## 2.9.2 马尔可夫信源

一、概念：设信源所处的状态序列为

$$u_1 u_2 \cdots u_l \cdots, u_l \in \left\{S_1, S_2, \cdots S_J\right\}, l = 1, 2, \cdots$$

每个状态下可能输出的符号序列

$$x_1, x_2, \cdots x_l \cdots, x_l \in \left\{a_1, a_2, \cdots, a_q\right\}, l = 1, 2, \cdots$$

认为每一时刻，当信源发出一个符号后，信源所处的状态将发生转移。如果满足如下条件：

（1）某一时刻信源符号的输出只与当前的信源状态有关，而与以前的状态无关，即

$$p\left\{x_l = a_k \mid u_l = S_j, x_{l-1} = a_k, u_{l-1} = S_i, \cdots\right\}$$

$$= p\left\{x_l = a_k \mid u_l = S_j\right\}$$

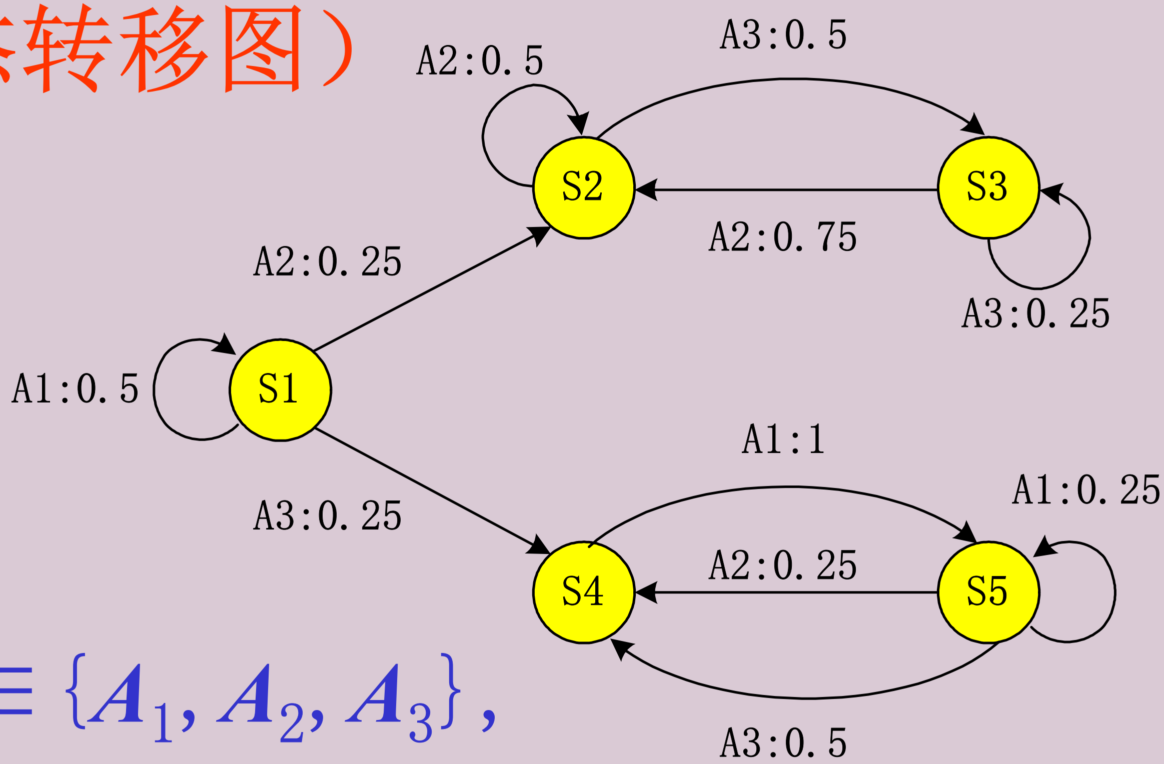
其中，$a_k \in \left\{a_1, a_2, \cdots, a_q\right\}$； $S_i, S_j \in \left\{S_1, S_2, \cdots S_J\right\}$

