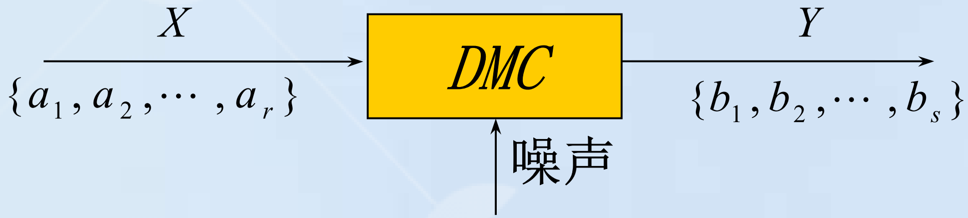
3.4.3 信道的平均互信息



$$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)$$
$$=H(Y)-H(Y|X)$$

$$I(X;Y)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}P(a_i,b_j)\log\frac{P(a_i,b_j)}{P(a_i)P(b_j)}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}P(a_i)P(b_j|a_i)\log\frac{P(b_j|a_i)}{\sum_{i=1}^{r}P(a_i)P(b_j|a_i)}$$

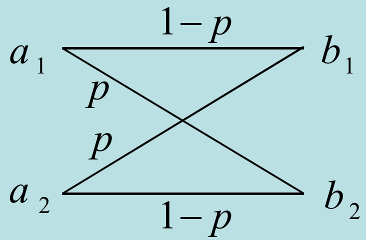
- $I(X;Y)$是输入概率$P_X=\{P(a_i)\}_i$和转移概率$P_{Y|X}=\{P(b_j|a_i)\}_{i,j}$的函数。
- 记$I(X;Y)=I(P_X, P_{Y|X})$。
- 平均互信息量的凸状性质：

  定理1 若信道给定（即给定$P_{Y|X}$），那么$I(P_X, P_{Y|X})$是输入概率P_X的上凸函数。

  定理2 若信源给定（即给定P_X），那么$I(P_X, P_{Y|X})$是转移概率$P_{Y|X}$的下凸函数。

例：平均互信息量的凸状性质

2进制对称信道（BSC）



$$[P_{Y|X}]=\begin{bmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{bmatrix}$$

令输入概率为

$$[P_X]=[q,1-q]$$

为使符号简明，令 $\bar{q}=1-q$ $\quad \bar{p}=1-p$

输出概率：$[P_Y]=[P_X][P_{Y|X}]=[q \quad \bar{q}]\begin{bmatrix}\bar{p} & p\\ p & \bar{p}\end{bmatrix}=[\bar{p}q+p\bar{q} \quad 1-\bar{p}q-p\bar{q}]$

输出熵：$H(Y)=H(\bar{p}q+p\bar{q},1-\bar{p}q-p\bar{q})$

条件熵：
$$\begin{cases}H(Y|a_1)=H(Y|a_2)=H(p,\bar{p})\\ H(Y|X)=\sum_{i=1}^{2}P(a_i)H(Y|a_i)=\sum_{i=1}^{2}P(a_i)H(p,\bar{p})=H(p,\bar{p})\end{cases}$$

平均互信息量：$I(X;Y)=H(Y)-H(Y|X)=H(\bar{p}q+p\bar{q},1-\bar{p}q-p\bar{q})-H(p,\bar{p})$

平均互信息量凸状性示意图