上海交通大学在线考试诚信承诺书

SJTU Online Examination Honor Code Letter

考试不仅是对学习成效的检查，更是对道德品质的检验。自觉维护学校的考风考纪，营造公平、公正的考试环境是全体同学的共同责任和义务。特别在疫情防控的特殊时期，更应强化自律意识，恪守诚信，拒绝舞弊，做一名诚实守信的新时代大学生，用诚信的考试构筑诚信的人生。

Examination is the evaluation of both learning effect and morality. It is the responsibility and obligation of all students to consciously maintain the school's common examination practice, abide by the discipline and create a fair and just examination environment. Especially in the special period of epidemic prevention and control, we should strengthen the consciousness of self-discipline, abide by the integrity, refuse to cheat, be an honest and trustworthy college student in the new era, and build an honest life from the integrity test.

我郑重承诺 I solemnly promise:

（1）本人将履约践诺，知行统一；遵从诚信规范，恪守学术道德；自尊自爱，自省自律。I will fulfill my promise, unify between knowledge and action, abide by the rules of integrity, academic ethics, be self-respected and self-disciplined.

（2）在线考试过程中，自觉遵守学校和老师宣布的考试纪律（详见《上海交通大学本科生学生手册》中的《学生考试纪律规定》，沪交教【2019】28号），不剽窃，不违纪，不作弊。In the process of online examination, I will consciously abide by the examination discipline announced by the school and the teachers (see the regulations on student examination discipline in the undergraduate student handbook of Shanghai Jiao Tong University, HJJ [2019] No. 28), and do not plagiarize, violate discipline or cheat.

（3）若违反相关考试规定和纪律要求，自愿接受学校的严肃处理或处分。In case of violation of relevant examination regulations and discipline, students shall bear the serious treatment or punishment from the school.

承诺人 Committed by: 李昱翰

（学号 Student No: 520021910279 ）

日期 Date (Y/M/D): ~~2022~~ 2022 年 6 月 10 日

上 海 交 通 大 学 答 题 纸

（ 2022 至 2023 学年 第 2 学期 ）

班级号 F2003702

学号 520021910279

姓名 李昱翰

课程名称 计算机科学中数学基础

成绩

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

承诺人： 李昱翰

题号										
得分										
批阅人(流水阅卷教师签名处)										

上海交通大学答题纸

（ 20 22 至 20 23 学年 第 2 学期 ）

课程名称 计算机科学中 数学基础　　　　姓名 李昊翰

1. 证明：~~取~~取 ~~一个子串~~ pumping length 为p、假设L为 Regular，则满足 pumping - lemma.

取 $s =$ ~~$(a^p b^p) b (a^p b^p)$~~ $a^p b a^p$

则 s 为 L 的一个子串.

取 $s = xyz$.

∵ $|xy| \le p$ ~~且 $|y| > 0$~~ 且 $|y| > 0$,

∴ 可取 $x = a^{p-k}$, $y = a^{k}$ $(k > 0)$ 又 $k \le p$

∴ $s' = xy^2z =$ ~~$a^{p+k} b^p b a^p b^p \notin L$~~ $a^{p+k} b a^p \notin L$.

∴ 不与 pumping lemma 矛盾

∴ L不是正则语言.

2. 解：(1)：~~∵ $L = \{a^n b^n \mid n \ge 0\}$~~　~~$\overline{L} = L_1 \cup L_2$~~

~~∴ L的补语言为：$\overline{L} = \{a^m b^n \mid m,n \ge 0, m \ne n, 且 m,n 不同时为0\}$.~~

~~(2)：对于 $\overline{L}$ 下构造一个可识别 $\overline{L}'$ 的一个 PDA. $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, 其中 $\overline{L}' = \{a^m b^n\}$.~~

~~其中 $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \$\}$. $Q = \{q_0, q_1,$~~

~~转换方程 δ 如下：~~

~~① 初始时 在栈底压入一个符号，即：$\delta(q_0, \varepsilon, \varepsilon) = (q_1, \$)$.~~

~~②：之后，若第一个字符直接为b，则直接 accept，即 $\delta(q_0, b, \$) = (q_4, \varepsilon)$.~~

~~③：若整个字符串为空串，即处于 $(q_1, \varepsilon, \$)$ 状态，则直接 reject~~

~~④：之后为既有a，又有b的情况，每读入一个a，将a入栈.~~

~~即 $\delta(q_1, a, \varepsilon) = (q_1, a)$,~~

~~⑤：若读入一个b,~~

(1)：∵ $L = \{a^n b^n \mid n \ge 0\}$,

∴ L的补语言为：$\overline{L} = L_1 \cup L_2 = \{a^m b^n \mid m \ne n, m,n > 0, 且 m,n 不同时为0\}$

$\cup \{(a^m b^n)^+ \mid m 等于 n, m,n \ge 0\}$.

