（2）离散对称信道的信道容量

引理：离散对称信道输入等概率分布时，输出也等概率分布。

定理（对称*DMC*的信道容量）：对于对称*DMC*，当输入等概时达到信道容量，且

$$C = \log s - H(p_1', p_2', \cdots, p_s') \qquad \text{bit/符号}$$

其中， s ：信道输出符号个数或转移矩阵的列数。

$\{p_1', p_2', \cdots, p_s'\}$ ：转移矩阵任一行的s个转移概率。

例1：$[P_{Y|X}]=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

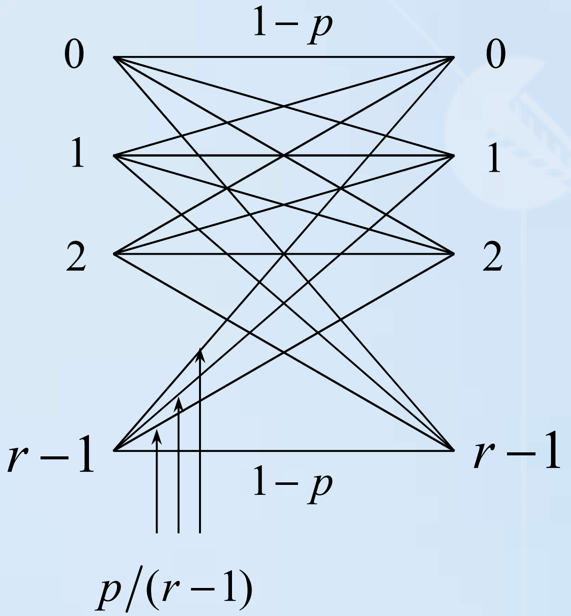
解：$$C=\max_{P_X}\{H(Y)\}-H(p_1',p_2',\cdots,p_s')$$

$$\xrightarrow{\text{引理}} C=\log s-H(p_1',p_2',\cdots,p_s')$$

$$C=\log 4-H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6})$$

$$[P_X^*]=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

例2：r进制均匀信道的信道容量



$$[P_{Y|X}]=\begin{bmatrix} \bar{p} & \frac{p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \cdots & \frac{p}{r-1} \\ \frac{p}{r-1} & \bar{p} & \frac{p}{r-1} & \cdots & \frac{p}{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \cdots & \bar{p} \end{bmatrix}$$

$$p+\bar{p}=1$$

r=2时，退化成为***BSC***。

均匀信道的转移矩阵是一个对称方阵，也是行列排列阵，因此是对称信道。

均匀信道的转移矩阵是一个对称方阵，也是行列排列阵，因此是对称信道。由定理可知，其最佳输入分布为等概率分布：

$$[P_{Y|X}]=\begin{bmatrix} \bar{p} & \frac{p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \cdots & \frac{p}{r-1} \\ \frac{p}{r-1} & \bar{p} & \frac{p}{r-1} & \cdots & \frac{p}{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \cdots & \bar{p} \end{bmatrix}$$

$$P^*(a_i)=1/r \qquad i=1,2,\cdots,r$$

信道容量：$C=\log s-H(p_1',p_2',\cdots,p_s')$

$$=\log r-H(\bar{p},\frac{p}{r-1},\cdots,\frac{p}{r-1})$$

$$=\log r+p\log\frac{p}{r-1}+(1-p)\log(1-p)$$ **bit/符号**

r=2时，***BSC*** 的信道容量：

$$C_{BSC}=1+p\log(p)+(1-p)\log(1-p)\ =1-h_2(p)$$

bit/符号

（3）离散准对称信道的信道容量

定理（准对称***DMC***的信道容量）：对于准对称***DMC***，当输入等概时达到信道容量。

如果把准对称***DMC***的[$P_{Y|X}$]分块成 n 个行列排列子阵{Q_1, …, Q_n}，再根据以上定理，可得准对称***DMC***的信道容量计算公式：

$$C=-\sum_{k=1}^{n} s_k\left(\frac{M_k}{r}\right)\log\left(\frac{M_k}{r}\right)-H(p_1',p_2',\cdots,p_s')$$

