第5章 有噪信道编码

——差错控制编码

问题的提出

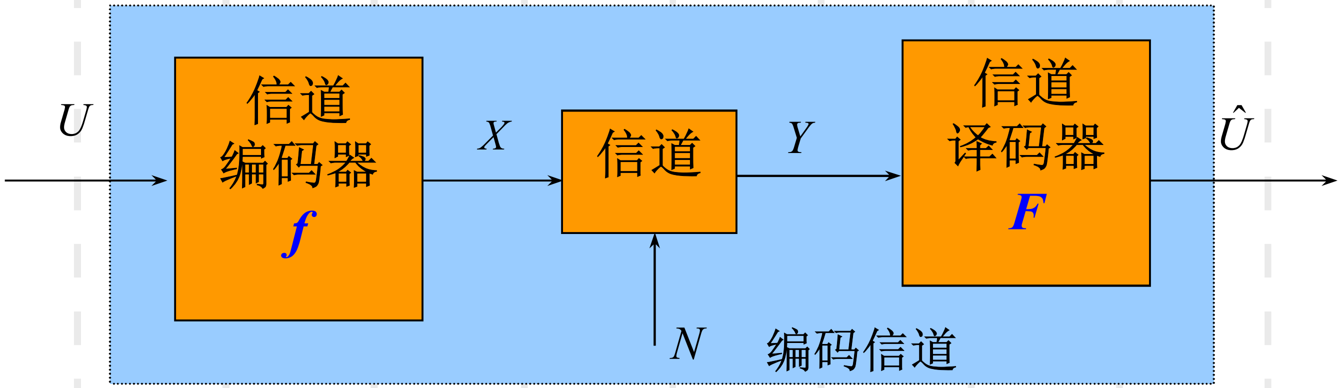
- 每一个通信系统都会有两方面技术要求：有效性和可靠性

  （1）有效性：信息率，信息速率，含量效率

  （2）可靠性：差错率P_e。P_e与信道的统计特性有关。

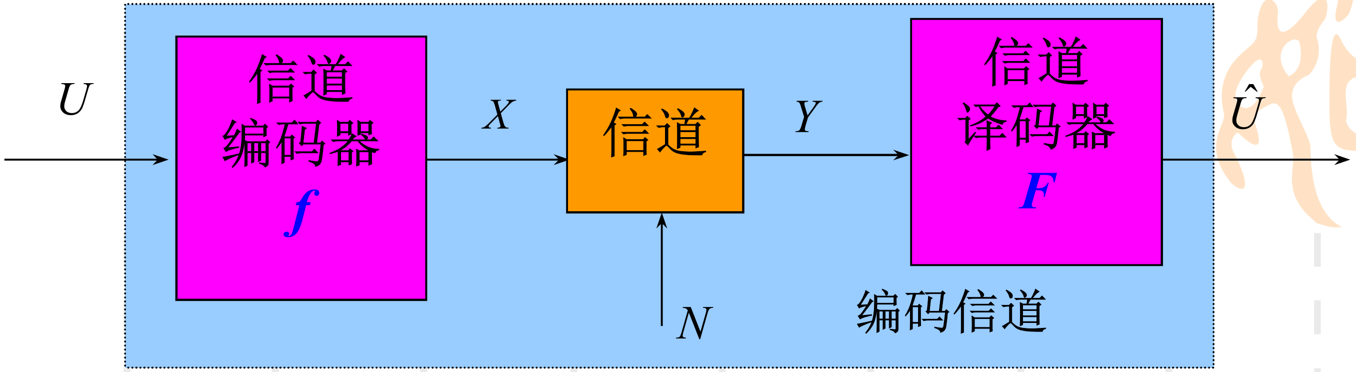
- 降低P_e的方法：先对消息进行编码再送入信道传送，这种为降低平均差错率而进行的编码称为信道编码；在信道输出端加信道译码器进行信息还原。

