1 Простейшие вероятностные модели

1.1 Классическая вероятностная модель

В данном курсе мы будет изучать закономерности в случайных экспериментах, т.е. таких, чей результат результат мы не можем предсказать заранее. При этом мы будет предполагать, что нам известны все возможные исходы этого эксперимента.

Определение 1 *Множество всех возможных исходов эксперимента будем называть* пространством элементарных исходов (sample space) *и обозначать всюду как* Ω. *Его элементы* $\omega \in \Omega$ *будем называть, соответственно,* элементарными исходами (outcomes)*, а его подмножества* $A \subseteq \Omega$ *—* событиями (events) [1].

Проведение эксперимента сводится к случайному выбору (реализации) одного, и только одного, из элементарных исходов ω. Мы будем говорить, что некоторое событие A произошло, если оно содержит реализованный элементарный исход ω.

Пример 1 (Подбрасывание игрального кубика) *Если в эксперименте с подбрасыванием игрального кубика нас интересует лишь количество выпавших очков, то пространство элементарных исходов можно задать как* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*, где каждый элементарный исход выражает количество выпавших очков. Примеры событий:* $A = \{2, 4, 6\}$ *— выпало четное число очков,* $B = \{5, 6\}$ *— выпало* 5 *или* 6 *очков,* $C = \{4\}$ *— выпало* 4 *очка.*

В этом разделе мы будем рассматривать исторически первое (классическое) определение вероятности:

Определение 2 (вероятность согласно классической модели) *Пусть* A *— событие для эксперимента с конечным пространством элементарных исходов* Ω. *Тогда наивная вероятность события* A *определяется как*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\textit{количество исходов благоприятствующих } A}{\textit{количество исходов в } \Omega}.$$

($|A|$ *здесь обозначает размер множества* A*).*

В англоязычной литературе такое определение часто называют *naive definition of probability*. Это связано с тем, что оно одновременно и естественно, и подразумевает пару ограничительных предположений о модели нашего эксперимента, из-за чего с легкостью может быть некорректно применено:

1. Пространство элементарных исходов Ω *конечно.*

2. Все элементарные исходы *равновозможны.*

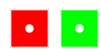
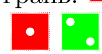
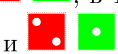
[1] Это определение корректно в контексте данной главы, но, вообще говоря, не любое подмножество можно считать событием.

> *Одним из наиболее важных обстоятельств является то, что при подсчетах всегда необходимо считать все объекты разными. Если вы подбрасываете две монетки и интересуетесь тем, что на них выпало, то не различая монеты вы получаете только три возможных исхода: решка–решка, герб–герб и решка-герб. Если положить их равновозмодными, то окажется что они все имеют вероятность* $1/3$*, что очевидно не верно.*

Задача 1 *Эксперимент состоит в подбрасывании пары игральных костей. Найдите вероятность того, что*

1. *Сумма выпавших очков окажется равна трем;*
2. *Сумма выпавших очков окажется не меньше пяти.*

Решение. Начнем с построения пространства элементарных исходов. Так как оба вопроса задачи зависят лишь от суммы очков на игральных костях, то может возникнуть желание взять в качестве набора исходов $\{2, 3, \dots, 12\}$ (наименьшее количество очков мы получаем при выпадении двух единиц). Однако тогда мы не сможем применить классическую вероятностную модель, так как представленные 12 исходов не будут равновероятны.

Действительно, представьте что одна кость раскрашена в красный, а другая в зеленый цвет. Тогда два можно получить лишь одним способом, когда на каждой кости выпадает одна фиксированная грань: , в то время как три очка можно получить двумя способами:  и .

В качестве пространства элементарных исходов будем брать все возможные пары фиксированных граней, так как нет причин полагать что одна из пар будет вероятнее другой:

$$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Очевидно, что $|\Omega| = 36$.

