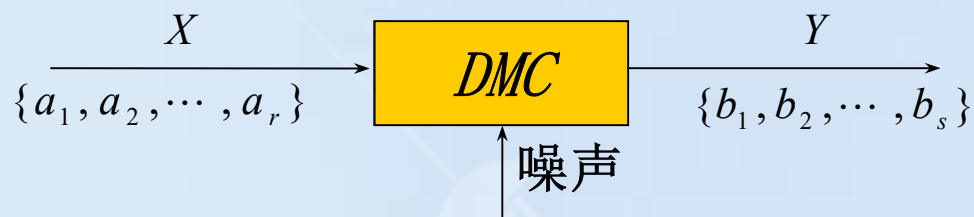


### 3.4.2 信道的散布度



$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$H(Y|X)$ : 信道的散布度或噪声熵。

确定信道：噪声熵为零的信道。

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s P(a_i, b_j) \log \frac{1}{P(b_j | a_i)} = \sum_{i=1}^r P(a_i) \sum_{j=1}^s P(b_j | a_i) \log \frac{1}{P(b_j | a_i)} \\ &= \sum_{i=1}^r P(a_i) H(Y|X = a_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(Y|a_i) &= H(Y|X = a_i) = - \sum_{j=1}^s P(b_j | a_i) \log P(b_j | a_i) \\ &= H[\underbrace{P(b_1 | a_i), P(b_2 | a_i), \dots, P(b_s | a_i)}] \end{aligned}$$

转移概率矩阵  $[P_{Y|X}]$  第  $i$  行  $s$  个转移概率

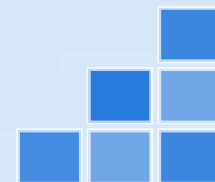
$$\begin{aligned}
 H(Y | a_i) &= H(Y | X = a_i) = - \sum_{j=1}^s P(b_j | a_i) \log P(b_j | a_i) \\
 &= H[\underbrace{P(b_1 | a_i), P(b_2 | a_i), \dots, P(b_s | a_i)}]
 \end{aligned}$$

转移概率矩阵 $[P_{Y|X}]$ 第 $i$ 行 $s$ 个转移概率

如果转移概率矩阵每行元素都组成确定性概率分布，即转移概率矩阵各行 $s$ 个转移概率中，只有一个为 $1$ ，其余均为 $0$ ，则

$$H(Y | a_i) = H(1, 0, \dots, 0) = 0 \quad \text{对所有 } i$$

$$H(Y | X) = \sum_{i=1}^r P(a_i) H(Y | a_i) = 0$$



例：已知DMC的转移矩阵，假设输入都是等概率分布，求散步度和平均互信息量。

$$[P_{Y|X}] = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.15 & 0.05 \\ 0.05 & 0.15 & 0.8 \end{bmatrix}$$

解：  $[P_Y] = [0.425 \quad 0.15 \quad 0.425]$

$$H(Y) = H(0.425, 0.15, 0.425) = 1.4598 \quad \text{bit/符号}$$

$$H(Y | a_i) = H(0.8, 0.15, 0.05) = 0.8842 \quad i = 1, 2$$

$$H(Y | X) = \sum_{i=1}^3 P(a_i) H(Y | a_i) = H(Y | a_i) = 0.8842 \quad \text{bit/符号}$$

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y | X) = 1.4598 - 0.8842 = 0.5756 \quad \text{bit/符号}$$

信道的条件熵 $H(Y|X)$ 与信道输入符号的概率分布 $P(x_i)$ 无关