3.9.3 一般加性噪声信道的信道容量的界

非高斯加性噪声信道的信道容量计算非常复杂，即使在平均功率受限条件下，也无法给出解析形式的解，只能对其上下限作出估计。

以下定理给出了平均功率受限条件下一般加性噪声信道的信道容量的上下界

定理3.12 对于一般的无记忆加性噪声信道，假设输入信号的平均功率受限于P_S，噪声的平均功率受限于P_N，则信道容量$C(P_S)$的上下界为

$$\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_S}{P_N}\right)\le C\left(P_S\right)\le\frac{1}{2}\log\left(\frac{P_S+P_N}{P}\right),$$

其中$P=\dfrac{1}{2\pi e}e^{2h(Z)}$是

具有微分熵$h(Z)$随机变量Z的熵功率

证明：先证明下界。仍然假设输入和噪声均为0。

$$C(P_S)=\max_{f_X(x)}\left\{I(X;Y);E(X^2)\le P_S\right\}\ge I(X_G;Y)$$

（信道容量是平均互信息量的最大值）

由定理3.11可知，$I(X_G;Y)\ge I(X_G;Y_G)$

$I(X_G;Y)\ge I(X_G;Y_G)$即为加性高斯噪声的信道容量，故

$$C\left(P_S\right)\ge I(X_G;Y_G)\ge \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_S}{P_N}\right)$$

下界得证

再证上界: 由以上分析可知，当输入信号和噪声的平均功率分别受限于P_S和P_N时，此时信道输出信号Y的平均功率受限于$P_S + P_N$，Y服从高斯分布时其熵最大，即

$$h(Y) \le \max_{f_X(x)} \left[h(Y); E(Y) \le P_S + P_N \right]$$

$$= \frac{1}{2} \log \left[2\pi e \left(P_S + P_N \right) \right]$$

于是

$$C(P_S) \le \frac{1}{2} \log \left[2\pi e \left(P_S + P_N \right) \right] - h(Z)$$

然后用熵功率将上式表示成统一形式，因为噪声Z的熵功率为：

$$P=\frac{1}{2\pi e}e^{2h(Z)}$$

则Z的熵为：

$$\therefore C(P_S)\leq\frac{1}{2}\log\left[2\pi e\left(P_S+P_N\right)\right]-\frac{1}{2}\log 2\pi eP$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{P_S+P_N}{P}$$

$$h(Z)=\frac{1}{2}\ln 2\pi eP \quad \text{奈特/符号}$$

或 $h(Z)=\frac{1}{2}\log 2\pi eP$ 比特/符号

上界得证