

MES NOTES DE COURS

Eric

March 5, 2014

Contents

I	MATHÉMATIQUES	1
1	Algèbre	2
2	Analyse	5
2.1	算子 (laplace, gradient etc.)	6
2.2	Autres	8
3	微分方程与边值问题	9
3.1	一阶微分方程	9
3.1.1	一阶线性微分方程	10
3.1.2	替换方法和恰当方程	10
3.1.3	恰当微分方程	10
3.2	数值逼近	11
3.2.1	欧拉方法	11
3.2.2	改进的欧拉方法	11
3.2.3	龙格 -库塔方法	12
4	Formule	13
4.1	Tylor series	13
4.2	常用的初等数学公式	14
4.2.1	有限项数项级数	14
4.2.2	双曲函数	14
4.2.3	三角	15
4.2.4	初等几何	16
4.2.5	中值定理	16
4.2.6	曲率	16
4.3	积分表	16
4.4	Transformations	20
4.4.1	Dirac	20
4.4.2	Transformation de Fourier	20
4.5	Other	21

II	PHYSIQUE	22
5	The New Quantum Universe	23
5.1	海森堡不确定原理	23
5.2	薛定谔和物质波	24
5.3	原子核模型	24
5.4	量子隧道效应	25
5.4.1	核反应	25
5.5	泡利与元素	26
5.5.1	金属, 绝缘体与半导体	26
5.5.2	晶体管与微电子	27
5.6	量子合作和超流体	27
5.6.1	费米子与玻色子	28
5.7	量子跃迁	29
5.7.1	光子与偏振光	29
5.7.2	瞬时的信息坍缩	29
5.7.3	薛定谔的猫	30
6	Quantique	31
6.1	Formule	31
6.2	Equation de Schrödinger	31
6.3	Postulats et formalisme de la physique quantique	33
6.4	Oscillateur harmonique	34
6.5	Le moment cinétique: l'orbital et l'intrinsèque	34
6.5.1	Spin	35
7	Simulation	36
7.1	Calcule différentiel	36
7.1.1	Formulaire	37
7.1.2	Jacobienne et Hessien	37
7.1.3	Exemples	37
7.2	Convecivité	38
7.3	Autre	39
7.4	Phénomènes	40
7.5	Discrétisation en temps	41
8	Automation	42
8.1	自动控制的基本概念	42
8.2	控制系统的数学模型	42
8.3	时域分析法	43
8.3.1	典型输入信号	43
8.3.2	一阶系统时域分析	43
8.3.3	二阶系统	43

8.3.4	稳定性分析	44
8.4	根轨迹法	44
8.5	线性系统的频率响应法	44
8.5.1	Nyquist 稳定判据	45
8.5.2	开环频域指标	45
9	Transfert thermique	46
9.1	Des nombres importants	46
9.1.1	Convection forcée	47
9.1.2	Convection naturelle	48
9.1.3	Massique	48
9.2	Modèle	49
9.2.1	Ailette: $B_i < 0.1$	49
9.2.2	Ecoulement	50
9.2.3	Stationnaire Uniform Établi	50
9.2.4	Bilan	50
9.3	Flux surfacique	51
9.3.1	Milieu transparent et corps opaque	51
9.3.2	Conduction et conducto-convection	51
9.3.3	Rayonnement	52
9.4	Formule	54
9.4.1	Théorème de Rénaulde	54
9.5	Math	55
9.5.1	$\text{erf}(x)$	55
9.5.2	Angle solide	55
10	矢量和张量	57
10.1	置换符号 ε	57
10.1.1	$\varepsilon - \delta$ 恒等式	57
10.2	坐标变换	57
10.3	张量运算	58
10.4	张量变换	58
10.5	gradient, divergence etc	59

Preface

This book the notebook edited by Eric for his courses à L'Ecole Centrale de Pékin.

In this book, I have used French, English and Chinese three languages.

If you find any error, please feel free to contact me by E-mail to [Eric](#).

When you send mail, please specify the error position.

Your feedback is a great contribution for the success of this book!

Thank you!

À MOI DANS LE FUTURE!

TO THOSE WHO WILL REVIEW THE COURSE!

Part I

MATHÉMATIQUES

Chapter 1

Algèbre

Espace métrique On appelle (E, d) un espace métrique si E est un ensemble et d une distance sur E .

Espace complet Un espace métrique M est dit complet si toute suite de Cauchy de M a une limite dans M (c'est-à-dire qu'elle converge dans M).

Intuitivement, un espace est complet s'il n'a pas de trou, s'il n'a aucun point manquant.

Par exemple, les nombres rationnels ne forment pas un espace complet, puisque $\sqrt{2}$ n'y figure pas alors qu'il existe une suite de Cauchy de nombres rationnels ayant cette limite.

Il est toujours possible de remplir les trous amenant ainsi à la complétion d'un espace donné.

Espace euclidien il est défini par la donnée d'un espace vectoriel sur le corps des réels, de dimension finie, muni d'un produit scalaire, qui permet de mesurer distances et angles.

Espace hermitien En mathématiques, un espace hermitien est un espace vectoriel sur le corps commutatif des complexes de dimension finie et muni d'un produit scalaire.

La géométrie d'un tel espace est analogue à celle d'un espace euclidien

Une forme hermitienne est une application définie sur $E \times E$ à valeur dans \mathbf{C} notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$, telle que :

- pour tout y fixé l'application $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est \mathbf{C} -linéaire et
- $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

En particulier, $\langle x, x \rangle$ est réel, et $x \mapsto \langle x, x \rangle$ est une forme quadratique sur E vu comme \mathbf{R} -espace vectoriel.

Espace préhilbertien En mathématiques, un espace préhilbertien est défini comme un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire

Un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est alors un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Espace de Hilbert C'est un espace préhilbertien complet, c'est-à-dire un espace de Banach dont la norme $\| \bullet \|$ découle d'un produit scalaire ou hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par la formule

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

C'est la généralisation en dimension quelconque d'un espace euclidien ou hermitien.

Application hermitien's eigenvalues are real values.

Proof. Soient A une matrice autoadjointe (réelle ou complexe), λ une racine de son polynôme caractéristique (il en existe au moins une, mais a priori complexe), et X une matrice colonne complexe non nulle telle que $AX = \lambda X$. Alors

$$\overline{\lambda} X^* . X = (AX)^* . X = X^* . A^* . X = X^* . A . X = \lambda X^* . X$$

or $X^* . X$ est non nul, donc λ est réel. \square

Théorème 1.0.1. *Théorème spectral en dimension finie, pour les endomorphismes — Tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien ou hermitien est diagonalisable dans une base orthonormale et ses valeurs propres sont toutes réelles.*

Théorème spectral pour les matrices — Soit A une matrice symétrique réelle (resp. hermitienne complexe), alors il existe une matrice P orthogonale (resp. unitaire) et une matrice D diagonale dont tous les coefficients sont réels, telles que la matrice $A = P.D.P^{-1}$

Théorème 1.0.2. *Diagonalisation d'un endomorphisme autoadjoint et d'une matrice autoadjointe —*

Un endomorphisme d'un espace euclidien ou hermitien est autoadjoint si et seulement s'il existe une base orthonormale de vecteurs propres, avec valeurs propres toutes réelles.

Une matrice carrée complexe A est autoadjointe si et seulement s'il existe une matrice unitaire U telle que $U.A.U^{-1}$ soit diagonale et réelle.

*Une matrice carrée réelle A est **symétrique** si et seulement s'il existe une **matrice orthogonale** P telle que $P.A.P^{-1}$ soit diagonale et réelle.*

Rappel: Une matrice carrée A (n lignes, n colonnes) à coefficients réels est dite **orthogonale** 正交矩阵 si $A^t A = I_n$, c'est-à-dire que $A^t = A^{-1}$

Théorème de Riesz (Fréchet-Riesz)

un théorème qui représente les éléments du dual d'un espace de Hilbert comme produit scalaire par un vecteur de l'espace. Soient :

- H un espace de Hilbert (réel ou complexe) muni de son produit scalaire noté $\langle ., . \rangle$
- $f \in H'$ une forme linéaire continue sur H .

