平均互信息量的性质

1 **互易性:**

$$I(X;Y)=I(Y;X)$$

说明: $$I(X;Y)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J}P(x_k,y_j)\log\frac{P(x_k,y_j)}{P(x_k)P(y_j)}=I(Y;X)$$

$$I(x_k;y_j)=I(y_j;x_k) \longrightarrow I(X;Y)=I(Y;X)$$

$$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=H(Y)-H(Y|X)=I(Y;X)$$

平均互信息量的性质

2 **非负性：** $I(X;Y) \geq 0$

注意：$I(x_k;y_j)$可正可负。

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \geq 0$$

$$H(X|Y) \leq H(X)$$

条件熵不会大于无条件熵，增加条件只可能使不确定性减小，不会增大不确定性

推广：条件多的熵不会大于条件少的熵 。**即**

$$H(X|Y_1Y_2\cdots Y_N) \leq H(X|Y_1Y_2\cdots Y_{N-1}) \leq \cdots \leq H(X)$$

举例：
郭沫若
九歌
三闾大夫
端午

平均互信息量的性质

3 **有界性：**

$$I(X;Y)=I(Y;X)\leq\begin{cases}H(X)=I(X)\\H(Y)=I(Y)\end{cases}$$

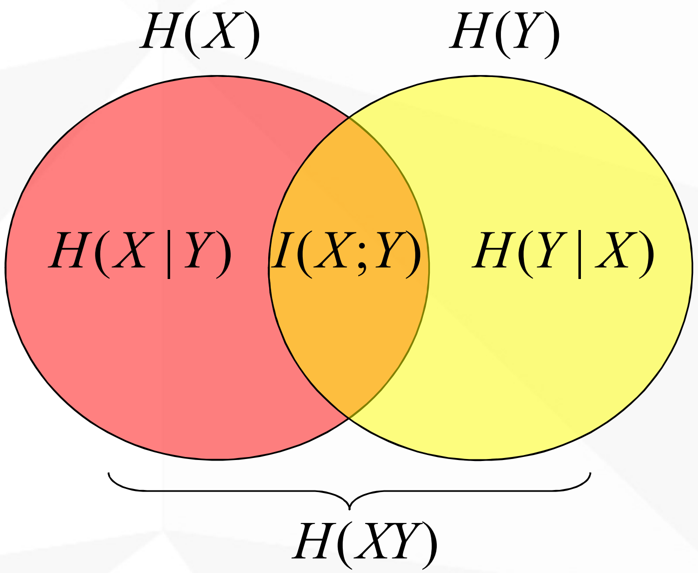
说明： $I(X)$ ：**信源X的（平均）实在信息。**

$$H(X|Y)=0\Rightarrow I(X)=I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=H(X)$$

简证： $I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)\leq H(X)$

$$I(Y;X)=H(Y)-H(Y|X)\leq H(Y)$$

各种熵以及平均互信息量之间的关系



$$
\begin{aligned}
H(XY) &= H(X) + H(Y|X) \\
&= H(Y) + H(X|Y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) \\
&= H(Y) - H(Y|X)
\end{aligned}
$$

例题

设有一批电阻，按阻值分:70%是2KΩ，30%是5KΩ；按功率分：64%是1/8W,其余是1/4W。现已知2KΩ阻值的电阻中80%是1/8W。问通过测量阻值可以平均得到的关于瓦数的信息量是多少?

解：设信源X表示阻值，信源Y表示功率，则有：

$$I(X;Y)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J}P(x_k,y_j)\log\frac{P(x_k,y_j)}{P(x_k)P(y_j)}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ P_X \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} Y \\ P_Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} \\ 0.64 & 0.36 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{P(b_1|a_1)=0.8}$，$\boldsymbol{P(b_2|a_1)=1-P(b_1|a_1)=0.2}$，求$\boldsymbol{I(X;Y)}$。

可知：$\boldsymbol{P(a_1b_1)=P(a_1)\cdot P(b_1|a_1)=0.56}$,$\boldsymbol{P(a_1b_2)=P(a_1)\cdot P(b_2|a_1)=0.14}$

$\boldsymbol{P(a_2b_1)=P(b_1)-P(a_1b_1)=0.08}$，$\boldsymbol{P(a_2b_2)=P(b_2)-P(a_1b_2)=0.22}$

$\boldsymbol{H(X)=H(0.7,0.3)=0.881}$ bit/symbol

$\boldsymbol{H(Y)=H(0.64,0.36)=0.943}$ bit/symbol

$\boldsymbol{H(XY)=H(0.56,0.14,0.08,0.22)=1.638}$ bit/symbol

$\boldsymbol{I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(XY)=0.186}$ bit/symbol

感谢观看！

Information theory

and

coding

武漢理工大學