3.10.2 波形信道及其信道容量

香农公式的推导

按如下步骤求出带限为B、限时为T的加性高斯白噪声信道的信道容量

（1）时间离散化：因为$Y(t)=X(t)+Z(t)$，按照采样定理，对信号和噪声都只需要$N=2BT$个采样点，因此波形信道可用 N维连续信道来近似：

$$\overline{Y} = \overline{X} + \overline{Z},$$

其中$\overline{X} = X_1 X_2 \cdots X_N$， $\overline{Y} = Y_1 Y_2 \cdots Y_N$， $\overline{Z} = Z_1 Z_2 \cdots Z_N$

（2）根据信道的无记忆特性和噪声分量的相互独立性质，上述*N*维连续信道又可看出是*N*个独立的一维连续加性噪声信道的并联

并且，

$$Y_k = X_k + Z_k, \quad k = 1, 2, \cdots, N$$

$$I\big(X(t);Y(t)\big) = I\left(\overline{X};\overline{Y}\right) \le \sum_{k=1}^{2BT} I(X_k;Y_k) \quad (\because \text{信道无记忆})$$

因为$Z(t)$服从均值为0的高斯分布，且平均功率为$P_N=N_0B$,

所以，采样所得的噪声分量Z_k也服从均值为0的高斯分布，平均功率为$P_{Zk}=N_0/2$，N个独立的一维连续加性噪声信道都是加性高斯信道。

各平均功率受限于P_{Sk}的子信道，在X_k服从均值为0的高斯分布时，达到信道容量：

$$C_k(P_{S_k}) = \max\left\{I(X_k;Y_k); E(X_k^2) \le P_{S_k}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\log(1+\frac{P_{S_k}}{P_{N_k}}) = \frac{1}{2}\log(1+\frac{P_{S_k}}{N_0/2})$$

因此有：

$$I\left(X(t);Y(t)\right)=I\left(\overline{X};\overline{Y}\right)\leq\sum_{k=1}^{2BT}C_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2BT}\log(1+\frac{P_{S_k}}{N_0/2})$$

（3）若输入$X(t)$的平均功率受限于P_s，必须适当分配各子信道输入的平均功率P_{Sk}，才能使$I(X(t);Y(t))$达到最大，这相当于形成求极值的约束条件：

$$P_S=\frac{1}{T}\int_0^T E[X^2(t)]dt=\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{2BT}E[X_k^2]=\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{2BT}P_{S_k}$$

然后在此条件下，求：

$$C_T(P_S) = \max I(\overline{X};\overline{Y}) = \max\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2BT}\log(1+\frac{P_{S_k}}{N_0/2})\right]$$

由拉各朗日乘数法可知：当所以输入分量的平均功率P_{Sk}都相等时，出现最大值。即

$$P_S = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{2BT} P_{S_k} = \frac{1}{T}2BTP_{S_k} = 2BP_{S_k}$$

$$\Rightarrow P_{S_k} = P_S / 2B$$

信道容量为（香农信道容量公式）：

$$C_T(P_S) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2BT}\log(1+\frac{P_S/2B}{N_0/2})$$

$$= BT\log\left(1+\frac{P_S}{N_0B}\right) \quad bit$$

四、香农信道容量公式的启发意义：

（1）用频带换取信噪比，即采用扩频通信

在信噪比$P_S/P_N=P_S/(N_0B)$不变的前提下，增大频带B，可增大信道容量。这种方法对空间通信有很现实的意义，因为在这种情况下频率资源相对丰富，而能源则很珍贵。

但用扩频方法来增大信道容量，其作用是有限的，因为当$B\to\infty$时，信道容量C的极限是有限的：

$$\lim_{B\to\infty} C(P_S) = \lim_{B\to\infty} B\log\left(1+\frac{P_S}{N_0 B}\right)$$

$$= \lim_{B\to\infty} \frac{1}{\ln 2} B\ln\left(1+\frac{P_S}{N_0 B}\right) \text{(换底公式)}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\ln \lim_{B\to\infty}\left[\left(1+\frac{P_S}{N_0 B}\right)^{N_0 B/P_S}\right]^{\frac{P_S}{N_0}}$$

$$= \frac{P_S}{N_0 \ln 2}\ln \lim_{B\to\infty}\left[\left(1+\frac{P_S}{N_0 B}\right)^{N_0 B/P_S}\right]$$

$$= \frac{P_S}{N_0 \ln 2} \approx 1.44\frac{P_S}{N_0} \quad bit/s$$

$$C_T(P_S)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2BT}\log(1+\frac{P_S/2B}{N_0/2})=BT\log\left(1+\frac{P_S}{N_0B}\right)\quad bit/s$$

（2）用信噪比换取频带。频带*B*不变时，增大信噪比P_S/P_N即可增大信道容量*C*。这种方法也有局限性，因为增大信噪比P_S/P_N是靠加大输入功率P_S来实现的，而

$$\lim_{P_S\to\infty}\frac{dC(P_S)}{dP_S}=\lim_{P_S\to\infty}\frac{d}{dP_S}B\log\left(1+\frac{P_S}{N_0B}\right)$$

$$=\lim_{P_S\to\infty}B\cdot\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{1+\frac{P_S}{N_0B}}\cdot\frac{1}{N_0B}=\lim_{P_S\to\infty}\frac{1}{\ln 2}\cdot\left(\frac{1}{N_0+P_S/B}\right)=0$$

可见，随着P_S的增大，$C(P_S)$的增长率逐步变小，直至为零。

这意味着，当P_S大到一定程度之后，即使P_S增加很多， $C(P_S)$的增长幅度却很小，得不偿失。