Duhamel 积分法计算步骤

计算步骤	计算公式	说明 / 注释
1. 初始加速度	$\ddot{u}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m}$	由运动方程在 $t=0$ 的平衡关系得到
2. 基本参数	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}, \quad c = 2m\omega_0\zeta$	线性单自由度体系，粘滞阻尼
3. 阻尼频率	$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$	欠阻尼条件下的振动频率
4. 细时间步	$n_f = 1000,\ \Delta t_f = \dfrac{T}{n_f},\ t_j = j\Delta t_f$	用细时间轴近似卷积积分
5. 衰减因子	$D(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}$	自由响应与核函数的指数衰减
6. 自由响应位移	$u_{\text{free}}(t) = D(t)\left[u_0\cos(\omega_d t) + \dfrac{v_0 + \zeta\omega_0 u_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right]$	由初值产生的自由振动解
7. Duhamel 积分（连续）	$u_{\text{forced}}(t) = \dfrac{1}{m\omega_d}\displaystyle\int_0^t p(\tau)e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)}\sin[\omega_d(t-\tau)]\,d\tau$	线性系统对任意外力的卷积解
8. 卷积核—衰减项	$e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)}$	描述阻尼引起的能量衰减
9. 卷积核—振荡项	$\sin[\omega_d(t-\tau)]$	描述系统的振动特性
10. Duhamel 积分（离散）	$u_{\text{forced}}(t_i) \approx \dfrac{1}{m\omega_d}\displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} p(t_j)e^{-\zeta\omega_0(t_i-t_j)}\sin[\omega_d(t_i-t_j)]\,\Delta t_f$	采用矩形法（左端点）数值积分
11. 总位移	$u(t) = u_{\text{free}}(t) + u_{\text{forced}}(t)$	自由响应与受迫响应叠加
12. 速度（差分）	$v(t_0) = v_0, \quad v(t_i) \approx \dfrac{u(t_i) - u(t_{i-1})}{\Delta t_f}$	在细时间轴上用一阶后向差分
13. 加速度（反算）	$a(t) = \dfrac{p(t) - c\,v(t) - k\,u(t)}{m}$	由运动方程直接反算
14. 主时间轴	$\Delta t = \dfrac{T}{N},\ t_n = n\Delta t$	与其它数值积分方法统一时间点
15. 位移插值	$u(t_n) = \text{interp}(t_n;\ t_f, u_f)$	从细时间轴插值到主时间轴
16. 速度插值	$v(t_n) = \text{interp}(t_n;\ t_f, v_f)$	同上
17. 加速度插值	$a(t_n) = \text{interp}(t_n;\ t_f, a_f)$	同上
18. 返回结果	$\boxed{(u(t_n),\ v(t_n),\ a(t_n))}$	与 Newmark、Wilson、CD 等方法输出格式一致