6.2 信息率失真函数及其性质

6.2.1信息率失真函数定义

1、D允许(试验)信道

- 如果要求平均失真$\bar{D}$小于某个给定值D，即要求

$$\bar{D} = E\{d(u_i,v_j)\} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} P(u_i)P(v_j|u_i)d(u_i,v_j) \le D$$

这意味着对转移概率$P_{V|U}$施加了相应的限制，上式所给的限制条件称保真度准则。

满足保真度准则$\bar{D} \le D$的信道称为D允许（试验）信道。

所有试验信道的转移概率组成一个集合，记为：

$$B_D = \{P_{V|U}; \bar{D} \le D\}$$

- 要使限失真编码满足保真度准则，则编码器必须是试验信道，即编码器的转移概率$P_{V|U} \subset B_D$。

2、率失真函数的定义

- 在 B_D中寻求一个 $P_{V|U}$（即寻求一个特定的编码器）使$I(U;V)$最小，这个最小的平均互信息量称为信息率失真函数，简称率失真函数，记为$R(D)$，即

$$R(D)=\min_{P_{V|U}\in B_D} I(U;V)=\min\left\{I(U;V);\bar{D}\le D\right\}$$

- 当最小值不存在时，可用下界值代替：

$$R(D)=\inf_{P_{V|U}\in B_D} I(U;V)$$

- 对于离散信源,$R(D)$可表示成

$$R(D)=\min_{P_{V|U}\in B_D}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}P(u_i)P(v_j|u_i)\log\frac{P(v_j|u_i)}{P(v_j)}$$

- $R(D)$是保真度准则（$\bar{D}\le D$）下所必须传输的信息率，也是熵压缩编码器输出可能达到的最低熵率。

3、序列的信息率失真函数

- 在序列情形下，可用 N 次扩展信源 U^N和 N 次扩展信道$\{U^N, P_{V^N|U^N}, V^N\}$讨论。
- 试验信道为所有满足保真度准则$\bar{D}(N) \le ND$的信道的集合，这些试验信道的转移概率组成集合B_{ND}：

$$B_{ND} = \left\{ P_{V^N|U^N}; \bar{D}(N) \le ND \right\}$$

- B_{ND}必存在一个转移概率（代表某个试验信道）使$I(U^N;V^N)$最小，这个最小值就是N次扩展信源U^N的信息率失真函数，记为$R(ND)$：

$$R(ND) = \min_{P_{V^N|U^N} \in B_{ND}} I(U^N;V^N) = \min\left\{ I(U^N;V^N); \bar{D}(N) \le ND \right\}$$

- 若信源和信道均无记忆，则有

$$\begin{aligned} R(ND) &= \min\left\{ I(U^N;V^N); \bar{D}(N) \le ND \right\} \\ &= \min\left\{ NI(U;V); \bar{D} \le D \right\} \\ &= NR(D) \end{aligned}$$

- 编码后的信息率 R 就是通过信道的平均互信息量$I(U;V)$，为便于传输和处理，希望将信息率 R压缩到最小，其最小值就是$R(D)$。
- 若$R < R(D)$，就不能满足保真度准则了
-

6.2.2 信息率失真函数的性质

1、信息率失真函数的定义域

- $R(D)$定义域是$[0, D_{max}]$
- 由于D是失真度$d(u_i,v_j)$的统计平均，而$d(u_i,v_j)$非负，因此D也非负，其下界是零，对应于无失真情况。
- 由$R(D)$的定义式可知其非负，下限值为零，取满足$R(D)=0$的所有D中最小者为$R(D)$定义域的上限值D_{max}。
- $R(D)=0$意味着$I(U;V)=0$，这时试验信道输入与输出是互相统计独立，即$P(v_j|u_i)=P(v_j)$，这时平均失真为

$$\bar{D}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}P(u_i)P(v_j)d(u_i,v_j)$$

取上式$\bar{D}$的最小值为D_{max}，

$$D_{max}=\min\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}P(u_i)P(v_j)d(u_i,v_j)$$

$$=\min\sum_{j=1}^{s}P(v_j)\sum_{i=1}^{r}P(u_i)d(u_i,v_j)$$

例 6.2 设输入概率和失真矩阵分别为

$$[P_U] = [1/3 \quad 2/3] \qquad [d] = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