（2）信源状态只由当前输出符号和前一时刻状态确定，即

$$p\left\{u_l = S_i \mid x_l = a_k, u_{l-1} = S_j\right\} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

则称此信源为一个马尔可夫信源

## 二、描述（状态转移图）




设信源符号为$X \in \{A_1, A_2, A_3\}$，

信源状态为

$u \in S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$。

判断是否为马尔可夫信源

解：

各状态发符号的概率为

$$P(A_1 | S_1) = 0.5 \quad P(A_2 | S_1) = 0.25 \quad P(A_3 | S_1) = 0.25$$

$$P(A_2 | S_2) = 0.5 \quad P(A_3 | S_2) = 0.5$$

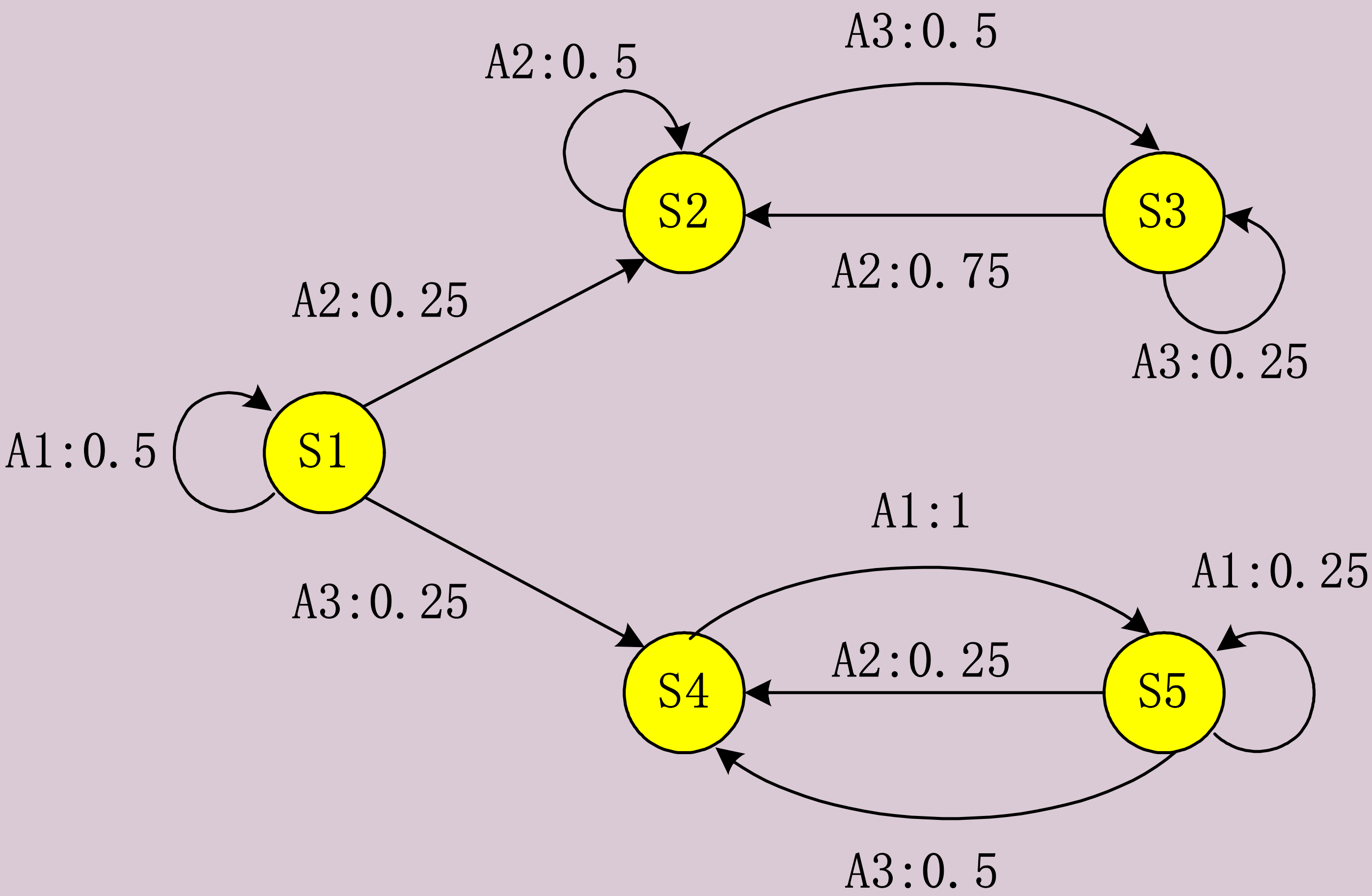
$$P(A_2 | S_3) = 0.75 \quad P(A_3 | S_3) = 0.25$$

