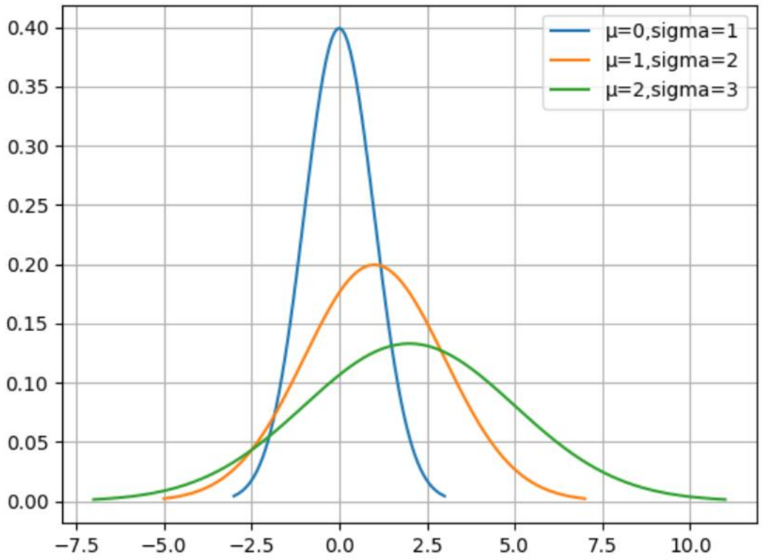
2.1:

选取了三组μ以及σ的值，绘制在(μ-3*σ， μ+3*σ)上的曲线图如下：




2.2:

对于上述三组数据，均在(μ-3*σ， μ+3*σ)区间上面进行积分，结果如下：

```
积分1= 0.9973002039367399
积分2= 0.9973002039367399
积分2= 0.9973002039367396
```

根据上面结果可以知道，积分结果近似为1，则verify成立。

3.1:

1. N = 8：

对于矩阵V，向量c的估计结果为：

[[ 1.00000000e+00]
[-1.92980788e-03]
[-9.64341068e-01]
[-2.55940537e-01]
[ 1.93414812e+00]
[-1.83752964e+00]
[ 7.29012818e-01]
[-1.03419883e-01]]，

Residual L2 norm = 3.8459253727671276e-16

对于矩阵F，向量c的估计结果为：

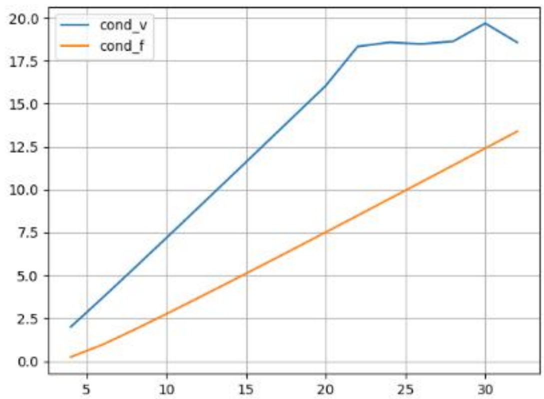
[[ 1.35488014]
[-0.04116264]
[-0.35430384]
[ 0.0015691 ]
[ 0.26057558]

 [ 0.83058785]
 [-0.01057558]
 [-0.08058785]]，
Residual L2 norm = 3.510833468576701e-16
2. N = 16：
对于矩阵 V，向量 c 的估计值为：
[[ 1.00000000e+00]
 [ 2.66981152e-07]
 [-1.00001351e+00]
 [ 2.93918076e-04]
 [ 9.96295656e-01]
 [ 3.05534739e-02]
 [-1.17587774e+00]
 [ 7.32810169e-01]
 [-1.25243651e+00]
 [ 5.13166886e+00]
 [-9.56971404e+00]
 [ 1.01177822e+01]
 [-6.70181561e+00]
 [ 2.79540453e+00]
 [-6.78602130e-01]
 [ 7.36504787e-02]]
Residual L2 norm = 3.7583960121458386e-15

对于矩阵 F，向量 c 的估计值为：
[[ 1.42902802e+00]
 [-5.56448788e-02]
 [-6.69283694e-01]
 [ 8.98075223e-03]
 [ 1.45594520e-01]
 [-7.09313612e-04]
 [-9.39339281e-03]
 [ 1.01294769e-05]
 [ 2.70446195e-01]
 [ 1.05644809e+00]
 [-2.32032131e-02]
 [-3.50662948e-01]
 [ 2.87594192e-03]
 [ 4.52018325e-02]
 [-1.18923742e-04]
 [-9.86977914e-04]]
Residual L2 norm = 2.6084334968580714e-15

3.2：

Log -Cond(V) v.s.N 与 log-cond(F) v.s. N 的曲线图如下图所示：




我的解释：从上图可以看出，两条 log 曲线总体的趋势是随着 N 的增大而逐渐上升的。这可能是由于随着 N 的增大，由于 V 与 F 的元素都小于 1，从而 V 与 F 的 2 范数(模)不断下降，从而使得正向误差与反向误差之间的比值逐渐上升，从而使得条件数增大。

3.3：

1. 当矩阵 V/F 对应的行列式为非 0 时，矩阵是正定矩阵。解释：

若对应矩阵行列式为正数，故有： $|X^T A^T AX| = |AX|^2 > 0$，因而为正定矩阵。

2.

