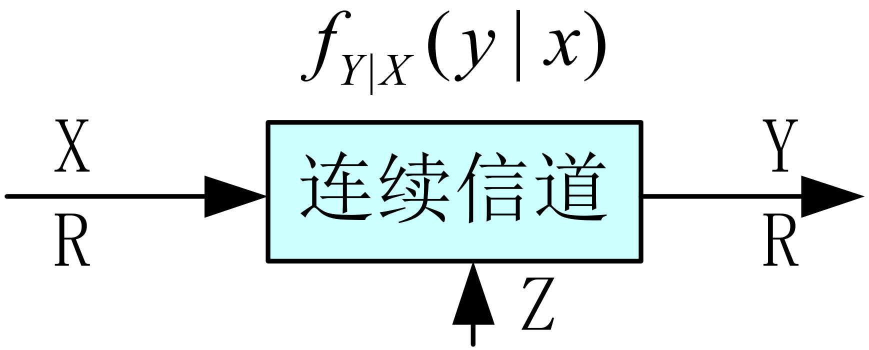
3.9 连续信道及其信道容量

连续信道：是时间离散、幅值连续信道的简称。连续信道的输入和输出都是定义在整个实域$\boldsymbol{R}$或$\boldsymbol{R}$的某个子集上的连续性随机变量。

3.9.1 连续信道的数学模型

一、单维连续信道：输入X、输出Y以及噪声Z都是取值于整个实域R的一维连续型随机变量。统计特性由转移概率密度函数$f_{Y|X}(y|x)$描述。数学模型记为：$\{X, f_{Y|X}(y|x), Y\}$



$$\int_R f_{Y|X}(y|x)dy = 1$$

二、多维连续信道：

输入X、输出Y以及噪声Z都是多维连续随机变量。

数学模型为：$\left\{\overline{X}, f_{\overline{Y}|\overline{X}}(\overline{y} \mid \overline{x}), \overline{Y}\right\}$

三、连续无记忆信道：

假设连续信道的N维输入

$\overline{X} = X_1X_2\cdots X_N$，$N$维输出$\overline{Y} = Y_1Y_2\cdots Y_N$，

转移概率密度函数满足

$$f_{\overline{Y}|\overline{X}}(\overline{y} \mid \overline{x}) = f_{\overline{Y}|\overline{X}}(y_1y_2 L y_N \mid x_1x_2 L x_N)$$

$$= \prod_{k=1}^{N} f_{Y_k|X_k}(y_k \mid x_k)$$

四、连续信道的平均互信息量*I*(*X*;*Y*)

$$I(X;Y)=\iint\limits_{R\ R} f_{XY}(x,y)\log\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)f_Y(y)}dxdy$$

$$=\iint\limits_{R\ R} f_X(x)f_{Y|X}(y|x)\log\frac{f_{Y|X}(y|x)}{f_Y(y)}dxdy$$

$$I(X;Y)=h(Y)-h(Y|X)$$

$$=h(X)-h(X|Y)$$

五、连续信道的信息传输能力：信道容量

与离散信道不同，连续信道 的输入取值区间和概率密度不能完全描述实际输入的某些性质,如输入信号的幅值受限、功率受限等。

为了适当反映这种情况，可对连续信道的输入加一个限制条件$b(X)$，而连续信道的信道容量定义为该信道的$I(X;Y)$在条件$b(X)$下关于$f_X(x)$的最大值

$$
\begin{aligned}
C &= \max_{f_X(x)} \left\{ I(X;Y); b(X) \right\} \\
&= \max_{f_X(x)} \left\{ h(Y) - h(Y \mid X); b(X) \right\}
\end{aligned}
$$

若最大值不存在，可取其最小上界（上确界）：

$$
\begin{aligned}
C &= \sup_{f_X(x)} \left\{ I(X;Y); b(X) \right\} \\
&= \sup_{f_X(x)} \left\{ h(Y) - h(Y \mid X); b(X) \right\}
\end{aligned}
$$

实际应用中，信道输入信号的平均功率 $E(X^2)$ 总是限定在一定范围之内，假设输入信号的平均功率限定在 P_S 以内，这时，对信道输入信号的限制条件可描述为

$$b(X): E(X^2) \le P_S$$

此时，连续信道在输入平均功率受限时的信道容量为：

或

$$C(P_S) = \max_{f_X(x)} \left\{ I(X;Y); E(X^2) \le P_S \right\}$$

$$C(P_S) = \sup_{f_X(x)} \left\{ I(X;Y); E(X^2) \le P_S \right\}$$