算法作业 5：

7-6：

解：e.g.： $\min\ x-y$

$$\begin{cases} 0\le x\le 5 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

7-7：

解：

(a)：由于对 $\forall a,b$ 均可构成可行域，故不存在一种 a,b

使此 LP 不可行

(b)：当 a 与 b 中至少有个为 0 时，无解

~~(c)：只要能构成封闭可行域即可有~~ 有限解，

~~而若保证~~

(c)：$a\ne b$ 且 $ab>0$

7-21：

解：①：进行最大流算法，得到原图 G 对应的剩余网络 G^f

②：~~[illegible]~~"临界边"一定是 G^f 中那些完全反向为的边

构成集合的子集，(即若 $(u,v)\in G$，则只有 $(v,u)\in G^f$ 与，而 $(u,v)\notin G^f$)

③：对 G^f 中顶起点 s，进行 DFS，每走过一条边，将其加入集合

~~检查~~ A。

④：检查集 A，若 A 中存在某些边 $e'(j,i)\in G^f$ 且 $(i,j)\notin G^f$

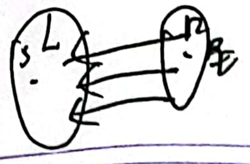
且 $(i,j)\in G$，则这样的边不是临界边，设这样边为

集合 N。~~因为若有在这样的边，在则其在原图中反向边 (i,j)~~

考虑将~~G^f中~~运行最大流算法之后的 G^f，由于最大流与

最小割等价，故可将所有顶点分成 L, R 两部分，

且所有连于 L, R 的边 均由 $R\to L$ 而不能从 $L\to R$。所以若 DFS 能到达



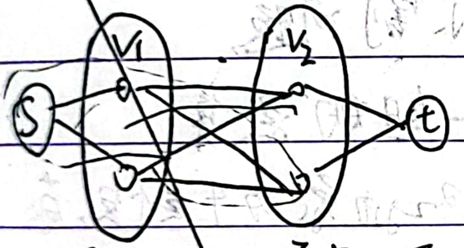
某点，说明这些点与s均位于L中，而最大流应该是由R→L那些反向边确定的，故不通过s开始的DFS能遍历的边都不是"临界边"

⑤故从所有满足 $(u,v)\in G \wedge (v,u)\notin G^f \wedge (u,v)\in G^f$ 的边中移去N，

剩余边集合中每个边均为"临界边"

7.23：

二部图定义，可将所有顶点V分成 V_1,V_2 两个子集，且两个子集中任两个顶点均不相连。在 V_1 左侧添加s，使其与 V_1 中每个点都相连，在 V_2 右侧加点t，使其与 V_2 中每个点都相连。



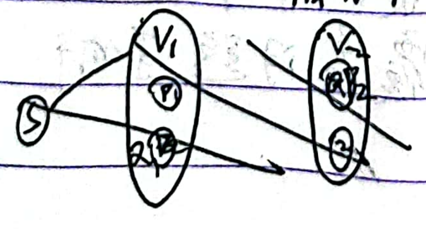
设一个图G的顶点覆盖分别包含 V_1 与 V_2 的子集 P_1,P_2，

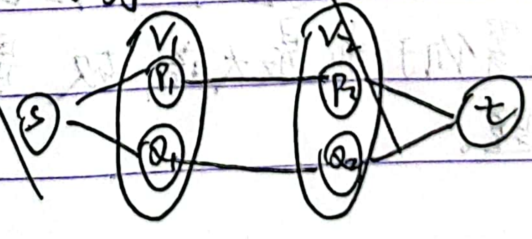
V_1,V_2 中剩下余部分构成集合分别为：Q_1,Q_2，且 $P_1\cap Q_1=\phi$，$P_2\cap Q_2=\phi$，

故原图G的最小顶点覆盖问题等价于使 $\sum P_1\cup P_2$ 中点个数最少。设图中边权重均为1。

由于 $P_1\cup P_2$ 为最小覆盖一部分，则 $\forall e\in E$，要么位于 $P_1\cup P_2$ 集合之内部，要么两个端点一个属于 $P_1\cup P_2$，一个属于 $Q_1\cup Q_2$。

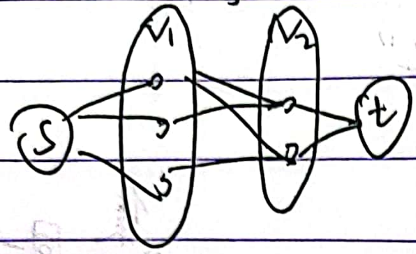
故将 ~~$P_1\cup P_2$ 压缩为P~~ P_1,P_2 分别压缩为个点，则有：





7.23：

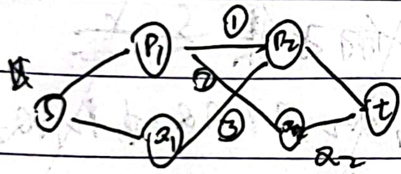
解：由二部图定义，可以将图G中所有顶点分成2个不相交的子集，设为V_1，V_2，在V_1左侧加点S，使S与V_1中每个点相连，在V_2右侧加点t，使t与V_2中每个点相连。如下图：



设最小顶点覆盖集$\cap V_1 = P_1$，$\cap V_2 = P_2$，设$V_1 / P_1 = Q_1$，$V_2 / P_2 = Q_2$，则Q_1，Q_2均不属于最小顶点覆盖，

故Q_1与Q_2中间必不可能存在边。（定义）

而若想将最小顶点覆盖问题归约成最小割问题，应选择一个割集的分组，对于与S分割到一组的点集应无法直接到达t组内点。将P_1，P_2，Q_1，Q_2抽象为4个点，有：



P_1，Q_1中一个必须属于S分组，且不能同时属于，P_2，Q_2同理，P_1，P_2也不能属于同一组，否则对于t的分组Q_1不可达。

∴将分为2组：①=$\{S, Q_1, P_2\}$ ②=$\{t, P_1, Q_2\}$，

图中①，②，③3条边权重分别为被压缩两点之间边个数，因而将求最小顶点覆盖问题转化为最小割问题。

而求最小割等价于求最大流，故最小覆盖问题等价于求最大流问题。