$$P(A_1 | S_4) = 1$$

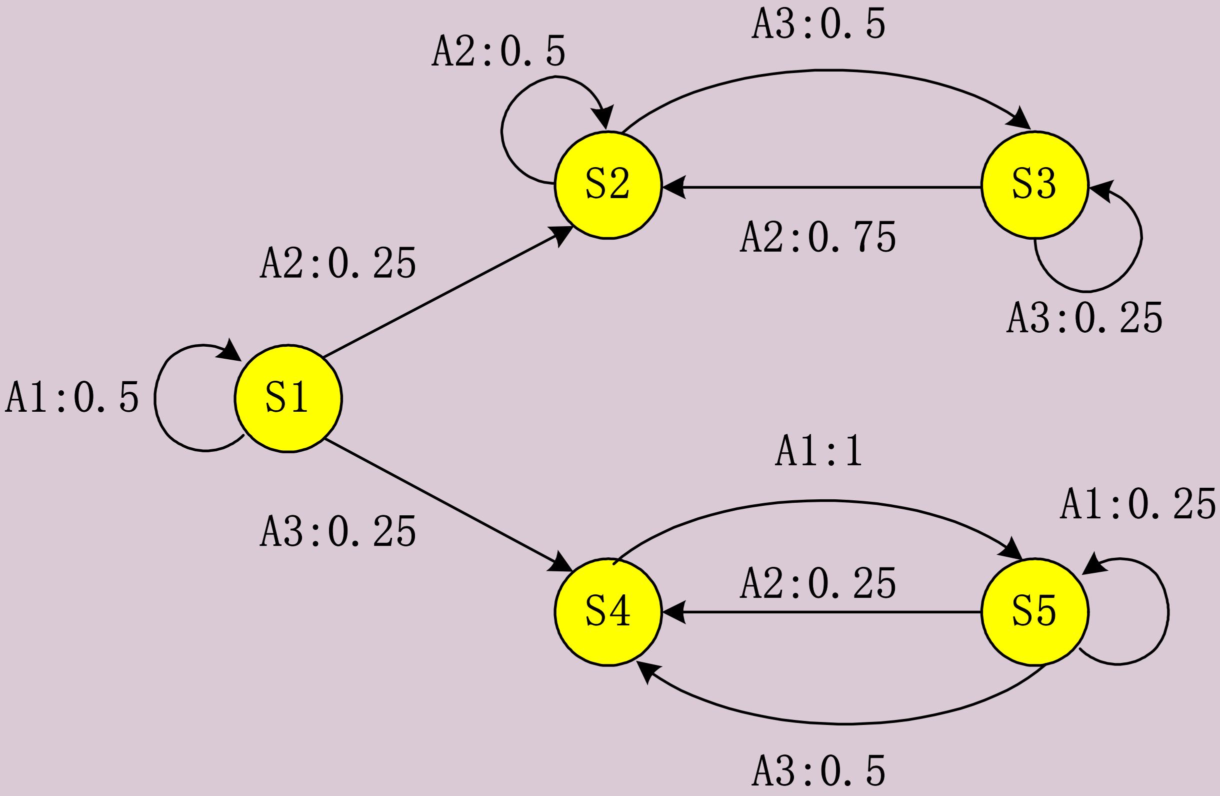
$$P(A_1 | S_5) = 0.25 \quad P(A_2 | S_5) = 0.25 \quad P(A_3 | S_5) = 0.5$$