- 香农第二编码定理告诉我们：只要信道编码和译码的方法得当，就可使平均差错率趋于零。



各节内容

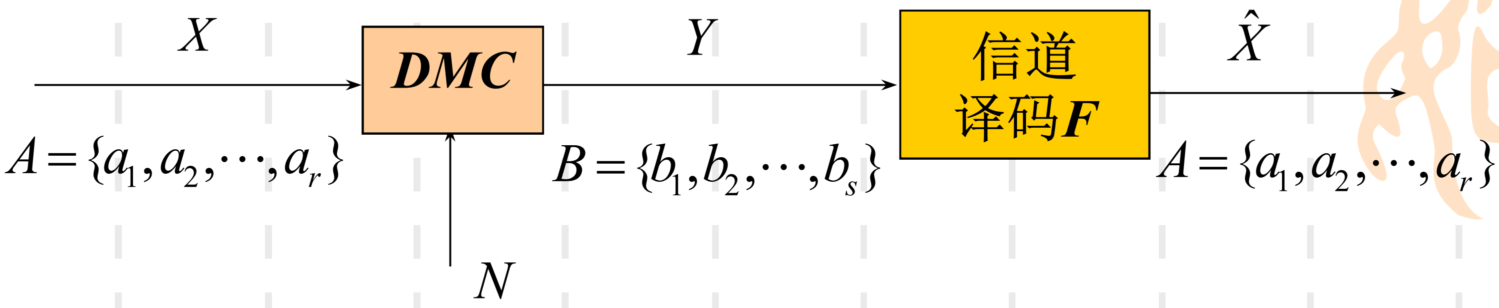
5.1 译码规则与错误概率



- 信道编码是一个一一对应的变换或函数，称为**编码函数*f***；
- 信道译码也是一个函数，称为**译码函数*F***。

由于编码***f***（***U***↔ ***X***）是一一对应变换，其反变换f^{1}唯一确定。因此，讨论译码函数***F***时，只考虑从***Y***中还原出***X***就可以了，无需还原出**U**。

1、译码规则



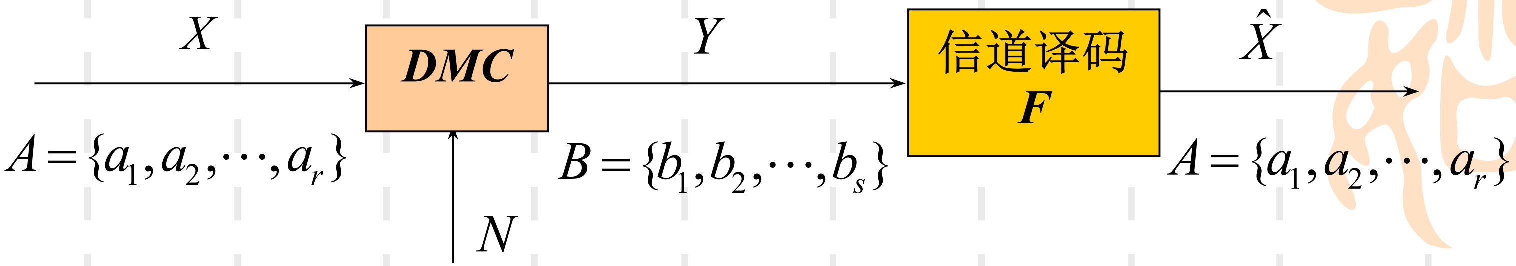
信道译码函数***F***，又称译码规则，是从信道输出符号集合***B***到信道输入符号集合***A***的映射：

$$\boldsymbol{F}:\boldsymbol{B}\rightarrow\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{b}_j)=\boldsymbol{a}_j^*\in\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{j}=1,2,\ldots,\boldsymbol{s}$$

- 译码规则是由人为制订的；
- 对于同一个信道可制订出多种译码规则；
- “好”的译码规则：平均差错率小。

2、错误概率



译码规则： $\boxed{F(b_j)=a_j^* \in A \quad , \quad j=1,2,\ldots,s}$

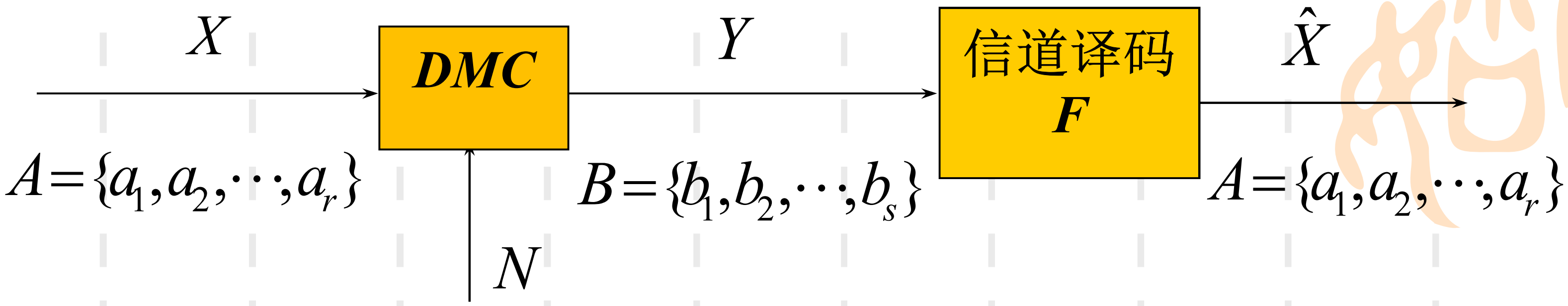
$\boldsymbol{b_j}$的译码正确概率是后验概率： $P(X=a_j^*|Y=b_j)=P\left[F(b_j)|b_j\right]$