上 海 交 通 大 学 答 题 纸

（ 20_22_至 20_23_ 学年 第_2_学期 ）

课程名称 计算机科学中数学基础

姓名 李[illegible]

(1)：证明：设 $L_3=\{a^mb^n \mid m,n\ge 0, m\ne n, m,n$ 不同时为 $0\}$.

~~构造~~ 识别 L_3 的 PDA 如下：$P=(Q,\Sigma,\underset{\Gamma,}{\delta},q_0,F)$

$\Sigma=\{a,b\}$, $\Gamma=\{a,b,\$\}$, $Q=\{q_0,q_1,q_2,\underset{q_{rej}}{q_{acc}}\}$, $F=\{q_{acc},q_{rej}\}$

①：初始时在栈底压入 \$ 符，即 $\delta(q_0,\varepsilon,\varepsilon)=(\overset{q_{rej}}{q_1},\$)$

②：若第一个字符直接为b 则 accept，即：$\delta(q_0,b,\$)=(q_{acc},\varepsilon)$

③：若整个字符串为空串，则 reject.

④：对于 a-b 都有情况，每读一个 a，有：$\delta(q_1,a,\varepsilon)=(q_1,a)$，即将 a 入栈，每读到一个 b，将一个a出栈，即 $\delta(q_1,b,a)=(q_2,\varepsilon)$,
$\delta(q_2,b,a)=(q_2,\varepsilon)$,

⑤：~~当~~若当整个字符串读入完毕时 栈顶为 \$，说明 $|a|=|b|$，则 reject，则其他情况为 accept.

综上，L_3 为 CFL 语言。

∵ $\Gamma=\{a^mb^n \mid m\ne n, m,n\ge 0,$ 且 m,n 不同为 $0\}\cup\{(a^nb^n)^+ \mid m,n\ge 0\}$

$=L_1\cup L_2$

∵ L_1 为上下文无关语言

∴ CFL 对于 A^* 与 A^+ 操作封闭，且 $L_2'=\{a^mb^n \mid m,n\ge 0\}=L_3\cup L$ 为 CFL

∴ L_2 也为 CFL

~~∴~~ ∵ CFL 对于 ~~$A_1\cup A_2$~~ $A_1\cup A_2$ 运算封闭

∴ $\Gamma=L_1\cup L_2$ 也为上下文无关语言.

(2)：不是。因为 CFL 对于补集运算不封闭.

上海交通大学答题纸

（ 2022至 2023学年 第2学期 ）

课程名称 计算机科学数学基础　　　　姓名 李昱翰

3、(1)：T　②：F　(3) F　(4)：T　(5)：F.

4、(1)：该问题属于二次优化问题

(2)：Laxgrange 对偶函数为：

~~$\frac{1}{2}x_1^2$~~ $g(v) = \inf_{x_1 x_2 \in R^2} \left(\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + v(2x_1 - x_2 - 5) \right)$.

取 $L(x_1, x_2, v) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + v(2x_1 - x_2 - 5)$

令 $\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1 + 2v = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2 \cancel{+} - v = 0$

$\therefore \begin{cases} x_1' = -2v \\ x_2 = v \end{cases}$

$\therefore g(v) = \inf_{x \in R^2} L(x_1, x_2, v) = -\frac{5}{2}v^2 - 5v$

5、(1)：∵ D_1、S_1、S_2 满~~足~~足 ~~tail~~tail-to-tail 结构

∴当 D_1已知时 S_1、S_2相互独立.

(2)：. S_2的马尔~~科~~科夫毯 ∴ $\{D_1, D_2\}$.

(3)：$P(D_3=1 \mid S_4=1) = \frac{P(D_3=1)P(S_4=1 \mid D_3=1)}{P(S_4=1)}$.

$\because P(S_4=1) = P(D_3=0)P(S_4=1 \mid D_3=0) + P(D_3=1)P(S_4=1 \mid D_3=1)$.

$= 0.9 \times 0.6 + 0.1 \times 0.9 = 0.63$.

$\therefore P(D_3=1 \mid S_4=1) = \frac{0.1 \times 0.9}{0.63} = \frac{1}{7}$

上海交通大学答题纸

（ 20 22 至 20 23 学年 第 2 学期 ）

课程名称 计算机科学中数学基础　　　　姓名 李昱翰

6、(1)：前向误差：$x_{est} - x^*$.

(2)：~~前~~后向误差：$f(x_{est}) - f(x^*) = f(x_{est})\ (f(x^*) = 0)$.