Alors il existe un unique y dans H tel que pour tout x de H on ait $f(x) = \langle y, x \rangle$

$$\exists! y \in H, \quad \forall x \in H, \quad f(x) = \langle y, x \rangle$$

Extension aux formes bilinéaires

Si a est une forme bilinéaire continue sur un espace de Hilbert réel H (ou une forme sesquilinéaire complexe continue sur un Hilbert complexe), alors il existe une unique application A de H dans H telle que, pour tout $(u, v) \in H \times H$, on ait $a(u, v) = \langle Au, v \rangle$. De plus, A est linéaire et continue, de norme égale à celle de a .

$$\exists! A \in \mathcal{L}(H), \quad \forall (u, v) \in H \times H, \quad a(u, v) = \langle Au, v \rangle.$$

Cela résulte immédiatement de l'isomorphisme canonique (isométrique) entre l'espace normé des formes bilinéaires continues sur $H \times H$ et celui des applications linéaires continues de H dans son dual, et de l'isomorphisme ci-dessus entre ce dual et H lui-même.

Théorème de Lax-Milgram

Appliqué à certains problèmes aux dérivées partielles exprimés sous une formulation faible (appelée également formulation variationnelle). Il est notamment l'un des fondements de la méthode des éléments finis. Soient :

- \mathcal{H} un espace de Hilbert réel ou complexe muni de son produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de norme associée notée $\|\cdot\|$
- $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire (ou une forme sesquilinéaire si \mathcal{H} est complexe) qui est
 - continue sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H} : \exists c > 0, \forall (u, v) \in \mathcal{H}^2, |a(u, v)| \leq c\|u\|\|v\|$
 - coercive sur \mathcal{H} (certains auteurs disent plutôt \mathcal{H} -elliptique) : $\exists \alpha > 0, \forall u \in \mathcal{H}, a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$
- $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur \mathcal{H}

Sous ces hypothèses il existe un unique u de \mathcal{H} tel que l'équation $a(u, v) = L(v)$ soit vérifiée pour tout v de \mathcal{H} :

$$\exists! u \in \mathcal{H}, \forall v \in \mathcal{H}, a(u, v) = L(v)$$

Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de \mathcal{H} qui minimise la fonctionnelle $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$ pour tout v de \mathcal{H} , c'est-à-dire :

$$\exists! u \in \mathcal{H}, J(u) = \min_{v \in \mathcal{H}} J(v)$$

– Δ admet une base de fonctions propres $v_k, k \in N$, orthonormales pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$

Chapter 2

Analyse

COERVITÉ Une fonction f définie sur un espace normé X à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est dite coercive sur une partie non bornée P de X si

$$\lim_{\substack{\|x\| \rightarrow +\infty \\ x \in P}} f(x) = +\infty$$

ou de manière plus précise

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad \exists \rho \geq 0 : \quad (x \in X \text{ et } \|x\| \geq \rho) \implies f(x) \geq \nu.$$

Il revient au même de dire que les intersections avec P des ensembles de sous-niveau de la fonction sont bornées :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad \{x \in P : f(x) \leq \nu\} \text{ est borné.}$$

Si l'on ne spécifie pas la partie P , il est sous-entendu que $P=X$.

Cas d'une forme bilinéaire

Plus spécifiquement, une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive si elle vérifie :

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in X : \quad a(x, x) \geq \alpha \|x\|^2.$$

Certains auteurs préfèrent utiliser l'appellation X -elliptique pour cette dernière définition. Celle-ci intervient entre autres dans le théorème de Lax-Milgram et la théorie des opérateurs elliptiques, accessoirement dans la méthode des éléments finis.

Lien entre les définitions

Dans le cas où a est une forme bilinéaire, en posant $f(u) = a(u, u)$ on a équivalence entre la coercivité de a et celle de f . En effet, $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ implique qu'il existe $R > 0$ tel que $\|x\| \geq R \implies f(x) \geq 1$. Ainsi:

$$\left(\frac{R}{\|u\|}\right)^2 a(u, u) = a\left(\frac{R}{\|u\|}u, \frac{R}{\|u\|}u\right) = f\left(\frac{R}{\|u\|}u\right) \geq 1$$

et

$$a(u, u) \geq \left(\frac{\|u\|}{R}\right)^2.$$

维基百科上没有直接给出 coercivité 的定义, 但是按照维基百科的解释, 我觉得 coercivité 的定义是

$$\alpha = \left(\frac{1}{R}\right)^2$$

Application contractante

Une application contractante, ou contraction, est une application k -lipschitzienne avec $0 \leq k \leq 1$

Théorème du point fixe pour une application contractante

Soient E un espace métrique complet (non vide) et f une application k -contractante de E dans E . Il existe un point fixe unique x^* de f (c'est-à-dire un x^* dans E tel que $f(x^*) = x^*$). De plus, toute suite d'éléments de E vérifiant la récurrence

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

vérifie la majoration

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

donc converge vers x^*

Inégalité de Poincaré un résultat de la théorie des espaces de Sobolev

Cette inégalité permet de borner une fonction à partir d'une estimation sur ses dérivées et de la géométrie de son domaine de définition

L'inégalité de Poincaré classique Soit p , tel que $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert de largeur finie (borné dans une direction). Alors il existe une constante C , dépendant uniquement de Ω et p , telle que, pour toute fonction u de l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

2.1 算子 (laplace, gradient etc.)

拉普拉斯算子: 梯度的散度

$$\Delta f = \operatorname{div}(\vec{\operatorname{grad}} f)$$

Cartésien:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

函数的拉普拉斯算子也是该函数的黑塞矩阵的迹 $\Delta f = \operatorname{tr}(H(f))$

极坐标下的拉普拉斯算子表示法

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Equation de poisson

$$\Delta \varphi = f$$

si $f = 0$, 那么泊松方程就会变成一个齐次方程, 称为拉普拉斯方程

高斯

高斯公式用散度表示为:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \iint_{\Sigma} A_n dS = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的边界曲面, 而

$$A_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$$

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot S$$

n 是向量 A 在曲面 Σ 的外侧法向量上的投影。

斯托克斯公式

\mathbf{R}^3 上的斯托克斯公式设 S 是分片光滑的有向曲面, S 的边界为有向闭曲线, 即 $\Gamma = \partial S$, 且 S 的正向与 S 的侧符合右手规则: 函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 都是定义在 S 连同其边界 Γ 上且都具有一阶连续偏导数的函数, 则有

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

这个公式叫做 \mathbf{R}^3 上的斯托克斯公式或开尔文—斯托克斯定理、旋度定理。这和函数的旋度有关, 用梯度算符可写成

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

通过以下公式可以在“对坐标的”曲线积分”和“对面积的”面积积分”之间相互转换:

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

格林公式 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 ∂D (∂D 是 D 取正向的边界曲线) 围成, 函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\oint_{\partial D} (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

格林第一公式 设函数 $u(x, y, z)$ 和 $v(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上具有一阶及二阶连续偏导数, 则有

$$\iiint_{\Omega} u \Delta v dxdydz = \oint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dxdydz$$

其中 Σ 是闭区域 Ω 的整个边界曲面, $\frac{\partial v}{\partial n}$ 为函数 $v(x, y, z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数

更加简洁的写法:

$$\int_{\Omega} u \Delta v d\Omega = \int_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\Sigma - \int_{\Omega} \text{grad} u \cdot \text{grad} v d\Omega$$

也可以用 *intégration par partie* 来理解: div 是二次微分, grad 是一次微分, div 可以看成是在 grad 的基础上再来一次微分, 而 $\frac{\partial v}{\partial n} = \langle \text{grad} v, \vec{n} \rangle$, 所以 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 可以理解成一次微分

格林第二公式 设 $u(x, y, z), v(x, y, z)$ 是两个定义在闭区域 Ω 上的具有二阶连续偏导数的函数, $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}$ 依次表示 $u(x, y, z), v(x, y, z)$ 沿 Σ 的外法线方向的方向导数, 则有

$$\iiint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dxdydz = \oint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

2.2 Autres

Une matrice

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

由 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 三个点组成的三角形的面积: $surf = \frac{1}{2} \det P$

Chapter 3

微分方程与边值问题

3.1 一阶微分方程

Théorème 3.1.1. (解的存在性和唯一性) 假设函数 $f(x, y)$ 和他的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$, 在 xy 平面上含有点 (a, b) 的某一矩形区域上连续, 那么初始问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(a) = b \quad (\text{I3-I1-I1})$$

在含有点 a 的开区间 I 上有且仅有定义在区间 I 上的一个解.

