自信息量的性质

武汉理工大学

Information theory

and

coding

武漢理工大學

自信息量的性质和相互关系

$$I(x_k) = -\log P(x_k)$$

$$I(x_k, y_j) = -\log P(x_k, y_j)$$

$$I(x_k|y_j) = -\log P(x_k|y_j) \quad , I(y_j|x_k) = -\log P(y_j|x_k)$$

性质

(1)概率为0时，相应的自信息量无意义。

(2)非负性。三种自信息量均非负。

自信息量的性质和相互关系

公式

$$I(x_k) = -\log P(x_k) \quad , \quad I(x_k, y_j) = -\log P(x_k, y_j)$$

$$I(x_k|y_j) = -\log P(x_k|y_j) \quad , \quad I(y_j|x_k) = -\log P(y_j|x_k)$$

联合概率、条件概率和边缘概率之间的乘法关系：

$$P(x_k, y_j) = P(x_k)P(y_j|x_k) = P(y_j)P(x_k|y_j)$$

自信息量的可加性:

$$\begin{aligned} I(x_k, y_j) &= I(x_k) + I(y_j|x_k) \\ &= I(y_j) + I(x_k|y_j) \end{aligned}$$

可加性的物理解释

自信息量的可加性:

$$I(x_k, y_j) = I(x_k) + I(y_j|x_k)$$
$$= I(y_j) + I(x_k|y_j)$$

解释一

若(x_k, y_j)为信源发出的符号串，则(x_k, y_j)的不确定性

(x_k, y_j)的联合不确定性$I(x_k, y_j)$

=符号x_k的不确定性$I(x_k)$+符号y_j在x_k出现的条件下的不确定性$I(y_j|x_k)$

=符号y_j的不确定性$I(y_j)$+符号x_k在y_j出现的条件下的不确定性$I(x_k|y_j)$

可加性的物理解释

自信息量的可加性: $I(x_k,y_j)=I(x_k)+I(y_j|x_k)$
$=I(y_j)+I(x_k|y_j)$

解释二

若针对非理想观察模型，x_k是观察输入符号，y_j是观察输出符号。观察系统的不确定性来自于：输入和随机干扰。

(x_k,y_j)的联合不确定性$I(x_k,y_j)$

=输入的不确定性$I(x_k)$+干扰引入的不确定性$I(y_j|x_k)$

=输出的不确定性$I(y_j)$+观察到y_j后还剩余的不确定性$I(x_k|y_j)$

自信息量相互关系推广

自信息量的可加性:

$$I(x_k, y_j) = I(x_k) + I(y_j|x_k)$$
$$= I(y_j) + I(x_k|y_j)$$

推广到多维空间

自信息量可加性的链公式：

$$I(u_1, u_2, \cdots, u_N) = I(u_1) + I(u_2|u_1) + I(u_3|u_1u_2) + \cdots + I(u_N|u_1u_2\cdots u_{N-1})$$

特殊情况下自信息量相互关系

公式

$$I(x_k) = -\log P(x_k) \quad , \quad I(x_k, y_j) = -\log P(x_k, y_j)$$

$$I(x_k|y_j) = -\log P(x_k|y_j) \quad , \quad I(y_j|x_k) = -\log P(y_j|x_k)$$

当 x_k 和 y_j统计独立时，概率之间的乘法关系： $P(x_k, y_j) = P(x_k)P(y_j)$

自信息量的可加性: $I(x_k, y_j) = I(x_k) + I(y_j)$

可加性的链公式： $I(u_1, u_2, \cdots, u_N) = I(u_1) + I(u_2) + \cdots + I(u_N)$

DMS符号串不确定性等于各个独立符号的不确定性之和。

特殊情况下自信息量相互关系

例题：设离散无记忆信源 $\begin{bmatrix} a_1=0 & a_2=1 & a_3=2 & a_4=3 \\ 3/8 & 1/4 & 1/4 & 1/8 \end{bmatrix}$

其发出的消息为202 120 130 213 001 203 210 110 321 010 021 032 011 223 210，求该消息的自信息量以及消息中平均每个符号的自信息量。

解

$$I(\bar{u}) = 14I(a_1) + 13I(\mathrm{a}_2) + 12I(a_3) + 6I(a_4)$$
$$= 14 \times \log\frac{8}{3} + 13 \times \log 4 + 12 \times \log 4 + 6 \times \log 8$$
$$= 87.81\ \text{bit/消息}$$

$\frac{I(\bar{u})}{45}$=87.81/45=1.95bit/符号

思考 **如果消息长度为无穷大，则该平均自信息量该如何计算?**

感谢观看！

Information theory

and

coding

武漢理工大學