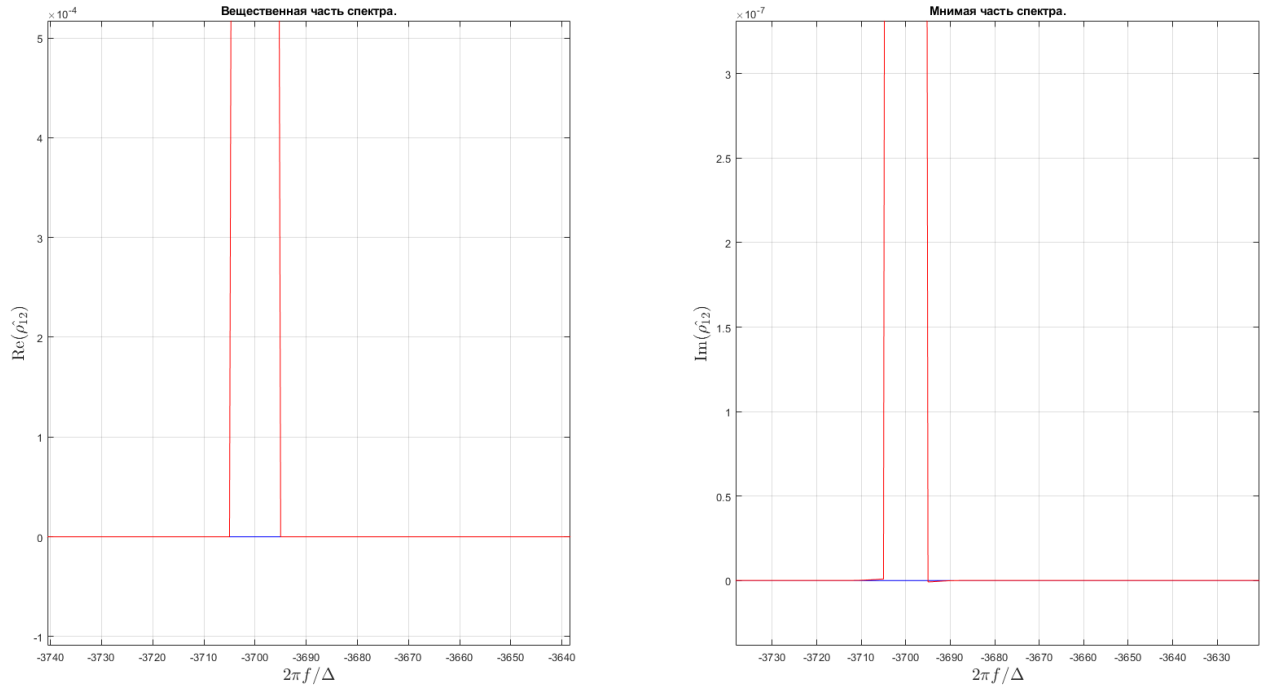


Рис. 14: Сравнение спектров внедиагональных элементов при решении упрощённого и стандартного динамического уравнения матрицы плотности вблизи дополнительного импульса при $w = -3800\Delta$, $\omega = 100\Delta$.

На рис. 13 можно заметить, что дополнительный импульс близок по значению к основному, что подтверждает вывод об асимптотическом значении.

Рассмотрим полный график зависимости искажений от отстройки (рис. 15).

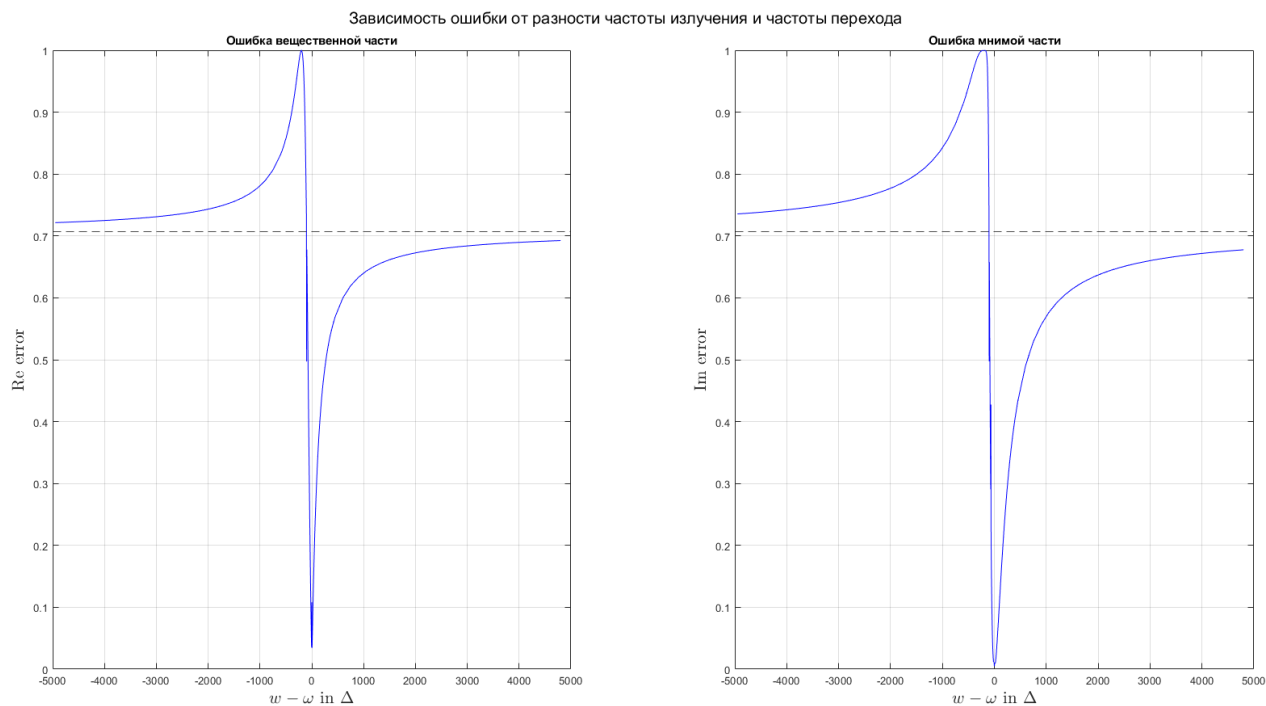


Рис. 15: Зависимость количественной оценки искажений вещественной и мнимой части спектра при переходе от обычного динамического уравнения матрицы плотности к упрощённому в диапазоне отстройки от -4800Δ до 3900Δ .

Как можно заметить, при отрицательном значении отстройки, значение искажений стремится к $\frac{1}{\sqrt{2}}$ сверху, а при положительном значении – к $\frac{1}{\sqrt{2}}$ снизу.

Рассмотрим локальный максимум в окрестности единицы зависимости искажений от отстройки вблизи значения -200Δ . Можно рассмотреть сами спектры вблизи этого значения (рис. 16):

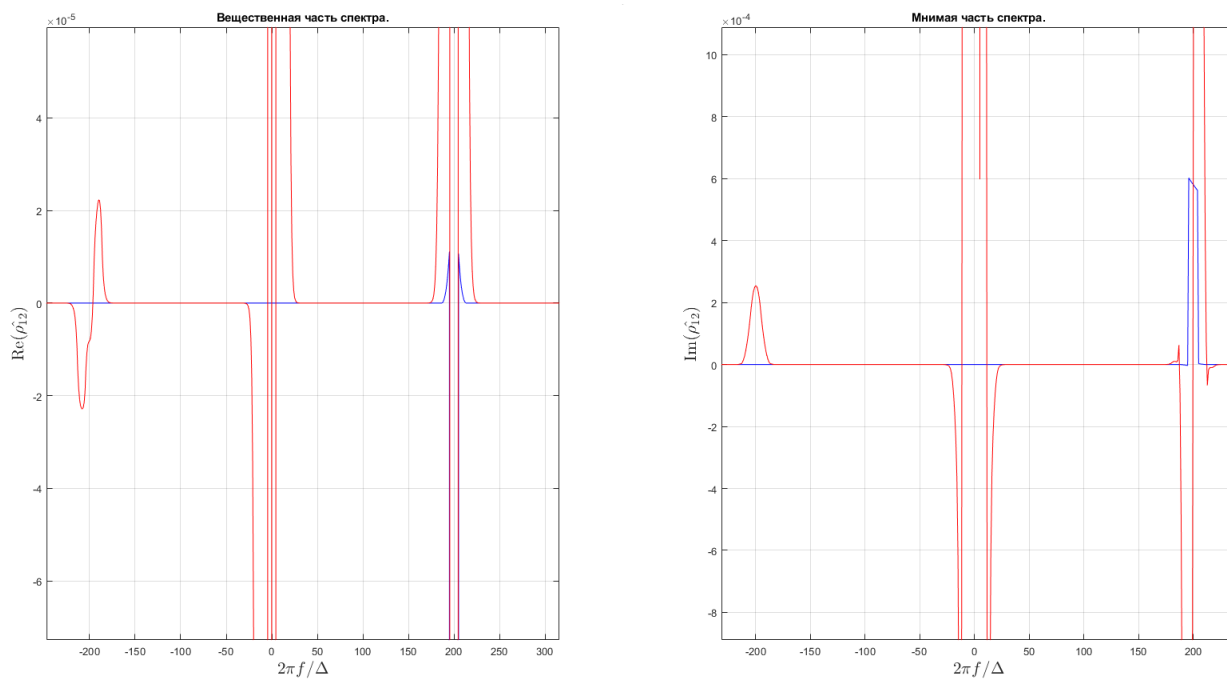


Рис. 16: Сравнение спектров внедиагональных элементов динамического уравнения матрицы плотности при переходе от упрощённого уравнения к стандартному при $w = -100\Delta$.

Рис. 16 чем-то напоминает рис. 2, 3 и 4 из п. 2, вероятно из-за того, что входные параметры w и ω имеют одинаковое по модулю значение, при этом самый большой по амплитуде импульс находится на нуле-

вой компоненте. Присутствующие в обоих решениях импульсы вблизи 200-ой компоненты очень сильно отличаются, что и приводит к максимуму зависимости ошибки на рассматриваемом значении отстройки.

Разобьём ошибку на низкочастотную и высокочастотную части, этот способ подробно описан в п. 5. Посмотрим, как будет вести себя ошибка в таком случае (рис. 17).

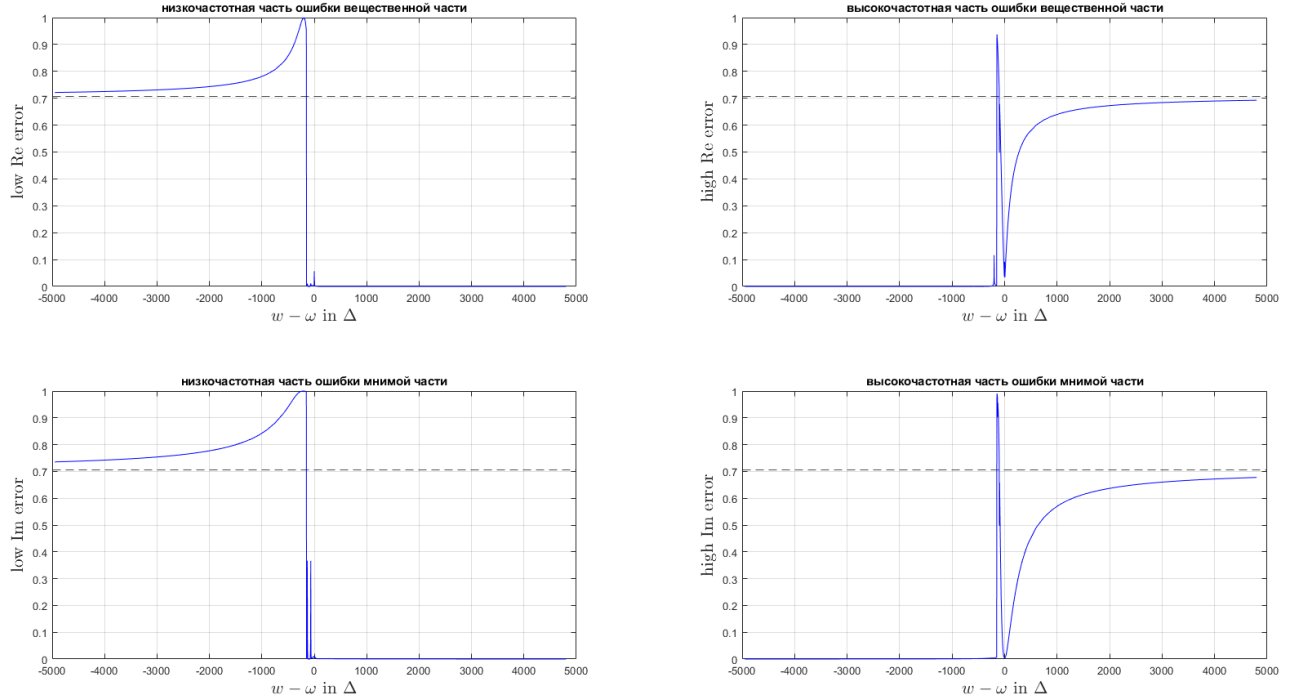


Рис. 17: Зависимость количественной оценки искажений вещественной и мнимой части спектра при переходе от обычного динамического уравнения матрицы плотности к упрощённому при разбиении на высокочастотную и низкочастотную части в диапазоне от -5000Δ до 5000Δ

Как можно заметить из рис. 17, ошибки похожим образом выходят на асимптотические значения, но, при $w \geq -100\Delta$, низкочастотная часть равна нулю, а высокочастотная часть отражает зависимость всей ошибки при $w \gg \omega$, как на рис. 15, то есть растёт до асимптотического значения, равного $\frac{1}{\sqrt{2}}$. При $w < -100\Delta$, наоборот, высокочастотная часть равна нулю, а низкочастотная часть отражает зависимость всей ошибки при $w \ll \omega$, как на рис. 15, то есть убывает до асимптотического значения, равного $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Такое поведение низкочастотных и высокочастотных частей ошибки обусловлено тем, что при $w < -100\Delta$ (т.е., когда $w < -\omega$) решение упрощённого уравнения начинает описывать высокочастотный импульс вместо низкочастотного.

