2.4: a. $S \to A1A1A1A$

$A \to 0A \mid 1A \mid \varepsilon$

b. $S \to 0A0 \mid 1A1 \mid 0 \mid 1$

$A \to 0A \mid 1A \mid \varepsilon$

~~c. $S \to 0S0 \mid 1S1 \mid 0 \mid 1$~~

c. $S \to 0S0 \mid 0S1 \mid 1S0 \mid 1S1 \mid 0 \mid 1$

d. $S \to 0S0 \mid 0S1 \mid 1S0 \mid 1S1 \mid 0$

e. $S \to 0S0 \mid 1S1 \mid 0 \mid 1 \mid \varepsilon$

f. $S \to S$

2.14 解：① 添加新的S_0，有：

$$\begin{cases} S_0 \to A \\ A \to BAB \mid B \mid \varepsilon \\ B \to 00 \mid \varepsilon \end{cases}$$

②：删除 $B \to \varepsilon$，$A \to \varepsilon$，有：

$$\begin{cases} S_0 \to A \mid \varepsilon. \\ A \to BAB \mid AB \mid BA \mid A \mid B \mid BB \\ B \to 00 \end{cases}$$

③：删除 $A \to B$ 有：

$$\begin{cases} S_0 \to A \mid \varepsilon \\ A \to BAB \mid AB \mid BA \mid A \mid BB \mid 00 \\ B \to 00 \end{cases}$$

④：删除 $A \to A$ 有：

$$\begin{cases} S_0 \to BAB \mid AB \mid BA \mid BB. \mid 00 \mid \varepsilon \\ A \to BAB \mid AB \mid BA \mid BB \mid 00 \\ B \to 00 \end{cases}$$

⑤：取 $C \to 0$，有：

$$\begin{cases} S_0 \to BAB \mid AB \mid BA \mid BB \mid CC \mid \varepsilon \\ A \to BAB \mid AB \mid BA \mid BB \mid CC \\ B \to CC \\ C \to 0 \end{cases}$$

⑥：对 $S_0 \to BAB$ 以及 $A \to BAB$ 进行拆解，有：

$$\begin{cases} S_0 \to BA_1 \mid AB \mid BA \mid BB \mid CC \mid \varepsilon \\ A_1 \to AB. \\ A \to BA_2 \mid AB \mid BA \mid BB \mid CC \\ A_2 \to AB. \\ B \to CC \\ C \to 0 \end{cases}$$

2-20：

证明：∵ A 为 CFL ∴取 $P_1=(Q_1,\Sigma,\Gamma_1,\delta_1,q_1,F_1)$ 为识别 A 的 PDA

∵ B 为 regular language ∴取 $N_1=(Q_2,\Sigma,\delta_2,q_2,F_2)$，为识别 B 的 NFA

欲证 A/B 为 CFL，需构造一个 PDA，使其可以识别 A/B

设 $P_{A/B}=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,F)$.

由题设 $wx\in A$，$x\in B$ 之即可以有：

①：$\Sigma=\Sigma_1=\Sigma_2$ ②：$\Gamma=\Gamma_1$ ③：$q_0=q_1$

④：对于 Q，应有2种情况：

i、对于串 w，其中 $P_{A/B}$ 内部可完成识别，则 $Q=Q_1$

ii、对于串 w，由于 $wx\in A$，(即 $w\circ x\in A$)，存在一种可能，即：

w 读取完成后其会通过 ε 到达 x 进行继续识别

(此处类似于NFA)，也可能到达 B 的 final state 而终止

~~(比如B的起始状态即为final状态)~~，则此时：$Q=Q_1\times Q_2$ Q

其最终接受状态

⑤：对于 F，由④分析，可知其最终接受状态应为两种情况：

i、$F = F_1$（对应④ i）

ii、$F = (F_1 \times F_2)$（对应④ ii）。

⑥：综合上述④、⑤分析，则转换方程有2种：

i、$Q = Q_1$ 时，有：

$$\delta(q, a, t) = \begin{cases} \delta_1(q, a, t), & q \in Q_1 - F_1 \land a \in \Sigma_\varepsilon \\ \cancel{\delta_1(q, a, t) \cup \{q_2\}}, & \cancel{q \in F_1 \land a = \varepsilon} \\ \delta_1(q, a, t), & q \in F_1 \land a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q, a, t) \cup \{Q_1 \times \{q_2\}, \varepsilon\}, & q \in F_1 \land a = \varepsilon \end{cases}$$