Example 1. 在微分方程 $dy/dx = -y$ 中, 函数 $f(x, y) = -y$ 和偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$ 在整个 xy 平面上连续, 因此由定理 3.1.1 知, 对任意的初始值 (a, b) 都有唯一解, 尽管定理肯定了解存在于含有 $x=a$ 的某一个区间上, 但是对于所有 x 来讲 $y(x) = Ce^{-x}$ 都被定义为解.

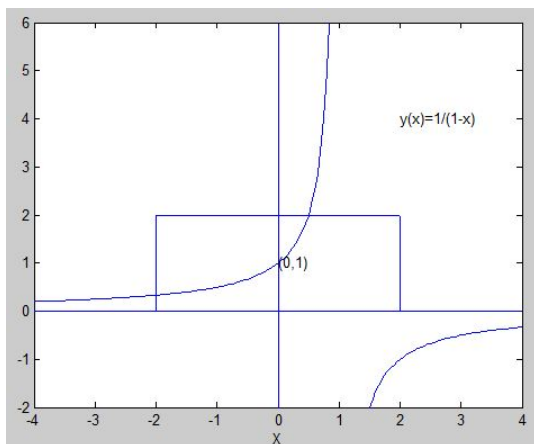
Note. 之前, 我们讨论了非常简单的微分方程 $\frac{dy}{dx} = y^2$, 这里 $f(x, y) = y^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$. 这两个函数在 xy 平面上都连续, 特别在矩形 $-2 < x < 2, 0 < y < 2$ 上也连续. 由于点 $(0, 1)$ 属于该矩形, 所以根据定理 3.1.1, 初值问题

$$\frac{dy}{dx} = y^2, y(0) = 1 \quad (\text{I3-I1-I2})$$

在含有 $a=0$ 的某个区间上有唯一解, 确实, 他就是我们之前求过的解

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

但是, 在 $x=1$ 处, $1/(1-x)$ 不连续, 所以在整个区间 $-2 < x < 2$ 上不存在唯一连续解, 这样, 定理 3.1.1 中的解区间 I 可能不像矩形 $-2 < x < 2, 0 < y < 2$ 那么宽, 该矩形上函数 $f(x, y)$ 和偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 都连续. 从几何上讲, 其原因是定理给出的解曲线在它达到区间的又给或两个端点之前, 可能离开了矩形, 而在矩形内部的解一定存在



图中解曲线在到达区间 I 的右端点之前离开矩形 I

3.1.1 一阶线性微分方程

Théorème 3.1.2. 在两个系数函数 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 都连续的某一区间上, 求解一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (\text{I3-I1-I3})$$

通过对 [I3-I1-I3](#) 两边乘以适当的积分因子, 可以得到一种标准解法, 我们乘以

$$\rho(x) = e^{\int P(x)dx} \quad (\text{I3-I1-I4})$$

结果为

$$e^{\int P(x)dx} \frac{dy}{dx} + P(x)e^{\int P(x)dx} y = Q(x)e^{\int P(x)dx} \quad (\text{I3-I1-I5})$$

方程 [I3-I1-I5](#) 的左边是 $y(x)e^{\int P(x)dx}$ 的微分两边积分, 最后求出 [I3-I1-I3](#) 的通解为:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right) \quad (\text{I3-I1-I6})$$

3.1.2 替换方法和恰当方程

Théorème 3.1.3. 形如 $\frac{dy}{dx} = F(ax + by + c)$ 的微分方程可以通过变换 $v = ax + by + c$ 将其变化分离变量型

3.1.3 恰当微分方程

Théorème 3.1.4. (恰当型判别准则) 假设在矩形开区域 $R : a < x < b, c < y < d$ 上, 函数 $M(x, y), N(x, y)$ 连续且有连续一阶偏导数, 那么微分方程

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (\text{I3-I1-I7})$$

是恰当型的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (\text{I3-I1-I8})$$

在矩形 R 上成立. 即存在 R 上的函数 $F(x, y)$, 满足 $\frac{\partial F}{\partial x} = M, \frac{\partial F}{\partial y} = N$ 的充要条件是式 [I3-I1-I8](#) 在矩形 R 上成立.

Note. 一般的, 为了求解恰当方程 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, 我们执行以下步骤:

首先, 把 $M(x, y)$ 对 x 进行积分, 且写成下面的形式

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y)$$

然后通过 $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$ 求出 $g(y)$, 这样就得到方程的隐式解 $F(x, y) = C$

Example 2. 求解微分方程 $(6xy - y^2)dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)dy = 0$

解: 设 $M(x, y) = (6xy - y^2), N(x, y) = (4y + 3x^2 - 3xy^2)$ 因为

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x - 3y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

所以方程是恰当的

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) = \int (6xy - y^2)dx + g(y) = 3x^2y - xy^3 + g(y)$$

然后对 y 进行微分, 并设 $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$ 得到

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 3xy^2 + g'(y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2$$

整理得到: $g'(y) = 4y$, 于是 $g(y) = 2y^2 + C_1$, 从而

$$F(x, y) = 3x^2y - xy^3 + 2y^2 + C_1$$

因此微分方程的隐式通解为

$$3x^2y - xy^3 + 2y^2 = C$$

3.2 数值逼近

3.2.1 欧拉方法

已知初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0. \quad (\text{I3-I2-I1})$$

步长为 h 的欧拉方法: 应用迭代公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (n \geq 0) \quad (\text{I3-I2-I2})$$

来依次计算在各个点 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 对真实解 $y=f(x)$ 的真实值 $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$ 的逼近值 y_1, y_2, \dots, y_n

3.2.2 改进的欧拉方法

已知初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0. \quad (\text{I3-I2-I3})$$

假设对步长 h 执行 n 步以后, 已经得到在 $x_n = x_0 + nh$ 点解的真值 $y(x_n)$ 逼近值 y_n , 可应用欧拉方法来获得在点 $x_{n+1} = x_n + h$ 的解的真值的一个初步估计, 即称之为 u_{n+1} 而不是 y_{n+1} , 则

$$u_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + hk_1. \quad k_1 = f(x_n, y_n) \quad (\text{I3-I2-I4})$$

既然 $u_{n+1} \approx y(x_{n+1})$, 可取 $k_2 = f(x_{n+1}, y_{n+1})$ 作为解曲线 $y = f(x)$ 在 $x = x_{n+1}$ 点的斜率的第二个估计.

当然, 我们已经求出在 $x = x_n$ 的近似斜率 $k_1 = f(x_n, y_n)$. 为了获得在整个区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 上解曲线平均斜率的更加精确的估计, 为什么不平均这两个斜率呢?

这个思想就是改进的欧拉方法的本质.

Théorème 3.2.1. 算法 改进的欧拉方法

给定初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0. \quad (\text{I3-I2-I5})$$

$$\text{步长为 } h \text{ 的欧拉方法: 应用迭代公式 } \begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ u_{n+1} = y_n + hk_1 \\ k_2 = f(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2) \end{cases}$$

来依次计算 $y = f(x)$ 在点 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的真值 $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$ 的逼近值 y_1, y_2, \dots, y_n .

Note. 改进后的欧拉方法使用的是一种称为预测 - 校正方法的一类数值技术之一. 首先计算下一个 y 值的预测值 u_{n+1} , 然后它自我校正. 这样步长为 h 的改进的欧拉方法

由使用预测值

$$u_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (\text{I3-I2-I6})$$

和校正值

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})) \quad (\text{I3-I2-I7})$$

构成.

