3.6.2 扩展信道的平均互信息量和信道容量

一、基本的表达式

1、扩展信道的平均互信息量

$$
\begin{aligned}
I(\overline{X};\overline{Y}) &= I(X^N, Y^N) \\
&= \sum_{h=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} P(\alpha_h, \beta_l)\log\frac{P(\alpha_h,\beta_l)}{P(\alpha_h)P(\beta_l)} \\
&= \sum_{h=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} P(\alpha_h)P(\beta_l \mid \alpha_h)\log\frac{P(\beta_l \mid \alpha_h)}{P(\beta_l)}
\end{aligned}
$$

2、平均互信息量与各类熵的关系

$$I(\overline{X};\overline{Y}) = H(\overline{X}) - H(\overline{X}|\overline{Y})$$

$$= H(\overline{Y}) - H(\overline{Y}|\overline{X})$$

定理3.8　　信源发出的N元随机变量序列

$\overline{X} = X_1 X_2 \cdots X_N$,

通过信道传送，输出N元随机变量

$\overline{\mathrm{Y}} = \mathrm{Y}_1 \mathrm{Y}_2 \cdots Y_N$。若信道无记忆，

则有$I(\overline{X};\overline{Y}) \le \sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k)$

证明:

$$H(\overline{Y}\mid\overline{X}) = -\sum_{h=1}^{r^N}\sum_{l=1}^{s^N} P(\alpha_h,\beta_l)\log P(\beta_l\mid\alpha_h)$$

$$= -\sum_{h_1,h_2,\cdots h_N,}\ \sum_{l_1,l_2,\cdots l_N} P(a_{h1},a_{h2},\cdots a_{hN,}b_{l1},b_{l2},\cdots,b_{lN})\cdot\log\left[\prod_{k=1}^{N}P(b_{l_k}\mid a_{h_k})\right]$$

$$= -\sum_{k=1}^{N}\sum_{h_k}\sum_{l_k} P(a_{h_k},b_{l_k})\log P(b_{l_k}\mid a_{h_k})$$

$$= \sum_{k=1}^{N} H(Y_k\mid X_k)$$（信道无记忆）

且$H(\overline{Y}) = H(Y_1 Y_2 \cdots Y_n)$

$$= H(Y_1) + H(Y_2 \mid Y_1) + H(Y_3 \mid Y_2 Y_1) + \cdots + H(Y_N \mid Y_{N-1} \cdots Y_2 Y_1)$$

$$\le \sum_{k=1}^{N} H(Y_k)$$

故

$$I(\overline{X};\overline{Y}) = H(\overline{Y}) - H(\overline{Y} \mid \overline{X})$$

$$\le \sum_{k=1}^{N} H(Y_k) - \sum_{k=1}^{N} H(Y_k \mid X_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k)$$

定理3.9

信源发出的N元随机变量序列

$\overline{X} = X_1 X_2 \cdots X_N$，

通过信道传送，输出N元随机变量序列

$\overline{Y} = Y_1 Y_2 \cdots Y_N$。

若信源无记忆，则有

$$I(\overline{X};\overline{Y}) \geq \sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k)$$

证明：

因信源无记忆，

故$H(\overline{X}) = H(X_1X_2\cdots X_N) = \sum_{k=1}^{N} H(X_k)$

且$H(\overline{X}\,|\,\overline{Y}) = H(X_1X_2\cdots X_N\,|\,Y_1Y_2\cdots Y_N)$

$$= H(X_1\,|\,Y_1Y_2\cdots Y_N) + H(X_2\,|\,Y_1Y_2\cdots Y_N)$$

$$+\cdots + H(X_N\,|\,Y_1Y_2\cdots Y_N)$$

$$\le \sum_{k=1}^{N} H(X_k\,|\,Y_k)$$

推论：信源发出的N元随机变量序列

$\overline{X} = X_1 X_2 \cdots X_N$，

通过信道传送，输出 N元随机变量序列

$\overline{Y} = Y_1 Y_2 \cdots Y_N$。

若信道和信源均无记忆，则有

$$I(\overline{X};\overline{Y}) = \sum_{k=1}^{N} I(X_k;Y_k)$$

信源信道均无记忆时的信道容量：

1、N元随机变量序列X_1，X_2，…，X_N中各X_k独立同分布，即所有X_k都是完全相同的随机变量，记这些相同的输入随机变量为X。

2、无记忆信源的N元序列加到无记忆信道，得到的N元输出序列Y_1，Y_2，…，Y_N中各Y_k必然是独立同分布的，所有Y_k都是完全相同的随机变量，记这些相同的随机变量为Y。

3、$I(X_1;Y_1)=I(X_2;Y_2)=\ldots=I(X_k;Y_k)=\ldots=I(X;Y)$

$\therefore$ 若信源信道均无记忆，则有$I(\overline{X};\overline{Y}) = NI(X;Y)$

离散无记忆信道**N**次扩展信道的信道容量为

$$\boldsymbol{C}^N = \max_{P_X} \boldsymbol{I}(\overline{\boldsymbol{X}};\overline{\boldsymbol{Y}}) = \max \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{I}(\boldsymbol{X}_k;\boldsymbol{Y}_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \max \boldsymbol{I}(\boldsymbol{X}_k;\boldsymbol{Y}_k) = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{C}_k$$

因信道容量是信道的固有参数，只与信道自身的统计特性有关，对同一信道，所有$\boldsymbol{C_k}$均相同，等于单符号信道容量$\boldsymbol{C}$，因此，离散无记忆信道的**N**次扩展信道的信道容量为

$$C^N = NC$$