3.3 Эволюция спектра при изменении количества мод воздействующего излучения

Для упрощения задачи, зададим значение частоты излучения $w = 100\Delta$ и значение частоты перехода $\omega = 100\Delta$. Таким образом, в этом и следующем пунктах значение отстройки будет равно нулю. Будем изменять количество мод воздействующего излучения, за которое отвечает переменная M в уравнении (5). Построим график зависимости ошибки упрощённого уравнения относительно стандартного от количества мод воздействующего излучения (рис. 18).

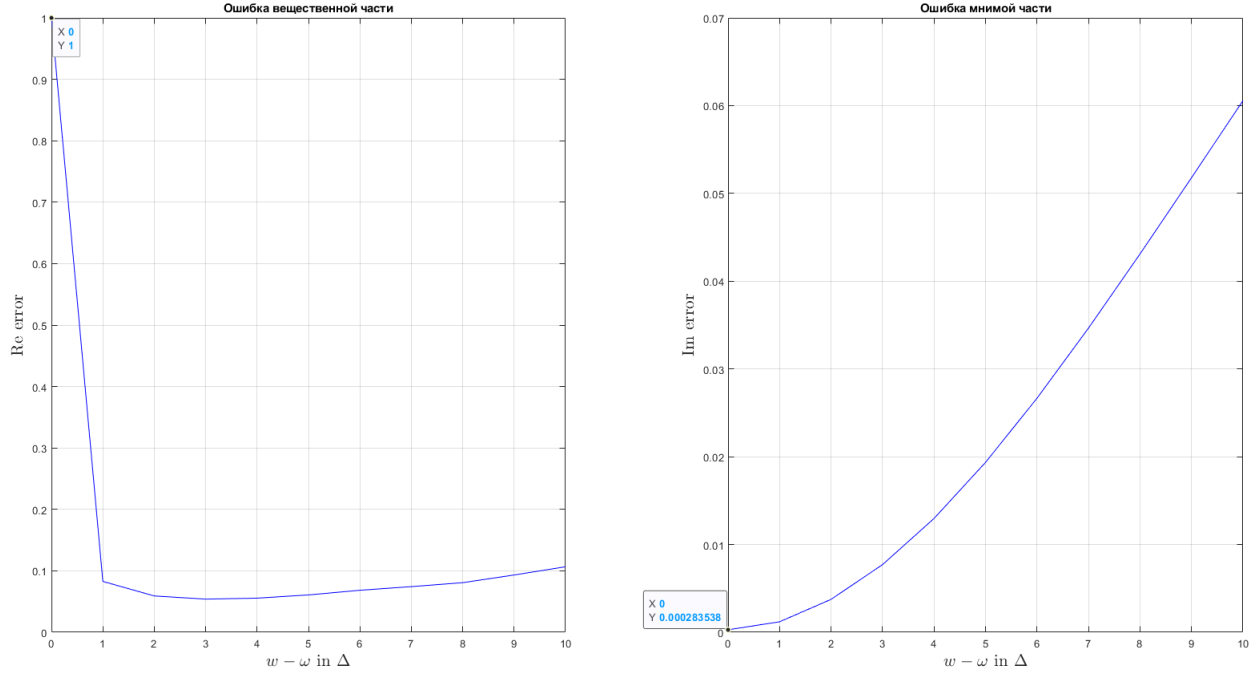


Рис. 18: Зависимость количественной оценки искажений вещественной и мнимой части спектра при переходе от обычного динамического уравнения матрицы плотности к упрощённому в диапазоне от количества мод воздействующего излучения в диапазоне от 0 до 10.

Из рис. 18 следует, что при уменьшении количества мод до нуля (т.е. когда излучение не обладает периодичностью) искажение мнимой части убывает монотонно, и при нулевой моде принимает значение ≈ 0.000283538 , в то время как искажение вещественной части убывает до 3-ей моды, а дальше начинает возрастать и принимает значение, равное единице, при нулевой моде воздействующего излучения.

Чтобы исследовать правильность полученных с помощью численных методов (из п. 1) значений в случае нулевой моды воздействующего излучения и нулевого значения отстройки, можно воспользоваться аналитическими методами.

4 Проверка значения ошибки при нулевой моде воздействующего излучения с помощью аналитических методов

4.1 Обоснование алгоритма построения аналитического решения

Рассмотрим уравнения из п. 1. Необходимо сказать, что при отсутствии мод воздействующего излучения, уравнение (5) будет выглядеть так (причём Ω , как и в прошлом случае, равна 0.2):

$$V = \frac{\Omega}{2} . \quad (12)$$

Рассмотрим полученные спектры при заданных условиях (рис. 19).

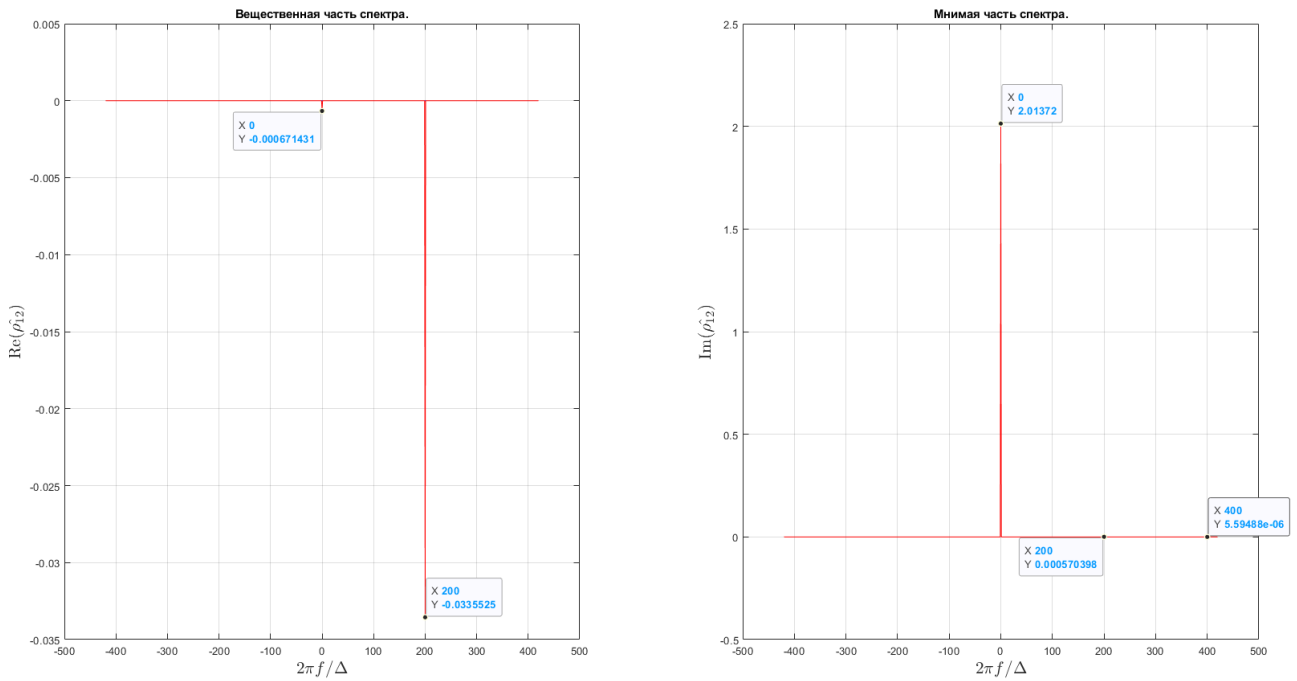


Рис. 19: Вещественная и мнимая части спектра внедиагональных элементов при решении стандартного (красный) и упрощённого (синий) уравнений матрицы плотности при нулевом значении отстройки и количества мод воздействующего излучения.

Увеличим масштаб, чтобы понять, какие импульсы спектра были описаны упрощённым уравнением матрицы плотности (рис. 20).

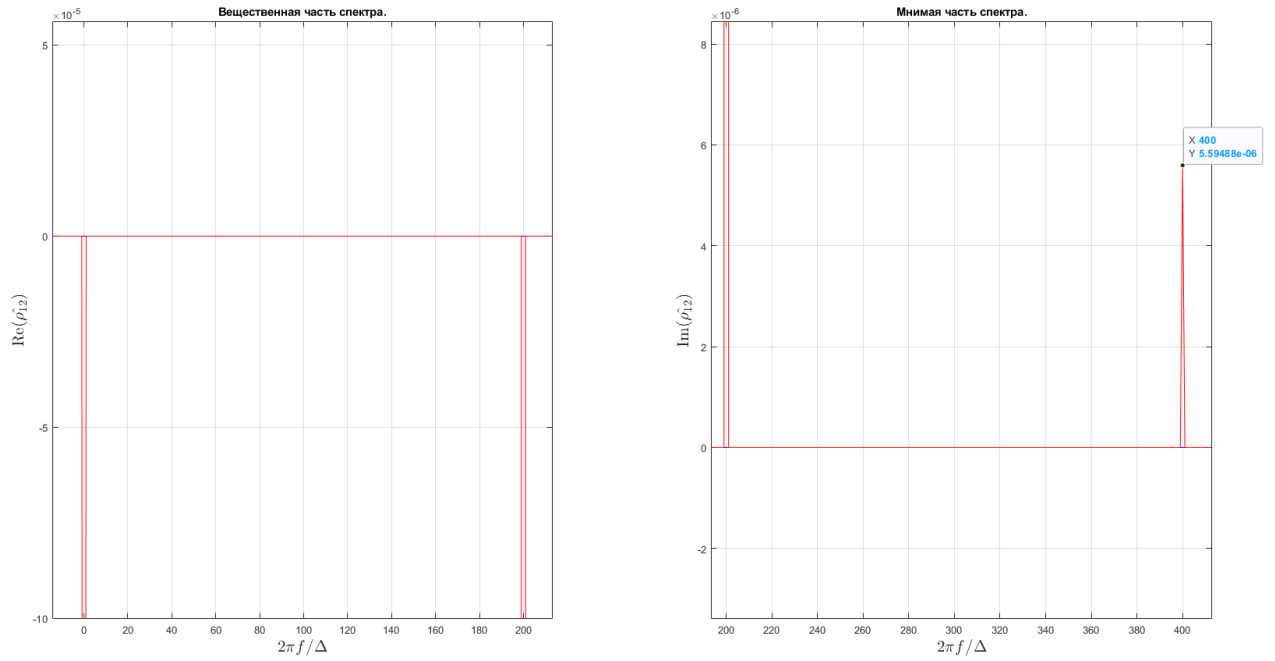


Рис. 20: Вещественная и мнимая части спектра внедиагональных элементов при решении стандартного (красный) и упрощённого (синий) уравнений матрицы плотности при нулевом значении отстройки и количества мод воздействующего излучения в увеличенном масштабе.

Таким образом, можно сделать вывод, что при заданных условиях спектр упрощённого уравнения имеет ноль в своей вещественной части вблизи любого из импульсов спектра стандартного уравнения, а также имеет ноль в своей мнимой части вблизи дополнительных импульсов спектра стандартного уравнения (200-я компонента, 400-я компонента и т.д.).

Давайте рассмотрим амплитуду нулевой компоненты мнимой части (рис. 21).

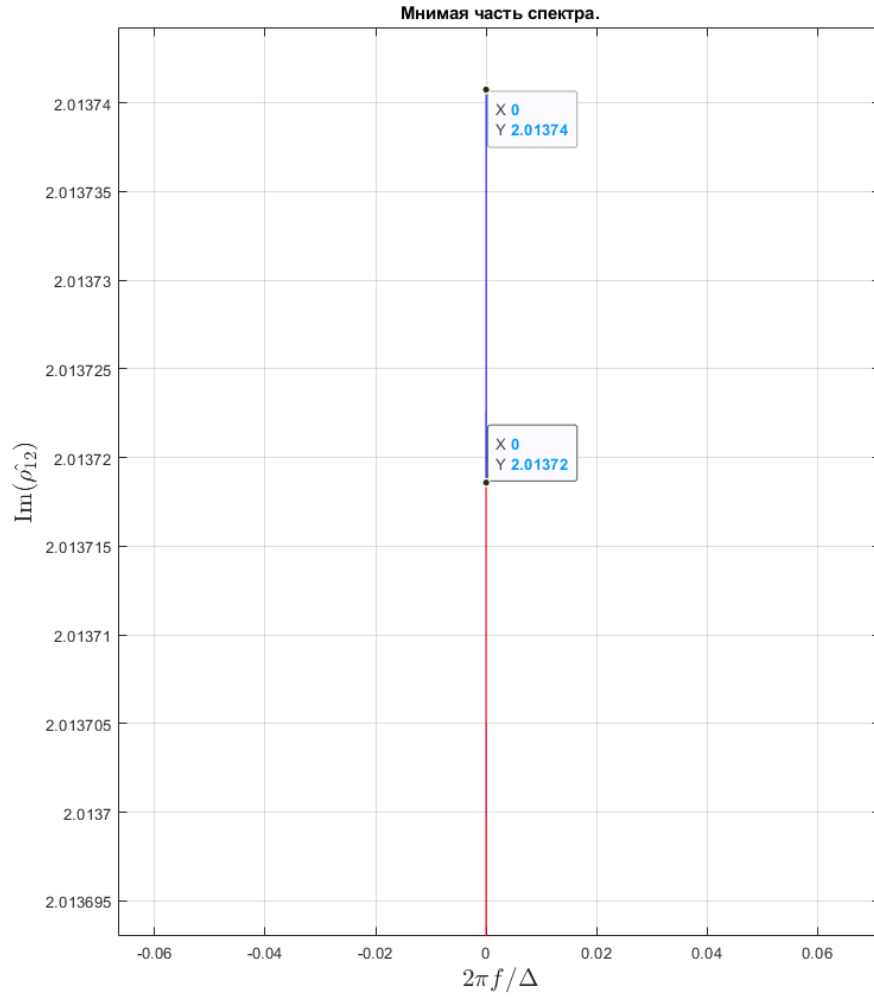


Рис. 21: Мнимая часть спектра внедиагональных элементов при решении стандартного (красный) и упрощённого (синий) уравнений матрицы плотности при нулевом значении отстройке и количества мод воздействующего излучения вблизи нулевой компоненты.