3.2.3 龙格 - 库塔方法

Chapter 4

Formule

4.1 Tylor series

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0(x^{2n+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0(x^{2n+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0(x^{2n+2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + 0(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + 0(x^n) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + 0(x^n) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots (2n)}x^n + 0(x^n)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots - (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots (2n)}x^n - 0(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} x^n + 0(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} x^n + 0(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + 0(x^n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad x \in (-1, 1]$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + 0(x^{2n+2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad x \in [-1, 1]$$

$$\operatorname{arcth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + 0(x^{2n+2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \quad x \in [-1, 1]$$

arcsin arcsh tan 待验证

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot (2n) \cdot (2n+1)} x^{2n+1} + 0(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{arcsh} x = x - \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \dots + \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot (2n) \cdot (2n+1)} x^{2n+1} + 0(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{11}{315} x^7 + 0(x^8)$$

4.2 常用的初等数学公式

4.2.1 有限项数项级数

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

4.2.2 双曲函数

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

4.2.3 三角

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x, \quad \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x, \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

万能公式

$$\tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

和差公式

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}, \quad \cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

被角公式

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

任意三角形的基本关系

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ (正弦定理)}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \text{ (余弦定理)}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ where } p = \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ (面积公式)}$$

4.2.4 初等几何

扇形: 弧长 $l = \alpha \cdot R$, 面积 $S = \frac{1}{2}l \cdot R = \frac{1}{2}\alpha R^2$

正圆锥 体积 $V = \frac{1}{3}\pi r^3 h$, 侧面积 $S = \pi r l$, 全面积 $A = \pi r(r + l)$

截圆锥 体积 $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$, 侧面积 $S = \pi l(R + r)$

4.2.5 中值定理

拉格朗日中值定理: $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

柯西中值定理:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

4.2.6 曲率

弧微分公式: $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$, 其中 $y' = \tan \alpha$

平均曲率: $K = |\frac{\Delta \alpha}{\Delta s}|$ 其中 $\Delta \alpha$: 从 M 点到 M' 点, 切线斜率的倾角变化量; $\Delta s: MM'$ 弧长

M 点的曲率: $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} |\frac{\Delta \alpha}{\Delta s}| = |\frac{d\alpha}{ds}| = \frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$

直线: $K = 0$

半径为 a 的圆: $K = \frac{1}{a}$

4.3 积分表

导数公式

$$(\tan x)' = \sec^2 x, \quad (\cot x)' = -\csc^2 x, \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$d\left(\frac{1}{|x|}\right) = -\frac{1}{x|x|}dx, \quad |x| = \operatorname{sgn}(x) \cdot x$$

含有 $ax + b$ 的积分

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C$$

$$\int \frac{dx}{x(ax+b)} = -\frac{1}{b} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| + C$$

含有 $\sqrt{ax+b}$ 的积分

$$\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3} + C$$

$$\int x\sqrt{ax+b}dx = \frac{2}{15a^2}(3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3} + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b} + C$$

含有 $x^2 \pm a^2$ 的积分

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

含有 $ax^2 + b(a > 0)$ 的积分

$$\int \frac{dx}{ax^2 + b} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan \sqrt{\frac{a}{b}}x + C & (b > 0) \\ \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax}-\sqrt{-b}}{\sqrt{ax}+\sqrt{-b}} \right| + C & (b < 0) \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{ax^2 + b}dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2 + b| + C$$

$$\int \frac{dx}{x(ax^2 + b)} = \frac{1}{2b} \ln \frac{x^2}{|ax^2 + b|} + C$$

含有 $ax^2 + bx + c(a > 0)$ 的积分

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C & (b^2 < 4ac) \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| + C & (b^2 > 4ac) \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{ax^2 + bx + c}dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

含有 $\sqrt{x^2 + a^2}(a > 0)$ 的积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{arcsch} \frac{x}{a} + C_1 = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, \quad (\ln(x + \sqrt{1+x^2}))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

含有 $\sqrt{x^2 - a^2}(a < 0)$ 的积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x}{|x|} \operatorname{arch} \frac{|x|}{a} + C_1 = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx = \sqrt{x^2 - a^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{|x|} + C$$

含有 $\sqrt{a^2 - x^2}(a > 0)$ 的积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|} + C$$

含有 $\sqrt{\pm ax^2 + bx + c}$ ($a > 0$) 的积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| + C$$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8\sqrt{a^3}} \ln |2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| + C$$

含有 $\sqrt{\pm \frac{x-a}{x-b}}$ 或 $\sqrt{(x-a)(x-b)}$ 的积分

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x-b}} dx = (x-b) \sqrt{\frac{x-a}{x-b}} + (b-a) \ln(\sqrt{|x-a|} + \sqrt{|x-b|}) + C$$

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx = (x-b) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + (b-a) \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C \quad (a < b)$$

$$\int \sqrt{(x-a)(b-x)} = \frac{2x-a-b}{4} \sqrt{(x-a)(b-x)} + \frac{(b-a)^2}{4} \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C \quad (a < b)$$

含有三角函数的积分

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$\int \sec x dx = \ln |\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x dx = \ln |\tan \frac{x}{2}| = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

$$\int \frac{dx}{a + b \sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \frac{a \tan \frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} + C \quad (a^2 > b^2)$$

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{a + b} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) + C \quad (a^2 > b^2)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{b}{a} \tan x \right) + C, \quad \frac{\frac{1}{\cos^2} dx}{a^2 + b^2 \tan^2 x} = \frac{d \tan x}{a^2 + b^2 \tan^2 x}$$

含有反三角函数的积分 (其中 $(a > 0)$)

$$\int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$\int x \arcsin \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$\int \arccos \frac{x}{a} dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$\int x \arccos \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$\int \arctan \frac{x}{a} dx = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$$

$$\int x \arctan \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2} (a^2 + x^2) \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} x + C$$

含有指数函数的积分

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

含有对数函数的积分

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

$$\int (\ln x)^n dx = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$$

含有双曲函数的积分

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \operatorname{th} x dx = \ln \operatorname{ch} x + C$$

定积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin n x dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad I_1 = 1, I_0 = \frac{\pi}{2}$$

4.4 Transformations

4.4.1 Dirac

Soit

$$\delta_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases} \quad (\text{I4-I4-I1})$$

Définition 1.

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad (\text{I4-I4-I2})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\varepsilon}(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dt = 1$$

Propriétés:

4.4.2 Transformation de Fourier

Serie de Fourier 给定一个周期为 T 的函数 $x(t)$, 那么它可以表示为无穷级数:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{ik(\frac{2\pi}{T})t} \quad (i \text{ 为虚数单位}) \quad (\text{I4-I4-I3})$$

其中, a_k 可以按下式计算:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot e^{-ik(\frac{2\pi}{T})t} dt$$

注意到 $f_k(t) = e^{ik(\frac{2\pi}{T})t}$ 是周期为 T 的函数, 故 k 取不同值时的周期信号具有谐波关系 (即它们都具有一个共同周期 T).

$k = 0$ 时, (I4-I4-I3) 式中对应的这一项称为直流分量, 也就是 $x(t)$ 在整个周期的平均值.

$k = \pm 1$ 时具有基波频率 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, 称为一次谐波或基波, 类似的有二次谐波, 三次谐波等等.

三角函数族的正交性 所谓的两个不同向量正交是指它们的内积为 0, 这也就意味着这两个向量之间没有任何相关性, 例如, 在三维欧氏空间中, 互相垂直的向量之间是正交的. 事实上, 正交是

垂直在数学上的一种抽象化和一般化。一组 n 个互相正交的向量必然是线性无关的，所以必然可以张成一个 n 维空间，也就是说，空间中的任何一个向量可以用它们来线性表出。三角函数族的正交性用公式表示出来就是：

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx &= 0; \\ \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx &= 0; (m \neq n) \\ \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx &= 0; (m \neq n) \\ \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(nx) dx &= \pi; \\ \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(nx) dx &= \pi;\end{aligned}$$

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt} dt$$

称为 $f(t)$ 的 Fourier 变换, 记为 $F[f(t)]$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt} dw$$

称为 $F(w)$ 的 Fourier 逆变换, 记为 $F^{-1}[F(w)]$

$$f(t) \longleftrightarrow F(w)$$

一一对应, 称为一组 Fourier 变换对, 其中 $f(t)$ 称为原像函数, $F(w)$ 称为像函数.

