互信息量及其性质

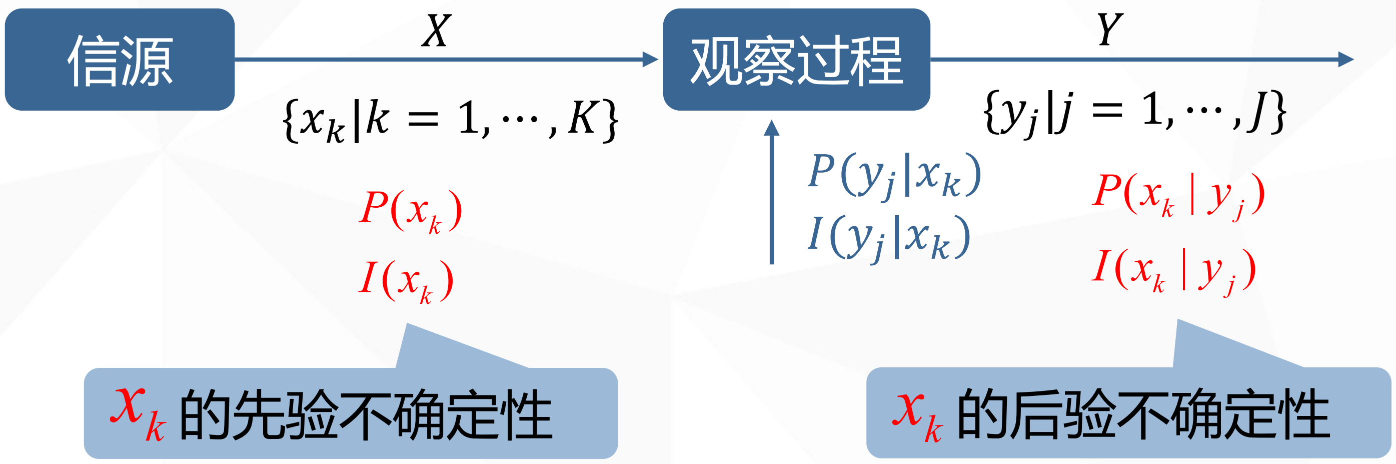
武汉理工大学

Information theory

and

coding

信息的度量方法



从 y_j 中获得的关于 x_k 的信息 $I(x_k; y_j)$

= x_k 的先验不确定性 - x_k 的后验不确定性

$$= \quad I(x_k) \quad - \quad I(x_k | y_j)$$

互信息量的概率表达式

$I(x_k;y_j)$ ：**互信息量，事件信息**

$$I(x_k;y_j)=I(x_k)-I(x_k|y_j)=[-\log P(x_k)]-[-\log P(x_k|y_j)]$$
$$=\log\frac{P(x_k|y_j)}{P(x_k)}=\log\frac{P(x_k,y_j)}{P(x_k)P(y_j)}$$

$$\Updownarrow$$

$$I(y_j;x_k)=I(y_j)-I(y_j|x_k)=[-\log P(y_j)]-[-\log P(y_j|x_k)]$$
$$=\log\frac{P(y_j|x_k)}{P(y_j)}=\log\frac{P(x_k,y_j)}{P(x_k)P(y_j)}$$