Как мы уже указали выше, три очка можно получить двумя способами, что даёт нам событие

$$A \coloneqq \{\text{на двух костях в сумме выпало три очка}\} = \{(1, 2), (2, 1)\},$$

откуда $\mathbb{P}(A) \coloneqq |A|/|\Omega| = 1/18$. Заметим, что вероятность двух очков в два раза меньше:

$$\mathbb{P}(\{\text{на двух костях в сумме выпало два очка}\}) = \mathbb{P}(\{(1, 1)\}) = 1/36.$$

Для нахождения вероятности события $B = \{$на двух костях в сумме выпало не меньше пяти очков$\}$ проще наоборот посчитать количество пар дающих в сумме менее пяти очков, составив соответствующее событие: $\overline{B} = \Omega \backslash B = \{$на двух костях выпало менее пяти очков$\} =$
$\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (1, 3)\}$.

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|\Omega| - |\overline{B}|}{|\Omega|} = \frac{36-6}{36} = \frac{5}{6}.$$

■

Для нас ещё не один раз окажется проще найти вероятность дополнения $\overline{B} = \Omega \backslash B$ вместо самого множества B. Оно всегда соответствует тому, что "множество B не произошло"($\omega \in \overline{B} \Leftrightarrow \omega \notin B$) всегда позволяет вырозить вероятность B через свою как

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}).$$

Все последующие задачи заключаются в выборе пространства элементарных исходов и аккуратном комбинаторном подсчете.

Обозначим через $S^{(n)}$ множество всех перестановок $1, 2, \dots, n$, $|S^{(n)}| = n!$.

Задача 2 *n книг произвольным образом расставляются на книжной полке. Две из них составляют двухтомное произведение. Какова вероятность, что его тома окажутся стоящими рядом?*

Решение. Понятно, что все перестаноки книг считаются равновероятными. Если мы перенумеруем все книги, полагая интересующим нам томам номера 1 и 2, то в качестве пространства всех элементарных исходов мы можем взять $\Omega = S^{(n)}, |\Omega| = n!$.

Рис. 1: $n(= 10)$ книг

Чтобы посчитать количество перестановок всех книг, оставляющих наши тома рядом, объединим двухтомник в один объект. Например представьте, что вы поместили их вместе в коробку. Количество перестановок оставшихся $n-2$ книг и коробки равно $|S^{(n-1)}| = (n-1)!$

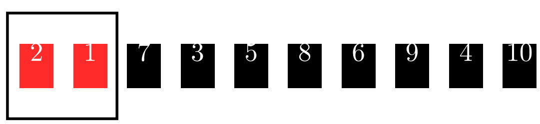


Рис. 2: $n - 1(= 9)$ объектов

Если мы также учтем, что тома могут быть расположены в коробке двумя разными способами, то получим как раз все перестановки, оставяющие их рядом. Таким образом ответ

$$\frac{2(n-1)!}{|\Omega|} = \frac{2}{n}.$$

Подумайте как изменится ответ, если нас интересует что рядом будут стоять книги k–томника ($1 \leqslant k \leqslant n$). ■

Задача 3 *Ребенок играет с десятью буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово "МАТЕМАТИКА"?*

План решения.

1. Задайте пространство элементарных исходов (считайте все карточки, даже на которых написаны одинаковые буквы, различными);
2. Рассмотрите конкретную расстоновку карточек, соответствующих слову "МАТЕМАТИКА". Карточки с какими буквами можно переставить не изменив слово?
3. Каково общее количесто перестановок таких букв?

Ответ: $\dfrac{24}{10!}$. ■

Задача 4 *У человека в кармане n ключей, из которых только один подходит к его двери. Ключи последовательно извлекаются до тех пор, пока не появится нужный ключ. Найти вероятность, что нужный ключ появится при k–ом извлечении, если*

1. *Он пробует каждый ключ лишь раз и после перекладывает его в другой карман;*
2. *Он каждый раз ложит ключ обратно в общую кучу и каждый раз может вытащить любой из ключей.*

План решения. В данной задаче основную сложность состовляет построение подходящего пространства элементарных исходов: длина последовательности вытаскиваемых ключей зависит от того, в какой момент человек вытащит нужный ключ. Например, он может сразу вытащить требуемый ключ, а может сначала попробовать три других, и совершенно не понятно почему такие исходы должны быть равновероятными (и должны ли вообще?).

