第6章　限失真信源编码

问题提出

- 信息编码分类：

  无失真编码：码字与信源符号（序列）一一对应。保熵编码

  有失真编码：在信源编码时引入一定失真。

- 引入有失真编码的原因：

  （1）保熵编码并非总是必需的。

  （2）保熵编码并非总是可能的。

  （3）降低信息率有利于传输和处理。

- 限失真编码

  在允许的失真范围内把编码后的信息率压缩到最小。

- 信道的信息率R：信道的平均互信息量：

$$R = I(U;V) = H(U) - H(U|V) = H(V) - H(V|U) \quad \text{bit/符号}$$

各节内容

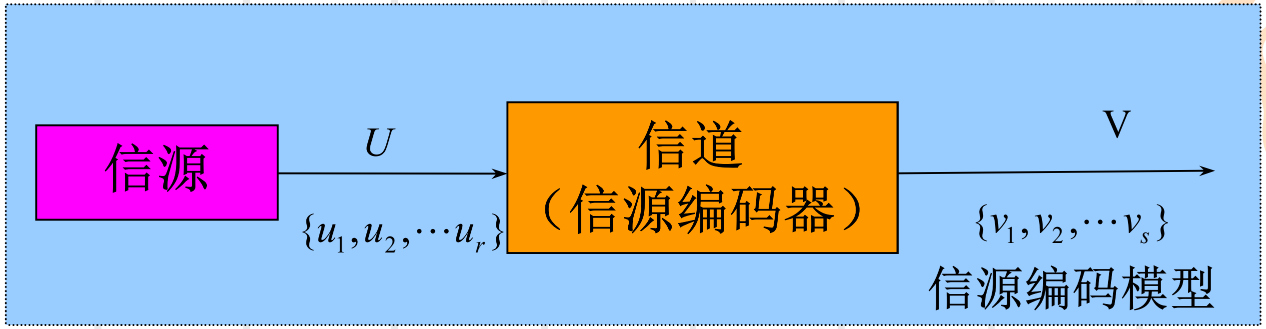
6.1 失真测度

6.2 信息率失真函数及其性质

6.3 限失真信源编码定理

6.4 信息率失真函数的计算

6.1 失真测度



- 无失真编码

$$H(U\mid V)=H(\mathrm{V}\mid \mathrm{U})=0$$

$$\mathrm{R}=\mathrm{I}(\mathrm{U};\mathrm{V})=H(U)=H(V)$$

- 限失真编码 ？

1、失真度

- 设信源编码器输入为$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_r\}$，编码后的输出信源为 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_s\}$
- 失真度（或失真函数）：编码器输入符号u_i与输出符号v_j之间的误差或失真，用非负实值函数$d(u_i,v_j)$来描述。
- 常用的失真度有：

  误码失真：

$$d(u_i,v_j)=\begin{cases}0, & u_i=v_j\\ 1, & u_i\neq v_j\end{cases}$$

  均方失真：

$$d(u_i,v_j)=(u_i-v_j)^2$$

  绝对失真：

$$d(u_i,v_j)=|u_i-v_j|$$

  相对失真：

$$d(u_i,v_j)=|u_i-v_j|/|u_i|$$

2、失真矩阵

- 将 $r \times s$ 个 $d(u_i,v_j)$ 排成矩阵形式，称为失真矩阵，记为$[d]$：

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \quad\quad\quad v_1 & \quad\quad v_2 & \quad \cdots & \quad v_s \end{array} \\
[d]=\begin{bmatrix} d(u_1,v_1) & d(u_1,v_2) & \cdots & d(u_1,v_s) \\ d(u_2,v_1) & d(u_2,v_2) & \cdots & d(u_2,v_s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d(u_r,v_1) & d(u_r,v_2) & \cdots & d(u_r,v_s) \end{bmatrix} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{array}
\end{array}
$$

- 例 设信源 U 取值于$\{0,1\}$，编码器输出取值于$\{0,1,2\}$，规定失真度函数为

$$d(0,0)=d(1,1)=0$$
$$d(0,1)=d(1,0)=1$$
$$d(0,2)=d(1,2)=0.5$$

则失真矩阵为

$$[d]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

3、平均失真度

- 对所有符号的失真度$\{d(u_i,v_j)\}_{i,j}$取统计平均，称为平均失真度或平均失真，记为$\bar{D}$：

$$\bar{D}=E\{d(u_i,v_j)\}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}P(u_i,v_j)d(u_i,v_j)$$
$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}P(u_i)P(v_j|u_i)d(u_i,v_j)$$

4、符号序列的平均失真度和平均失真度

- 对于符号序列，可将失真度或失真函数的定义可推广到矢量形式。设编码器输入α_h和输出β_l均为N长符号序列，即

$$\alpha_h = u_{h_1} u_{h_2} \cdots u_{h_N} \qquad h = 1,2,\cdots,r^N$$

$$\beta_l = v_{l_1} v_{l_2} \cdots v_{l_N} \qquad l = 1,2,\cdots,s^N$$

则 N长符号序列的失真度$d(\alpha_h,\beta_l)$可定义为，

$$d(\alpha_h,\beta_l) = \sum_{k=1}^{N} d(u_{h_k}, v_{l_k})$$

式中 $d(u_{h_k}, v_{l_k})$是输入/输出序列第k位符号的失真度。

4、符号序列的平均失真度和平均失真度（续）

- N 长符序列的平均失真度为

$$\bar{D}(N) = E\left\{d(\alpha_h,\beta_l)\right\} = \sum_{h=1}^{r^N}\sum_{l=1}^{s^N} P(\alpha_h,\beta_l)d(\alpha_h,\beta_l)$$

$$= \sum_{h=1}^{r^N}\sum_{l=1}^{s^N} P(\alpha_h,\beta_l)\sum_{k=1}^{N} d(u_{h_k},v_{l_k})$$

当信源和信道（编码器）均无记忆时，

$$\bar{D}(N) = \sum_{k=1}^{N} E\left\{d(u_{h_k},v_{l_k})\right\} = \sum_{k=1}^{N}\bar{D}_k = N\bar{D}$$

其中 $\bar{D}_1 = \bar{D}_2 = \cdots = \bar{D}_N = \bar{D}$ 是单符号的平均失真度。