## 3.9.2 加性高斯噪声信道的信道容量

求解一般信道的信道容量非常困难，往往只能得出数值解。只有一些特殊的连续信道如加性噪声信道，才能推出简明的信道容量表达式。幸运的是，实际使用的连续信道大部分可近似看成是加性噪声信道，研究这种信道在理论和实践两方面都有重大意义。

一、概念：信道的输入$X$、输出$Y$以及噪声$Z$ 3个随机变量之间满足 $Y$=$X$+$Z$ 且输入$X$与干扰$Z$无关，则称该信道为加性噪声信道。

二、加性噪声信道的转移概率密度函数：

$$f_{Y|X}(y \mid x) = f(y - x) = f_Z(z)$$

给定$x$，出现$y$的概率取决于$z$（详细推导参见文献）

上式说明，转移概率密度是由噪声引起的，加性噪声信道的转移概率密度函数等于噪声的概率密度函数

## 三、加性高斯噪声信道的容量

### 1、噪声分布密度

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-(z-\mu)^2/2\sigma^2}$$

### 2、转移概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=f_Z=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-(y-x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

## 3、条件熵（噪声熵）

$$h(Y \mid X) = \int_R \int_R f_X(x) f_{Y|X}(y \mid x) \log \frac{1}{f_{Y|X}(y \mid x)} dxdy$$

$$= \int_R \int_R f_X(x) f_Z(y-x) \log \frac{1}{f_Z(y-x)} dxdy$$

$$= \int_R \int_R f_X(x) f_Z(z) \log \frac{1}{f_Z(z)} dxdz$$

$$= h(Z)$$

## 4、平均互信息量

$$I(X;Y) = h(Y) - h(Y \mid X) = h(Y) - h(Z)$$

## 5、信道容量

$$C(P_S) = \max_{f_X(x)} \left\{ h(Y); E(X^2) \le P_S \right\} - h(Z)$$

或
$$C(P_S) = \sup_{f_X(x)} \left\{ h(Y); E(X^2) \le P_S \right\} - h(Z)$$

把对***I*****(*X*;*Y*)**求最大值的问题转化为

对***h*****(*Y*)**求最大值的问题

## 6、噪声Z的微分熵

设加性噪声Z是均值为0，方差为$\sigma_z^2$的高斯分布，

即概率密度函数为 $$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z}e^{-z^2/2\sigma_z^2}$$

假设**Z**的均值为**0**并不失一般性。因为若***Z'***是均值为***μ***的随机变量，通过坐标变换***Z=Z'-μ***,则***Z***是均值为**0**的随机变量，并且这种特殊的坐标变换不改变随机变量的熵

**Z**的平均功率：$\sigma_z^2=E\left[Z^2\right]-E^2[Z]=E\left[Z^2\right]=P_N$

***Z***的概率密度函数可写成：$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi P_N}}e^{-z^2/2P_N}$

***Z***的微分熵***h*(*Z*)**：

$$h(Z)=\frac{1}{2}\log(2\pi eP_N)$$

信道容量：

$$C(P_S)=\max_{f_X(x)}\left\{h(Y);E(X^2)\le P_S\right\}-\frac{1}{2}\log(2\pi eP_N)$$

问题的关键转化为求信道输出熵关于概率密度 ***$f_X$*(*x*)**的最大值**,**可以分**3**步来求信道容量

（1）与对待噪声$Z$的方式一样，设信道输入$X$的均值为0，则信道输出$Y$的均值为：

$$E(Y)=E(X+Z)=E(X)+E(Z)=0$$

平均功率为

$$E(Y^2)=E\left[\left(X+Z\right)^2\right]=E\left[X^2\right]+E\left[Z^2\right]+2E[XZ]$$

$$=E\left[X^2\right]+E\left[Z^2\right]=P_S+P_N\left(\text{X、Z统计独立}\right)$$

说明对于加性噪声信道，当输入$X$和噪声$Z$的均值都是0、平均功率受限与$P_S$和$P_N$时，输出$Y$的均值也为0，其平均功率受限于$P_S$＋$P_N$

（**2**）根据连续最大熵的已知结论，平均功率受限时，随机变量只有服从高斯分布才会使熵达到最大。现在，信道输出$\boldsymbol{Y}$的均值为**0**，平均功率受限于$\boldsymbol{P_S}+\boldsymbol{P_N}$，因此，只有$\boldsymbol{Y}$服从高斯分布时，其熵最大。

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(P_S+P_N)}}e^{-y^2/2(P_S+P_N)}$$

最佳输入分布：因为$\boldsymbol{Y}$和$\boldsymbol{Z}$均服从高斯分布，而$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z}$，所以$\boldsymbol{X}$也服从高斯分布，而$\boldsymbol{X}$的均值为**0**，平均功率为$\boldsymbol{P_S}$，故最佳输入分布为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi P_S}}e^{-x^2/2P_S}$$

（3）求出**Y**关于输入概率密度的最大熵

$$\max_{f_X(x)}\left\{h(Y); E(X^2)\le P_S\right\}$$

$$=\max_{f_X(x)}\left\{h(Y); E(Y^2)\le P_S+P_N\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left[2\pi e\left(P_S+P_N\right)\right]$$

加性高斯噪声信道的信道容量：

$$C(P_S)=\frac{1}{2}\log\left[2\pi e\left(P_S+P_N\right)\right]-\frac{1}{2}\log(2\pi eP_N)$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_S}{P_N}\right)$$

$$C(P_S)=\frac{1}{2}\log\left[2\pi e\left(P_S+P_N\right)\right]-\frac{1}{2}\log(2\pi eP_N)$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_S}{P_N}\right)$$

说明：

（1）在加性高斯噪声信道中传输信息，高斯分布的输入信号是最有效的；

（2）信道容量与信噪比$P_S/P_N$有关。

问题：对于加性噪声信道，若输入信号服从高斯分布，那么，什么性质的噪声最有害？

**定理3.11** ——

对于无记忆加性噪声信道，假设输入信号服从高斯分布，且噪声的平均功率受限，则服从高斯分布的噪声使信道平均互信息量达到最小。

即$I(X_G;Y) \geq I(X_G;Y_G)$