3.5.4 一般DMC信道容量解的充要条件

定理(一般*DMC*信道容量解的充要条件)：一般*DMC*$\{X, P_{Y|X}, Y\}$，其平均互信息量$I(X;Y)$在输入分布为$P_X^* = \{P^*(a_1), P^*(a_2), \cdots, P^*(a_r)\}$时取最大值的充要条件是

$$I(a_i;Y)\big|_{P_X=P_X^*} = C \quad 当\ P^*(a_i) > 0\ 时$$

$$I(a_i;Y)\big|_{P_X=P_X^*} \le C \quad 当\ P^*(a_i) = 0\ 时$$

式中：

$$I(a_i;Y) = \sum_{j=1}^{s} P(b_j \mid a_i) \log \frac{P(b_j \mid a_i)}{P(b_j)}$$

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} P(a_i)P(b_j \mid a_i)\log\frac{P(b_j \mid a_i)}{P(b_j)} \\ &= \sum_{i=1}^{r} P(a_i)\sum_{j=1}^{s} P(b_j \mid a_i)\log\frac{P(b_j \mid a_i)}{P(b_j)} \\ &= \sum_{i=1}^{r} P(a_i) I(a_i;Y) \end{aligned}$$

例：设信道转移矩阵如下，求新的容量和最佳输入分布。

$$[P_{Y|X}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1-\delta & \delta\\ 0 & \delta & 1-\delta\end{bmatrix}$$

解：
$$I(a_i;Y)=\sum_{j=1}^{s}P(b_j|a_i)\log\frac{P(b_j|a_i)}{P(b_j)}=C$$

$$\begin{cases}I(a_1;Y)=\log\dfrac{1}{P(b_1)}=C\\ I(a_2;Y)=(1-\delta)\log\dfrac{1-\delta}{P(b_2)}+\delta\log\dfrac{\delta}{P(b_3)}=C\\ I(a_3;Y)=\delta\log\dfrac{\delta}{P(b_2)}+(1-\delta)\log\dfrac{1-\delta}{P(b_3)}=C\\ P(b_1)+P(b_2)+P(b_3)=1\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}C=\log(1+2^{[1-h_2(\delta)]})=\log[1+2\delta^{\delta}(1-\delta)^{(1-\delta)}]\\ P(b_1)=2^{-C}=\dfrac{1}{1+2\delta^{\delta}(1-\delta)^{(1-\delta)}}\\ P(b_2)=P(b_3)=2^{-[C+h_2(\delta)]}=\dfrac{\delta^{\delta}(1-\delta)^{(1-\delta)}}{1+2\delta^{\delta}(1-\delta)^{(1-\delta)}}\end{cases}$$

$$[P_{Y|X}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1-\delta & \delta\\ 0 & \delta & 1-\delta\end{bmatrix}$$

设最佳输入分布为 $P_X^*=\{P^*(a_1),P^*(a_2),P^*(a_3)\}$

则

$$\begin{cases}P(b_1)=P^*(a_1)\\ P(b_2)=(1-\delta)P^*(a_2)+\delta P^*(a_3)\\ P(b_3)=\delta P^*(a_2)+(1-\delta)P^*(a_3)\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}P^*(a_1)=\dfrac{1}{1+2\delta^{\delta}(1-\delta)^{(1-\delta)}}\\ P^*(a_2)=P^*(a_3)=\dfrac{\delta^{\delta}(1-\delta)^{(1-\delta)}}{1+2\delta^{\delta}(1-\delta)^{(1-\delta)}}\end{cases}$$