上海交通大学在线考试诚信承诺书

SJTU Online Examination Honor Code Letter

考试不仅是对学习成效的检查，更是对道德品质的检验。自觉维护学校的考风考纪，营造公平、公正的考试环境是全体同学的共同责任和义务。特别在疫情防控的特殊时期，更应强化自律意识，恪守诚信，拒绝舞弊，做一名诚实守信的新时代大学生，用诚信的考试构筑诚信的人生。

Examination is the evaluation of both learning effect and morality. It is the responsibility and obligation of all students to consciously maintain the school's common examination practice, abide by the discipline and create a fair and just examination environment. Especially in the special period of epidemic prevention and control, we should strengthen the consciousness of self-discipline, abide by the integrity, refuse to cheat, be an honest and trustworthy college student in the new era, and build an honest life from the integrity test.

我郑重承诺 I solemnly promise：

（1）本人将履约践诺，知行统一；遵从诚信规范，恪守学术道德；自尊自爱，自省自律。I will fulfill my promise, unify between knowledge and action, abide by the rules of integrity, academic ethics, be self-respected and self-disciplined.

（2）在线考试过程中，自觉遵守学校和老师宣布的考试纪律（详见《上海交通大学本科生学生手册》中的《学生考试纪律规定》，沪交教【2019】28 号），不剽窃，不违纪，不作弊。In the process of online examination, I will consciously abide by the examination discipline announced by the school and the teachers (see the regulations on student examination discipline in the undergraduate student handbook of Shanghai Jiao Tong University, HJJ [2019] No. 28), and do not plagiarize, violate discipline or cheat.

（3）若违反相关考试规定和纪律要求，自愿接受学校的严肃处理或处分。In case of violation of relevant examination regulations and discipline, students shall bear the serious treatment or punishment from the school.

承诺人 Committed by：李昱翰

（学号 Student No：520021910279）

日期 Date (Y/M/D)：2022 年 6 月 6 日

上 海 交 通 大 学 答 题 纸

（ 20 22 至 20 23 学年 第 2 学期 ）

班级号 F2003702　　学号 520021910279　　姓名 李昱翰

课程名称 大学物理 A3 (A卷)　　成绩 ______

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

承诺人： 李昱翰

题号										
得分										
批阅人(流水阅卷教师签名处)										

上 海 交 通 大 学 答 题 纸

（ 2022 至 2023 学年 第 2 学期 ）

课程名称 大学物理 A3 (A卷) 姓名 李昱翰

一、填空题：

1. 电 质

2. 本征值 本征函数

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^*(x)\,\psi(x)\,dx$

4. $\frac{h}{\sqrt{2meU}}$

5. $\sqrt{6}\hbar$ $2\hbar$ $\frac{\hbar}{2}$

6. $\frac{b}{\lambda}$ $\frac{4\pi\sigma b^4 R^2}{\lambda^4}$ $\frac{\sigma b^4 R^2}{\lambda^4 d^2}$

7. 不能 $\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\varphi + p\cos\theta$

8. $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dz^2} + mgz\right)\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi$

9. $\frac{e\lambda_1\lambda_2(U_1-U_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)c}$

10. $2i\hbar x$

11. $\alpha b\varphi_1 \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} + \alpha \delta \varphi_2 e^{-\frac{i}{\hbar}\cdot 2E_0 t}$

上 海 交 通 大 学 答 题 纸

（ 2022 至 2023 学年 第 2 学期 ）

课程名称 大学物理A3 (A卷)　　　　姓名 李[illegible]翰

二、计算题：

1、① $[\hat{P},\hat{Q}]\psi=[\hat{L}_x+i\hat{L}_y,\hat{L}_x-i\hat{L}_y]\psi=(L_x^2-iL_xL_y+iL_yL_x+L_y^2)\psi-(L_x^2+iL_xL_y-iL_yL_x+L_y^2)\psi$

$=-i[L_x,L_y]\psi-i[L_x,L_y]\psi=-2i\cdot i\hbar\hat{L}_z\psi=2\hbar\hat{L}_z\psi$

$\therefore[\hat{P},\hat{Q}]=2\hbar\hat{L}_z$

② $[\hat{L}^2,\hat{P}]=[\hat{L}^2,\hat{L}_x+i\hat{L}_y]=[\hat{L}^2,\hat{L}_x]+i[\hat{L}^2,\hat{L}_y]=0$

(因为题中给出 $\hat{L}^2$ 与 L_x、L_y 对易)