Как можно заметить из рис. 21, мнимая часть спектра упрощённого решения на нулевой компоненте отличается от мнимой части спектра стандартного уравнения на небольшую величину.

Давайте проанализируем получаемые спектры стандартного решения.

Импульсы достаточно большой амплитуды образуются на нулевой компоненте, а так же на компонентах $\frac{w+\omega}{\Delta}$, $2\frac{w+\omega}{\Delta}$ и т.д., причём каждый новый импульс меньше предыдущего в $(w + \omega)$ раз. Можно сказать, что задача предполагает спектральное и асимптотическое разложение, для большей наглядности можно составить такую таблицу:

$$\begin{array}{cccc} \rho_{s=0}^{(0)} & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{s=0}^{(1)} & \rho_{s=1}^{(1)} & 0 & 0 \\ \rho_{s=0}^{(2)} & \rho_{s=1}^{(2)} & \rho_{s=2}^{(2)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}, \quad (13)$$

где ρ – это искомая матрица плотности, s – номер спектрального домена, число в скобках – порядок асимптотического разложения.

4.2 Решение рассматриваемой задачи для случая монохроматического поля с помощью аналитических методов

Найдём значение внедиагональных элементов матрицы плотности при нулевом спектральном домене и нулевом порядке асимптотического разложения. Для этого необходимо рассмотреть упрощённое уравнение, так как отбрасываемый в нём коммутатор с оператором возмущения V^+ переносит решение в следующий спектральный домен. Также необходимо учесть то, что мы рассматриваем именно нулевую компоненту, то есть какой-либо зависимости от времени наблюдаться не будет. И, таким образом, мы получаем такое уравнение:

$$0 = -i \left[V^-, \rho_{s=0}^{(0)} \right] - \rho_{s=0}^{(0)} + L. \quad (14)$$

И при решении СЛАУ, полученной в уравнении (14), можно получить такие решения для элементов матрицы плотности:

$$\begin{cases} \rho_{11} = \frac{6V^2 + 1}{4V^2 + 1} \\ \rho_{12} = \frac{iV}{4V^2 + 1} \\ \rho_{21} = -\frac{iV}{4V^2 + 1} \\ \rho_{22} = \frac{6V^2 + 2}{4V^2 + 1} \end{cases}. \quad (15)$$

Таким образом, внедиагональные элементы оказались чисто мнимыми, что правильно, так как в данный момент мы фактически решили упрощённое уравнение матрицы плотности.

Проверим значение после преобразования Фурье. Так как компонента нулевая, то преобразование Фурье представляет собой значение диагонального элемента, умноженное на промежуток интегрирования (который в моём случае был равен 20.94290383). Итак, получаем выражение:

$$DFT(\rho_{12}) = 20.94290383 \frac{iV}{4V^2 + 1} = 20.94290383 \frac{0.1i}{1.04} \approx 2.0137408. \quad (16)$$

Что с точностью до 10^{-5} совпадает со значением на рис. 21 на нулевой компоненте упрощённого решения.

Найдём значение внедиагональных элементов матрицы плотности при первом спектральном домене и первом порядке асимптотического разложения. Для этого подействуем на найденные элементы матрицы плотности $\rho_{s=0}^{(0)}$ высокочастотным коммутатором с V^+ . Тогда получим следующее уравнение:

$$\frac{d\rho_{s=1}^{(1)}}{dt} = -i \left[V^+, \rho_{s=0}^{(0)} \right]. \quad (17)$$

Тогда из уравнения (17) можно получить набор дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\rho_{11}}{dt} = -\frac{2V^2 \cos((w + \omega)t)}{4V^2 + 1} \\ \frac{d\rho_{12}}{dt} = -\frac{iV e^{i(w+\omega)t}}{4V^2 + 1} \\ \frac{d\rho_{21}}{dt} = \frac{iV e^{-i(w+\omega)t}}{4V^2 + 1} \\ \frac{d\rho_{22}}{dt} = \frac{2V^2 \cos((w + \omega)t)}{4V^2 + 1} \end{cases}. \quad (18)$$

При решении полученных дифференциальных уравнений, получаем для элементов матрицы плотности $\rho_{s=1}^{(1)}$, предварительно избавившись от членов, возникших в неподходящих доменах:

$$\begin{cases} \rho_{11} = -\frac{2V^2 \sin((w + \omega)t)}{(w + \omega)(4V^2 + 1)} \\ \rho_{12} = -\frac{Ve^{i(w+\omega)t}}{(w + \omega)(4V^2 + 1)} \\ \rho_{21} = -\frac{Ve^{-i(w+\omega)t}}{(w + \omega)(4V^2 + 1)} \\ \rho_{22} = \frac{2V^2 \sin((w + \omega)t)}{(w + \omega)(4V^2 + 1)} \end{cases}. \quad (19)$$

Таким образом, внедиагональные элементы оказались чисто вещественными и отвечающими первому спектральному домену. К тому же, можно заметить, что элементы и правда принадлежат первому порядку асимптотического разложения.

Проверим значение после преобразования Фурье. В этом случае достаточно сократить комплексную экспоненту и умножить на промежуток интегрирования, учитывая, что $\Delta = 0.3$:

$$\text{DFT}(\rho_{21}) = -20.94290383 \frac{V}{(w + \omega)(4V^2 + 1)} = -20.94290383 \frac{0.1}{60 \cdot 1.04} \approx -0.0335623, \quad (20)$$

что совпадает со значением компоненты первого спектрального домена вещественного спектра точного решения на рис. 19 с точностью до 10^{-4} .

Найдём значение внедиагональных элементов матрицы плотности при нулевом спектральном домене и первом порядке асимптотического разложения. Для этого подействуем на найденные элементы матрицы плотности $\rho_{s=1}^{(1)}$ высокочастотным коммутатором с V^+ , так как он переводит решения не только в следующий спектральный домен, но и в предыдущий. Не стоит забывать и о том, что наше уравнение не зависит от времени, из-за того, что мы рассматриваем нулевую компоненту. Тогда получим следующее уравнение:

$$0 = -i \left[V^-, \rho_{s=0}^{(1)} \right] - \rho_{s=0}^{(1)} - i \left[V^+, \rho_{s=1}^{(1)} \right]. \quad (21)$$

Тогда из уравнения (21) можно получить СЛАУ, после решения которой необходимо избавиться от всех не подходящих по спектральному домену членам, чтобы получить такие выражения для элементов матрицы плотности $\rho_{s=0}^{(1)}$:

$$\begin{cases} \rho_{11} = 0 \\ \rho_{12} = -\frac{2V^3}{(w + \omega)(4V^2 + 1)} \\ \rho_{21} = -\frac{2V^3}{(w + \omega)(4V^2 + 1)} \\ \rho_{22} = 0 \end{cases}. \quad (22)$$

Таким образом, внедиагональные элементы оказались чисто вещественными и отвечающими нулевому спектральному домену.

Проверим значение после преобразования Фурье. В этом случае достаточно умножить на промежуток интегрирования:

$$\text{DFT}(\rho_{12}) = -20.94290383 \frac{2V^3}{(w + \omega)(4V^2 + 1)} = -20.94290383 \frac{0.002}{60 \cdot 1.04} \approx -0.0006712469, \quad (23)$$

что совпадает со значением компоненты нулевого спектрального домена вещественного спектра точного решения на рис. 19 с точностью до 10^{-6} .

Теперь рассмотрим второй порядок асимптотического разложения. Найдём значение внедиагональных элементов матрицы плотности при втором спектральном домене и втором порядке асимптотического разложения. Для этого подействуем высокочастотным коммутатором на матрицу плотности $\rho_{s=1}^{(1)}$, т.е. зададим такое уравнение:

$$\frac{d\rho_{s=2}^{(2)}}{dt} = -i \left[V^+, \rho_{s=1}^{(1)} \right] . \quad (24)$$

Тогда из уравнения (24) можно получить набор дифференциальных уравнений, в частности, для внедиагонального элемента:

$$\frac{d\rho_{12}}{dt} = -\frac{2V^3 e^{2i(w+\omega)t}}{(w+\omega)(4V^2+1)} . \quad (25)$$

Тогда сам элемент будет равен:

$$\rho_{12} = \frac{iV^3 e^{2i(w+\omega)t}}{(w+\omega)^2 (4V^2+1)} . \quad (26)$$

Таким образом, внедиагональный элемент оказался чисто мнимым и отвечающим второму спектральному домену и второму порядку асимптотического разложения.

Проверим значение после преобразования Фурье. В этом случае достаточно умножить на промежуток интегрирования и сократить экспоненту:

$$DFT(\rho_{12}) = 20.94290383 \frac{iV^3}{(w+\omega)^2 (4V^2+1)} = 20.94290383 \frac{0.001i}{60^2 \cdot 1.04} \approx 5.59372 \cdot 10^{-6} . \quad (27)$$

Что совпадает со значением компоненты второго спектрального домена мнимого спектра точного решения на рис. 19 с точностью до 10^{-9} .

Найдём значение внедиагональных элементов матрицы плотности при первом спектральном домене и втором порядке асимптотического разложения. Для этого подействуем высокочастотным коммутатором на матрицу плотности $\rho_{s=0}^{(1)}$ и низкочастотным коммутатором на матрицу плотности $\rho_{s=1}^{(1)}$ т.е. зададим такое уравнение:

$$\frac{d\rho_{s=1}^{(2)}}{dt} = -i \left[V^-, \rho_{s=1}^{(1)} \right] - \rho_{s=1}^{(1)} - i \left[V^+, \rho_{s=0}^{(1)} \right] . \quad (28)$$

Тогда из (28) можно получить набор дифференциальных уравнений, в частности для внедиагонального элемента:

$$\frac{d\rho_{12}}{dt} = -\frac{2V^3 e^{2i(w+\omega)t}}{(w+\omega)(4V^2+1)} - \frac{V e^{i(w+\omega)t}}{(w+\omega)(4V^2+1)} - \frac{4iV^3 \sin((w+\omega)t)}{(w+\omega)(4V^2+1)} . \quad (29)$$

Тогда сам элемент будет равен (не забываем отбрасывать не входящие в спектральный домен решения):

$$\rho_{12} = \frac{iV (2V^2+1) e^{i(w+\omega)t}}{(w+\omega)^2 (4V^2+1)} . \quad (30)$$

Таким образом, внедиагональный элемент оказался чисто мнимым и отвечающим первому спектральному домену и второму порядку асимптотического разложения.

Проверим значение после преобразования Фурье. В этом случае достаточно умножить на промежуток интегрирования и сократить экспоненту:

$$DFT(\rho_{12}) = 20.94290383 \frac{iV(2V^2 + 1)}{(w + \omega)^2(4V^2 + 1)} = 20.94290383 \frac{1.02 \cdot 0.1i}{60^2 \cdot 1.04} \approx 0.00057056, \quad (31)$$

что совпадает со значением компоненты первого спектрального домена мнимого спектра точного решения на рис. 19 с точностью до 10^{-6} .

Найдём значение внедиагональных элементов матрицы плотности при нулевом спектральном домене и втором порядке асимптотического разложения. Для этого подействуем высокочастотным коммутатором на матрицу плотности $\rho_{s=1}^{(2)}$ и низкочастотным коммутатором на матрицу плотности $\rho_{s=0}^{(2)}$, при этом зависимости от времени наблюдаться не будет, т.е. зададим такое уравнение:

$$0 = -i \left[V^-, \rho_{s=0}^{(2)} \right] - \rho_{s=0}^{(2)} - i \left[V^+, \rho_{s=1}^{(2)} \right]. \quad (32)$$

Решая полученную в уравнении (32) СЛАУ, можем составить уравнение для внедиагонального элемента:

$$\rho_{12} = -\frac{4iV^3(2V^2 + 1)}{(w + \omega)^2(4V^2 + 1)^2}. \quad (33)$$

Таким образом, внедиагональный элемент оказался чисто мнимым и отвечающим нулевому спектральному домену и второму порядку асимптотического разложения.