Один из вариантов решить эту проблему для первого пункта задачи - заставить человека перебирать все ключи, даже после того, как он открыл дверь. Такое изменение эксперимента не изменит вероятность вытащить верный ключ именно на k–ой попытке, зато в качестве элементарных исходов можно будет взять просто все перестановки ключей, которые уже будут равновероятными.

Вов втором пункте так сделать не получится, так как при возвращении ключей назад, человек может бесконечно долго пытаться открыть дверь. Здесь эксперимент можно переформулировать как совершение человеком ровно k попыток, так как дальнейшие действия также не важны для искомой вероятности.

Довидите приведенные рассуждения до конца.

Ответы: $\frac{1}{n}$ и $\frac{(n-1)^{(n-1)}}{n^n}$. ■

Кроме перестановок мы также будем рассматривать количество способов выбрать k объектов из n. Это можно делать четырмя разными способами в зависимости от того:

1. **С возвращением или без** Можем ли мы выбрать один и тот же элемент несколько раз или нет?

2. **С учетом порядка или нет** Важен ли нам порядок, в котором мы выбирали наши k элементов или нет?

Для илююстрации разницы между ними, приведем способы извлечь 2 числа из $\{1, 2, 3\}$:

1. Без возвращения и без учета порядка: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$.

2. Без возвращения и с учетом порядка: $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$.

3. С возвращением и без учета порядка: $\{1, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 3\}$.

4. С возвращением и с учетом порядка: $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$.

На лекциях должны были выводиться слудующие формулы для нахождения количества способов выбрать k объектов из n во всех четырёх случаях:

	с возвращением	без возвращения
с учетом порядка	n^k	$A_n^k := \frac{n!}{(n-k)!}$
без учета порядка	C_{n+k-1}^k	$C_n^k := \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Задача 5 *Найти вероятность, что в случайной перестановке* $1, 2, \ldots, n$ *числа* $1, 2, 3$ *находятся в порядке возрастания (но не обязательно рядом).*

Например нам подходят: $1, 6, 4, 2, 5, 3, 7$ *или* $7, 4, 1, 2, 5, 3, 6$.

Решение. В качестве пространства элементарных исходов можно взять просто $\Omega = S^{(n)}$.

Пусть A — множество всех таких перестановок $1, 2, \ldots, n$, что $1, 2, 3$ находятся в них в порядке возрастания. Такие перестановки можно строить, например, следующим образом (пример приводится для $n = 7$):

1. Для построения перестановки будем распределять числа по n упорядоченным "коробкам": $\boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}$

2. Распологаем все числа кроме $\{1, 2, 3\}$ (всего $n-3$ чисел) по этим коробкам, выбрав для них $n-3$ мест. Это требуется делать без возвращения (нельзя положить два числа в одну коробку) и с учетом порядка (важно что, например, 4 лежит во второй коробке, а 3 в шестой, а не наоборот). То есть выбрав места $(2, 5, 7, 1)$ мы получаем расположение: $\boxed{7}\ \boxed{4}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{5}\ \boxed{?}\ \boxed{6}$

3. У нас остается ровно три пустых коробки, куда и ложим числа $1, 2, 3$ в порядке возрастания: $\boxed{7}\,\boxed{4}\,\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{5}\,\boxed{3}\,\boxed{6}$

Согластно второму пункту этого алгоритма мы можем так построить различных A_n^{n-3} перестановок.

А значит ответ

$$\mathbb{P}(A) = \frac{A_n^{n-1}}{n!} = \frac{n!}{3!n!} = \frac{1}{6}.$$

■

Задача 6 *В лифт восьмиэтажного дома на первом этаже входят* 5 *человек. Независимо отдругих каждый может выйти с равными шансами на любом этаже, начиная со второго. Какова вероятность того, что:*

1. *все выйдут на четвертом этаже;*
2. *все пятеро выйдут на одном и том же этаже;*
3. *все пятеро выйдут на разных этажах?*

План решения. Если считать всехлюдей разными (что всегда стоит делать), пространство элементарных исходов будет соответствовать способам выбрать пять этажей из доступных семи (с возвращением или без? с учетом порядка или без?). Запишите это пространство. Ответы на первые два пункта должны стать очевидны. Подумайте как посчитать количество исходов, соответствующие третьему пункту.