③：$[\hat{L}^2,\hat{Q}]=[\hat{L}^2,\hat{L}_x-i\hat{L}_y]=[\hat{L}^2,\hat{L}_x]-i[\hat{L}^2,\hat{L}_y]=0$

~~(题中给出~~

2、①：径向概率密度：~~$P(r)=r^2$~~

$\because\psi_{nlm}=R_{nl}Y_{lm}$

$\therefore$ 径向概率密度为：$r^2R_{nl}^2=\frac{r^2}{\pi a_0^3}e^{-\frac{2r}{a_0}}$

②：最可几半径：

由①，当 $r^2R_{nl}^2$ 最大时对应半径即为最可几半径

$\therefore$ 取 $F(r)=\ln(r^2R_{nl}^2)=-\ln(\pi a^3)+2\ln r-\frac{2r}{a_0}$

$\therefore F'(r)=\frac{2}{r}-\frac{2}{a_0}$

$\therefore r=a_0$ 时 $F'(r)=0$，$\therefore$ 最可几半径为 a_0

③：$\frac{1}{r^2}$ 平均值：$\iiint_\Omega\psi^*\frac{1}{r^2}\psi\,dV=\int_0^{+\infty}dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi a^3}\cdot r^2\sin\varphi\cdot\frac{1}{r^2}e^{-\frac{2r}{a_0}}d\varphi$

$=\frac{4\pi}{\pi a_0^3}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{2r}{a_0}}dr$

$=\frac{4}{a_0^3}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{2r}{a_0}}dr=\frac{2}{a_0^2}$

上海交通大学答题纸

（2022至2023 学年 第2学期）

课程名称 大学物理A3（A卷）　　姓名 李星翰

3. 解：∵粒子处在一维无限深势阱中且 $\psi(x)=\begin{cases}Ax(a-x), & 0<x\le a\\ 0, & x<0\text{或}x>a\end{cases}$，

∴势阱如下所示。

∴在势阱内，有：$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi=E\psi$

∴ $\psi=\begin{cases}A\sin(kx+\varphi) & 0\le x\le a,\\ 0, & \text{others.}\end{cases}$，$\left(k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\right)$

∵ $\psi(0)=0$ 且 $\psi(a)=0$

∴取 $\varphi=0$，则 $k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}=\frac{n\pi}{a}$

∴ $E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

∴ ~~$\psi(x)=$~~ ∵ $\int_0^a A^2\sin^2\frac{n\pi}{a}x\,dx=1$

∴ $A=\sqrt{\frac{2}{a}}$

∴ $\varphi_n(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), & 0\le x\le a\\ 0 & \text{others.}\end{cases}$

∴ 粒子状态函数为 $\psi(x)=\begin{cases}Ax(a-x), & 0\le x\le a\\ 0 & \text{others}\end{cases}$

又∵ 对于本势阱，设其取到n时几率振幅为 c_n，

则有：$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$.

∴ $c_n=\int_0^a\varphi_n^*(x)\psi(x)\,dx=A\sqrt{\frac{2}{a}}\int_0^a x(a-x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$.

$=A\sqrt{\frac{2}{a}}\frac{2a^3}{n^3\pi^3}(1-\cos n\pi)$

$=A\sqrt{\frac{2}{a}}\frac{2a^3}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n)$.

又∵ $E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

∴ $\bar{E}=\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2E_n$

$=\sum_{n=1}^{\infty}c_{2n-1}^2E_{2n-1}$（只有n为奇数）

$=\frac{16A^2a^3\hbar^2}{\pi^4 m}\sum\frac{1}{n^4}$（n只为奇数）

$=\frac{16A^2\cdot a^3\hbar^2}{\pi^4 m}\cdot\frac{\pi^4}{96}$

$=$ ~~$\frac{1}{6}A^2a^3\hbar^2$~~ $\frac{A^2a^3\hbar^2}{6m}$

（其中 $A=\sqrt{\frac{30}{a^5}}$）.

上海交通大学答题纸

（2022至2023 学年 第2学期）

课程名称 大学物理A3（A卷） 姓名 李鹏翰

4. 解：①：∵ l 可取 3，2，1.