Example 3.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases} \quad (\text{I4-I4-I4})$$

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt} dt = \int_{-1}^{+1} e^{-iwt} = \frac{2 \sin w}{w} \quad (\text{I4-I4-I5})$$

Example 4.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases} \quad (\text{I4-I4-I6})$$

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt} dt = \int_{-1}^{+1} e^{-iwt} = \frac{2 \sin w}{w} \quad (\text{I4-I4-I7})$$

4.5 Other

负数的对数

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

当 $\theta = \pi$ 时, 得到: $e^{i\pi} = -1 \Rightarrow \ln(-1) = i\pi$. 这样, 我们可以计算任意负数的自然对数, 例如:

$$\ln(-5) = \ln[(-1) * 5] = \ln(-1) + \ln 5 = i\pi + \ln 5$$

(注, 这里没有考虑 $2k\pi$ 的周期)

Part II

PHYSIQUE

Chapter 5

The New Quantum Universe

[英] 安东尼·黑 帕特里克·沃尔特斯著, 雷奕安译

这本书的姐妹篇《爱因斯坦的镜子》

物理学家, 就像一个好侦探一样, 仔细分析各种证据, 遵循福尔摩斯说过的一句格言:”当你把不可能的事情都排出了以后, 剩下的选择, 不管看起来多么不太可能, 一项是对的.”

光子的本质是量子力学的

电子的双缝实验

Result: 在没有观察光源时, 电子双缝实验发生干涉, 而有观察光源时, 干涉图案消失.

打开和不打开用来观察电子的光源将导致不同的结果! 这一明显的疑惑来自于光子本身的量子属性. 光, 跟电子一样, 是以确定的叫光子的能量块的方式过来的. 为了看见一个物体, 必须至少有一个光子从这个物体上反弹回来. 这正是问题的症结. 但我们将光照射到子弹上时, 子弹的运动不会发生可以察觉的改变. 因为一个单个的光子的能量和子弹的能量相比太小了. 而电子确实非常细小的量子对象. 光照在点子上会给电子一个猛击, 从而显著改变电子自身的运动状态. 更仔细的分析发现, 这一扰动总是正好足够破坏整个干涉图案.

5.1 海森堡不确定原理

$$\Delta x \times \Delta p \geq \hbar$$

实验测量的精度存在原则上的极限. 在量子世界里, 扰动 (比如光子造成的扰动) 是无法忽略的, 这就是海森堡不确定原理的本质.

为了精确测量粒子的位置, 就必须使用波长很短的光, 因为光的波长决定了无门能将粒子定位在某一范围的最小长度. 而很短的波长的光有很高的频率, 光子的能力 $E = h\nu$, 高频率的光子达到系统上, 会给量子体系一个很大的推动. 出于同样的原因, 如果想精确测得动量, 我们只能给体系一个很小的推动, 根据普朗克的公式, 这就意味着只能使用低频率的光. 而低频率的光意味着很长的波长, 这样反过来就意味着位置测量的很大不确定性.

不确定性与照相术

眼睛就是一个很好的光子探测器: 一个光子就可以激发一个视网膜细胞. 当然, 一般情况下, 很多光

子还没有到达视网膜, 就被眼睛吸收了组成眼睛的很多其他细胞的原子也吸收光子. 出于这一原因, 大约只有百分之几进入到眼睛的光子真正被眼睛探测到. 显然, 看东西这种化学反应必须是可逆的, 看到一种东西之后, 不回复到之前的状态就看不到新的东西了 — 实际上, 大约 0.1 秒以后视觉细胞就会回到之前的正常状态.

照相术通过把这种化学变化永久保存在感光乳剂里, 克服了眼睛的这种限制.

感光胶片里面有很多银化物颗粒, 颗粒里面的银是离子化的. 当光子被乳液吸收的时候, 有时会放出一个电子, 就像光电效应一样. 这个电子会被一个阴离子吸引, 结合成一个电中性的银原子. 游离出来的银原子被含有银离子的化合物包围, 这是不稳定的. 银原子很容易放出电子, 重新变成银离子. 如果在他变成银离子之前, 又有一些光子在他的附近产生了好几个银原子, 这时就会形成一个由几个银原子组成的稳定“显影中心”, 而照片就是由很多微小的显影中心形成的.

拍照时, 曝光时间极短时, 只有几个光子进入, 那么照片上出现的是一些随机点, 但当曝光时间增加, 进入的光子数也增加, 我们看到显影中心更多的出现在以后图像上很亮的地方. 因此, 即使在拍照这样一件非常普通的行动中, 我们也能看到光的量子的, 随机的自然属性.

分形: 奇妙的数学

在所有的尺度下看起来都很相似 (自相似)

当我们观察量子在一段时间内的运动路径时, 发现当我们不断增加放大倍数, 这些量子路径看起来都是锯齿状的, 而且都是非常相似的.

海岸线是一条分形曲线, 长度取决于我们在什么尺度下测量. 这种现象也是一些百科全书在给出一些国家之间的陆地边界线长度时, 数据不同的部分原因.

分数维: 描述一条曲线的不规则程度. 一条平滑的曲线的分数维 $D = 1$, 跟普通的维数一样, 而一条曲线确实不规则, 越是到处有着尖角, 他的分数维就越接近 $D = 2$, $D = 2$ 就是一条非常不规则的曲线, 差不多把一个二维空间都填满了.

利用分型理论可以用计算机生成人造风景, 已经是现代电影制造业的一种标准技巧了.

5.2 薛定谔和物质波

$$E\phi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi}{dx^2} + V\phi$$

$$\lambda = h/p$$

5.3 原子核模型

电子的数目, 或者等价的, 质子的数目, 决定了不同元素的化学性质.

在通常的温度下, 气体里原子的碰撞一般不足以激发很多的原子, 因为基态与第一激发态之间的能量差很大. 因此在室温下, 大多数原子都处于基态. 基态与任意一个激发态之间的能量差都很大, 相应的光子的频率处于紫外波段, 而不是可见光波段, 因此, 可见光直接穿透很多气体, 而不被吸收. 这就是为什么大多数气体对可见光来说是透明的原因.

彭宁离子阱: 他能把电子限制在真空中两块带有负电的金属盘中间. 金属盘周围有磁场, 用来防止电子从阱的旁边溢出. 利用一个带负电的金属叉子可以把电子放置到阱中. 通过检测电子在阱中的来回震荡, 可以确认粒子的存在. 实际做法是让电子一个一个不断逃出阱外, 知道最后只剩下一个电子.

5.4 量子隧道效应

对时间和能量的测量也存在一个类似的关系

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

虽然经典意义上, 我们不可能在不违反能量守恒的前提下改变总能量, 但是在量子力学里, 如果时间不确定性是 Δt , 我们无法把能量测量的比 $\Delta E = \hbar/\Delta t$ 精确. 粗略的说, 我们能借到一些能量 ΔE 来越过壁垒, 只要我们在时间 $\Delta t = \hbar/\Delta E$ 内把能量还回去. 如果势垒太高或者太宽, 隧穿的可能性就会变得非常小.

扫描隧道显微镜

5.4.1 核反应

加莫夫最早提出用量子隧道效应解释阿尔法衰变. 因为阿尔法粒子非常稳定, 我们可以认为它本来就在原子核里存在, 处在一个由别的核子形成的势场之中. 阿尔法粒子可以以隧道效应的方式从原子核里跑出来, 引起原子核衰变.

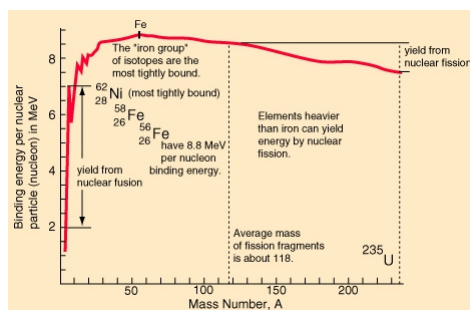
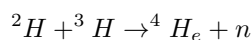


Figure 5.1: 每个核子的平均结合能

从 5.1, 我们可以看出, 结合能从 2 兆电子伏特 (氦的结合能) 开始, 不断上升, 到铁的时候达到最大值, 即每个核子 8.8 兆电子伏特, 然后逐渐下降到重核 (铀及以上元素) 的每个核子 7.5 兆电子伏特. 注意, 阿尔法粒子 (氦原子核) 与附近的元素相比, 特别稳定. 这就是为什么在重核中, 会形成阿尔法粒子, 并通过隧道效应跑出来, 因而引发原子核放射性衰变.