求 $D_{\max}$。

解 由式(6-2-11)得

$$D_{\max} = \min \sum_{j=1}^{2} P(v_j) \sum_{i=1}^{2} P(u_i) d(u_i, v_j)$$

$$= \min\left\{P(v_1)\left[\frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1\right] + P(v_2)\left[\frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 0\right]\right\}$$

$$= \min\left\{\frac{2}{3}P(v_1) + \frac{1}{3}P(v_2)\right\}$$

根据概率的完备性，即 $P(v_1) + P(v_2) = 1$，有

$$D_{\max} = \min\left\{\frac{1}{3}P(v_1) + \frac{1}{3}\right\}$$

当 $P(v_1) = 0$，即$[P_v] = [0 \quad 1]$时，得到最小值

$$D_{\max} = \min\left\{\frac{1}{3}P(v_1) + \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

2、信息率失真函数是 D的下凸函数

- 若有λ_1、λ_2及D_1、D_2、D，满足$\lambda_1+\lambda_2=1$和$D=\lambda_1 D_1+\lambda_2 D_2$，则有

$$R(D)\le \lambda_1 R(D_1)+\lambda_2 R(D_2)$$

证明：设$P_1(v|u)$是达到$R(D_1)$的转移概率，设$P_2(v|u)$是达到$R(D_2)$的转移概率，针对同一信源，两种转移概率下的平均互信息量分别设为$I(U;V_1)$和$I(U;V_2)$，则由率失真函数的定义有

$$\begin{array}{ll} I(U;V_1)=R(D_1) & E\{d_1(u,v)\}\leqslant D_1 \\ I(U;V_2)=R(D_2) & E\{d_2(u,v)\}\leqslant D_2 \end{array} \qquad (6\text{-}2\text{-}12)$$

现在定义一个新的转移概率

$$P(v\mid u)=\lambda_1 P_1(v\mid u)+\lambda_2 P_2(v\mid u)$$

在该转移概率下编码器的平均失真为

$$
\begin{aligned}
E\{d(u_i,v_j)\} &= \sum_{U,V} P(u)P(v \mid u)d(u,v) \\
&= \sum_{U,V} P(u)[\lambda_1 P_1(v \mid u) + \lambda_2 P_2(v \mid u)]d(u,v) \\
&\leqslant \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 = D
\end{aligned}
$$

设此时编码器的平均互信息量为$I(U;V)$ 则有

$$R(D) = R(\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2) \leqslant I(U;V) \tag{6-2-13}$$

由于平均互信息量是关于转移概率的下凸函数，则得

$$I(U;V) \leqslant \lambda_1 I(U;V_1) + \lambda_2 I(U;V_2) \tag{6-2-14}$$

综合式(6-2-12)式(6-2-13)和式(6-2-14)即得

$$R(D) \leqslant \lambda_1 R(D_1) + \lambda_2 R(D_2)$$

3、信息率失真函数是定义域上的非增函数

证明：设 $D_2 \geq D_1$ 则对应试验信道的转移概率有如下包含关系

$$\{P_{V|U};\ \overline{D} \leqslant D_1\} \subset \{P_{V|U};\ \overline{D} \leqslant D_2\}$$

故

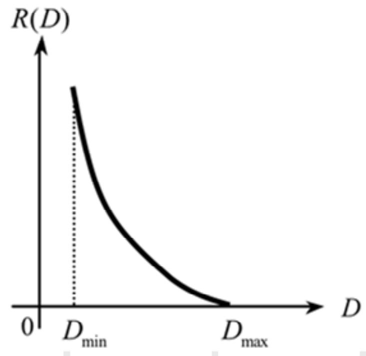
$$\min\{I(U;V), \overline{D} \leqslant D_2\} \leqslant \min\{I(U;V), \overline{D} \leqslant D_1\}$$

即

$$R(D_2) \leqslant R(D_1)$$

即 R(D)是定义域上的非增函数。

4、信息率失真函数曲线



由 R(D)的凸状 性 质 可 知 R(D) 在 定 义 域$[D_{min}, D_{max}]$上连续又由 R(D) 的非负、下凸、非增及 $R(D_{max})=0$ 这几个性质 可 知 R(D) 在 定 义 域$[D_{min}, D_{max}]$ 上 严 格 递 减，因 此 R（D）是一条连续下凸曲线，由 $R(D_{min})$ 开始严格递减直至 $R(D_{max})=0$ 为止。