∴ $\hat{L}^2$ 可能取值为：$\cancel{2\sqrt{3}\hbar}$ $12\hbar^2$，$\cancel{\sqrt{6}\hbar}$ $6\hbar^2$，$\cancel{\sqrt{2}\hbar}$ $2\hbar^2$

②：∵ m 可取 1，2，−1，

∴ L_z 可能取值为：$\hbar$，$2\hbar$，$-\hbar$

③：$\hat{L}^2$ 中，$P(\hat{L}^2=12\hbar^2)=\frac{4}{9}$，$P(\hat{L}^2=6\hbar^2)=\frac{4}{9}$

$P(\hat{L}^2=2\hbar^2)=\frac{1}{9}$

$$\therefore \overline{\hat{L}^2}=\frac{4}{9}\times 12\hbar^2+\frac{4}{9}\cdot 6\hbar^2+\frac{1}{9}\cdot 2\hbar^2=\frac{74}{9}\hbar^2$$

④：$\hat{L}_z$ 中，$P(\hat{L}_z=\hbar)=\frac{4}{9}$，$P(\hat{L}_z=2\hbar)=\frac{4}{9}$，$P(\hat{L}_z=-\hbar)=\frac{1}{9}$.

$$\therefore \overline{\hat{L}_z}=\frac{4}{9}\cdot\hbar+\frac{4}{9}\cdot 2\hbar-\frac{1}{9}\cdot\hbar=\cancel{\frac{11}{9}\hbar}\ \frac{11}{9}\hbar$$

（上式中，$P(l=3,m=1)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}Y_{31}^{*}\psi\,dx\right]^2=\frac{4}{9}$，

$P(l=2,m=2)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}Y_{22}^{*}\psi\,dx\right]^2=\frac{4}{9}$，

$P(l=1,m=-1)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}Y_{1,-1}\psi\,dx\right]^2=\frac{1}{9}$）.

5. (1)：~~①~~ ①：归一化条件：$\int_0^a\psi^2(x,0)\,dx=1$

②：$\int_0^a A^2(1+\cos\frac{\pi x}{a})^2\sin^2\frac{\pi x}{a}\,dx$

$=A^2\int_0^a\left(\sin^2\frac{\pi x}{a}\cos^2\frac{\pi x}{a}+2\cos\frac{\pi x}{a}\sin^2\frac{\pi x}{a}+\sin^2\frac{\pi x}{a}\right)dx$

$=\frac{5}{8}aA^2=1$

$\therefore A=\sqrt{\frac{8}{5a}}=\frac{2\sqrt{10}}{5\sqrt{a}}$

(2)：∵ $\psi(x,0)=A\left(\sin\frac{\pi x}{a}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{a}\right)$.

$=\sqrt{\frac{8}{5a}}\left(\sin\frac{\pi x}{a}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{a}\right)$.

$=\sqrt{\frac{4}{5}}\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{2\pi x}{a}\right)$

$=\sqrt{\frac{4}{5}}\left(\Phi_1(x)+\frac{1}{2}\Phi_2(x)\right)$

上 海 交 通 大 学 答 题 纸

（ 2022至 2023 学年 第 2 学期 ）

课程名称 大学物理A3(A卷) 姓名 李昱翰

(接上页5.(2))

∴测量粒子能量可能值为:

①: $E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$, $P=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_1^*(x)\psi(x,0)\,dx\right]^2=\frac{4}{5}$,

②: $E_2=\frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$, $P=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_2^*(x)\psi(x,0)\,dx\right]^2=\frac{1}{5}$

∴综合上述①,②,有: $\bar{E}=\frac{4}{5}E_1+\frac{1}{5}E_2=\frac{4\pi^2\hbar^2}{5ma^2}$

(3): 由(1)知: $\psi(x,0)=\sqrt{\frac{4}{5}}\phi_1(x)+\sqrt{\frac{1}{5}}\phi_2(x)$

∴ $\cancel{\psi(x,t)=\frac{2\sqrt{5}}{5}\phi_1(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t}}$

∴有: $\begin{pmatrix}E_1&0\\0&E_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$

∴ $\begin{cases}E_1c_1=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}c_1\\E_2c_2=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}c_2\end{cases}$

∴ $c_1=e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t}$

$c_2=e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t}$

∴任何时刻t有: $\psi(x,t)=\frac{2\sqrt{5}}{5}\phi_1(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t}+\frac{\sqrt{5}}{5}\phi_2(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t}$,

($E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$, $E_2=\frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}$, $\phi_1(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\ (x\in[0,a])$,

$\phi_2(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{2\pi x}{a}\ (x\in[0,a])$).

