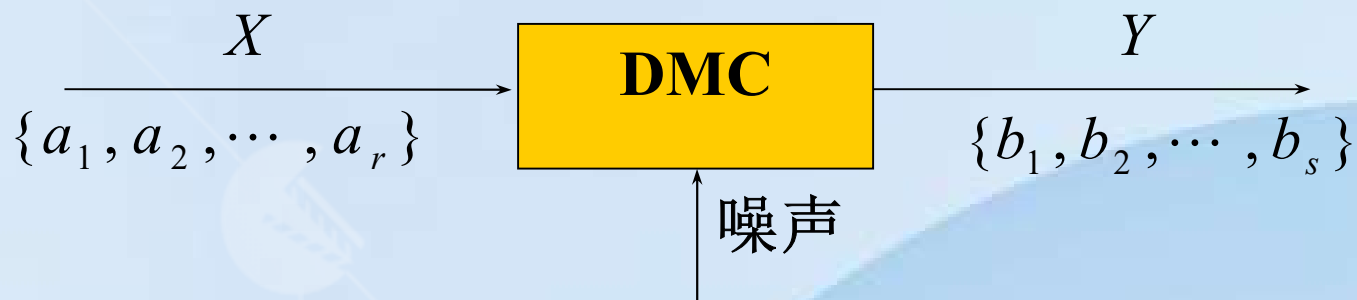


3.3 概率的计算问题



输入概率矩阵: $[P_X] = [P(a_1) \quad P(a_2) \quad \dots \quad P(a_r)]$

输出概率矩阵: $[P_Y] = [P(b_1) \quad P(b_2) \quad \dots \quad P(b_s)]$

转移概率矩阵:

$$[P_{Y|X}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} P(b_1 | a_1) & P(b_2 | a_1) & \dots & P(b_s | a_1) \\ P(b_1 | a_2) & P(b_2 | a_2) & \dots & P(b_s | a_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P(b_1 | a_r) & P(b_2 | a_r) & \dots & P(b_s | a_r) \end{bmatrix} & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{matrix} \end{matrix}$$

(1) 根据转移概率矩阵和输入概率求联合概率矩阵
根据概率的乘法公式

$$P(a_i, b_j) = P(a_i)P(b_j|a_i) = P(b_j) P(a_i|b_j)$$

可求出联合概率矩阵 $[P_{XY}]$:

$$[P_{Y|X}] = \begin{bmatrix} P(b_1 | a_1) & P(b_2 | a_1) & \cdots & P(b_s | a_1) \\ P(b_1 | a_2) & P(b_2 | a_2) & \cdots & P(b_s | a_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P(b_1 | a_r) & P(b_2 | a_r) & \cdots & P(b_s | a_r) \end{bmatrix}$$

(1) 根据转移概率矩阵和输入概率求联合概率矩阵
根据概率的乘法公式

$$P(a_i, b_j) = P(a_i)P(b_j|a_i) = P(b_j) P(a_i|b_j)$$

可求出联合概率矩阵 $[P_{XY}]$:

$$[P_{Y|X}] = \begin{bmatrix} P(b_1|a_1) & P(b_2|a_1) & \cdots & P(b_s|a_1) \\ P(b_1|a_2) & P(b_2|a_2) & \cdots & P(b_s|a_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P(b_1|a_r) & P(b_2|a_r) & \cdots & P(b_s|a_r) \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdots \times P(a_1) \\ \cdots \times P(a_2) \\ \\ \cdots \times P(a_r) \end{matrix}$$



联合概率
矩阵:

$$[P_{XY}] = \begin{bmatrix} P(a_1, b_1) & P(a_1, b_2) & \cdots & P(a_1, b_s) \\ P(a_2, b_1) & P(a_2, b_2) & \cdots & P(a_2, b_s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P(a_r, b_1) & P(a_r, b_2) & \cdots & P(a_r, b_s) \end{bmatrix}$$

(2) 根据联合概率矩阵和输出概率求后验概率矩阵

$$P(a_i, b_j) = P(b_j) P(a_i | b_j) \implies P(a_i | b_j) = P(a_i, b_j) \div P(b_j)$$

$$[P_{XY}] = \begin{bmatrix} P(a_1, b_1) & P(a_1, b_2) & \cdots & P(a_1, b_s) \\ P(a_2, b_1) & P(a_2, b_2) & \cdots & P(a_2, b_s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P(a_r, b_1) & P(a_r, b_2) & \cdots & P(a_r, b_s) \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \div P(b_1) & \div P(b_2) & & \div P(b_s) \end{array}$$



后验概率矩阵: $[P_{X|Y}] = \begin{bmatrix} P(a_1 | b_1) & P(a_1 | b_2) & \cdots & P(a_1 | b_s) \\ P(a_2 | b_1) & P(a_2 | b_2) & \cdots & P(a_2 | b_s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P(a_r | b_1) & P(a_r | b_2) & \cdots & P(a_r | b_s) \end{bmatrix}$

(3) 概率矩阵之间的关系

输入概率矩阵、输出概率矩阵、转移概率矩阵之间的关系：

$$[P_Y] = [P_X][P_{Y|X}]$$

$$[P_Y]^T = [P_{Y|X}]^T [P_X]^T$$

输入概率矩阵、输出概率矩阵、后验概率矩阵之间的关系：

$$[P_X] = [P_Y][P_{X|Y}]^T$$

$$[P_X]^T = [P_{X|Y}][P_Y]^T$$

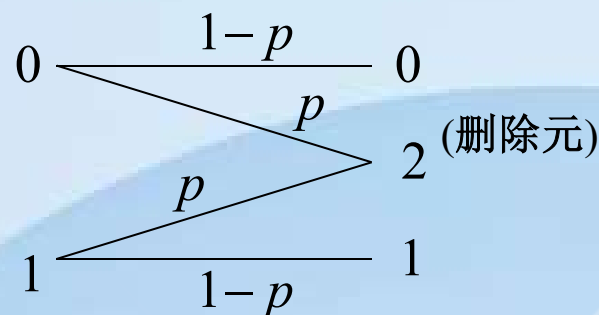
习题

例：2进制删除信道(BEC)

输入概率为： $P(a_1)=0.2$ ， $P(a_2)=0.8$ 。

转移概率 $p=0.2$ 。

求各种概率的矩阵表示。



DMC的转移矩阵如下，

$$[P_{Y|X}] = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$$

求：

- 1) 画出信道线图；
- 2) 若输入概率为 $[P_X] = [0.5 \quad 0.5]$ ，求联合概率、输出概率以及后验概率。