Проверим значение после преобразования Фурье. В этом случае достаточно умножить на промежуток интегрирования:

$$DFT(\rho_{12}) = -20.94290383 \frac{4iV^3(2V^2 + 1)}{(w + \omega)^2(4V^2 + 1)^2} = -20.94290383 \frac{4 \cdot 1.02 \cdot 0.001i}{60^2 \cdot 1.04^2} \approx -0.000021945i. \quad (34)$$

Была получена отрицательная добавка в мнимом спектре к стандартному решению на нулевой компоненте, которая наблюдается на рис. 21, она равна $\approx -0.000022160i$. Таким образом, значение, полученное аналитическим путём, совпадает с полученным с помощью численных методов с точностью до 10^{-5} .

Теперь, используя значения, полученные только аналитическим путём, посчитаем величину искажений спектра упрощённого решения относительно стандартного при нулевой моде воздействующего излучения, используя формулы (10) и (11).

Для мнимой части количественная оценка искажений будет равна ≈ 0.000283573 .

Таким образом, значение, полученное аналитически, совпадает с полученным с помощью численных методов с точностью до 10^{-7} .

Для вещественной части значение количественной оценки искажений при нулевой моде понятна исходя из того, что при упрощённом решении никаких импульсов в вещественной части не возникает. Вполне логично, что количественная оценка искажений будет равна единице.

5 Количественная оценка величины искажений спектра при переходе от стандартного уравнения к упрощённому в зависимости от частоты воздействующего излучения

5.1 Зависимость ошибки от частоты воздействующего излучения при нулевой моде воздействующего излучения

Главной задачей этой части работы является вычисление зависимости ошибки, вносимой исключением высокочастотного коммутатора из уравнения (2), от частоты w воздействующего поля при нулевой отстройке, т.е. в случае, когда частота воздействующего излучения w равна частоте перехода ω . Само поле будет монохроматическим, т.е. для него будет выполняться равенство (12).

Для удобства сравнения полученных зависимостей ошибки от частоты воздействующего излучения, разобьём сравниваемые спектры на высокочастотную и низкочастотную части, при этом нормировать получаемые отклонения лучше на компоненты всего спектра (нижняя сумма в формулах (10) и (11)), так как в дальнейшем будет проще понять, как соотносятся между собой вклады ошибок на низких и высоких частотах относительно ошибки всего спектра.

Посчитаем вещественную и мнимую ошибку по формулам (10) и (11), получаемую для всего спектра (рис. 22)

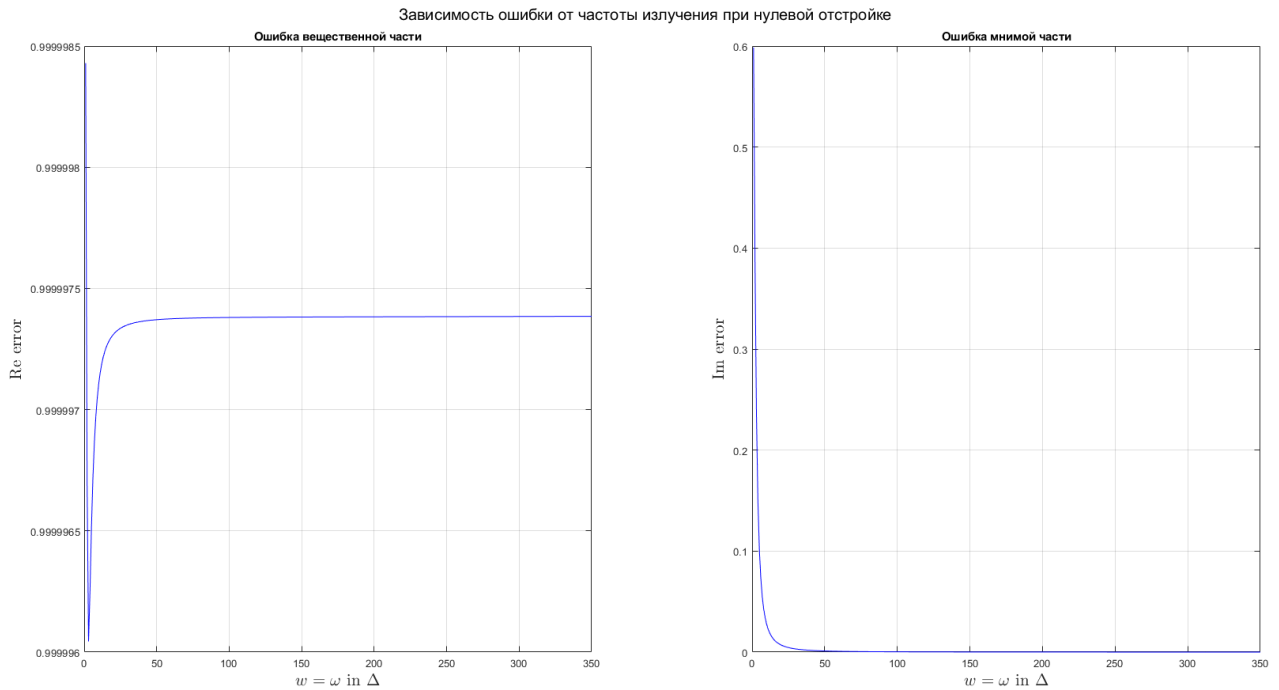


Рис. 22: Зависимость ошибки всего спектра от частоты воздействующего поля при нулевой отстройке и нулевой моде.

Нетрудно заметить, что полученные зависимости подтверждают полученные аналитические выкладки из п. 4, так как при нулевой моде решение упрощённого уравнения вообще не имеет вещественной части, в то время как стандартное решение – имеет, причем в первом порядке асимптотического разложения. Именно поэтому ошибка всего спектра будет очень близка к единице.

Если говорить об ошибке мнимой части, то, исходя из аналитических соображений в п. 4, зависимость мнимой части решения стандартного уравнения от частоты воздействующего излучения появляется во втором порядке асимптотического разложения и может быть описана формулами (26), (30) и (33) для 2-го, 1-го и нулевого спектрального домена соответственно.

Снова обращаясь к рис. 22, можно предположить, что ошибка мнимой части ведёт себя так же, как и полученные решения до разложения в спектр, а именно убывают, как $\frac{1}{w+\omega}$, или, так как расчёт был

проведён при нулевой отстройке, как $\frac{1}{w^2}$.

Проверим, какая же на самом деле зависимость у ошибки мнимой части решения упрощённого уравнения с помощью аппроксимации степенной функцией рис. 23.

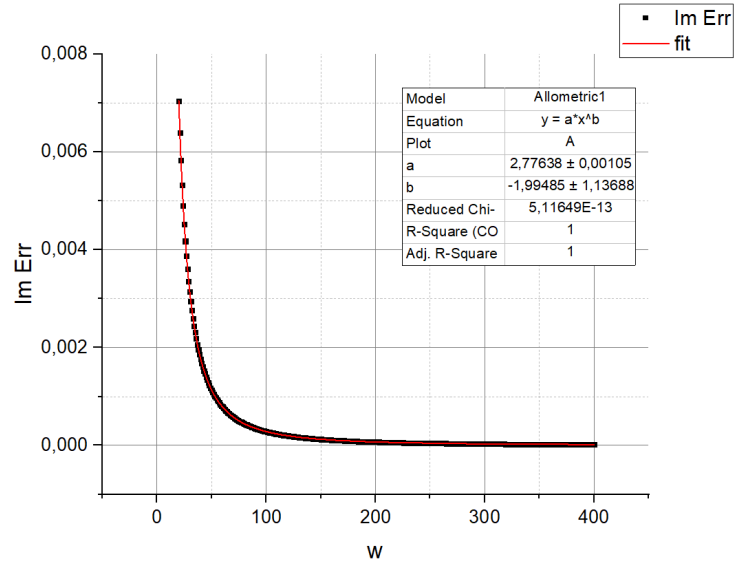


Рис. 23: Аппроксимация степенной функцией зависимости ошибки мнимой части решения от частоты воздействующего излучения.

Зависимость была рассмотрена, начиная со значения $w = 20\Delta$, так как при совсем малых w , импульс ненулевого спектрального домена сливается с импульсом нулевого спектрального домена, и зависимость отражает ошибку не полностью. Исходя из рис. 23, можно сказать, что ошибка действительно убывает согласно второму порядку асимптотического приближения точного решения, что говорит о том, что численное решение сопоставимо с произведёнными ранее аналитическими расчётами.

Теперь рассмотрим отдельно низкочастотную и высокочастотную часть ошибки получаемых спектров (рис. 24).

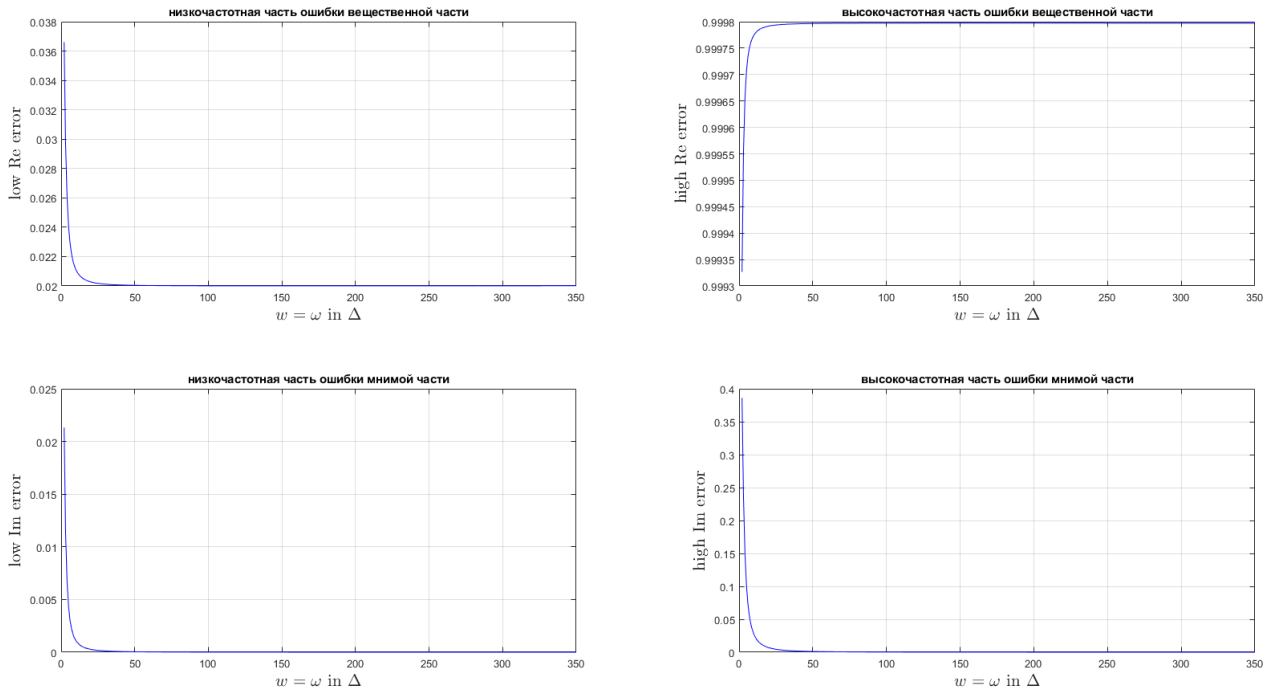


Рис. 24: Зависимость ошибки высокочастотной и низкочастотной частей спектра от частоты воздействующего поля при нулевой отстройке и монохроматическом поле.

Как можно заметить из рис. 24, как высокочастотная, так и низкочастотная часть ошибки мнимой части решения убывает, как $\frac{1}{w^2}$, в силу приведённых ранее аналитических соображений. Также нетрудно заметить, что результат для всей мнимой части спектра решения на рис. 22 раскладывается на корень из суммы квадратов своей высокочастотной и низкочастотной части на рис. 24.

Рассмотрим ошибку вещественной части спектра. Для низкочастотной части решения также имеет место зависимость, которую можно описать степенной функцией, при этом эта зависимость имеет асимптотику в некотором постоянном значении, и абсолютно идентична ошибке мнимой части, т.е. убывает, как $\frac{1}{w^2}$. При этом высокочастотная часть ошибки имеет такой характер зависимости, что корень из суммы квадратов ошибок низкочастотной и высокочастотной частей с хорошей точностью равна единице.

Попробуем разобраться в асимптотике низкочастотной части ошибки вещественной части решения. Для того, чтобы проверить получаемую асимптотику, примерно равную 0.02, можно воспользоваться формулой (10) для расчёта ошибки спектра, при условии нормировки этой ошибки на компоненты всего спектра (сумма в знаменателе должна учитывать компоненты всего спектра). Так как аналитическим путём было получено, что вещественная часть спектра в приближении вращающейся волны в случае монохроматического поля отсутствует, то в числителе используемой формулы (10) будет лишь значение компоненты на нулевом спектральном домене стандартного решения, которое может быть описано зависимостью, полученной в п. 4, в формуле (23):

$$DFT(\rho_{12}) = -20.94290383 \frac{2V^3}{(w + \omega)(4V^2 + 1)} = -20.94290383 \frac{0.002}{2 \cdot w \cdot 1.04} \approx -\frac{0.0201374075}{w}. \quad (35)$$

То же самое можно сказать и про компоненту первого спектрального домена вещественной части точного решения:

$$DFT(\rho_{12}) = -20.94290383 \frac{V}{(w + \omega)(4V^2 + 1)} = -20.94290383 \frac{0.1}{2 \cdot w \cdot 1.04} \approx -\frac{1.0068703764}{w}. \quad (36)$$

Таким образом, приняв во внимание, что допущение выражения низкочастотной части ошибки вещественной части решения только через значение компонент на главных спектральных доменах обосновано тем, что именно эти компоненты вносят основной вклад в ошибку, можем посчитать результат:

$$K_{\text{ReLow}} = \frac{|\text{DFT}(\rho_{s=0_{12}}^{(1)})|}{\sqrt{(DFT(\rho_{s=0_{12}}^{(1)}))^2 + (DFT(\rho_{s=1_{12}}^{(1)}))^2}}. \quad (37)$$

Если подставить значения, полученные в (35) и (36) в формулу (37), то получится константа, примерно равная 0.0199, что очень близко к полученному значению в асимптоте низкочастотной части ошибки вещественной части решения на рис. 24.

