3.5.2 离散无噪信道的信道容量

无噪信道：无损信道、确定信道以及无损确定信道的统称。

（1）无损信道：损失熵为零的信道。
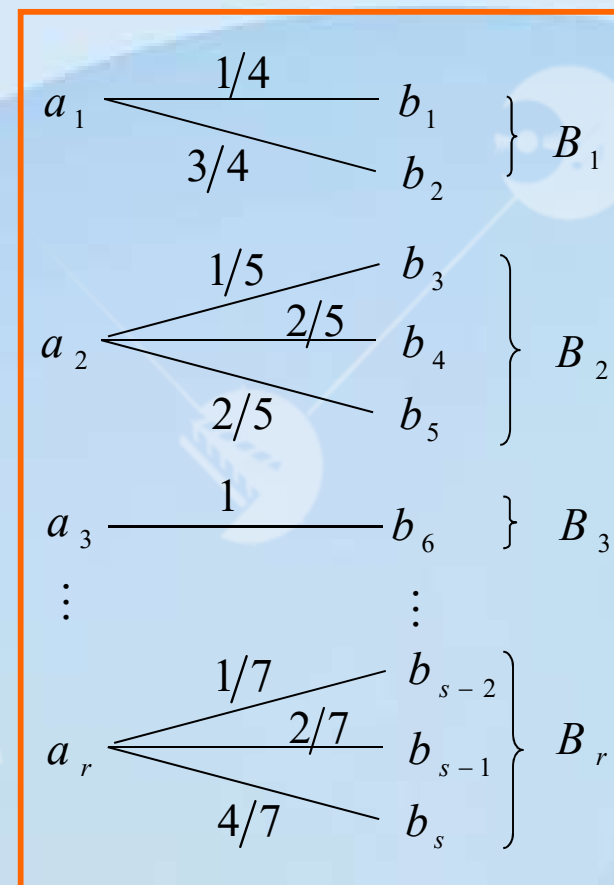
$r = 3$ 时， $[P_{Y|X}] = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

转移矩阵特征：每列只有一个非零元素。

令 $[P_X] = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}$

则

$[P_{XY}] = \begin{bmatrix} p_1/4 & 3p_1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2/5 & 2p_2/5 & 2p_2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}$

$$[P_{XY}] = \begin{bmatrix} p_1/4 & 3p_1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2/5 & 2p_2/5 & 2p_2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}$$

$$[P_Y] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4}p_1 & \dfrac{3}{4}p_1 & \dfrac{1}{5}p_2 & \dfrac{2}{5}p_2 & \dfrac{2}{5}p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

$$[P_{X|Y}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

后验概率矩阵特征：每列只有一个元素为1，其余均为0，各列后验概率均组成确定性概率分布。

$$[P_{X|Y}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

后验概率矩阵特征：每列只有一个元素为1，其余均为0，各列后验概率均组成确定性概率分布。

$$H(X \mid Y = b_j) = H[P(a_1 \mid b_j), P(a_2 \mid b_j), \cdots, P(a_r \mid b_j)] = 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \cdots, s$$

损失熵： $$H(X \mid Y) = \sum_{j=1}^{s} P(b_j) H(X \mid Y = b_j) = 0$$

无损信道的信道容量：

$$C = \max_{P_X} I(X;Y) = \max_{P_X}\{H(X) - H(X \mid Y)\} = \max_{P_X} H(X)$$

$$C = H(X) \big|_{P(a_i) = 1/r} = \log r$$

(2)确定信道：噪声熵为0的信道

当s=2时，

$$[P_{Y|X}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
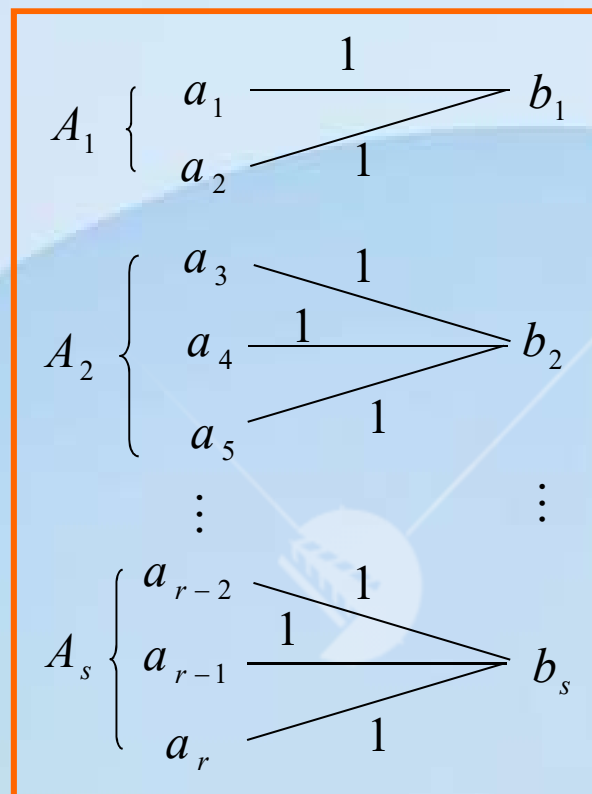
$$H(Y \mid X) = 0$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y \mid X) = H(Y)$$

$$C = \max_{P_X} I(X;Y) = \max_{P_X} H(Y)$$

至少能够找到一种输入分布使输出的取值符号达到等概率分布，甚至有多个或无穷多个输入分布满足条件。

$$C = \max_{P_X} I(X;Y) = \max_{P_X} H(Y) = H(Y)\Big|_{P(b_j)=1/s} = \log s$$
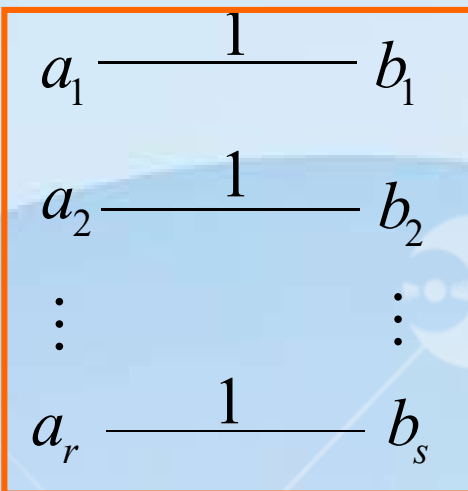
(3)无损确定信道：损失熵和噪声熵均为0的信道

转移概率矩阵
为单位阵：
$$[P_{Y|X}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

令 $[P_X] = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_r \end{bmatrix}$ 则

$a_1 \underline{\quad\quad 1 \quad\quad} b_1$

$a_2 \underline{\quad\quad 1 \quad\quad} b_2$

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

$a_r \underline{\quad\quad 1 \quad\quad} b_s$

$$[P_{XY}] = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_r \end{bmatrix}$$

$$[P_{X|Y}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P_Y] = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_r \end{bmatrix}$$

$$H(Y|X) = 0$$
$$H(X|Y) = 0$$

$$I(X;Y) = H(X) = H(Y)$$

$$C = \max_{P_X} I(X;Y) = \max_{P_X} H(X) = H(X)\Big|_{P(a_i)=1/r} = \log r$$