上式中，q_1，q_2 分别为 A、B 初始 state，最后一行后面 ε 表示的是将 t 弹出，因为到 B 中时栈中应无元素。

ii、$Q = Q_1 \times Q_2$ 时

$$\cancel{\delta((q_1, q_2), a, t) = \{\delta_2(q_2, a), \varepsilon\},\ a = \varepsilon \land q_1 \in F_1 \quad (q_1 \in Q_1 \land q_2 \in Q_2)}$$

$$\delta((q_1, q_2), a, t) = \begin{cases} ((r_1, r_2), t_1), & a = \varepsilon \\ \phi, & a \neq \varepsilon \end{cases} \quad (q_1 \in Q_1 \land q_2 \in Q_2)$$

上式中，$(r_1, t_1) \in \delta_1(q_1, a, t)$，且有：$r_2 \in \delta_2(q_2, a)$，$t_1$ 为操作后栈顶的值，由于不一定进入 B，故 t_1 不一定为 ε。

∴满足上式①②③④⑤⑥的 PDA $P_{A/B}$ 可以识别 $L_{A/B}$，∴ A/B 为一种 CFL

2.26：证明：使用归纳法证明：

①：n=1 时 w 只有 1 个字符，只经过 1 步显然可以得到 w 成立

②：假设 n=k 时对 ∀ 长度为 k 的 w，均可经过 2k-1 步后得到。

下证：n=k+1 时 ∀ 长度 (k+1) 的 w 只经过 2(k+1) 步即可得到

取 Chomsky 标准形式为：（记 w_{k+1} 为 A）

$$\cancel{\begin{cases} A \to BC \\ B \to b \\ C \to c \end{cases}} \qquad \begin{cases} A \to BC \\ B \to bM \\ C \to cN \end{cases}$$

（此处 M、N 只为一个符号的表示，不一定为终结字符）

∴ $A = w_{k+1}$ 长度为 $k+1$

∴ B, C 总长之和为 $k+1$ (合)

∵ B, C长度均为整数，∴ B, C长度均≤k

∴ 假设有生成 B子句需 $2|B|-1$ 步，

生成 C子句需 $2|C|-1$ 步。

∴ 共需要 $1 + 2|C| + 2|B| - 2 = 2(k+1) - 1 = (2k+1)$ 步

(加1是因为 $A \to BC$ 已经用了一步)

∴ 综合上述①、②可知，定理成立

2-30：

a、证明：设 p 为 pumping length

取 $s = 0^p 1^p 0^p 1^p$

∵ $|vxy| \le p$ ∴ 取 $u = 0^{p-a}$，$vxy = \cancel{0^{p-a}} 0^a 1^{p-a}$

$z = 1^a 0^p 1^p$

∴ 取 $v = 0^a$，$x = 1^{p-2a}$，$y = 1^a$

∴ $uv^2xy^2z = 0^{p-a} \cdot 0^{2a}\ 1^{p-2a} \cdot 1^a \cdot 1^a 0^p 1^p$

$= 0^{p+a} 1^p 0^p 1^p \notin S$ ①

而由 pumping lemma，有 $uv^2xy^2z \in S$ ②

∴ ①、②矛盾

∴ 不是 CFL

b. 证明：取 p 为 pumping length

取 $s = 0^p \# 0^{2p} \# 0^{3p}$

取 $u = \text{"}0^p\#\text{"}$，$vxy = 0^p$，$z = 0^p \# 0^{3p}$

∵ $|vy| > 0$

∴ uv^2xy^2z 中 中间一部分 0个数一定会超过

2p ∴ ~~$s \notin L$~~ $uv^2xy^2z \notin L$ ①

∵ 由 pumping lemma 可知 ~~s~~ $uv^2xy^2z \in L$ ②

∴ ①、②矛盾

∴ 不是 CFL.

c、证明：取 p 为 pumping length，设此语言名为 L

取 s 为满足条件的串

① 若对于 $s=uvxyz$，其中 v/y 包含 #，则显然 $uv^2xy^2z \notin L$，与 pumping lemma 矛盾 ∴ 不是 CFL

② 若对 $s=uvxyz$，其中 vxy 只位于 # 左侧，

w 子串有：

取 $t=a^{p}b^{p}$

∵ w 是 t 子串

∴ 取 $w=a^{m}b^{p}$ $(m\leq p)$

取 $u=a^{m}$，则 vxy 为 $\{b^p\}$ 的一个子串.