Для пояснения поведения низкочастотной части ошибки вещественной части решения можно рассмотреть 3-й порядок асимптотического приближения точного решения. Исходя из соображений в п. 4, этот порядок асимптотического приближения будет описывать строго вещественную часть. Рассмотрим формулу (37), добавим в неё третий порядок асимптотического приближения:

$$K_{\text{ReLow}} = \sqrt{\frac{(DFT(\rho_{s=0_{12}}^{(1)}))^2 + (DFT(\rho_{s=0_{12}}^{(3)}))^2}{(DFT(\rho_{s=0_{12}}^{(1)}))^2 + (DFT(\rho_{s=1_{12}}^{(1)}))^2 + (DFT(\rho_{s=3_{12}}^{(3)}))^2 + (DFT(\rho_{s=2_{12}}^{(3)}))^2 + \dots}}. \quad (38)$$

Полученное уравнение (38) можно представить через отрицательные степени w :

$$K_{\text{ReLow}} = \sqrt{\frac{\frac{0.0004055152}{w^2} + \frac{a}{w^6}}{\frac{1.0141934701}{w^2} + \frac{b}{w^6}}} = \sqrt{\frac{(\frac{0.0004055152}{w^2} + \frac{a}{w^6}) \cdot (\frac{1.0141934701}{w^2} - \frac{b}{w^6})}{(\frac{1.0141934701}{w^2} + \frac{b}{w^6}) \cdot (\frac{1.0141934701}{w^2} - \frac{b}{w^6})}}. \quad (39)$$

В формуле (39) число a - квадрат значения компоненты нулевого спектрального домена после преобразования Фурье для третьего порядка асимптотического приближения, а число b - сумма квадратов всех компонент спектра для третьего порядка асимптотического приближения.

Далее раскроем скобки и примем за малое члены при w^{-12} , в итоге получим:

$$K_{\text{ReLow}} = \sqrt{\frac{0.0004055152}{1.0141934701} + \frac{a \cdot 1.0141934701 - b \cdot 0.0004055152}{1.0141934701^2 \cdot w^4}} . \quad (40)$$

Давайте оценим полученное выражение (40). Если $w \rightarrow \infty$, то получим:

$$\lim_{w \rightarrow \infty} K_{\text{ReLow}} = \sqrt{\frac{0.0004055152}{1.0141934701}} \approx 0.02 . \quad (41)$$

Таким образом, сравнивая это значение как с полученным по формуле (37), так и с полученным численно на (рис. 24), можно сделать вывод, что полученное по формуле (41) значение асимптоты является правильным.

Теперь отбросим асимптоту в уравнении (40), грубо говоря, занулив её, получим:

$$K'_{\text{ReLow}} = \sqrt{\frac{a \cdot 1.0141934701 - b \cdot 0.0004055152}{1.0141934701^2 \cdot w^4}} = \frac{1}{1.0141934701 \cdot w^2} \sqrt{a \cdot 1.0141934701 - b \cdot 0.0004055152} . \quad (42)$$

И, с учётом того, что значение подкоренного выражения неотрицательно, получим:

$$K'_{\text{ReLow}} = \frac{C}{w^2} . \quad (43)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что, исходя из аналитических соображений, низкочастотная часть ошибки вещественной части решения в случае монохроматического поля убывает, как $\frac{1}{w^2}$, и имеет асимптотику в значении ≈ 0.02 .

Из всего вышесказанного можно сделать вывод, что все зависимости, представленные на рис. 24 для случая монохроматического поля могут быть подтверждены аналитически.

Для более наглядного численного подтверждения аналитических результатов для случая нулевой моды, можно сравнить амплитуды импульсов, получаемых в низкочастотной и высокочастотной части рассматриваемых спектров (рис. 26).

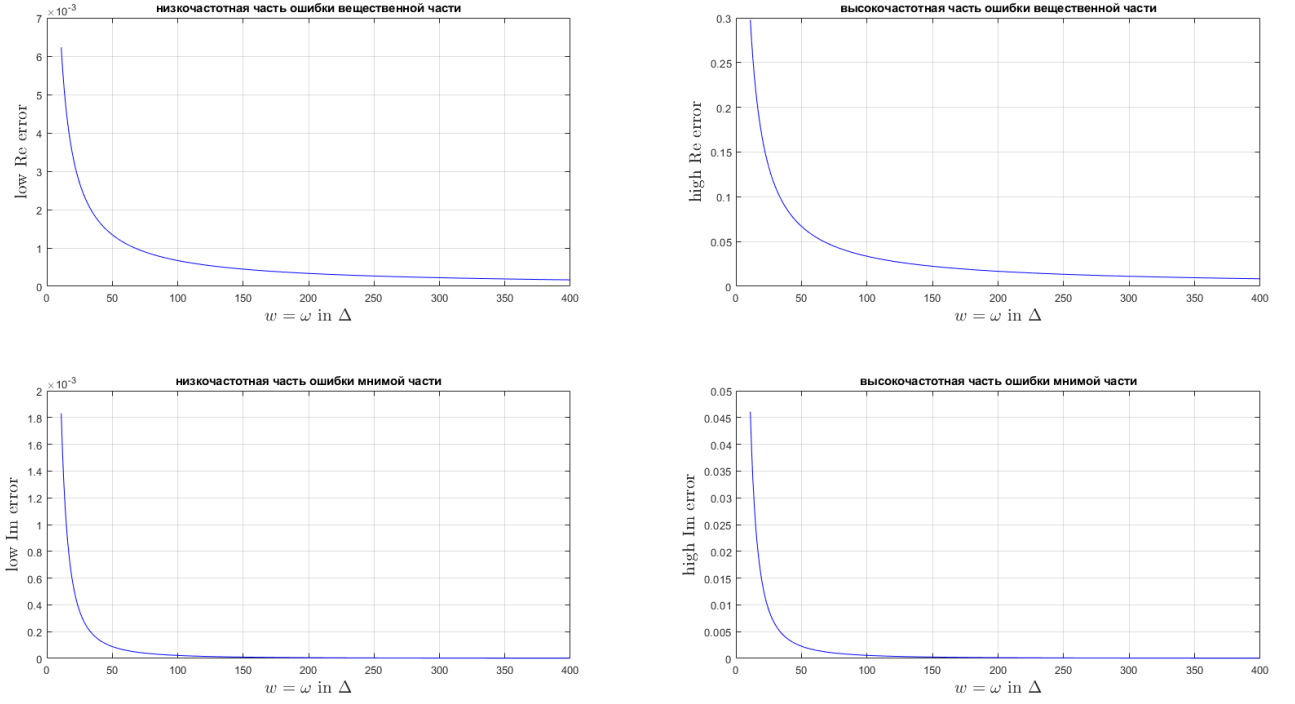


Рис. 25: Зависимость ошибки высокочастотной и низкочастотной частей спектра от частоты воздействующего поля при нулевой отстройке и нулевой моде, рассчитанная с помощью разности пиков.

Нетрудно заметить, что зависимости на рис. 26, в особенности для вещественной части ошибки, изменились. Считая ошибку с помощью разности импульсов на главных спектральных доменах, поиск численного значения ошибки стал более условным, но, таким образом, случай более наглядно отражает отношение амплитуд импульсов главных спектральных доменов стандартного решения относительно упрощённого, что и было найдено в п. 4. При этом, ошибка мнимой части убывает так же, как и на рис. 24, т.е. как $\frac{1}{w^2}$. Отличаются лишь значения получаемых искажений, ведь они не были нормированы так, как на рис. 24. Однако, при этом, отношения искажений высокочастотной и низкочастотной частей мнимой части решения сохранились в соответствии с рис. 24, что говорит о том, что рассматриваемые импульсы вносят наибольший вклад в искажения.

Проверим, какая зависимость у амплитуды импульсов главных спектральных доменов низкочастотной и высокочастотной части ошибки вещественной части решения упрощённого уравнения от частоты воздействующего излучения с помощью аппроксимации степенной функцией (рис. 27 и 27).

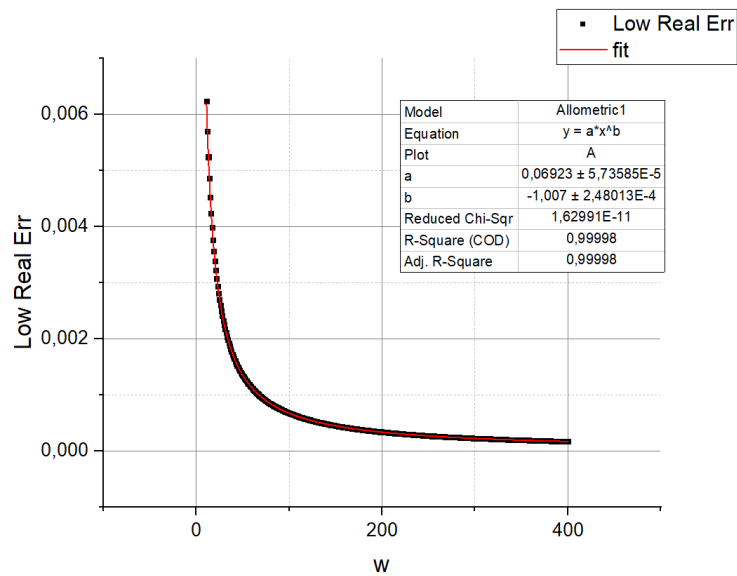


Рис. 26: Аппроксимация степенной функцией зависимости низкочастотной части ошибки вещественной части решения от частоты воздействующего излучения, рассчитанной с помощью разности пиков.

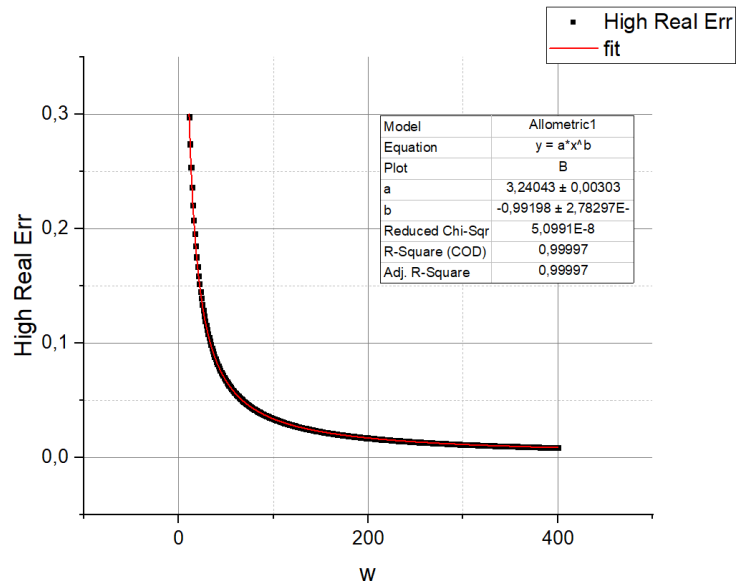


Рис. 27: Аппроксимация степенной функцией зависимости высокочастотной части ошибки вещественной части решения от частоты воздействующего излучения, рассчитанной с помощью разности пиков.

Исходя из рис. 26 и 27, можно сказать, что пики как в высокочастотной части, так и в низкочастотной части искажений вещественной части решения убывают, согласно формулам (20) и (23) из п. 4 соответственно, как $\frac{1}{w}$.

Таким образом, выражения, сделанные в п. 4 для компонент спектра в случае нулевой моды воздействующего поля, являются верными и могут быть численно воспроизведены для зависимости ошибки от частоты воздействующего поля либо с помощью формул (10) и (11) (применённых к высокочастотной и низкочастотной части спектра полученного решения), либо через простую разность компонент в низкочастотной и высокочастотной области рассматриваемого спектра.

5.2 Зависимость ошибки от частоты воздействующего излучения в случае нескольких мод воздействующего излучения

В данной части работы необходимо посмотреть, какая зависимость искажений от частоты будет наблюдаться при нескольких модах воздействующего излучения, чтобы понять, насколько в этом случае применимы аналитические рассуждения, сделанные в п. 4.

Возьмём количество мод, равное четырём, проведём численное измерение низкочастотной и высокочастотной части ошибки в зависимости от частоты воздействующего излучения с помощью формул (10) и (11), отстройка так же, как и в п. 5.1, нулевая (рис. 29).

