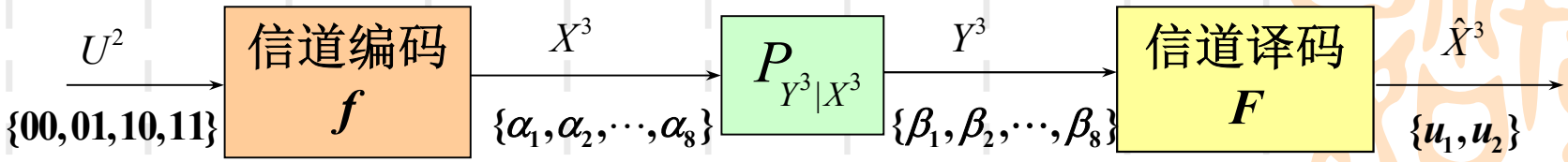
2、对符号串编码



$$u_1u_1=00 \xrightarrow{f_1} \alpha_1=000,\quad \alpha_2=001$$
$$u_1u_2=01 \xrightarrow{f_1} \alpha_3=010,\quad \alpha_4=011$$
$$u_2u_1=10 \xrightarrow{f_1} \alpha_5=100,\quad \alpha_6=101$$
$$u_2u_2=11 \xrightarrow{f_1} \alpha_7=110,\quad \alpha_8=111$$

$$\beta_1=000,\ \beta_2=001 \xrightarrow{F} \alpha_1=000$$
$$\beta_3=010,\ \beta_4=011 \xrightarrow{F} \alpha_3=010$$
$$\beta_5=100,\ \beta_6=101 \xrightarrow{F} \alpha_5=100$$
$$\beta_7=110,\ \beta_8=111 \xrightarrow{F} \alpha_7=110$$

结论：

增多消息个数M会提高R，但会使P_e增大。

$$[P_{Y^3|X^3}]=\begin{array}{c} \begin{matrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8\end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \underline{\bar{p}^3} & \underline{\bar{p}^2p} & \underline{\bar{p}^2p} & \underline{\bar{p}p^2} & \underline{\bar{p}^2p} & \underline{\bar{p}p^2} & \underline{\bar{p}p^2} & \underline{p^3} \\ \underline{\bar{p}^2p} & \underline{\bar{p}p^2} & \underline{\bar{p}^3} & \underline{\bar{p}^2p} & \underline{\bar{p}p^2} & \underline{p^3} & \underline{\bar{p}^2p} & \underline{\bar{p}p^2} \\ \underline{\bar{p}^2p} & \underline{\bar{p}p^2} & \underline{\bar{p}p^2} & \underline{p^3} & \underline{\bar{p}^3} & \underline{\bar{p}^2p} & \underline{\bar{p}^2p} & \underline{\bar{p}p^2} \\ \underline{\bar{p}p^2} & \underline{p^3} & \underline{\bar{p}^2p} & \underline{\bar{p}p^2} & \underline{\bar{p}^2p} & \underline{\bar{p}p^2} & \underline{\bar{p}^3} & \underline{\bar{p}^2p} \end{bmatrix} \begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_3\\ \alpha_5\\ \alpha_7\end{matrix} \end{array}$$

$$F(\beta_1)=\alpha_1 \quad F(\beta_2)=\alpha_1 \quad F(\beta_3)=\alpha_3 \quad F(\beta_4)=\alpha_3$$
$$F(\beta_5)=\alpha_5 \quad F(\beta_6)=\alpha_5 \quad F(\beta_7)=\alpha_7 \quad F(\beta_8)=\alpha_7$$

$$P_e=1-\frac{1}{M}\sum_{l=1}^{8}P\left[\beta_l \mid F(\beta_l)\right]$$
$$=1-\frac{1}{4}(4\bar{p}^3+4\bar{p}^2p)=1.99\times10^{-2}$$
$$R=\frac{\log M}{N}=\frac{\log 4}{3}=\frac{2}{3}\ \text{bit/符号}$$

信道编码的有关结论及启示

由前面的例子得出的结论：

- 增加“重复”次数N（增大码长），会使P_e下降（好），但R也跟着下降（不好）。
- 增多消息个数M会提高R（好），但会使P_e增大（不好）。

启示：

增大码长N，同时适当增多消息个数M，有可能使平均差错率降低到要求的范围以内，而又能使信息率不降低或降低不多。

（N，K）分组码

取$M=4$、$N=5$：

$$s_1=00 \quad s_2=01 \quad s_3=10 \quad s_4=11$$

$$f: s_i = m_{i_1} m_{i_2} \rightarrow \alpha_i = a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} a_{i_4} a_{i_5} \qquad i=1,2,3,4$$

$$f: \begin{cases} a_{i_1} = m_{i_1} \\ a_{i_2} = m_{i_2} \\ a_{i_3} = m_{i_1} \oplus m_{i_2} \\ a_{i_4} = m_{i_1} \\ a_{i_5} = m_{i_1} \oplus m_{i_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 00 \xrightarrow{f} 00000 \\ 01 \xrightarrow{f} 01101 \\ 10 \xrightarrow{f} 10111 \\ 11 \xrightarrow{f} 11010 \end{cases}$$

5次扩展信道

$$\begin{cases} \begin{matrix} 00000 & 00001 \\ 00010 & 00100 \\ 01000 & 10000 \\ 10001 & 00011 \end{matrix} \xrightarrow{F} 00000 \\ \begin{matrix} 01101 & 01100 \\ 01111 & 01001 \\ 00101 & 11101 \\ 11100 & 01110 \end{matrix} \xrightarrow{F} 01101 \\ \begin{matrix} 10111 & 10110 \\ 10101 & 10011 \\ 11111 & 00111 \\ 00110 & 10100 \end{matrix} \xrightarrow{F} 10111 \\ \begin{matrix} 11010 & 11011 \\ 11000 & 11110 \\ 10010 & 01010 \\ 01011 & 11001 \end{matrix} \xrightarrow{F} 11010 \end{cases}$$

$$R = \frac{\log 4}{5} = \frac{2}{5} \text{ bit/符号}$$

$$P_e = 1 - \frac{1}{4}(4\bar{p}^5 + 20\bar{p}^4 p + 8\bar{p}^3 p^2) \approx 7.86 \times 10^{-4}$$

（5，2）分组码：

码长N为5，前2个码元是信息位(K)，后3个码元是校验位

$M=4$、$N=3$：

$R = 2/3$ bit/符号

$P_e = 1.99 \times 10^{-2}$