结合能最大的铁所处的位置说明了, 有两种方式可以把原子核里的能量释放出来. 一种是聚变 (两个比较轻的原子核结合在一起形成一个重核), 另一种是衰变 (一个很重的核裂解成两个较轻的核). 这两种过程释放出来的结合能, 将以最终生成粒子的动能的形式表现出来.

一个典型的核聚变的反应的例子:



氘 + 氚 → 氦 + 中子

这一反应的潜在释放能量是 17.6 兆电子伏特. 但如果用这种方式来发电的话, 会有一个问题, 那就是很难建立一个环境, 让这个反应持续进行, 原因来自于我们熟悉的库仑排斥力. 库伦排斥力会将相互接近的原子核推开, 如果用加速器把氘核加速到比库伦排斥势高的能量, 很容易引发这一核反应, 但是如果用这种方式来大规模产生能量, 经济上是不可行的.

人们提出了另外一个种想法, 把反应原料加热到非常的温度, 以至于这种高热气体或者叫做等离子体里发生的普遍碰撞中, 反应物有足够的动能发生核反应. 但是如何产生所需的高温, 还没有好的办法.

5.5 泡利与元素

如果我们让另一个氢原子靠近第一个氢原子, 会发生什么呢?

如果两个电子的自旋都向上, 泡利不相容原理将禁止两个氢原子靠近, 因为两个电子的波函数会重叠, 波函数重叠就意味着两个电子会处于同一个量子态. 如果两个电子的自旋方向相反, 他们就可以互相靠近, 并且实际情况是, 两个电子大部分时间都呆在两个氢原子核之间. 这样就在两个氢原子之间产生了一个束缚力, 形成一个稳定的氢分子. 这种化学键, 也就是两个电子被分子中两个原子共享形成的化学键, 叫做共价键. 正是泡利不相容原理, 说明了为什么氢原子是化学活泼的, 为什么两个氢原子能够形成一个氢分子 H_2 . 注意, 同样是泡利不相容原理, 禁止了第三个氢原子与氢分子 H_2 再形成共价键, 因为两个能量最低的自旋态已经被占据了.

下一个最简单的原子是氦, 有两个电子, 都填布在最低的 1S 能级上, 他们的自旋必须相反. 因为 1S 能级上已经没有地方容纳更多的电子了, 泡利不相容原理将禁止别的电子靠近氦原子, 就像他对氢分子那样, 因此我们可以预料到氦原子的化学性质很不活泼, 实际上他就是一种惰性气体.

5.5.1 金属, 绝缘体与半导体

从某种角度来说, 金属可以看成是共价键的一个极端形式, 其中的传导电子被整块金属中所有的原子共享.

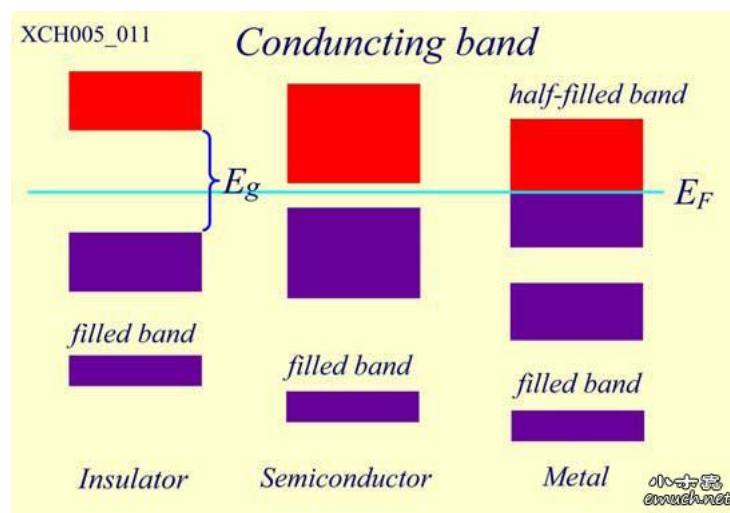


Figure 5.2: 金属, 绝缘体与半导体的能带

电子热激发对于绝缘体和半导体的导电性质就很关键了. 假设我们有一中材料, 它的基态是一个完全占据的能带加上一个在它上方的完全空闲的能带. 如果这两个能带之间的间隙 (能隙) 很大, 如图5.2所示, 几乎没有电子能够通过碰撞而获得足够的能量跳到上面的能带上. 因此, 当给这种材料加上一个电压时, 电子所处的能级附近没有空闲的能级让电子获取少量的能量跳过去 — 因为泡利不允许两个电子占据同一个量子态. 低的能级已经满了, 高的能带又离得太远, 电子跳不上去. 这就是绝缘体的情形, 在上面的传导能带中, 本质上不存在自由传导电子, 因此就无法出现传导电流.

半导体: 它是一种能带结构和绝缘体类似的材料, 但是上下两个能带之间的能隙比绝缘体要小得多. 在常温下, 有显著数目的电子被激发到上面的导带中. 当加上一个电压之后, 上面的导带已经有比较多的电子, 电子获取外加电场提供的能量, 也有足够的空能级可以利用. 下面的能带中也有些

空能级,也可以参与导电过程.这样,半导体能够相当容易的传到电流,而且他们的导电性能跟温度有很大的关系.

5.5.2 晶体管与微电子

我们可以根据需要调节半导体的导电性能,调节的办法是在半导体中掺入大约百万分之一的适当杂质原子.

锗和硅都有 4 个价电子,绝大多数都填入了价带中的 $4N$ 个态中,把价带几乎占满,价带上面是几乎全空的导带.如果我们引入一个杂质,比如磷,磷有 5 个价电子,那么,因为只需要 4 个电子形成晶格的 4 个共价键,多出来的一个电子很容易离开磷原子,成为一个导电电子.类似的,如果我们引入的杂质只有 3 个价电子,比如硼,在晶格中就会却是一个共价键,这时硼就很容易从价带中俘获一个电子,在价带中留下一个空穴,空穴也可以被用来导电.

磷原子在紧靠导带下面形成一个施主态(贡献一个电子的态),这些电子只需要一个很小的能量就可以跳到导带上.以这种形式掺杂的半导体叫做 n 型半导体.

硼原子在紧靠导带下面形成一个受主态(接受一个电子的态),在室温下,电子很容易被激发到这些态上.以这种形式掺杂的半导体叫做 p 型半导体.

5.6 量子合作和超流体

如果两列波之间有一个固定的相位差,我们就说这两列波相干.

两个不同原子光源发出的光,不会表现出干涉效应,我们说他们不相干.每个光源发出的光都是由很多不同原子发出的,每个原子发出光子的时刻不一样.也就是,每个光源发出的光,都是由很多个相位不同的光波组成的.因此,两个这种光源发出来的光没有固定的相位差,所有微弱的干涉效应都被掩盖了.

与此相反,激光有一个显著的特点,就是从许多不同的原子辐射出来的光的相位是相同的.正是激光的这种相干性,才使得激光束可以将光能高度集中,聚焦在一个很小的点上.

laser,light amplification by stimulated emission of radiation

受激辐射:如果一个能量合适的光子,照射到一个激发的原子上,原子会被动的跃迁到低能态上.处于激发态的原子当然自己也会或早或迟的跃迁到低能态上,可是受到一个辐射的激励时,这个过程提前发生了.

这种辐射出的光子,与引起辐射光子的相位完全相同,这是因为,原来光波的变化电磁场,引起受激原子的电荷分布同步震荡,发射出来的光子相位完全相同,也就是说他们是相干的,并且他们的传播方向与激发光子完全相同.

理论非常完美,但是要利用这一机制产生出足够强度的激光,让大多数原子处于激发态而不是基态(叫做**布局逆转**),这不是一项简单的事情.