$\boldsymbol{b_j}$的译码错误概率： $P(e|b_j)=P\left[X\neq F(b_j)|Y=b_j\right]=1-P\left[F(b_j)|b_j\right]$

平均差错率P_e： $P_e=\sum_{j=1}^{s}P(b_j)P(e|b_j)=\sum_{j=1}^{s}P(b_j)\left\{1-P\left[F(b_j)|b_j\right]\right\}$

平均差错率P_e与译码规则F有关。

平均差错率P_e的计算公式



译码规则： $\boxed{F(b_j)=a_j^* \in A \quad , \quad j=1,2,...,s}$

平均差错率P_e： $\boxed{P_e=\sum_{j=1}^{s}P(b_j)P(e\,|\,b_j)=\sum_{j=1}^{s}P(b_j)\left\{1-P\left[F(b_j)\,|\,b_j\right]\right\}}$

换一种表达式：$P_e=1-\sum_{j=1}^{s}P\left[F(b_j),b_j\right]=1-\sum_{j=1}^{s}P\left[F(b_j)\right]P\left[b_j\,|\,F(b_j)\right]$

或者 $P_e=\sum_{Y,X-a^*}P(a_i,b_j)=\sum_{Y,X-a^*}P(a_i)P(b_j\,|\,a_i)$

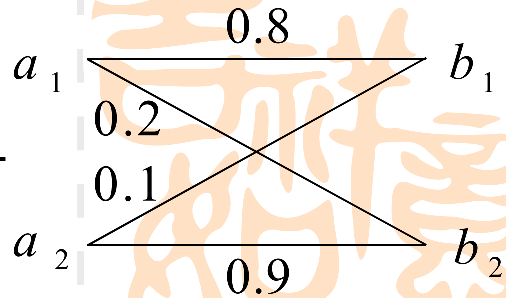
当输入等概时：$P_e=1-\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{s}P\left[b_j\,|\,F(b_j)\right]=\frac{1}{r}\sum_{Y,X-a^*}P(b_j\,|\,a_i)$

例：译码规则与平均差错率

(1) 找出所有可能的译码规则；

(2) 求出各个译码规则对应的平均差错率。

$P(a_1)=0.4$



4种译码规则：

$$F_1:\begin{cases}F_1(b_1)=a_1\\F_1(b_2)=a_1\end{cases}\qquad F_2:\begin{cases}F_2(b_1)=a_2\\F_2(b_2)=a_2\end{cases}\qquad F_3:\begin{cases}F_3(b_1)=a_1\\F_3(b_2)=a_2\end{cases}\qquad F_4:\begin{cases}F_4(b_1)=a_2\\F_4(b_2)=a_1\end{cases}$$

$$[\boldsymbol{P_X}]=\begin{bmatrix}\mathbf{0.4} & \mathbf{0.6}\end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{P_{Y|X}}]=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} \end{array} \\ \begin{bmatrix}\mathbf{0.8} & \mathbf{0.2}\\ \mathbf{0.1} & \mathbf{0.9}\end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2}\end{array}$$

$$[\boldsymbol{P_{XY}}]=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} \end{array} \\ \begin{bmatrix}\mathbf{0.32} & \mathbf{0.08}\\ \mathbf{0.06} & \mathbf{0.54}\end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2}\end{array}$$

$$P_e(F_1)=1-\sum_{j=1}^{s}P\left[F_1(b_j),b_j\right]=1-\left[P(a_1,b_1)+P(a_1,b_2)\right]=1-(0.32+0.08)=0.6$$

$$P_e(F_2)=1-\sum_{j=1}^{s}P\left[F_2(b_j),b_j\right]=1-\left[P(a_2,b_1)+P(a_2,b_2)\right]=1-(0.06+0.54)=0.4$$

$$P_e(F_3)=1-\sum_{j=1}^{s}P\left[F_3(b_j),b_j\right]=1-\left[P(a_1,b_1)+P(a_2,b_2)\right]=1-(0.32+0.54)=0.14$$

$$P_e(F_4)=1-\sum_{j=1}^{s}P\left[F_4(b_j),b_j\right]=1-\left[P(a_2,b_1)+P(a_1,b_2)\right]=1-(0.08+0.06)=0.86$$

***F_3*最好**

***F_4*最差**