可见，满足$\sum_{k=1}^{3} P(A_k | S_i) = 1, i = 1,2,3,4$

信源符号的输出只与当前的信源状态有关，而与以前的状态无关，满足条件（1）



解：




而且

$$P(u_l = S_2 \mid x_l = A_1, u_{l-1} = S_1) = 0 \quad P(u_l = S_1 \mid x_l = A_1, u_{l-1} = S_1) = 1$$

$$P(u_l = S_2 \mid x_l = A_2, u_{l-1} = S_1) = 1 \quad P(u_l = S_2 \mid x_l = A_3, u_{l-1} = S_1) = 0$$

……

可见满足条件（2）

根据以上结果，可以求得状态的一步转移概率

各状态发符号的概率为

$$P(S_1 \mid S_1) = 0.5 \quad P(S_2 \mid S_1) = 0.25 \quad P(S_4 \mid S_1) = 0.25$$

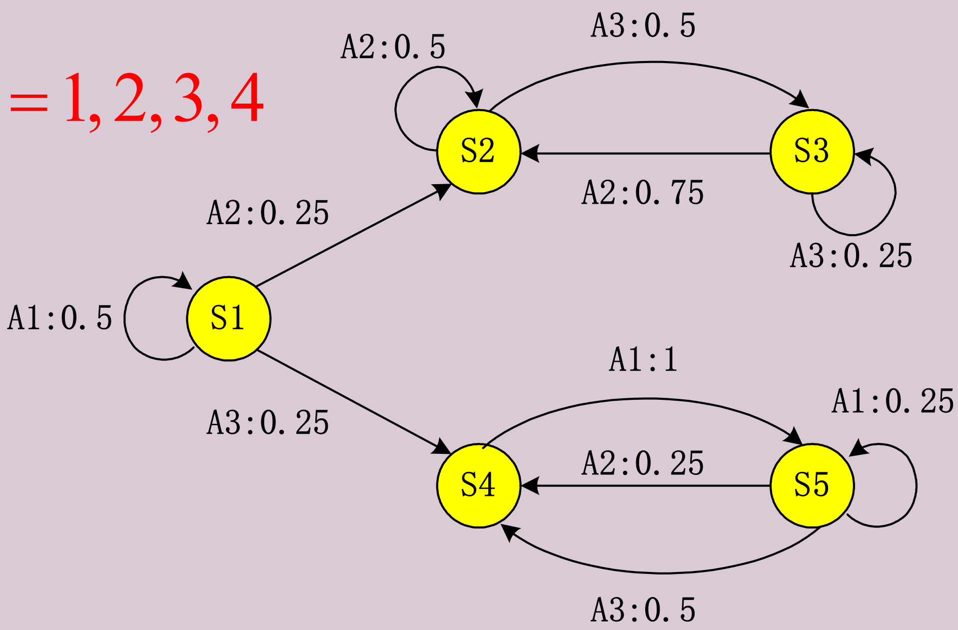
$$P(S_2 \mid S_2) = 0.5 \quad P(S_3 \mid S_2) = 0.5$$

$$P(S_2 \mid S_3) = 0.75 \quad P(S_3 \mid S_3) = 0.25$$

$$P(S_5 \mid S_4) = 1$$

$$P(S_5 \mid S_5) = 0.25 \quad P(S_4 \mid S_5) = 0.75$$

可见，满足$\sum_{k=1}^{3} P(S_k \mid S_i) = 1, i = 1,2,3,4$



因满足所有条件式，该信源是马尔可夫信源

马尔可夫信源的状态空间描述：

对于$m$阶马尔可夫信源

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \cdots & S_{q^m} \\ & P(S_j \mid S_i) & & \end{bmatrix}$$