激光一个有趣的应用是**三维摄影(又叫全息摄影)**

一束激光通过一个半透镜分成两束,其中一束射向被拍摄物体,散射光被照相底片记录;另一束光不经过与物体的散射,而直接射向照相底片.由于激光是相干光,这两束光会互相干涉.照相底片记录的是这两束光相遇时的干涉图案.全息摄影不像普通摄影那样,只记录光照到照相底片上的强度,全息摄影还记录了散射光的相位信息,因为它记录的是干涉图.因此全息图包含了从被拍摄物体上过来的所有光学信息.一张全息图片一点都不像被拍摄的物体,他看起来是一张脏兮兮的,由很多随机点构成的图.可是,当用激光来照射这张全息图的时候,我们就可以看到被拍摄物体的一张完美的三维

复制画面。而且，如果你改变观察位置，从不同角度看这张图，你能看见图像里各种东西的相对位置，就像看见了原始被拍摄物体一样。特别地，全息图上从某个角度看被挡住了的物体，换个角度就可以看到了。

5.6.1 费米子与玻色子

Toutes les particules élémentaires découvertes à ce jour sont soit des bosons, soit des fermions.

un grand nombre de particules : les fermions sont des particules qui obéissent à la statistique de Fermi-Dirac alors que les bosons obéissent à la statistique de Bose-Einstein.

la loi statistique Fermi-Dirac : quand on échange deux fermions, la fonction d'onde change de signe. 物质粒子都是由费米子构成，而玻色子则是媒介子

玻色子包括:

- 胶子 - 强相互作用的媒介粒子，自旋为 1，有 8 种
- 光子 - 电磁相互作用的媒介粒子，自旋为 1，只有 1 种
- W 及 Z 玻色子 - 弱相互作用的媒介粒子，自旋为 1，有 3 种
- 引力子 - 引力相互作用的媒介粒子，自旋为 2，只有 1 种，尚未被发现
- 希格斯玻色子 - 自旋为 0，目前只发现 1 种
- 介子 - 由两个费米子 - 夸克组成的强子。
- 由偶数个核子组成的原子核。因为质子和中子都是费米子，故含偶数个核子的原子核是自旋为整数的玻色子。
- 声子 - 请参阅固体物理学

宏观的玻色子现象

实验证实：费米子数目为偶数的元素，表现为玻色子；费米子数目为奇数的元素，服从泡利不相容原理，表现出像费米子。

la condensation de Bose-Einstein 玻色 - 爱因斯坦凝聚：是玻色子原子在冷却到绝对零度附近时所呈现出的一种气态的、超流性的物态，几乎全部原子都聚集到能量最低的量子态，形成一个宏观的量子状态 occupent un unique état quantique de plus basse énergie (état fondamental)

la population macroscopique d'un mode unique de photon dans un laser 大量的光子 (玻色子) 处于同一个量子状态

虹膜输运现象 P123

冷原子

超流体的液氦需要氦原子间有量子协作。这种类型的波色 - 爱因斯坦凝聚发生在原子已经处于液态时，如果是气体，在凝聚为液滴，或者冻结为固体之前，可不可以发生波色 - 爱因斯坦凝聚呢？要产生这种凝聚，原子之间的距离必须足够大，以免凝结成液体，但是距离又不能太大，以至于无法产生波色 - 爱因斯坦凝聚。

5.7 量子跃迁

在物理学中使用复数, 是一种功能强大的工具, 可是, 实验中测量到的量都是让我们放心的”实”数, 与此相反, 薛定谔的波函数可以是复数的, 显然不可能是一个可以直接观测的量.

几率概念进入了物理学, 成为了量子理论的本质的, 内在的局限. 当然, 经典物理中也有几率概念, 但是仅仅是一种”现实上”的限制, 而不是要了解一个体系的本质的, ”原则上”的限制. 例如抛硬币这个例子, 我们通常假定硬币落地时, 正面和反面朝上的几率是相同的. ”现实上”, 我们无法预言哪种结果会发生, 但是, ”原则上”, 根据经典物理定理, 如果我们对硬币的初始精确状态了解的足够详细, 并且将所有作用在硬币上的各种力精确的计算进去, 我们能够计算出最后的结果. 与此相反, 根据量子力学, 我们永远也不能逃脱几率的限制.

5.7.1 光子与偏振光

帕斯库尔·乔丹是量子力学发展早期的一些论文的作者, 他说:”测量不仅破坏了被测量的东西, 还生成了被测量的东西”.

实验: 一个静止的原子被激发后同时放出两个光子, 这两个光子沿相反方向射出, 他们的偏振状态可以通过一对偏振片测出. 我们得到了如下结果:

- 如果两个偏振片都垂直放置在 V 方向, 两个光子总是通过偏振片射出
- 如果两个偏振片都垂直放置在 H 方向, 两个光子总是通过偏振片射出
- 如果两个偏振片分别放置在 V 方向和 H 方向, 我们永远也看不到两个光子同时通过

换句话说, 我们能看见 VV 光子对和 HH 光子对, 但是看不到 VH 或者 HV 光子对.

爱因斯坦希望的解释: 光子的偏振状态实际上早就已经确定下来了, 就是同方向的.

另外一个解释, 似乎需要光子之间有某种神秘的”超距”作用, 也就是, 一旦一个光子的偏振状态被测量出来为 V 或 H, 另一个光子立即将自己的偏振状态改成与它一致.

物理学家们不喜欢超距作用, 他们更愿意相信因果关系.

5.7.2 瞬时的信息坍缩

波函数坍缩, 是微观领域的现象. 微观领域的物质具有波粒二象性, 表现在空间分布和动量都是以一定概率存在的, 比如”电子云”, 我们称之为波函数. 当我们用物理方式对其进行测量时 (同时必然对其干扰), 物质随机选择一个单一结果表现出来. 如果我们把波函数比作是骰子的话 (比如电子云), 那么”波函数坍缩”就是骰子落地 (比如打在屏幕上显示为一个点的电子).

波函数从叠加态坍缩成 A 或 A 非至少从某种意义上符合最大熵 (最大信息量) 原理.

当我们要测量粒子的动量的时候, 粒子不一定刚好处于动量的本征态, 这个态可以表示为动量本征态的叠加 (动量本征态组成一组完备的希尔伯特空间的基矢), 当我们用仪器对粒子进行测量的时候, 相当于是对粒子进行了一个作用, 即用动量算符作用在这个态上, 只进行一次测量的时候, 我们只能得到一个动量值 (动量本征值), 而这个时候的态, 只有处于动量的相对应的本征态上时才会这样, 这就是说, 当进行测量的时候, 因为我们的仪器对粒子的影响, 使得粒子由原来的态坍缩到了这个动量本征态. 但是我们测量的时候, 也可能得到其他的本征值, 即, 也可能坍缩到其他的动量本征态, 所以, 要进行多次测量

5.7.3 薛定谔的猫

量子系统与经典物体不同,可以使几个量子态的叠加,正是测量过程,不知道出于什么原因,会导致量子叠加探索到某一个确定的经典态. 只有在测量之后,我们才能说这个量子系统具有某种确定的属性. 这与经典物理相比,是一个意义深远的差别. 经典物理认为物体的属性是客观的,与观察者和测量装置无关.

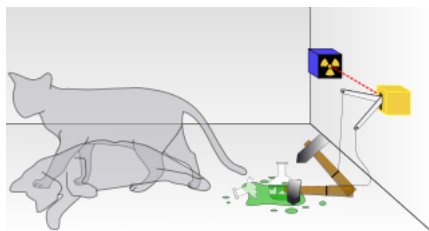


Figure 5.3: 薛定谔的猫

把一只猫,一个装有氰化氢气体的玻璃烧瓶和一个放射性原子核放进封闭的盒子里,如图5.3所示. 当盒子内的监控器侦测到衰变粒子时,就会打破烧瓶,杀死这只猫. 根据量子力学的哥本哈根诠释,在实验进行一段时间后,猫会处于又活又死的叠加态. 可是,假若实验者观察盒子内部,他会观察到一只活猫或一只死猫,而不是同时处于活状态与死状态的猫. 这事实引起一个谜题: 到底量子叠加是在什么时候终止,并且坍缩成两种可能状态中的一种状态?

常规计算机存储器有一个问题,就是他们存储的数据会偶尔翻转,例如,宇宙射线就是因其这种错误的一个原因. 为了解决这个问题,计算机工业研制了一整套错误检测和更正的技术. 一个简单的例子是”校验”检查. 对于量子计算机而言,也存在这样的问题.