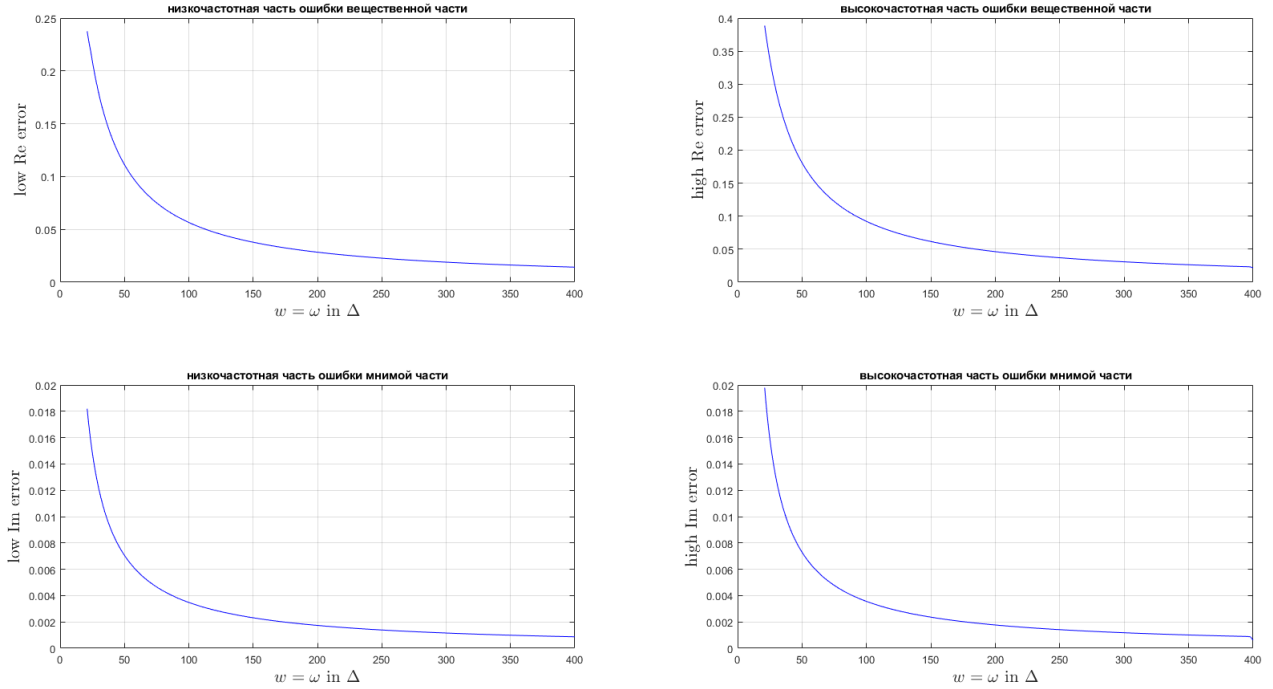


Рис. 28: Зависимость ошибки высокочастотной и низкочастотной частей спектра от частоты воздействующего поля при нулевой отстройке и нескольких модах.

Аппроксимируем полученные зависимости степенной функцией (рис. 30).

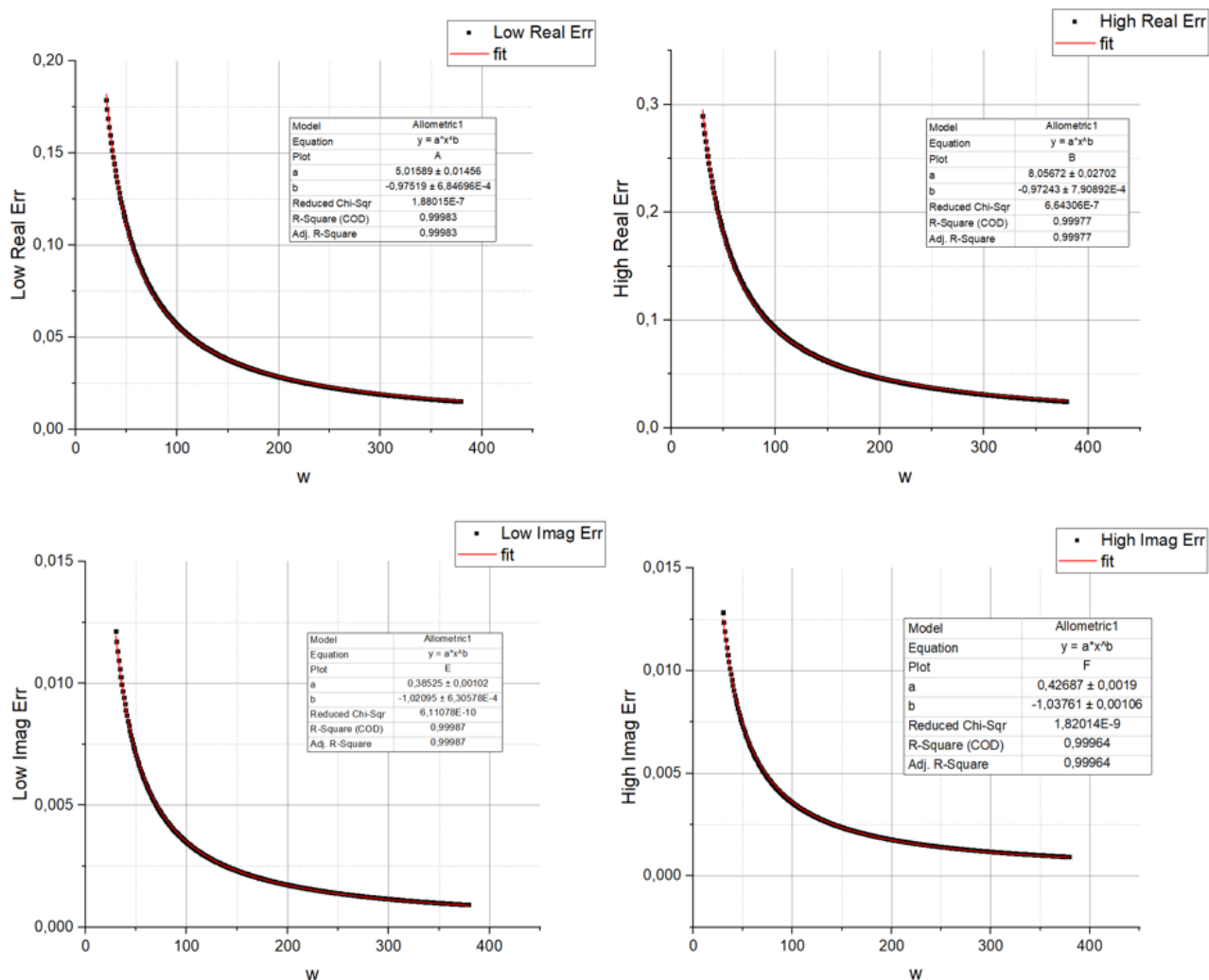


Рис. 29: Аппроксимация степенной функцией зависимости ошибки вещественной части решения от частоты воздействующего излучения для случая многомодового поля.

Как можно заметить из рис. 30, все полученные зависимости убывают примерно как $\frac{1}{w}$. Следовательно, при нескольких модах воздействующего поля, решение упрощённого уравнения содержит не только лишь мнимую часть, а мнимую и вещественную. Довольно логично предположить, что и первый асимптотический порядок разложения решения стандартного уравнения имеет как мнимую, так и вещественную части. Именно поэтому, каждая из рассмотренных зависимостей описывается наибольшими искажениями, возникающими как раз в первом порядке асимптотического разложения стандартного решения.

Для более детального исследования компонент нулевого спектрального домена, можно найти зависимость их модуля разности от частоты (рис. 31).

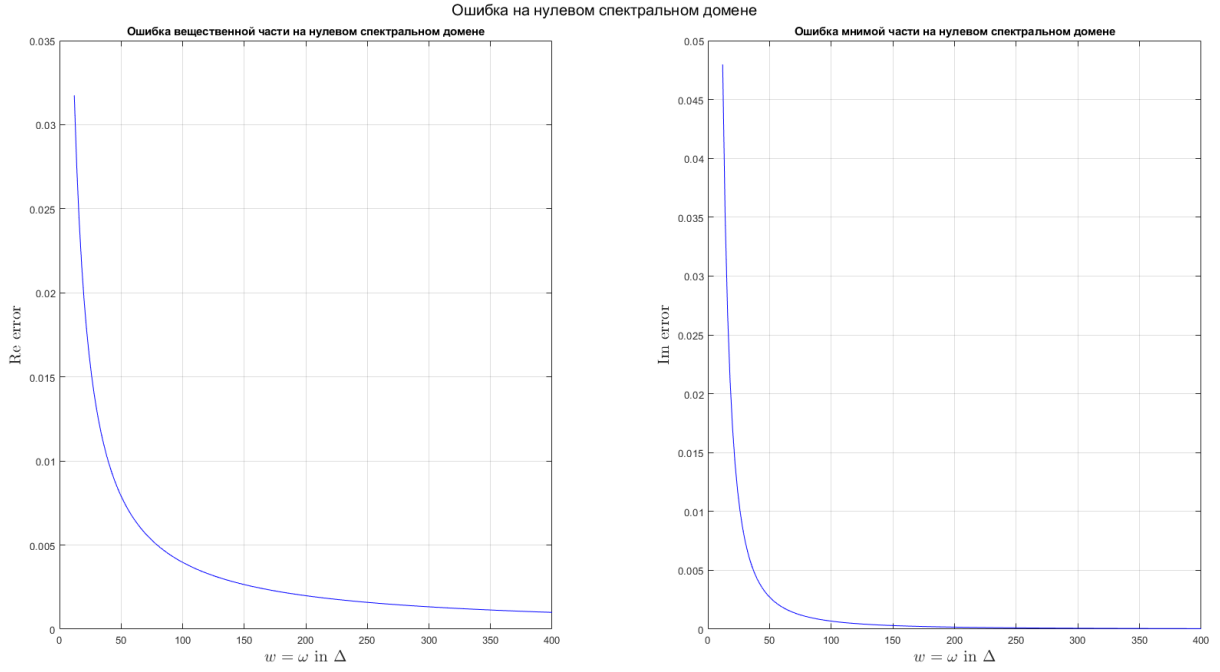


Рис. 30: Зависимость ошибки мнимой и вещественной части спектра от частоты воздействующего поля при нулевой отстройке и нулевой моде, рассчитанная с помощью разности пиков на нулевом спектральном домене.

Из рис. 31 становится ясно, что ошибка вещественной части на нулевом спектральном домене убывает, как $\frac{1}{w}$, а ошибка мнимой части —, как $\frac{1}{w^2}$. Это говорит о том, что вклад от точного решения в нулевой спектральный домен мнимой части решения существует лишь во втором порядке асимптотического приближения. Но, несмотря на это, низкочастотная часть ошибки мнимой части в общем случае убывает, как показано на рис. 30, то есть, как $\frac{1}{w}$.

Теперь рассмотрим ошибку всего спектра целиком (рис. 32).

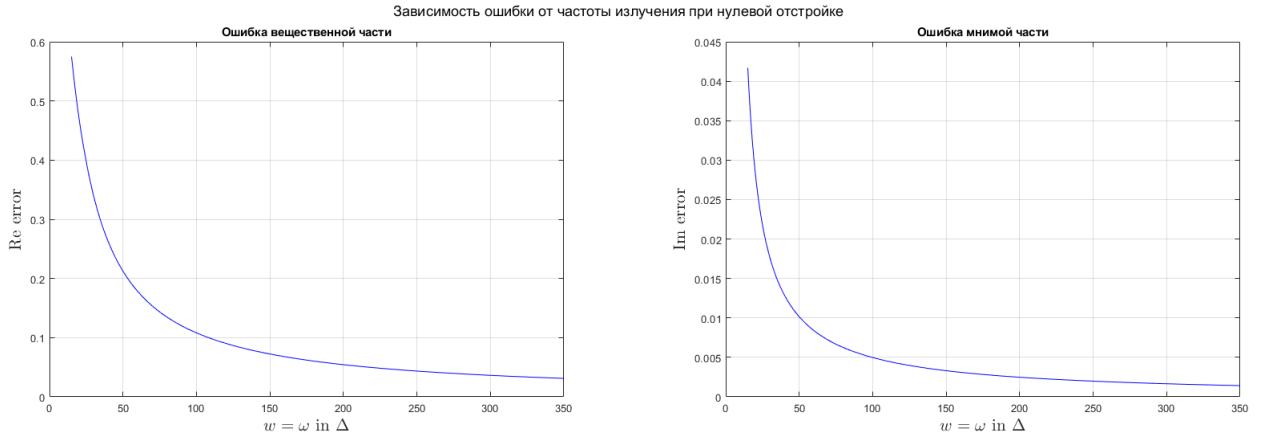


Рис. 31: Зависимость ошибки вещественной части решения от частоты воздействующего излучения для случая многомодового поля.

Из рис. 32 нетрудно заметить, что ошибки вещественной и мнимой части имеют такую же зависимость от частоты воздействующего излучения, что и высокочастотная и низкочастотная части этих искажений на рис. 28, при этом, полученные значения ошибок примерно равны корню из суммы квадратов их высокочастотных и низкочастотных частей.

