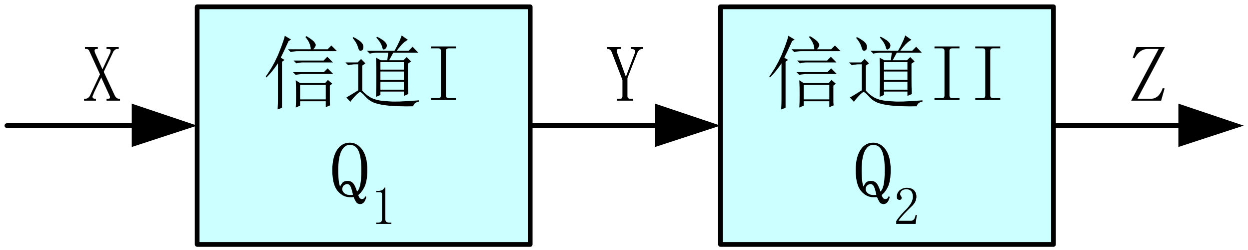
3.7 信道的组合

3.7.1 串连信道：前一信道的输出符号集与后一信道的输入符号集一致。



Q_1、Q_2为两个信道的转移矩阵

记串联信道中**3**个随机变量***X***、***Y***、***Z***的取值符号集分别为

$$A_X=\{a_1,a_2,\ldots,a_r\};\ A_Y=\{b_1,b_2,\ldots,b_s\};\ {}_Z=\{c_1,c_2,\ldots,c_t\};$$

在给定**Y**之后，**Z**的取值与**X**无关，这意味着

$$P(c_k \mid a_i b_j) = P(c_k \mid b_j)$$

对所有i, j, k　(XYZ组成一个马尔可夫链)

$$\therefore P\left(c_k \mid a_i\right) = \sum_{j=1}^{s} P(b_j c_k \mid a_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{s} P(b_j \mid a_i) P(c_k \mid a_i b_j) = \sum_{j=1}^{s} P(b_j \mid a_i) P(c_k \mid b_j)$$

这说明串联信道的转移概率矩阵是各单元信道的转移概率矩阵之积：

设N个单元信道的转移概率矩阵分布为$\boldsymbol{Q}_1$、$\boldsymbol{Q}_2$、…、$\boldsymbol{Q}_N$，

则整个串联信道的转移概率矩阵为$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{Q}_2 \cdots \boldsymbol{Q}_N = \prod_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{k}}$

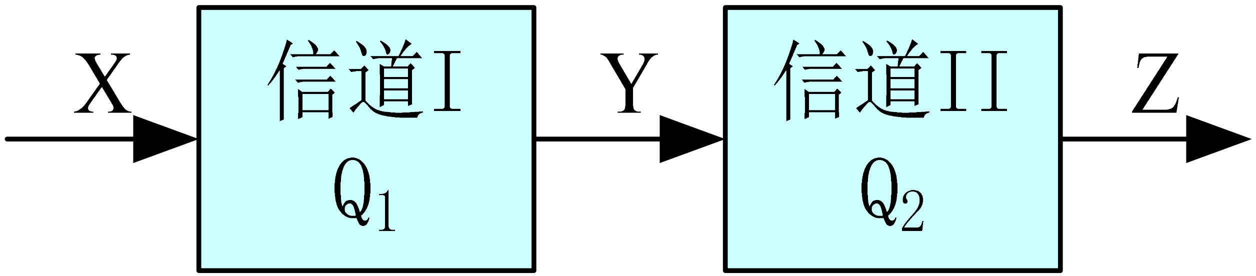
定理3.10 若随机变量XYZ组成马尔可夫链，则有

$$I(X;Z) \le I(X;Y),$$等号成立的充要条件是

$$P(a_i|b_jc_k)=P(a_i|c_k);$$

$$I(X;Z) \le I(Y;Z),$$等号成立的充要条件是

$$P(c_k|a_ib_j)=P(c_k|a_i)$$



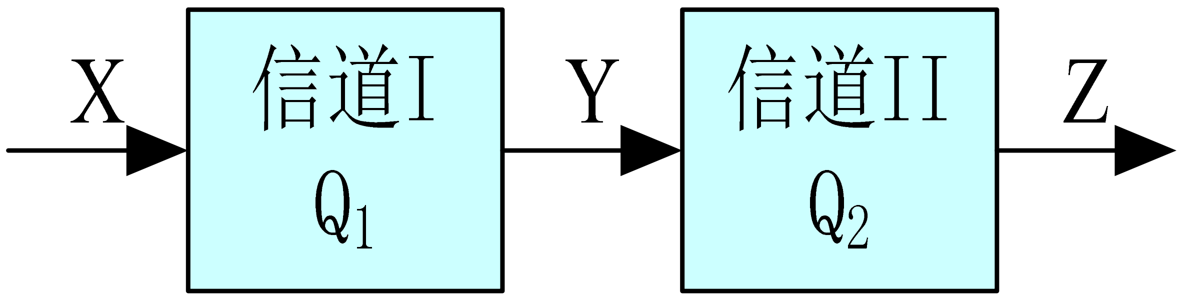
Q_1、Q_2为两个信道的转移矩阵

解释：

（1）从Z中所获得的X的信息不大于从Y中获得的X的信息，也就是说信道II对我们了解X的信息无任何帮助。

（2）信息不增原理：通过信道的信息不会增加。

（3）数据处理定理：数据经过处理之后，不会使信息增加，随着数据的不断处理，从处理后的数据中所得的原始信息会愈来愈少。



Q_1、Q_2为两个信道的转移矩阵

串联信道的信道容量：

与组成串联信道的各单元信道的信道容量之间无确切关系，必须根据整个信道的数学模型进行求解

例3.12 求**2**个相同二元对称信道（**BSC**）组成串联信道的信道容量

解：单个信道转移概率矩阵为：

$$Q_1 = Q_2 = \begin{bmatrix} \overline{p} & p \\ p & \overline{p} \end{bmatrix}$$

串联信道转移概率矩阵为

$$Q = Q_1 Q_2 = \begin{bmatrix} \overline{p} & p \\ p & \overline{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{p} & p \\ p & \overline{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2p\overline{p} & 2p\overline{p} \\ 2p\overline{p} & 1-2p\overline{p} \end{bmatrix}$$

因串联信道仍然是二元对称信道，故

$$C = \log s - H(p_1', p_2', \ldots p_s') = 1 - h_2(2p\overline{p}) \quad bit/\text{符号}$$

推广1：若是***N***个**BSC**串联，则可以得到总的转移概率矩阵为：

$$Q=\begin{bmatrix}\bar{p} & p\\ p & \bar{p}\end{bmatrix}^N=\begin{bmatrix}1-\dfrac{1-(1-2p)^N}{2} & \dfrac{1-(1-2p)^N}{2}\\ \dfrac{1-(1-2p)^N}{2} & 1-\dfrac{1-(1-2p)^N}{2}\end{bmatrix}$$

仍然为对称信道，信道容量为

$$C_{(N)}=1-h_2\left(\frac{1-(1-2p)^N}{2}\right)\quad bit/\text{符号}$$

推广2：只要信道是有噪的，及**0<*p*<1**,则

$$\lim_{N\to\infty} Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix};$$

$$\lim_{N\to\infty} C_{(N)} = 1 - h_2(\frac{1}{2}) = 0 \quad bit/\text{符号}$$

可见，有噪**BSC**的串联信道，随着串联级数的增加，整个信道的容量趋于零。（因为随着有噪串联环节的增加，串联信道的平均互信息是递减的）