∴ uv^2xy^2z 中，b 的个数会超过 t 中 b 个数

∴ $uv^2xy^2z \notin L$ ①

∵ 由 pumping lemma，$uv^2xy^2z \in L$ ②

∴ ①、② 矛盾

∴ L 不是 CFL

d、证明：取 p 为 pumping length，取 $k=2$，

并设此语言名为 L

此时 $L=\{t_1\#t_2 \mid t_i\in\{a,b\}^*,\ t_1=t_2\}$.

① 若 vxy 中的 v/y 包含 "#"，则显然不成立

② ∴ 若 vxy 只位于 t_1，取

$t_1\#t_2=a^pb^p\#a^pb^p$ $(m,n<p)$

取 $u=a^p$，$v=b^{m}$ $x=b^n$ $y=b^{p-m-n}$ $z=\#a^pb^p$

∴ $uv^2xy^2z=a^p b^{2p-n}\#a^pb^p$

∴ $uv^2xy^2z \notin L$ ∴ 矛盾 ∴ L 不是 CFL

2-40：

证明：取 C 的一个子串 s，则 $s\in C$。

由 pumping lemma 可知，取 s 的一个划分

$s=uvxyz$，其中 $|vy|>0$，且 $|vxy|\le p$

$\because C$ 是 prefix-closed

$\therefore$ 对于 s，有：$u\in C$，

由 pumping lemma，有 $s=uv^ixy^iz\ (i\ge 0)\in C$

故：$\begin{cases} u\in C \\ uv^i\in C \\ uv^ix\in C \\ uv^ixy^i\in C \end{cases}$

任意串 $(\in C)$

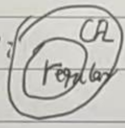
$\because C$ 的范围为无限集，且 u 为 s 的一个任意前缀，

则 $\{u\}$ 构成语言也是个 CFL，

即 $\forall u$，有 $u\in C$。

$\because C$ 无限 $\therefore \{u\}$ 为 C 的一个无限子集

$\therefore u$ 构造的语言为无限 CFL 集合

且任一 regular 都是 CFL，即：

$\therefore$ 对于 CFL，$\{u\}$，其必存在一个

无限子集 $\{a\}$ 为正则语言

$\because \{u\}\subseteq C \wedge \{a\}\subseteq \{u\}$

$\therefore \{a\}$ 为 C 子集

$\therefore C$ 存在一个无限的正则语言子集

2-42：

证明：设 p 为 pumping length.

证 取 $k = p!$ 大于 p，∴ 对 $\forall i \neq j$，有 $t_i \neq t_j$.

∴ 对 $\forall i$ 有 $t_i \in \{1, 2, \ldots, p!\}$ 且互不相同

对 Y 中一个字符作如下简化：

$\cdots \# t_i \# t_{i+1} \# t_{i+2} \# \cdots$

则：取 $s \in Y$，$s = uvxyz$.

①：若 v / y 中包含 #，则 uv^ixy^iz 显然在 $i \neq 0$ 时不会符合 Y 要求

②：若 v / y 中均不含 #，且 x 中不含 # 号，

则 $vxy \in t_i$，则 $|t_i| \le p$

对于 uv^ixy^iz 中的 i，取 $i = 0$，则设 $uxz \in t_i'$

则 $|t_i'| < t_i$，则由上述分析知必存在一个

t_j ($i \neq j$ 且 $|t_j| < |t_i|$) 使 $|t_i'| = |t_j|$

∴矛盾.

③：若 v / y 中均不含 # 号，且 x 中含 # 号，

则 $v \in t_i$，且 $y \in t_{i+1}$

与②同理，对于 uv^ixy^iz 中的 i，取 $i = 0$

也存在一个 $j \neq i\,(i+1)$，使 $|t_j| = |t_i'(i+1)|$

∴矛盾

∴由上述①，②，③，知，Y 不是 CFL