Выводы

- Была получена зависимость количественной оценки искажений для вещественной и мнимой части спектров внедиагональных элементов решения динамического уравнения матрицы плотности от разности частоты излучения и частоты перехода при замене стандартного динамического уравнения на упрощённое. Полученная количественная оценка искажений асимптотически стремится к $\frac{1}{\sqrt{2}}$ при $|w| \gg |\omega|$. А также полученная зависимость правильно описывает особенности, возникающие в спектрах при определённых значениях разности частот (п. 3).
- Для случая монохроматического поля был реализован аналитический подход к решению поставленной задачи, который заключался одновременно в спектральном разложении и асимптотическом приближении рассматриваемого стандартного уравнения матрицы плотности (п. 4). Таким образом, одной из главных задач данного подхода было разложение решения стандартного уравнения по главным спектральным доменам и, грубо говоря, по отрицательным степеням суммы частоты воздействующего излучения и частоты перехода (формула (13)). Как оказалось, для монохроматического поля чётные порядки асимптотического приближения точного решения вносят вклад только в мнимую часть спектра решения, а нечётные - только в вещественную.
- Была найдена зависимость количественной оценки искажений спектра при переходе от упрощённого уравнения к стандартному в зависимости от количества мод воздействующего излучения. Результаты количественной оценки искажений при нулевой моде воздействующего излучения были проверены аналитическим методом. Результаты сошлись с достаточно высокой точностью.
- При численном расчёте зависимости ошибки от частоты воздействующего поля при нулевой отстройке (п. 5), результаты полностью подтвердили полученные ранее аналитические выкладки из п. 4. В случае монохроматического поля ошибка мнимой части убывает, как $\frac{1}{w^2}$ (второй порядок асимптотического приближения), а ошибка вещественной части **всегда равна единице**, но, при разбиении ошибки вещественной части решения на высокочастотную и низкочастотную части, зависимость описывается более высоким порядком асимптотического приближения (рис. 24), при этом, такой результат также можно воспроизвести аналитическим путём (уравнения (40)–(43)).
- Импульсы главных спектральных доменов в вещественной части стандартного уравнения в случае монохроматического поля убывают, как $\frac{1}{w}$, т.е. ровно так же, как это было описано в п. 4.
- В случае многомодового поля, ошибка всего спектра решения убывает как $\frac{1}{w}$. Это хорошо объясняется тем, что в случае многомодового поля первый порядок асимптотического приближения будет иметь как мнимую, так и вещественную части.
- Таким образом, можно сделать вывод, что упрощённое динамическое уравнение матрицы плотности (т.е. уравнение, применяющееся в приближении вращающейся волны) в случае нулевой отстройки может быть применимо при больших частотах воздействующего поля (и, следовательно, больших частотах перехода), а также при больших разностях этих частот в случае низкочастотной части ошибки при $w \geq -100\Delta$ ($w \geq -\omega$) и высокочастотной части ошибки при $w < -100\Delta$ ($w < -\omega$) (рис. 17).

Приложения

В данном разделе представлена программа, с помощью которой проводился численный анализ зависимостей, представленных преимущественно в п. 5.

Программа была написана на языке C++ с применением OpenMP и решает задачу численного нахождения зависимости искажений от частоты воздействующего излучения для случая нулевой отстройки. Все основные этапы описаны в комментариях.

Листинг 1: Численное нахождение зависимости искажений от частоты воздействующего излучения

```
#include <stdio.h>
#include <omp.h>
#include <math.h>
#include <complex>
#include <iostream>
#include <fstream>
#define M_PI 3.14159265358979323846
using namespace std;
// Объявление функций. //

// Упрощённое динамическое уравнение матрицы плотности. //
complex < double > ** easyF(double t, complex < double > ** Y, double w, double omega, double
    Delta, double Omega, int M, std::complex< double > ** dYdt);

// Стандартное динамическое уравнение матрицы плотности. //
complex < double > ** F(double t, complex < double > ** Y, double w, double omega, double Delta,
    double Omega, int M, std::complex< double > ** dYdt);

// Преобразование Фурье. //
complex < double > * Fourier(double* t, complex < double > * Y, double* f, int reso, int size, int
    per);

// Мнимая единица //
complex< double > imagOne = { 0.0, 1.0 };

// Функция нахождения искажений мнимой части спектра решения. //
double imagMistake(complex < double > * comp, complex < double > * easyComp, int reso);

// Функция нахождения искажений вещественной части спектра решения. //
double realMistake(complex < double > * comp, complex < double > * easyComp, int reso);

// Функция нахождения низкочастотной части искажений вещественной части спектра решения. //
double LowRealMistake(complex < double > * comp, complex < double > * easyComp, int subSize, double w
    , double Delta, double omega);

// Функция нахождения высокочастотной части искажений вещественной части спектра решения. //
double HighRealMistake(complex < double > * comp, complex < double > * easyComp, int subSize, double
    w, double Delta, double omega);

// Функция нахождения низкочастотной части искажений мнимой части спектра решения. //
double LowImagMistake(complex < double > * comp, complex < double > * easyComp, int subSize, double w
    , double Delta, double omega);

// Функция нахождения высокочастотной части искажений мнимой части спектра решения. //
double HighImagMistake(complex < double > * comp, complex < double > * easyComp, int subSize, double
    w, double Delta, double omega);

int main()
{
    cout.setf(ios::fixed); // вывод в фиксированном формате
    cout.precision(20);
    // Начальные условия.
    double Delta = 0.3;
    double Omega = 0.2;
    int M = 4;
    double omega = 0.0 * Delta;
    double wStart = 0.0 * Delta;

    // Ввод числа точек на период, количества периодов и масштаба спектров. //
    int per;
    int num;
    int reso, points, step;
```

```

cout << "points_per_period?:\n" << endl;
cin >> per;
cout << "num_of_periods?:\n" << endl;
cin >> num;
cout << "resolution_of_spectra(in_Deltas)?:\n" << endl;
cin >> reso;
cout << "num_of_points?:\n" << endl;
cin >> points;
cout << "and_step(in_Deltas)?:\n" << endl;
cin >> step;

// Определение полных размеров массивов. //
int size = per * num;
int subSize = reso * 2 + 1;

// Задание сетки времени. //
double ts = 2.0 * M_PI / Delta;
double tim;
double* t = new double[size];
t[0] = ts / (double)per;
for (int i = 0; i < size - 1; i++)
    t[i + 1] = t[i] + ts / (double)per;

// Задание сетки частот (для преобразования Фурье). //
double* f = new double[subSize];
double fs = 1 / ts;
f[0] = -1.0 * fs * reso;
for (int i = 1; i < subSize; i++) {
    f[i] = f[i - 1] + fs;
}

// Динамическое выделение памяти для массивов получаемых значений искажений. //
double* realErr = new double[int(points/step)];
double* imagErr = new double[int(points / step)];

double* lowRealErr = new double[int(points / step)];
double* highRealErr = new double[int(points / step)];
double* lowImagErr = new double[int(points / step)];
double* highImagErr = new double[int(points / step)];

// Динамическое выделение памяти для массива получаемых значений w. //
double* xAxis = new double[int(points / step)];

// Шаг сетки времени. //
double h;

// Задание коэффициентов метода Рунге-Кутты 4-го порядка по правилу 3/8. //
complex < double > k1[2][2], k2[2][2], k3[2][2], k4[2][2] = { {{0.0,0.0},{0.0,0.0}} ,{{
    0.0,0.0},{0.0,0.0}} } ;
double c[4] = { 0.0, 1.0 / 3.0, 2.0 / 3.0, 1.0 };
double b[4] = { 1.0 / 8.0, 3.0 / 8.0, 3.0 / 8.0, 1.0 / 8.0 };
double a[4][4] = { {{0.0, 0.0, 0.0, 0.0},{1.0 / 3.0, 0.0, 0.0, 0.0},{-1.0 / 3.0, 1.0, 0.0,
    0.0},{1.0, -1.0, 1.0, 0.0}} };

// Задание количества используемых потоков (openmp). //
omp_set_num_threads(12);
tim = omp_get_wtime();
double w;
int detune;
// Распараллеливание цикла for в котором реализован метод Рунге-Кутта, преобразование Фурье
и вычисление ошибки. //
#pragma omp parallel for private (detune, w, k1, k2, k3, k4, omega) shared (lowRealErr,
    lowImagErr, highRealErr, highImagErr, realErr, imagErr, xAxis, size, subSize, per, num,
    reso, ts, t, a, b, c, points, step)
for (detune = 1; detune < int(points / step) + 1; detune++) {
    w = wStart + Delta * (double)detune * (double)step;
    omega = w;

    // Динамическое выделение памяти и заполнение матрицы начального условия метода Рунге-Кут
    ты. //
    double** rho0 = new double* [2];
    for (int i = 0; i < 2; i++)
        rho0[i] = new double[2];
    for (int i = 0; i < 2; i++) {
        for (int j = 0; j < 2; j++) {
            if (i == j)

```

```

        rho0[i][j] = 1.0;
    else
        rho0[i][j] = 0.0;
    }
}

// Динамическое выделение памяти под трехмерный массив решений стандартного уравнения матрицы
// плотности для метода Рунге-Кутты и его заполнение. //
complex < double >*** Y = new complex < double > **[2];
for (int i = 0; i < 2; i++) {
    Y[i] = new complex < double > *[2];
    for (int j = 0; j < 2; j++) {
        Y[i][j] = new complex < double > [size];
    }
}

for (int i = 0; i < 2; i++) {
    for (int j = 0; j < 2; j++) {
        Y[i][j][0] = rho0[i][j];
        for (int k = 1; k < size; k++) {
            Y[i][j][k] = { 0.0, 0.0 };
        }
    }
}

// Динамическое выделение памяти под трехмерный массив решений упрощенного уравнения матрицы
// плотности для метода Рунге-Кутты и его заполнение. //
complex < double >*** easyY = new complex < double > **[2];
for (int i = 0; i < 2; i++) {
    easyY[i] = new complex < double > *[2];
    for (int j = 0; j < 2; j++) {
        easyY[i][j] = new complex < double > [size];
    }
}

for (int i = 0; i < 2; i++) {
    for (int j = 0; j < 2; j++) {
        easyY[i][j][0] = rho0[i][j];
        for (int k = 1; k < size; k++) {
            easyY[i][j][k] = { 0.0, 0.0 };
        }
    }
}

// Динамическое выделение памяти под двумерный массив производной матрицы плотности для метода
// Рунге-Кутты. //
complex < double >** dYdt = new complex < double > *[2];
for (int i = 0; i < 2; i++)
    dYdt[i] = new complex < double > [2];

// Динамическое выделение памяти под двумерный массив для итеративной перезаписи коэффициентов
// для метода Рунге-Кутты и его заполнение. //
complex < double >** plus = new complex < double > **[2];
for (int i = 0; i < 2; i++)
    plus[i] = new complex < double > [2];
for (int l = 0; l < 2; l++) {
    for (int m = 0; m < 2; m++) {
        plus[l][m] = { 0.0, 0.0 };
    }
}

// Динамическое выделение памяти для получаемых решений и их заполнение. //
complex < double >* easyData = new complex < double > [size];
complex < double >* data = new complex < double > [size];

for (int i = 0; i < size; i++) {
    easyData[i] = data[i] = { 0.0, 0.0 };
}

// Динамическое выделение памяти для получаемых с помощью преобразования Фурье компонент
// спектра и их заполнение. //
complex < double >* easyComp = new complex < double > [subSize];
complex < double >* comp = new complex < double > [subSize];

for (int i = 0; i < subSize; i++) {
    easyComp[i] = comp[i] = { 0.0, 0.0 };
}

```

```

}

// Реализация метода Рунге-Кутты. //
for (int count = 1; count < size; count++) {
    h = t[count] - t[count - 1];
    for (int i = 0; i < 2; i++) {
        for (int j = 0; j < 2; j++) {
            for (int l = 0; l < 2; l++) {
                for (int m = 0; m < 2; m++) {
                    plus[l][m] = easyY[l][m][count - 1];
                }
            }
            k1[i][j] = easyF(t[count - 1], plus, w, omega, Delta, Omega, M, dYdt)[i][j];
            for (int l = 0; l < 2; l++) {
                for (int m = 0; m < 2; m++) {
                    plus[l][m] = easyY[l][m][count - 1] + h * a[1][0] * k1[l][m];
                }
            }
            k2[i][j] = easyF(t[count - 1] + h * c[1], plus, w, omega, Delta, Omega, M, dYdt)
                [i][j];
            for (int l = 0; l < 2; l++) {
                for (int m = 0; m < 2; m++) {
                    plus[l][m] = easyY[l][m][count - 1] + h * (a[2][0] * k1[l][m] + a[2][1] *
                        k2[l][m]);
                }
            }
            k3[i][j] = easyF(t[count - 1] + h * c[2], plus, w, omega, Delta, Omega, M, dYdt)
                [i][j];
            for (int l = 0; l < 2; l++) {
                for (int m = 0; m < 2; m++) {
                    plus[l][m] = easyY[l][m][count - 1] + h * (a[3][0] * k1[l][m] + a[3][1] *
                        k2[l][m] + a[3][2] * k3[l][m]);
                }
            }
            k4[i][j] = easyF(t[count - 1] + h * c[3], plus, w, omega, Delta, Omega, M, dYdt)
                [i][j];
            easyY[i][j][count] = easyY[i][j][count - 1] + h * (b[0] * k1[i][j] + b[1] * k2[i]
                [j] + b[2] * k3[i][j] + b[3] * k4[i][j]);

            for (int l = 0; l < 2; l++) {
                for (int m = 0; m < 2; m++) {
                    plus[l][m] = Y[l][m][count - 1];
                }
            }
            k1[i][j] = F(t[count - 1], plus, w, omega, Delta, Omega, M, dYdt)[i][j];
            for (int l = 0; l < 2; l++) {
                for (int m = 0; m < 2; m++) {
                    plus[l][m] = Y[l][m][count - 1] + h * a[1][0] * k1[l][m];
                }
            }
            k2[i][j] = F(t[count - 1] + h * c[1], plus, w, omega, Delta, Omega, M, dYdt)[i][
                j];
            for (int l = 0; l < 2; l++) {
                for (int m = 0; m < 2; m++) {
                    plus[l][m] = Y[l][m][count - 1] + h * (a[2][0] * k1[l][m] + a[2][1] * k2[l]
                        [m]);
                }
            }
            k3[i][j] = F(t[count - 1] + h * c[2], plus, w, omega, Delta, Omega, M, dYdt)[i][
                j];
            for (int l = 0; l < 2; l++) {
                for (int m = 0; m < 2; m++) {
                    plus[l][m] = Y[l][m][count - 1] + h * (a[3][0] * k1[l][m] + a[3][1] * k2[l]
                        [m] + a[3][2] * k3[l][m]);
                }
            }
            k4[i][j] = F(t[count - 1] + h * c[3], plus, w, omega, Delta, Omega, M, dYdt)[i][
                j];
            Y[i][j][count] = Y[i][j][count - 1] + h * (b[0] * k1[i][j] + b[1] * k2[i][j] + b
                [2] * k3[i][j] + b[3] * k4[i][j]);
        }
    }
}

// Перезапись полученных значений внедиагональных элементов в одномерный массив. //

