熵的性质（2）

武汉理工大学

Information theory

and

coding

武漢理工大學

熵的性质

$$\text{DMS} \xrightarrow[\{x_1, x_2, \cdots, x_K\}]{X}$$

$$[X, P_X] = [x_k, p_k \mid k = 1, 2, \cdots, K]$$

$$\sum_{k=1}^{K} p_k = 1$$

熵的性质

6 渐化性：

$$H(p_1, p_2, p_3 \cdots, p_K)$$

$$= H(p_1 + p_2, p_3 \cdots, p_K) + (p_1 + p_2) H\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right)$$

$$0 \le p_k \le 1 \quad k = 1, 2, \cdots, K \quad \sum_{k=1}^{K} p_k = 1 \quad p_1 + p_2 > 0$$

说明：概率分布越均匀，熵越大。

证明方法：利用熵公式，将右式展开再合并 。

熵的性质

7 凸状性：

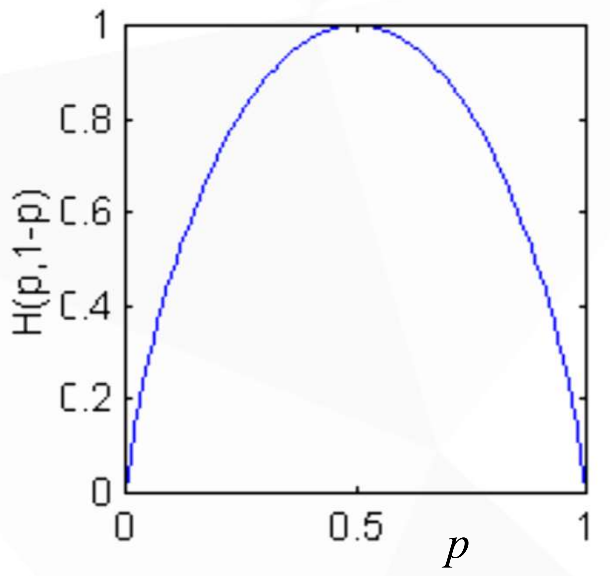
$H(p_1, p_2, \cdots, p_M)$ 是上凸函数。

例 （二元信源的熵）设二元信源的概率空间为

$$\begin{bmatrix} X \\ P_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

则熵为

$$\begin{aligned} H(X) &= H(p,\ 1-p) \\ &= -p\log p - (1-p)\log(1-p) \end{aligned}$$

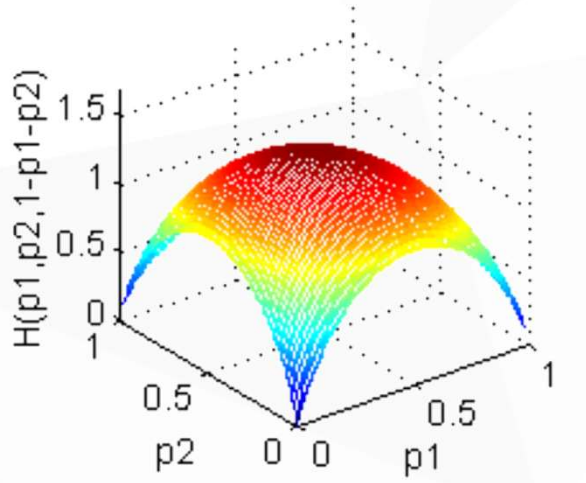


二元熵图示

例 三元熵

设三元信源为:

$$\begin{bmatrix} X \\ P_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & 1-p_1-p_2 \end{bmatrix}$$



三元熵图示

根据熵公式，有

$$H(p_1, p_2\ , 1-p_1-p_2) = -p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - (1-p_1-p_2) \log(1-p_1-p_2)$$

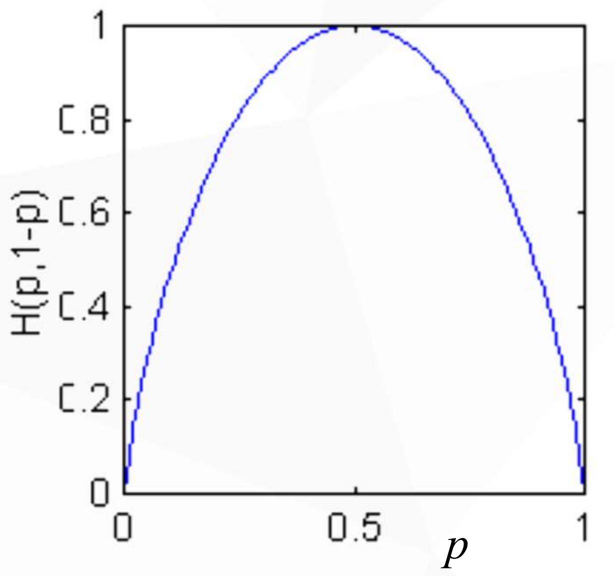
熵的性质

8 极值性：

$$H(p_1, p_2, \cdots, p_K) \le H\left(\frac{1}{K}, \cdots, \frac{1}{K}\right) = \log K$$