实在信息

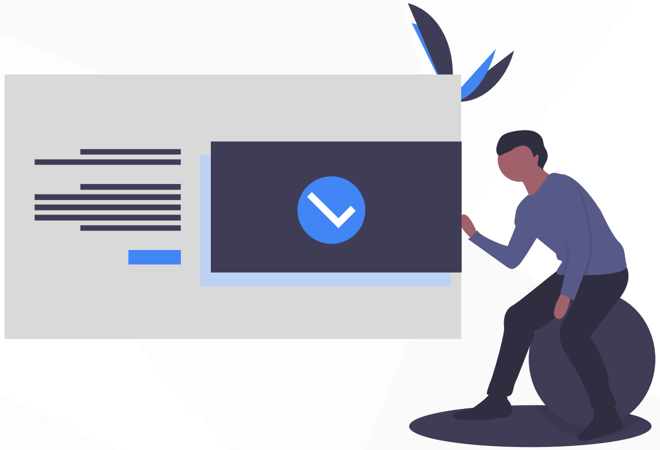
$$I(x_k;y_j) = I(x_k) - I(x_k|y_j)$$

$$I(x_k|y_j) = 0 \Rightarrow I(x_k;y_j) = I(x_k) - 0 = I(x_k)$$

从 y_j 中得到了 x_k 的全部信息

x_k 含有的实在信息

在数值上等于 $I(x_k)$



实在信息

例题 甲在一8×8的方格棋盘上随意放入一个棋子，在乙看来棋子落入的位置是不确定的。

（1）若甲告知乙棋子落入方格的行号，这时乙得到了多少信息量?

（2）若甲将棋子落入方格的行号和列号都告知乙，这时乙得到了多少信息量?

解 棋格按顺序编号 $Z=\{z_l|l=1,2,\cdots,64\}$

棋格行号 $X=\{x_k|k=1,2,\cdots,8\}$

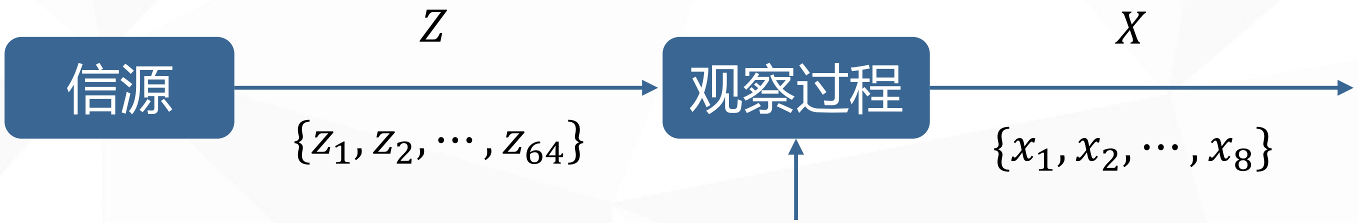
棋格列号 $Y=\{y_j|j=1,2,\cdots,8\}$

$$P(z_l)=\frac{1}{64}\qquad l=1,\cdots,64$$

$$\left.\begin{aligned}P(z_l|x_k)&=\frac{1}{8}\\P(z_l|x_ky_j)&=1\end{aligned}\right\}l=1,\cdots,64;\quad k=1,\cdots,8;\quad j=1,\cdots,8$$

实在信息

例题　　(1) 告知行号，乙得到的信息量：



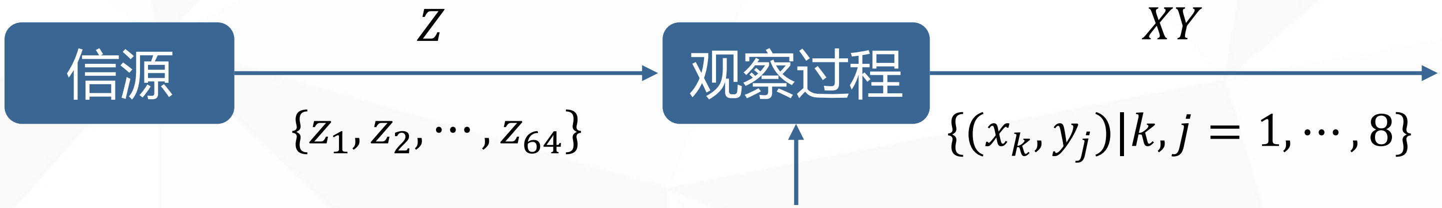
$$I(z_l; x_k) = I(z_l) - I(z_l|x_k) = -\log P(z_l) - [-\log P(z_l|x_k)]$$

$$= -\log\frac{1}{64} - [-\log\frac{1}{8}]$$

$$= 6 - 3 = 3 \quad \text{bit/符号}$$

实在信息

例题 **（2）既告知行号又告知列号，乙得到的信息量：**



$$I(z_l; x_k y_j) = I(z_l) - I(z_l | x_k y_j) \quad = -\log P(z_l) - [-\log P(z_l | x_k y_j)]$$

$$= -\log \frac{1}{64} - [-\log 1]$$

$$= 6 - 0 = 6 \quad \text{bit/符号}$$

互信息量的性质

1 **互易性:** $I(x_k;y_j)=I(y_j;x_k)$

证明:

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{y_j};\ \boldsymbol{x_k})=\mathbf{I}(\boldsymbol{y_j})-\mathbf{I}(\boldsymbol{y_j}|\boldsymbol{x_k})=\log\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y_j}|\boldsymbol{x_k})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y_j})}$$

$$=\log\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_k},\boldsymbol{y_j})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_k})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y_j})}=\log\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_k}|\boldsymbol{y_j})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_k})}=\mathbf{I}(\boldsymbol{x_k};\ \boldsymbol{y_j})$$

2 **独立变量的互信息量为0：若 x_k 、y_j 相互独立，则**

$$I(x_k;y_j)=I(y_j;x_k)=0$$

$$\mathrm{I}(x_k;\ \mathrm{y}_j)=\mathrm{I}(x_k)-\mathrm{I}(x_k|\mathrm{y}_j)=\mathrm{I}(x_k)-\mathrm{I}(x_k)=0$$

$$\mathrm{I}(\mathrm{y}_j;\ x_k)=\mathrm{I}(\mathrm{y}_j)-\mathrm{I}(\mathrm{y}_j|x_k)=\mathrm{I}(\mathrm{y}_j)-\mathrm{I}(\mathrm{y}_j)=0$$

互信息量的性质

3 互信息量可正可负

$$I(x_k;y_j)=I(x_k)-I(x_k|y_j)$$

- 若为正值，通过接收y_j判断是否发送x_k的不确定性变小，能够正常通信；
- 若为负值，意味着传输中的问题，如信道噪声、干扰等，收到y判断是否发送x_k的不确定性更大。

4 互信息量不可能大于符号的实在信息

$$I(x_k;y_j)=I(y_j;x_k)\leq\begin{cases}I(x_k)\\I(y_j)\end{cases}$$

条件互信息量

记三元联合概率空间为

$$[XYZ, P_{XYZ}] = [(x_k, y_j, z_l), P(x_k, y_j, z_l) | k \in I_X, j \in I_Y, l \in I_Z]$$

在 z_l **出现的条件之下，** x_k **与** y_j **之间的互信息量为**

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{x_k};\ \mathbf{y_j}|\boldsymbol{z_l}) = \mathbf{I}(\boldsymbol{x_k}|\boldsymbol{z_l}) - \mathbf{I}(\boldsymbol{x_k}|\mathbf{y_j}\boldsymbol{z_l})$$

$$\mathrm{I}(x_k;\ \mathrm{y}_j|z_l) = -\log P(x_k|z_l) + \log P(x_k|\mathrm{y}_j z_l)$$

$$= \log \frac{P(x_k|\mathrm{y}_j z_l)}{P(x_k|z_l)} = \log \frac{P[(x_k, \mathrm{y}_j)|z_l]}{P(x_k|z_l) P(y_j|z_l)}$$

$$= I(y_j|z_l) - I(y_j|x_k z_l)$$

$$= \mathrm{I}(\mathrm{y}_j; x_k|z_l)$$

条件互信息量

x_k与（$y_j z_l$）之间的互信息量为:

$\mathrm{I}(x_k;\ y_j z_l) = \mathrm{I}(x_k;\ y_j) + \mathrm{I}(x_k;\ z_l|y_j)$ **(可加性)**

证明:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(x_k;\ y_j z_l) &= log\frac{P(x_k|y_j z_l)}{P(x_k)} = log\frac{P(x_k|y_j z_l)P(x_k|y_j)}{P(x_k)P(x_k|y_j)} \\
&= log\frac{P(x_k|y_j)}{P(x_k)} + log\frac{P(x_k|y_j z_l)}{P(x_k|y_j)} \\
&= I(x_k;\ y_j) + I(x_k;\ z_l|y_j)
\end{aligned}$$

感谢观看！

Information theory

and

coding

武漢理工大學