Ответы: $\frac{1}{7^5}$, $\frac{1}{7^4}$, $\frac{6!}{7^4 2}$.

Задача 7 *Из колоды, насчитывающей* 36 *карт, наугад извлекаются* 6 *карт. Какова вероятностьтого, что:*

1. *среди них окажется туз пик;*
2. *среди них окажется ровно один туз;*
3. *среди них окажутся ровно две бубновые карты;*
4. *среди них окажется хотя бы одна бубновая карта?*

План решения. Во всех вопросах этой задачи от нас интересуются итоговым набором карт, ничего не спрашивая о порядке, в котором мы их получали. В такой ситуации в качестве пространства элементарных исходов Ω мы можем взять все возможные способы выбрать 6 карт из 36 без учета порядка и без возвращения (почему без возвращения?), т.е. $|\Omega| = C_{36}^6$.

Чтобы найти вероятность вытащить туз пик нам необходимо посчитать количество способов выбрать 5 карт (одно место уже занял туз пик) из 35 (мы не можем вытащить ещё один туз пик): C_{36}^5. Поделив это на всё количество элементарных исходов получим:

$$\mathbb{P}(\text{среди них окажется туз пик}) = \frac{C_{35}^5}{C_{36}^6}.$$

Для подсчета количества способов выбрать ровно один туз разделим все карты на две группы — тузы (4 карты) и не тузы (32 карты), затем выбрав из них одну и пять карт соответственно:

$$\mathbb{P}(\text{среди них окажется ровно один туз}) = \frac{C_4^1 C_{32}^5}{C_{36}^6}.$$

Самостоятельно сделайте третий пункт с двумя бубновыми картами по аналогии со вторым.

В последнем пункте проще всего перейте к обратному событию, когда мы не вытащили ни одной бубновой карты, вероятность чего

$$\frac{C_{27}^6}{C_{36}^6}$$

(почему?). Тогда вероятность вытащить хотя бы одну бубновую карту:

$$1 - \frac{C_{27}^6}{C_{36}^6}.$$

■

Задача 8 *Из чисел* $1, 2, \ldots, 49$ *наугад выбираются и фиксируются* 6 *чисел, считающиеся выигрышными. Некто, жела.щий выиграть, наугад называет свои* 6 *чисел из* 49*. Какова вероятность, что среди названных им чисел окажется не менее трех выигрышных?*

Решение. Здесь нас снова не интересует порядок, в котором мы выбираем наши шесть чисел, поэтому в качестве пространства элементарных исходов Ω мы возьмем множество всех способов выбрать 6 чисел из 49, $|\Omega| = C_{49}^6$.

Для решения задачи ответим сначала на более простой вопрос: сколько есть способов вытащить эти 6 чисел так, чтобы среди них было ровно k выигрышных?

Для этого, как и прежде, достаточно разбить набор из 49 чисел на две группы: 6 выигрышных и 43 обычных, а затем посчитать количество способов выбрать из первых k, а из вторых $6 - k$ чисел: $C_6^k C_{43}^{6-k}$.

Чтобы получить ответ достаточно просуммировать количества способов для $k = 3, 4, 5, 6$ и поделить на $|\Omega|$:

$$\frac{\sum_{k=4}^{6} C_6^k C_{43}^{6-k}}{C_{49}^6}.$$

■

Задача 9 *Группа, состоящая из 3n юношей и 3-ёх девушек, делится произвольным образом на три равные по количеству подгруппы. Какова вероятность, что все девушки окажутся в разных подгруппах?*

План решения.

1. Пропустите в этой задаче явное построение пространства элементарных исходов и просто посчитайте, сколькими способами можно выбрать сначала в первую группу $n+1$ челоека из $3n+3$, а затем ещё $n+1$ во вторую из оставшихся $2n+2$. Заметьте, что последняя группа сформируется автоматически.

2. Повторите тоже самое, но теперь выбирайте в каждую группу отдельно n юношей и отдельно одну девушку.

Ответ: $\frac{6C_{3n}^{n}C_{2n}^{n}}{C_{3n+3}^{n+1}C_{2n+2}^{n+1}}$. ■

Задача 10 *n студентов произвольным образом расходятся по k аудиториям. Какова вероятность, что в первой аудитории окажется n_1 студентов, во второй n_2 студентов, ..., в k-ой аудитории n_k студентов, $n_1+\ldots+n_k=n$?*

План решения.

