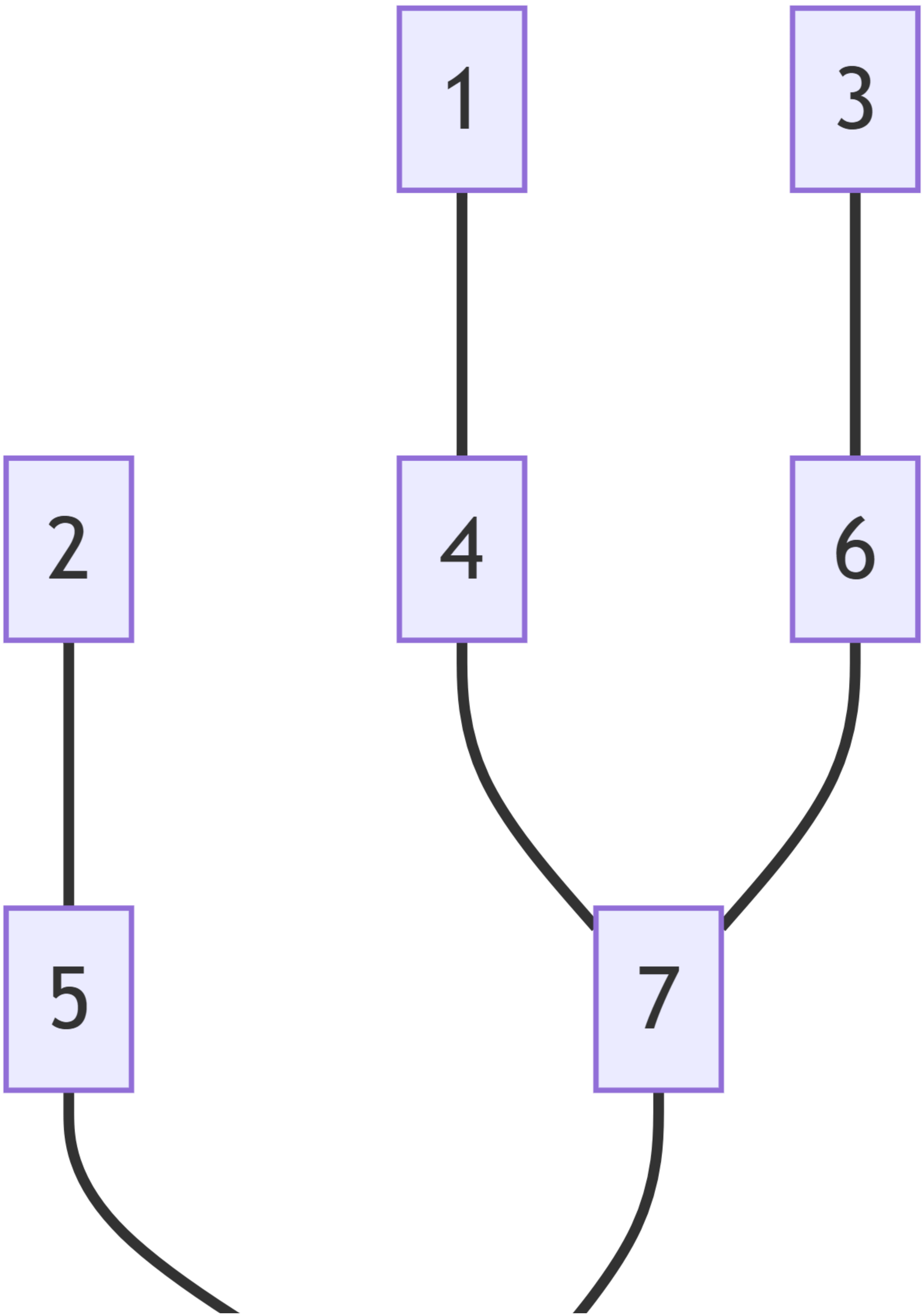
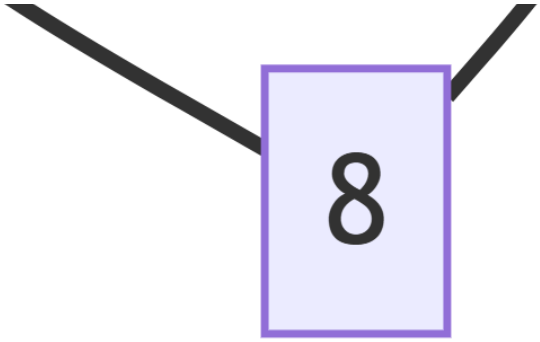
第六次作业