(3)：条件数 $= \dfrac{x_{est} - x^*}{f(x_{est}) - f(x^*)} = \dfrac{x_{est} - x^*}{f(x_{est})}$.

(4)：在 x^* 附近取一个小量 Δx，~~有~~记 $x = x^* + \Delta x$ 为一个近似解，

∴ $f(x) = f(x^* + \Delta x) = f(x^*) + f'(x^*)\Delta x + O(\Delta x^2)$.

∴ 条件数 $= \dfrac{\text{前向误差}}{\text{后向误差}}$，而 Δx，与 $f(x) - f(x^*)$ 分别为前后误差

∴ 条件数 $= \dfrac{x - x^*}{f(x) - f(x^*)} = \dfrac{\Delta x}{f(x) - f(x^*)} = \dfrac{1}{f'(x^*)}$

五、(1) 由：最小二乘法表达式为：$\min \|G\vec{x} - \vec{x}_0\|_2^2$，即求解：$G^TG\vec{x} = G^T\vec{x}_0$

(2)：加入 Tikhonov 正则化项之后为：

$\min(\|G\vec{x} - \vec{x}_0\|_2^2 + \alpha\|\vec{x}\|_2^2)$，即求解：$(G^TG + \alpha I)\vec{x} = G^T\vec{x}_0$

四、(1)：证明：∵ $M = A(L^T)^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\therefore M^TM &= (A(L^T)^{-1})^T \cdot A(L^T)^{-1} \\
&= (A(L^{-1})^T)^T A(L^{-1})^T \\
&= L^{-1}A^TA(L^{-1})^T \\
&= L^{-1}\cdot LL^T\cdot(L^{-1})^T \\
&= L^{-1}\cdot L\cdot(L^T\cdot L^{-1})^T = I
\end{aligned}$$

∴ M 为正交矩阵.

(2)：~~取 $A = QR$~~

~~∴ $A^TA = (QR)^TQR = R^TQ^TQR = R^TR = LL^T$~~

~~∴ L 与 R^T 起到相同作用~~

（ 20 22 至 20 ~~23~~23 学年 第 2 学期 ）

课程名称 计算机科学中的数学基础　　　姓名 李旦翰

(2) (ii): 取 $A=QR$

∴ $A^TA = (QR)^TQR = R^TR = LL^T$

∵ L 为下三角, R 为上三角矩阵

∴可认为 R^T 与 L 在 cholesky 分解中起相同作用

(3): (i): { U: $R^{m\times n}$, 为正交矩阵, 且列向量 U_i, 有: $AA^TU_i=\lambda_iU_i$ (λ_i为特征值).

V: $R^{n\times n}$, 为正交矩阵, 且其列向量 V_i 满足: $A^TA V_i=\lambda_i V_i$ (λ_i为特征值).

Σ: $R^{n\times n}$, 为对角矩阵, 且其对角线上元素 $=\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}$, ($\sigma_i$称为奇异值)

(ii): { U: 旋转变换

V: 旋转变换

Σ: 放缩. 拉伸变换.

8、(1): ① 应选择牛顿法。② 因为 ~~f'~~ f' 存在~~且~~且连续且较容易得出,

因而可使用 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 进行迭代.

(2): ① 应选择割线~~法~~法。② 因为 $f\in C^1$, 即 f' 存在且连续, 故可使用切线法进行迭代, 但由于 f' 较难得到, 故可以用 $x+\Delta x$ 与 x 的 ~~切线~~ 割线来近似代替切线进行迭代

(3): ①: ~~应~~应选择 固定点法。②: 由固定点法迭代公式 $x_{k+1}=f(x_k)$,

~~并结合 Lipschitz 连续~~ 连续 性, 有: ~~$|x_{k+1}-x_k| = |f(x_k)-f(x_{k-1})|$~~

~~$\le c|x_k-x_{k-1}|$, 因为 $|x_k-x_{k-1}| \le C|x_{k-1}-x_{k-2}|$~~, 同理有

~~故 $|x_{k+1}-x_k| \le$~~ 结合 Lipschitz 连续性有: $|x_{k+1}-x_k| = |f(x_k)-f(x_{k-1})|$

$\le C|x_k-x_{k-1}| \le C^k|x_1-x^*|$, 由于 ~~$C\le$~~ $0<C<1$ ∴有: $|x_{k+1}-x_k| \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

因而迭代足够多次后, x_k 将收敛, 故可用于计算方程的解.

上 海 交 通 大 学 答 题 纸

（ 2022至 2023学年 第2学期 ）

课程名称 计算机科学数学基础

姓名 李昱翰

(4)二 ①选择二分法 ②因为f是连续，但时不一定满足Lipschitz连续性，故为了保证最终收敛并得出结果，可使用无条件收敛的二分法。

).