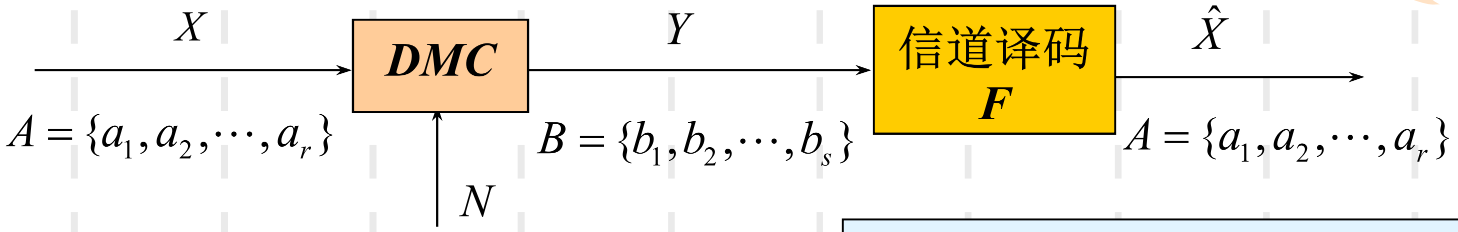
5.2　两种典型的译码规则

两种典型的译码规则：最佳译码规则、极大似然译码规则

1、最佳译码规则：平均差错率最小的译码规则。



$$P_e=\sum_{j=1}^{s}P(b_j)\left\{1-P\left[F(b_j)\mid b_j\right]\right\}$$

$$F:\begin{cases}F(b_j)=a_j^*\in A, & b_j\in B\\ P(a_j^*\mid b_j)\ge P(a_i\mid b_j), & a_i\in A\end{cases}$$

按"后验概率最大"原则定出，又称最大后验概率译码规则

$$P(b_j)P(a_j^*\mid b_j)\ge P(b_j)P(a_i\mid b_j)$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{P(a_j^*,b_j)\ge P(a_i,b_j)}$$

$$\boldsymbol{F:\begin{cases}F(b_j)=a_j^*\in A, & b_j\in B\\ P(a_j^*,b_j)\ge P(a_i,b_j), & a_i\in A\end{cases}}$$

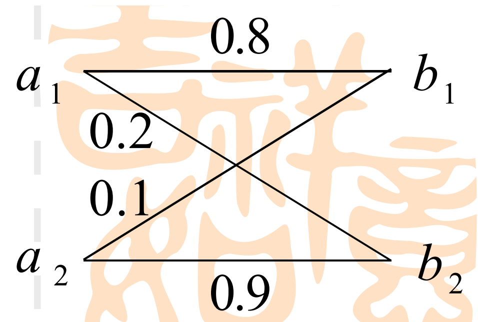
按"联合概率最大"原则定出，又称最大联合概率译码规则

- 最大联合概率译码规则使用起来更方便。
- 根据输入概率和转移概率，就可求出联合概率。
- 由联合概率算出输出概率，然后才能求出后验概率。

例：求最佳译码规则

求出最佳译码规则及平均差错率。

$P(a_1)=0.4$



$$[P_X]=\begin{bmatrix}0.4 & 0.6\end{bmatrix} \quad [P_Y]=\begin{bmatrix}0.38 & 0.62\end{bmatrix}$$

$$[P_{Y|X}]=\begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & b_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\0.1 & 0.9\end{bmatrix} \end{array}\begin{matrix}a_1\\a_2\end{matrix} \qquad [P_{XY}]=\begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & b_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix}0.32 & 0.08\\0.06 & 0.54\end{bmatrix} \end{array}\begin{matrix}a_1\\a_2\end{matrix} \qquad [P_{X|Y}]=\begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & b_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix}0.8421 & 0.1290\\0.1579 & 0.8710\end{bmatrix} \end{array}\begin{matrix}a_1\\a_2\end{matrix}$$

$$P_e(F_3)=1-\sum_{j=1}^{s}P\left[F_3(b_j),b_j\right]$$
$$=1-\left[P(a_1,b_1)+P(a_2,b_2)\right]$$
$$=1-(0.32+0.54)=0.14$$

$$F:\begin{cases}F(b_1)=a_1\\F(b_2)=a_2\end{cases} \qquad F:\begin{cases}F(b_1)=a_1\\F(b_2)=a_2\end{cases}$$

已知的结论：

$$F_1:\begin{cases}F_1(b_1)=a_1\\F_1(b_2)=a_1\end{cases} \quad F_2:\begin{cases}F_2(b_1)=a_2\\F_2(b_2)=a_2\end{cases} \quad F_3:\begin{cases}F_3(b_1)=a_1\\F_3(b_2)=a_2\end{cases} \quad F_4:\begin{cases}F_4(b_1)=a_2\\F_4(b_2)=a_1\end{cases}$$

$P_e(F_1)=0.6$ $\quad$ $P_e(F_2)=0.4$ $\quad$ $P_e(F_3)=0.14$ $\quad$ $P_e(F_4)=0.86$

2、极大似然译码规则

- 实际应用中，经常只知道信道的统计特性(转移概率)，而不知道信源的统计特性(输入概率)，这时求不出联合概率和后验概率，因此无法确定最佳译码规则。

- 既然只知道转移概率，就只能按转移概率的某种约束条件制订译码规则。
- 按最大转移概率条件来确定的译码规则，称为极大似然译码规则。

$$F:\begin{cases} F(b_j)=a_j^*\in A, & b_j\in B \\ P(b_j\,|\,a_j^*)\geq P(b_j\,|\,a_i), & a_i\in A \end{cases}$$

按“转移概率最大”原则定出，称为极大似然译码规则。

例：极大似然译码规则

已知信道转移矩阵，确定译码规则。

$$[P_{Y|X}]=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2\\0.2 & 0.3 & 0.5\\0.3 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix}$$

只已知转移概率，无法找出最佳译码规则，只能采用极大似然译码规则。

将转移矩阵各列最大的转移概率标出，重写转移矩阵如下：

$$[P_{Y|X}]=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix}\underline{0.5} & \underline{0.3} & 0.2\\0.2 & 0.3 & \underline{0.5}\\0.3 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}$$

注：无法求出平均差错率。

按“转移概率最大”原则确定极大似然译码规则：

$$F:\begin{cases}F(b_1)=a_1\\F(b_2)=a_1 \quad (\text{or } a_2,a_3)\\F(b_3)=a_2\end{cases}$$

极大似然译码规则与最佳译码规则等价的条件

极大似然译码规则

$$F:\begin{cases} F(b_j)=a_j^*\in A, & b_j\in B \\ P(b_j\,|\,a_j^*)\geq P(b_j\,|\,a_i), & a_i\in A \end{cases}$$

最佳译码规则

$$F:\begin{cases} F(b_j)=a_j^*\in A, & b_j\in B \\ P(a_j^*,b_j)\geq P(a_i,b_j), & a_i\in A \end{cases}$$

结论：信道输入等概时，极大似然译码规则与最佳译码规则等价

证明：

输入等概 $\Longrightarrow$ $P(a_j^*)=P(a_i)$

$P(b_j\,|\,a_j^*)\geq P(b_j\,|\,a_i)$

$$\Longrightarrow P(a_j^*)P(b_j\,|\,a_j^*)\geq P(a_i)P(b_j\,|\,a_i)$$

$$\Downarrow$$

$$P(a_j^*,b_j)\geq P(a_i,b_j)$$

注 （1）信道输入是近似等概的：因为信道前级有信源编码器存在。

（2）极大似然译码规则近似最佳，可以放心使用。