4.3.2


1
3
2
4
6
5
7



4.3.3

要证明当图中所有边的权重均不相同时图的最小生成树是唯一的，我们可以通过反证法来进行。

首先，我们假设在一个图 G 中，所有边的权重均不相同，并且存在两棵不同的最小生成树 T_1 和 T_2。我们的目的是找到矛盾，以证明这种情况是不可能的。

步骤 1: 找到不同的边

由于 T_1 和 T_2 是不同的最小生成树，那么至少存在一条边 e 在 T_1 中而不在 T_2 中，反之亦然。我们可以选择权重最小的那条边 e，不失一般性，假设 e 在 T_1 中而不在 T_2 中。

步骤 2: 添加边 e 到 T_2

将边 e 添加到 T_2 中，由于 T_2 是一棵树，添加 e 后会形成一个环。在这个环中，除了 e 以外，必然存在另外一条边 e'，使得 e' 不在 T_1 中（因为如果所有其他边都在 T_1 中，那么 T_1 将不是一棵树，因为它包含了一个环）。

步骤 3: 比较权重

由于 G 中所有边的权重都是唯一的，所以 e' 的权重要么高于 e，要么低于 e。但是，由于我们已经假定 e 是这样一条边，它在 T_1 中而不在 T_2 中，并且我们选择的是权重最小的那条边，所以 e' 的权重必须高于 e 的权重。

步骤 4: 替换边并得到矛盾

现在，如果我们在 T_2 的环中去掉 e'，而加入 e，我们会得到一个总权重更小的生成树，这与 T_2 是最小生成树的假设矛盾。因此，我们的原始假设（存在两棵不同的最小生成树）是错误的。

结论

由此，我们得出结论：在所有边的权重均不相同时，图的最小生成树是唯一的。

4.3.13

我们可以通过构造一个简单的反例来说明:

图的构造

考虑一个有四个顶点的无向图 $G = (V, E)$，顶点集合 $V = \{A, B, C, D\}$，边集合 $E = \{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$，边的权重如下:

- $w(AB) = 1$
- $w(AC) = 2$
- $w(AD) = 3$
- $w(BC) = 4$
- $w(BD) = 5$
- $w(CD) = 6$

这里，$w(e)$ 表示边 e 的权重。

应用策略

按照题目给出的策略，我们首先以顶点 A 作为最小生成树的起点。

1. **第一步**：选择与 A 相连的所有边中权重最小的边 AB，加入最小生成树。目前最小生成树包含边 AB。
2. **第二步**：接下来，依据策略，我们将考虑与最新加入的顶点 B 相连的边（除了已经在树中的边），这里是 BC 和 BD。但按照策略，我们应该考虑与最小生成树中所有顶点 A 和 B 相连的未加入树中的边，即 AC, AD, BC, 和 BD。如果我们遵循题目描述的策略错误理解，只考虑与最新加入的顶点 B 相连的边，则可能选择 BC（权重为 4）而不是 AC（权重为 2）。
3. **第三步**：如果我们错误地选择了 BC，下一步可能会选择 AD，因为现在最小生成树中的顶点是 A, B, C，而忽略了更小的边 AC。

正确的最小生成树

正确的最小生成树应该是通过选择权重最小的边来构造的，即选择 AB, AC, 和 AD，总权重为 $1 + 2 + 3 = 6$。

这个例子表明，如果我们误解策略，仅考虑最新加入最小生成树的顶点的相连边，而不是所有已经在最小生成树中的顶点的相连边，我们可能不会选择到总权重最小的边来构造最小生成树。因此，题目描述的策略并不总是能找到图的最小生成树，关键在于我们应该考虑所有已经在最小生成树中的顶点的相连边，而不仅仅是最新添加的那个顶点的相连边。正确的策略应该是在每一步都考虑所有已经在树中的顶点，从与这些顶点相连的所有边中选择权重最小的边来加入最小生成树，这实际上是普里姆算法的基本思想。