记等概率分布为 $$P_0 = \left\{\frac{1}{K}, \cdots, \frac{1}{K}\right\}$$

则 $$H(P_0) = \log K$$



二元熵图示

K=2时，熵的图形

信息论不等式

定理2.1 （信息论不等式）对于任意实数 $z > 0$ 有不等式：

$$\ln z \le z - 1$$

当且仅当 $z = 1$ 时，等式成立。

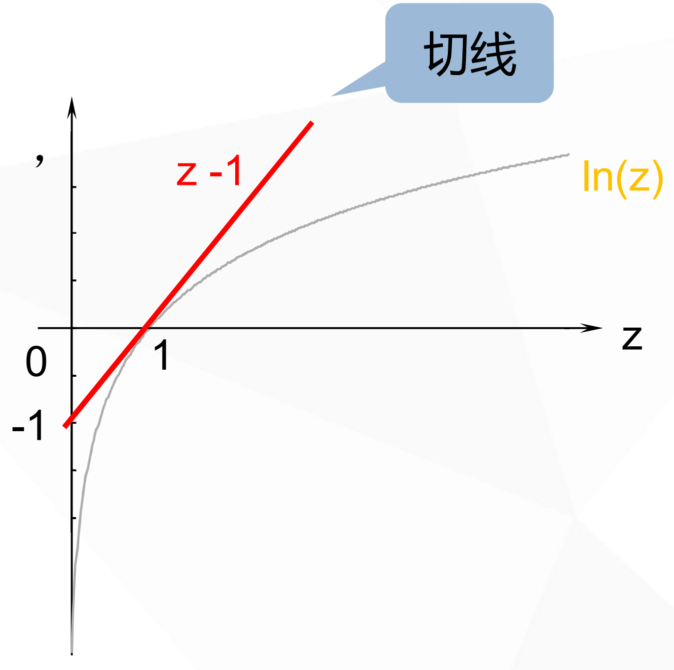


图 示

香农不等式

$$-\sum_{k=1}^{K} p_k \log p_k \le -\sum_{k=1}^{K} p_k \log q_k$$ 当且仅当 $p_k = q_k$ 时等式成立。

$$0 \le p_k \le 1,\ 0 \le q_k \le 1,\ \sum_{k=1}^{K} p_k = 1,\ \sum_{k=1}^{K} q_k = 1,\ k = 1,2,\cdots,K$$

证明：

$$-\sum_{k=1}^{K} p_k \log p_k - \left(-\sum_{k=1}^{K} p_k \log q_k\right) = \sum_{k=1}^{K} p_k \log \frac{q_k}{p_k}$$

$$\le \log e \sum_{k=1}^{K} p_k \left(\frac{q_k}{p_k} - 1\right)$$

$$= (\log e)\left(\sum_{k=1}^{K} q_k - \sum_{k=1}^{K} p_k\right)$$

$$= 0$$

$$\ln z \le z - 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\log z}{\log e} \le z - 1$$

$$\Downarrow$$

$$\log z \le (z-1)\log e$$

“极值性”证明

极值性：$$H(p_1,p_2,\cdots,p_K)\le H\left(\frac{1}{K},\cdots,\frac{1}{K}\right)=\log K$$

香农不等式：$$-\sum_{k=1}^{K}p_k\log p_k\le-\sum_{k=1}^{K}p_k\log q_k$$

在香农不等式中，令 $q_k=1/K$ ，则有

$$-\sum_{k=1}^{K}p_k\log p_k\le-\sum_{k=1}^{K}p_k\log\frac{1}{K}=-\left(\log\frac{1}{K}\right)\left(\sum_{k=1}^{K}p_k\right)=\log K$$

$H(p_1,p_2,\cdots,p_K)$

感谢观看！

Information theory

and

coding

武漢理工大學