其中， r：转移矩阵[$P_{Y|X}$]的行数；

s_k：子阵Q_k的列数；

M_k：子阵Q_k的任一列元素之和；

$\{p_1',p_2',\cdots,p_s'\}$：转移矩阵[$P_{Y|X}$]任一行元素。

$$C=-\sum_{k=1}^{n} s_k\left(\frac{M_k}{r}\right)\log\left(\frac{M_k}{r}\right)-H(p_1',p_2',\cdots,p_s')$$

或 $$\boxed{C=\log r-H(p_1',p_2',\cdots,p_s')-\sum_{k=1}^{r} N_k\log M_k}$$

其中， $\boldsymbol{r}$：转移矩阵$[\boldsymbol{P}_{Y|X}]$的行数；

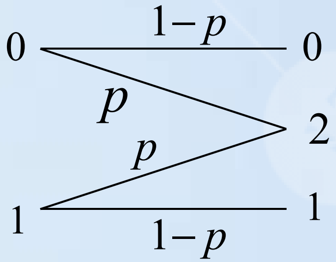
$\boldsymbol{s_k}$：子阵$\boldsymbol{Q_k}$的列数；

$\boldsymbol{M_k}$：子阵$\boldsymbol{Q_k}$的任一列元素之和；

$\boldsymbol{N_k}$：子阵$\boldsymbol{Q_k}$的任一行元素之和；

$\{p_1',p_2',\cdots,p_s'\}$：转移矩阵$[\boldsymbol{P}_{Y|X}]$任一行元素。

例：求2进制删除信道(BEC)的信道容量



$X \backslash Y$	0	2	1
0	$1-p$	p	0
1	0	p	$1-p$

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$1-p$	0	p
1	0	$1-p$	p
	Q_1		Q_2

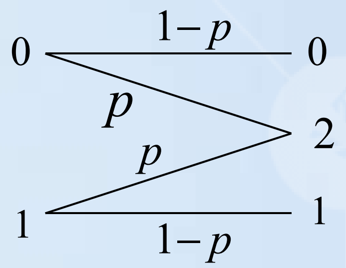
解1： $\begin{cases} r=2 \\ \{p_1', p_2', \cdots, p_s'\} : \{1-p, p, 0\} \end{cases}$ $\begin{cases} s_1 = 2 \\ M_1 = 1-p \end{cases}$ $\begin{cases} s_2 = 1 \\ M_2 = 2p \end{cases}$

$$C = -\sum_{k=1}^{n} s_k \left(\frac{M_k}{r}\right) \log\left(\frac{M_k}{r}\right) - H(p_1', p_2', \cdots, p_s')$$

$$C = -2\times\left(\frac{1-p}{2}\right)\log\left(\frac{1-p}{2}\right) - 1\times\left(\frac{2p}{2}\right)\log\left(\frac{2p}{2}\right) - H(1-p, p, 0) = 1-p$$ **bit/符号**

最佳输入分布为等概率分布： $P_X^* = \{1/2, 1/2\}$

例：求2进制删除信道(*BEC*)的信道容量



$X \backslash Y$	0	2	1
0	$1-p$	p	0
1	0	p	$1-p$

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$1-p$	0	p
1	0	$1-p$	p
	Q_1		Q_2

解2：$\begin{cases} r=2 \\ \{p_1', p_2', \cdots, p_s'\} : \{1-p, p, 0\} \end{cases}$ $\begin{cases} M_1 = 1-p \\ N_1 = 1-p \end{cases}$ $\begin{cases} M_2 = 2p \\ N_2 = p \end{cases}$

$$C = \log r - H(p_1', p_2', \cdots, p_s') - \sum_{k=1}^{n} N_k \log M_k$$

$$C = 1 - H(1-p, p, 0) - (1-p)\log(1-p) - p\log 2p = 1-p \quad \textbf{bit/符号}$$

最佳输入分布为等概率分布： $P_X^* = \{1/2, 1/2\}$