1. Случайное распределение означает, что каждый студент выбирает себе одну из k аудиторий. Таким образом, чтобы выбрать каждому студенту по аудитории, мы можем просто выбрать последовательность n чисел из $\{1,2,\ldots,\underset{k}{}\}$ или, что тоже самое, выбрать n чисел с возвращениями (почему?) и с учетом порядка (почему?).

2. Для нахождения студентов по аудиториям так, чтобы в каждой аудитории находилось нужное количество студентов необходимо сначала выбрать в первую n_1 из всех n студентов ($C_n^{n_1}$ способов), затем n_2 из оставшихся $n-n_1$ студентов ($C_{n-n_1}^{n_2}$ способов), затем n_3 из оставшихся $n-n_1-n_2$ и т.д.. Затем полученная формула должна упрощаться в $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$.

Ответ: $\frac{n!}{k^n n_1!n_2!\ldots n_k!}$. ■

Задача 11 *n различных шаров произвольным образом раскладываются по n ящикам. Какова вероятность, что при этом ровно один ящик окажется пустым?*

План решения.

1. Сколько всего есть способов разместить n шаров по n ящикам, если в каждый ящик умещается любое количество шаров?

2. Поймите, что любое расположение шаров, при котором ровно один ящик остается пустым подразумевает, что: ровно один ящик пустой, ровно один содержит два шара, а все остальные - по одному.

3. Сколько всего способов выбрать два особых ящика (без шаров и с двумя шарами)? Так как эти особые ящики различны, то делать это нужно с учетом порядка.

4. Используйте формулу для размещения студентов по комнатам из предыдущей задачи, но для шаров и ящиков.

Ответ: $\frac{C_n^2 n!}{n^n}$.

1.2 Геометрическая вероятностная модель

Задача 12 *Отрезок длины l ломается в произвольной точке. Какова вероятность, что длина наибольшего обломка превосходит $2l/3$?*

Задача 13 *Из отрезка $[0,1]$ наугад выбирается число. Какова вероятность, что в десятичной записи этого числа вторая цифра после запятой будет двойкой?*

Задача 14 *На отрезок единичной длины произвольным образом брошены две точки, которые делят отрезок на три части. Какова вероятность, что из этих частей можно составить треугольник?*

Задача 15 *В квадрат с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ наудачу брошена точка. Обозначим через X, Y ее координаты. Предполагается, что вероятность попадания в область, лежащую целиком внутри квадрата, зависит лишь от площади этой области и пропорциональна ей.*

Найти для $0 < t < 1$ вероятности:

1. $\mathbb{P}(|X - Y| < t)$
2. $\mathbb{P}(XY < t)$
3. $\mathbb{P}(\max(X,Y) < t)$
4. $\mathbb{P}(\min(X,Y) < t)$

Задача 16 *В квадрат с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ наудачу брошена точка. Обозначим через X, Y ее координаты. Предполагается, что вероятность попадания в область, лежащую целиком внутри квадрата, зависит лишь от площади этой области и пропорциональна ей.*

Найти для $0 < t < 1$ вероятность $\mathbb{P}(X + Y < t)$.

Задача 17 *Точка бросается наудачу в квадрат. Найти вероятность того, что точка попадет в круг, вписанный в этот квадрат.*

Задача 18 *Точка бросается наудачу в треугольник с вершинами в точках $(0,0)$, $(2,0)$ и $(0,1)$. Найти вероятность того, что*

1. *абсцисса точки окажется больше 1/2;*
2. *ордината точки окажется больше 1/2.*

Задача 19 *В прямоугольник с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(2,1)$ наудачу брошена точка. Обозначим через X, Y ее координаты. Для всех $t \in \mathbb{R}$ найти вероятность $\mathbb{P}(4X - Y < t)$.*

Задача 20 *На отрезок длины l произвольным образом брошены три точки. Пусть X, Y, Z — расстояния до этих точек от левого конца отрезка. Какова вероятность, что из отрезков с длинами X, Y и Z можно составить треугольник?*