| N | isposdef(V) | isposdef(F) | log-cond(V) | log-cond(F) |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 3 | 0 |
| 8 | 1 | 1 | 5 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 7 | 2 |
| 12 | 1 | 1 | 8 | 3 |
| 14 | 0 | 1 | 10 | 4 |
| 16 | 0 | 1 | 12 | 5 |
| 18 | 0 | 1 | 14 | 6 |
| 20 | 0 | 1 | 16 | 7 |
| 22 | 0 | 0 | 18 | 8 |
| 24 | 0 | 0 | 18 | 9 |
| 26 | 0 | 0 | 18 | 10 |
| 28 | 0 | 1 | 18 | 11 |
| 30 | 0 | 0 | 19 | 12 |
| 32 | 0 | 0 | 18 | 13 |

2. 对于矩阵 V，其为正定矩阵时最大的 N 为 12，对应的 V 的条件数为 $8.8347 \times 10^{8}$；

对于矩阵 F，其为正定矩阵时其对应的最大的 N 为 28，对应的 F 的条件数为 $2.6388 \times 10^{11}$

条件数之间的联系：

3.4：

1.对于 N=8 时的矩阵 V，使用 cholesky 分解之后的 residual L2 norm = $1.888 \times 10^{-11}$

对于 N=8 时的矩阵 F，使用 cholesky 分解之后的 residual L2 norm = $1.881\text{x}10^{-14}$

3. 与 3.1 蚊结果的比较：通过对 3.1 问与 3.4 问的结果比较可以发现，使用 cholesky 分解的结果产生的偏差较大于使用 LU 分解产生的偏差。即对于本问题而言，cholesky 分解相对于 LU 分解求解的精确程度更低一些。

4.1:

1. M = 16， N = 4 时：

对于矩阵格式 V，进行 qr 分解得到的解为：

[ 1.00166564 -0.02698999 -1.01909544 0.54698731]

对于矩阵格式 F，进行 qr 分解得到的解为：

[ 1.23673804 -0.02483006 0.24763933 0.53933343]

2. M = 16，N = 8 时：

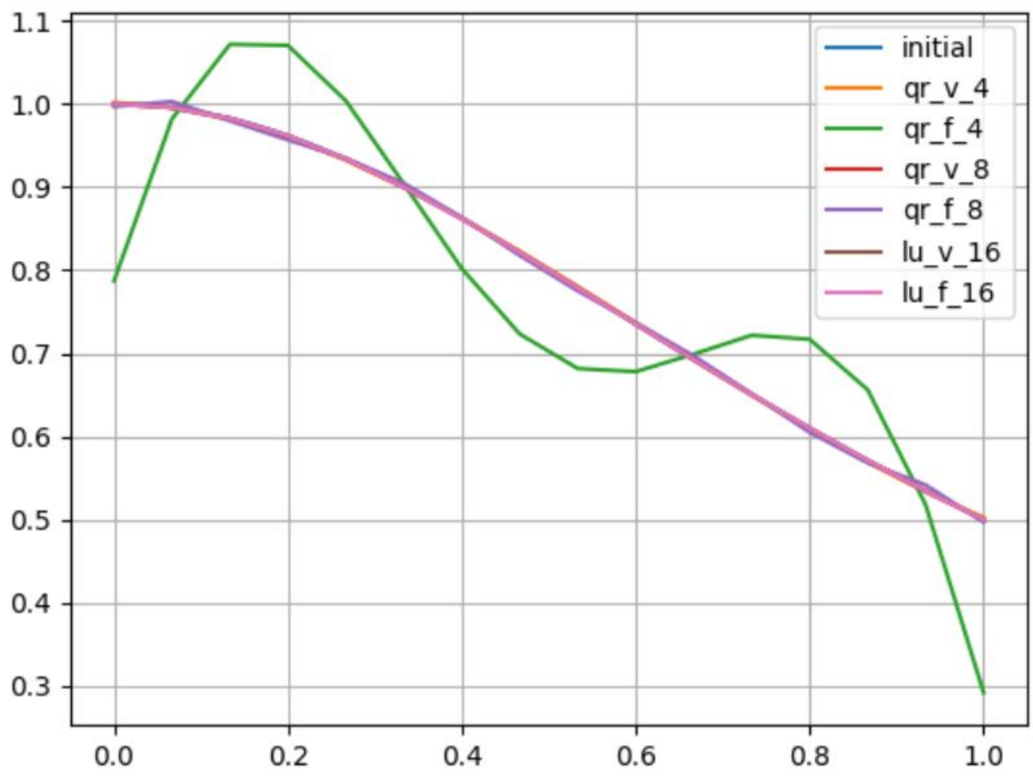
对于矩阵格式 V，进行 qr 分解得到的解为：

[ 1.00000188e+00 -1.07143503e-03 -9.75766185e-01 -2.00107692e-01
1.80128191e+00 -1.67195234e+00 6.25188414e-01 -7.75730913e-02]

对于矩阵格式 F，进行 qr 分解得到的解为：

[ 1.35569612 -0.04267561 -0.36313314 0.00197172 0.26167473 0.83497201
-0.01168661 -0.08810734]

4.2：




从上图可以看出，利用 qr 分解求解的四组中，只有 F 矩阵对应的 16*4 的情况有较大偏差，其他情况都复合的很好，同时仔细观察图像还可以发现 LU 分解的结果(problem3.1)相对于 QR 分解而言拟合的精确程度变高。

5.1：

①cholesky 分解：

Img2 合成前后对比：

②QR 分解：

Img2 合并前后效果对比：

③LU 分解：

5.2：
结果之间的区别：LU 分解的结果相对而言最终合成的图像最模糊，即合成的偏差最大。