概率密度 $\rho(x,t)=|\psi(x,t)|^2=\psi^*(x,t)\psi(x,t)$

$=\frac{4}{5}\phi_1^*\phi_1+\frac{1}{5}\phi_2^*\phi_2+\frac{2}{5}\phi_2^*\phi_1e^{\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t}+\frac{2}{5}\phi_1^*\phi_2e^{\frac{i}{\hbar}(E_1-E_2)t}$

$=\frac{8}{5a}\sin^2\frac{\pi x}{a}+\frac{2}{5a}\sin^2\frac{2\pi x}{a}+\frac{4}{5a}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}e^{\frac{i}{\hbar}\cdot\frac{3\pi^2\hbar^2}{2ma^2}t}$

$+\frac{4}{5a}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}e^{-\frac{i}{\hbar}\cdot\frac{3\pi^2\hbar^2}{2ma^2}t}$

$=\frac{8}{5a}\sin^2\frac{\pi x}{a}+\frac{2}{5a}\sin^2\frac{2\pi x}{a}+\frac{8}{5a}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{3\pi^2\hbar}{2ma^2}t$

(4): (2)中结果与时间无关

上 海 交 通 大 学 答 题 纸

（ 2022 至 2023 学年 第 2 学期 ）

课程名称 大学物理(A类)(A卷)　　　　姓名 李星翰

6.(1)：证明：设 $\hat{F}$ 为一个厄米算符.

∴ 由厄米算符定义，$\int \psi^* \hat{F} \psi dx = \int (\hat{F}\psi)^* \psi dx$

∴ $\int \cancel{\Phi^* \hat{F} \Phi dx}$ = 取 $\psi = \varphi = \Phi$，且 $\hat{F}\Phi = \lambda \Phi$

∴ $\int \Phi^* \hat{F} \Phi dx = \lambda \int \Phi^* \Phi dx = \int (\hat{F}\Phi)^* \Phi dx = \lambda^* \int \Phi^* \Phi dx$

∴ $(\lambda - \lambda^*) \int \Phi^* \Phi dx = 0$

∵ $\int \Phi^* \Phi dx \neq 0$

∴ $\lambda = \lambda^*$，即厄米算符本征值均为实数.

由于 $\hat{F}$ 的任意性

(2)：证明：设 $\hat{F}$ 为一个厄米算符，取两个不同本征值 l_1、l_2，设其对应本征函数为 ψ_1、ψ_2

∴ $\begin{cases} \hat{F}\psi_1 = l_1 \psi_1 & ① \\ \hat{F}\psi_2 = l_2 \psi_2 & ② \end{cases}$

对①，有：$(\hat{F}\psi_1)^* = (l_1 \psi_1)^* = l_1 (\psi_1)^*$

∴ $(\hat{F}\psi_1)^* \psi_2 = l_1 (\psi_1)^* \psi_2$

对②有：$\psi_1^* \hat{F} \psi_2 = l_2 \psi_1^* \psi_2$

∵ $\hat{F}$ 为厄米算符

∴ $\int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{F}\psi_1)^* \psi_2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \hat{F} \psi_2 dx$，

即 $l_1 \int \psi_1^* \psi_2 dx = l_2 \int \psi_1^* \psi_2 dx$

∴ $(l_1 - l_2) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \psi_2 dx = 0$

∵ $l_1 \neq l_2$

∴ $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \psi_2 dx = 0$

∴ 即厄米算符属于不同本征值的本征函数相互正交.

上海交通大学答题纸

（ 20 22 至 20 23 学年 第 2 学期 ）

课程名称 大学物理A3（A卷）． 姓名 李昱翰

下冲： ∴~~设本征矢~~ ∵为双态系统

∴设本征矢为 $C=(c_1, c_2)^T$，

∴设本征值为 λ

$$\therefore HC=\begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \begin{pmatrix} E_0-\lambda & -A \\ -A & E_0-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=0$$

∴得到久期方程 $\begin{vmatrix} E_0-\lambda & -A \\ -A & E_0-\lambda \end{vmatrix}=0$

$\therefore (E_0-\lambda)^2-A^2=0$

$\therefore \lambda=E_0\pm A$

∴本征值为：E_0+A 或 E_0-A

①：取 $\lambda=E_0+A$，则：

$$\begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=(E_0+A)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \begin{cases} E_0c_1-Ac_2=(E_0+A)c_1 \\ c_1^2+c_2^2=1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1^2+c_2^2=1 \end{cases}$$

∴本征矢为：$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

②：取 $\lambda=E_0-A$，则：

$$\begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=(E_0-A)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

$\therefore E_0c_1-Ac_2=(E_0-A)c_1$

$$\therefore \begin{cases} c_1=c_2 \\ c_1^2+c_2^2=1 \end{cases}$$

∴本征矢为 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.