```

```

for (int k = 0; k < size; k++) {
    easyData[k] = easyY[0][1][k];
    data[k] = Y[0][1][k];
}

// Преобразование Фурье внедиагональных элементов. //
easyComp = Fourier(t, easyData, f, subSize, size, per);
comp = Fourier(t, data, f, subSize, size, per);

// Вычисление искажений решений упрощённого уравнения относительно стандартного. //
realErr[detune - 1] = realMistake(comp, easyComp, subSize);
imagErr[detune - 1] = imagMistake(comp, easyComp, subSize);

lowRealErr[detune - 1] = LowRealMistake(comp, easyComp, subSize, w, Delta, omega);
highRealErr[detune - 1] = HighRealMistake(comp, easyComp, subSize, w, Delta, omega);
lowImagErr[detune - 1] = LowImagMistake(comp, easyComp, subSize, w, Delta, omega);
highImagErr[detune - 1] = HighImagMistake(comp, easyComp, subSize, w, Delta, omega);

// Запись значения частоты излучения в массив абсцисс. //
xAxis[detune - 1] = w / Delta;

// Удаление из памяти. //
for (int i = 0; i < 2; i++) {
    delete[] rho0[i];
}
delete[] rho0;

for (int i = 0; i < 2; i++) {
    delete[] plus[i];
}
delete[] plus;

for (int i = 0; i < 2; i++) {
    delete[] dYdt[i];
}
delete[] dYdt;

for (int i = 0; i < 2; i++)
{
    for (int j = 0; j < 2; j++) delete[] Y[i][j];
}
for (int i = 0; i < 2; i++) delete[] Y[i];
delete[] Y;

for (int i = 0; i < 2; i++)
{
    for (int j = 0; j < 2; j++) delete[] easyY[i][j];
}
for (int i = 0; i < 2; i++) delete[] easyY[i];
delete[] easyY;

delete[] data;
delete[] easyData;

delete[] easyComp;
delete[] comp;
}

// Вывод времени, затраченного на общее решение задачи. //
tim = omp_get_wtime() - tim;
cout << "time_of_execution:" << tim;

// Вывод в файл. //
ofstream fout("imag_standard-easy_output.txt");

for (int i = 0; i < int(points / step); i++) {
    fout << realErr[i] << "          " << xAxis[i] << endl;
    cout << realErr[i] << "          " << xAxis[i] << endl;
}
fout << endl;
for (int i = 0; i < int(points / step); i++) {

```



```

        fout << imagErr[i] << "          " << xAxis[i] << endl;
        cout << imagErr[i] << "          " << xAxis[i] << endl;
    }
    fout << endl;
    for (int i = 0; i < int(points / step); i++) {
        fout << lowRealErr[i] << "          " << highRealErr[i] << "          " << xAxis[i] << endl;
        cout << lowRealErr[i] << "          " << highRealErr[i] << "          " << xAxis[i] << endl;
    }
    fout << endl;
    for (int i = 0; i < int(points / step); i++) {
        fout << lowImagErr[i] << "          " << highImagErr[i] << "          " << xAxis[i] << endl;
        cout << lowImagErr[i] << "          " << highImagErr[i] << "          " << xAxis[i] << endl;
    }

    fout.close();

    // Удаление из памяти полей времени, частоты и найденных зависимостей. //
    delete[] t;

    delete[] f;

    delete[] xAxis;
    delete[] realErr;
    delete[] imagErr;

    return 0;
}

// Упрощённое динамическое уравнение матрицы плотности. //
complex < double > ** easyF(double t, complex < double > ** Y, double w, double omega, double
    Delta, double Omega, int M, std::complex< double > ** dYdt) {
    double sum = 0.0;
    double L[2][2] = { {2.0, 0.0}, {0.0, 1.0} };
    for (int m = 0; m < M; m++)
        sum += cos(m * Delta * t);
    double V = (sum + 0.5) * Omega;
    for (int i = 0; i < 2; i++)
        for (int j = 0; j < 2; j++)
            dYdt[i][j] = 0.0;
    dYdt[0][0] = -1.0 * imagOne * Y[1][0] * V * exp(imagOne * (w - omega) * t) + imagOne * Y
        [0][1] * V * exp(-1.0 * imagOne * (w - omega) * t) - Y[0][0] + L[0][0];
    dYdt[0][1] = -1.0 * imagOne * Y[1][1] * V * exp(imagOne * (w - omega) * t) + imagOne * Y
        [0][0] * V * exp(imagOne * (w - omega) * t) - Y[0][1] + L[0][1];
    dYdt[1][0] = -1.0 * imagOne * Y[0][0] * V * exp(-1.0 * imagOne * (w - omega) * t) + imagOne
        * Y[1][1] * V * exp(-1.0 * imagOne * (w - omega) * t) - Y[1][0] + L[1][0];
    dYdt[1][1] = -1.0 * imagOne * Y[0][1] * V * exp(-1.0 * imagOne * (w - omega) * t) + imagOne
        * Y[1][0] * V * exp(imagOne * (w - omega) * t) - Y[1][1] + L[1][1];
    return dYdt;
}

// Стандартное динамическое уравнение матрицы плотности. //
complex < double > ** F(double t, complex < double > ** Y, double w, double omega, double Delta,
    double Omega, int M, std::complex< double > ** dYdt)
{
    double sum = 0.0;
    double L[2][2] = { {2.0, 0.0}, {0.0, 1.0} };
    for (int m = 0; m < M; m++)
        sum += cos(m * Delta * t);
    double V = (sum + 0.5) * Omega;
    for (int i = 0; i < 2; i++)
        for (int j = 0; j < 2; j++)
            dYdt[i][j] = 0.0;
    dYdt[0][0] = -1.0 * imagOne * Y[1][0] * V * (exp(imagOne * (w - omega) * t) + exp(-1.0 *
        imagOne * (w + omega) * t)) + imagOne * Y[0][1] * V * (exp(-1.0 * imagOne * (w - omega)
        * t) + exp(imagOne * (w + omega) * t)) - Y[0][0] + L[0][0];
    dYdt[0][1] = -1.0 * imagOne * Y[1][1] * V * (exp(imagOne * (w - omega) * t) + exp(-1.0 *
        imagOne * (w + omega) * t)) + imagOne * Y[0][0] * V * (exp(imagOne * (w - omega) * t) +
        exp(-1.0 * imagOne * (w + omega) * t)) - Y[0][1] + L[0][1];
    dYdt[1][0] = -1.0 * imagOne * Y[0][0] * V * (exp(-1.0 * imagOne * (w - omega) * t) + exp(
        imagOne * (w + omega) * t)) + imagOne * Y[1][1] * V * (exp(-1.0 * imagOne * (w - omega)
        * t) + exp(imagOne * (w + omega) * t)) - Y[1][0] + L[1][0];
    dYdt[1][1] = -1.0 * imagOne * Y[0][1] * V * (exp(-1.0 * imagOne * (w - omega) * t) + exp(
        imagOne * (w + omega) * t)) + imagOne * Y[1][0] * V * (exp(imagOne * (w - omega) * t) +
        exp(-1.0 * imagOne * (w + omega) * t)) - Y[1][1] + L[1][1];
}

```

```

    return dYdt;
}

// Преобразование Фурье. //
complex <double>* Fourier(double* t, complex < double >* Y, double* f, int subSize, int size,
    int per)
{
    complex <double>* comp = new complex <double>[subSize];
    double h;
    int i;
    for (i = 0; i < subSize; i++) {
        comp[i] = { 0.0, 0.0 };
        h = abs(t[size - 1] - t[size - per]) / per;
        for (int k = size - per; k < size; k++) {
            comp[i] += h * Y[k] * exp(imagOne * f[i] * 2.0 * M_PI * t[k]);
        }
    }
    return comp;
    delete[] comp;
}

// Функция нахождения искажений вещественной части спектра решения. //
double realMistake(complex <double>* comp, complex <double>* easyComp, int subSize) {
    double upSum = 0.0, lowSum = 0.0, mistake = 0.0;
    for (int i = 0; i < subSize; i++) {
        upSum += (abs(real(comp[i])) - abs(real(easyComp[i]))) * (abs(real(comp[i])) - abs(real(
            easyComp[i])));
        lowSum += real(comp[i]) * real(comp[i]);
    }
    mistake = sqrt(upSum / lowSum);
    return mistake;
}

// Функция нахождения искажений мнимой части спектра решения. //
double imagMistake(complex <double>* comp, complex <double>* easyComp, int subSize) {
    double upSum = 0.0, lowSum = 0.0, mistake = 0.0;
    for (int i = 0; i < subSize; i++) {
        upSum += (abs(imag(comp[i])) - abs(imag(easyComp[i]))) * (abs(imag(comp[i])) - abs(imag(
            easyComp[i])));
        lowSum += imag(comp[i]) * imag(comp[i]);
    }
    mistake = sqrt(upSum / lowSum);
    return mistake;
}

// Функция нахождения низкочастотной части искажений вещественной части спектра решения. //
double LowRealMistake(complex <double>* comp, complex <double>* easyComp, int subSize, double w
    , double Delta, double omega) {
    double upSum = 0.0, lowSum = 0.0, mistake = 0.0;
    for (int i = 0; i < subSize; i++) {
        if (i > ((subSize - 1) / 2 + 1 - abs(w / Delta)) && i < (subSize - 1) / 2 + 1 + abs(w /
            Delta))
            upSum += (abs(real(comp[i])) - abs(real(easyComp[i]))) * (abs(real(comp[i])) - abs(
                real(easyComp[i])));
        lowSum += real(comp[i]) * real(comp[i]);
    }
    mistake = sqrt(upSum / lowSum);
    return mistake;
}

// Функция нахождения высокочастотной части искажений вещественной части спектра решения. //
double HighRealMistake(complex <double>* comp, complex <double>* easyComp, int subSize, double
    w, double Delta, double omega){
    double upSum = 0.0, lowSum = 0.0, mistake = 0.0;
    for (int i = 0; i < subSize; i++) {
        if (i < ((subSize - 1) / 2 + 1 - abs(w / Delta)) || i > (subSize - 1) / 2 + 1 + abs(w /
            Delta))
            upSum += (abs(real(comp[i])) - abs(real(easyComp[i]))) * (abs(real(comp[i])) - abs(
                real(easyComp[i])));
        lowSum += real(comp[i]) * real(comp[i]);
    }
    mistake = sqrt(upSum / lowSum);
    return mistake;
}

// Функция нахождения низкочастотной части искажений мнимой части спектра решения. //

```

```

double LowImagMistake(complex <double>* comp, complex <double>* easyComp, int subSize, double w
, double Delta, double omega) {
double upSum = 0.0, lowSum = 0.0, mistake = 0.0;
for (int i = 0; i < subSize; i++) {
    if (i > ((subSize - 1) / 2 + 1 - abs(w / Delta)) && i < (subSize - 1) / 2 + 1 + abs(w /
Delta))
        upSum += (abs(imag(comp[i])) - abs(imag(easyComp[i]))) * (abs(imag(comp[i])) - abs(
imag(easyComp[i])));
        lowSum += imag(comp[i]) * imag(comp[i]);
}
mistake = sqrt(upSum / lowSum);
return mistake;
}

// Функция нахождения высокочастотной части искажений мнимой части спектра решения. //
double HighImagMistake(complex <double>* comp, complex <double>* easyComp, int subSize, double
w, double Delta, double omega) {
double upSum = 0.0, lowSum = 0.0, mistake = 0.0;
for (int i = 0; i < subSize; i++) {
    if (i < ((subSize - 1) / 2 + 1 - abs(w / Delta)) || i > (subSize - 1) / 2 + 1 + abs(w /
Delta))
        upSum += (abs(imag(comp[i])) - abs(imag(easyComp[i]))) * (abs(imag(comp[i])) - abs(
imag(easyComp[i])));
        lowSum += imag(comp[i]) * imag(comp[i]);
}
mistake = sqrt(upSum / lowSum);
return mistake;
}

```

Список литературы

- [1] Крылов И. Р. Матрица плотности. Нелинейная лазерная спектроскопия, лекция №4, 2020: [Электронный документ].- (https://phys.spbu.ru/content/File/Library/studentlectures/Krylov/Krylov_2020_NonLinLasSpectr-01.pdf), Дата обращения 01.06.2022.
- [2] Еремин А. С., Олемской И. В., Фирюлина О. С. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Практикум на ЭВМ по численным методам, тема 8, 2016 – 14 с.: [Электронный документ].-(http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/eremin/files/task8_2016.pdf), Дата обращения 01.06.2022.
- [3] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). — Издание 4-е. — М.: Наука, 1989. — 394 с. — («Теоретическая физика», том III).