量子输运 quantum teleportation, 又叫量子远程传物

量子计算机和量子输运非常依赖 **EPR 纠缠态**.

量子信息学告诉人们: 为了进行远距离的量子密码通信或量子态隐形传输, 人们需要事先让距离遥远的两地共同拥有最大的”量子纠缠态”. 所谓”量子纠缠”是指不论两个粒子间距离多远, 一个粒子的变化都会影响另一个粒子的现象, 即两个粒子之间不论相距多远, 从根本上来讲它们还是相互联系的. 例如, 一个无自旋的粒子分裂成两个粒子, 它们的自旋一定相反. 但在观测到它们的自旋前, 它们是随机的, 对一个粒子的观测会瞬时影响到另一个粒子. 科学家们认为, 这是一种”神奇的力量”, 超距作用, 爱因斯坦都无法解释, 将其戏称为”遥远的鬼魅行为”. 它可成为具有超级计算能力的量子计算机和”万无一失”的量子保密系统的基础.

两个伽马光子对撞, 有一定的几率产生一对正反电子对, 这两个正负电子就处于纠缠态.

Chapter 6

Quantique

6.1 Formule

l'impulsion: $P = \hbar k$, k est vecteur d'onde

波长: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, k est vecteur d'onde

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

Vecteur d'état 的规则: $\langle \phi | = (|\phi\rangle)^+ = ((|\phi\rangle)^t)^*$

$$\text{Module: } \|N|\nu\rangle\|^2 = (N|\nu\rangle)^+ N|\nu\rangle = \langle \nu | N^+ N | \nu \rangle$$

L'opérateur A 在状态 ϕ 的 valeur moyen: $\langle A \rangle = \langle \phi | A | \phi \rangle = \int \phi^* A \phi d^3r$

若 A 不显含时间 t , 则 $i\hbar \frac{d}{dt} \langle A \rangle = \langle [A, H] \rangle$

N'importe quel ket d'état peut s'exprimer sur cette base et on a: $|\phi(t)\rangle = \sum_n C_n(t) |\phi_n\rangle$ 其中, $C_n(t)$ 满足 normalisation 条件

我们可以推出: $|\phi(t)\rangle = \sum_n C_n(0) \exp\left(\frac{-iE_n t}{\hbar}\right) |\phi_n\rangle$

À température ambiante, $K_B T \approx 1/40 eV$

对于一般的粒子 (非相对论范围): $E = \frac{1}{2}mv^2$

对于相对论范围的粒子, 例如光子: $E = mv^2 = Pc$

Particule libre 只有 energie cinétique, 而没有 energie potentiel

$$\text{Equation de continuité: } \frac{\partial \rho(r, t)}{\partial t} = -\nabla j(r, t)$$

$$\text{Courant de probabilité: } j(r, t) = \frac{i\hbar}{2m} (\phi(r, t) \nabla_r \phi^*(r, t) - \phi^*(r, t) \nabla_r \phi(r, t)) = \frac{\hbar}{m} \Im(\phi^*(r, t) \nabla_r \phi(r, t))$$

6.2 Equation de Schrödinger

推广到三维情况下, 方程为:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi)$$

其中: \mathbf{r} 是三维空间中的位置矢量, \cdot 是矢量点积, \mathbf{k} 是波矢. 这一方程描述了平面波. 一维情况下, 波矢的大小是角波数

$$|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$$

波矢的方向是平面波行进的方向.

波动方程是双曲形偏微分方程的最典型代表, 其最简形式可表示为: 关于位置 x 和时间 t 的标量函数 u (代表各点偏离平衡位置的距离) 满足:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

这里 c 通常是一个固定常数, 代表波的传播速率. 在针对实际问题的波动方程中, 一般都将波速表示成可随波的频率变化的量, 这种处理对应真实物理世界中的色散现象. 此时, c 应该用波的相速度代替: $v_p = \frac{\omega}{k}$

上面的波动方程可以化成下面的形式

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Separation of variables begins by assuming that the wave function $u(r, t)$ is in fact separable:

$$u(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r})T(t)$$

Substituting this form into the wave equation, and then simplifying, we obtain the following equation:

$$\frac{\nabla^2 A}{A} = \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2}$$

Notice the expression on the left-hand side depends only on r , whereas the right-hand expression depends only on t . As a result, this equation is valid in the general case if and only if both sides of the equation are equal to a constant value. From this observation, we obtain two equations, one for $A(r)$, the other for $T(t)$:

$$\frac{\nabla^2 A}{A} = -k^2$$

and

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2$$

Rearranging the first equation, we obtain the Helmholtz equation:

$$\nabla^2 A + k^2 A = (\nabla^2 + k^2)A = 0$$

Likewise, after making the substitution

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} kc$$

the second equation becomes

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) T = 0,$$

where k is the wave vector and ω is the angular frequency.

我们可以解出

$$T(t) = \exp^{-i\omega t}$$

回到第一个方程

La longueur d'onde dans le milieu est définie par $\lambda = 2\pi/k$. L'équation de Helmholtz se réécrit

:

$$\left(\Delta + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \right) \psi(\vec{r}) = 0$$

On utilise alors la relation de de Broglie pour une particule non relativiste, pour laquelle la quantité de mouvement $p = mv$:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \implies \frac{1}{\lambda^2} = \frac{m^2 v^2}{h^2}$$

Or, l'énergie cinétique s'écrit pour une particule non relativiste :

$$\frac{1}{2} m v^2 = E - V(\vec{r})$$

d'où l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$\left[\Delta + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V(\vec{r})) \right] \psi(\vec{r}) = 0$$

En introduisant le quantum d'action $\hbar = h/2\pi$, on la met sous la forme habituelle :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

Il ne reste plus qu'à réintroduire le temps t en explicitant la dépendance temporelle pour une onde monochromatique, puis en utilisant la relation de Planck-Einstein $E = \hbar\omega$:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-i\omega t} = \psi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i E t}{\hbar}\right)$$

On obtient finalement l'équation de Schrödinger générale :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t) = i \hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

L'électron est traité comme une onde $\Psi(r, t)$ se déplaçant dans un puits de potentiel V . La densité de probabilité $\rho(r, t)$ qui lui est associée est définie par

$$\rho(r, t) = R(r, t)^2 = |\Psi(r, t)|^2 = \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t)$$

(probabilité par unité de volume, * indique un complexe conjugué)

6.3 Postulats et formalisme de la physique quantique

一个 Test 的题目

Example 5. On note $|\phi_n\rangle$ les états propres associés aux énergies propres E_n du Hamiltonien H_0 d'un système. A l'instant $t = 0$, le système se trouve dans un état $|\Psi\rangle$ que l'on écrit comme une combinaison linéaire d'états propres du Hamiltonien $|\Psi\rangle \propto |\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle$.

Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t > 0$, le système puisse être mesuré dans un état dont le ket est proportionnel à $2|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle$?

首先进行 normaliser: $|\phi\rangle_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{5}}(|\phi_1\rangle + 2|\phi_2\rangle)$

然后根据 evolution temporelle de la fonction d'onde 方程得到: $|\phi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(e^{-iE_1 t/\hbar}|\phi_1\rangle +$

$$2e^{-iE_2t/\hbar}|\phi_2\rangle\rangle$$

然后要求的概率: $P = \|\langle 2\phi_1 + \phi_2 | \phi(t) \rangle\|^2$

Le systeme precedent etait dans l'etat $\Psi \propto |\phi_1\rangle + 2|\phi_2\rangle$.

Quelle etait la probabillite qu'une mesure de l'énergie donne le résultat E_3 ?

由于初始状态是 $|\phi_1\rangle$ 与 $|\phi_2\rangle$ 的线性组合, 所以不管怎样, 测得的最终状态必定也是 $|\phi_1\rangle$ 与 $|\phi_2\rangle$ 的线性组合, 而不可能处于 $|\phi_3\rangle$ 的状态中.

所以所求的概率为 0.

6.4 Oscillateur harmonique

$a = \frac{x + ip}{\sqrt{2}}$ 由于 x et p est hermitien, 而 a 中含有一个 i , 所以 a 不是 hermitien, 同理可以推出 a^+, L_-, L_+ 都不是 hermitien.

6.5 Le moment cinétique: l'orbital et l'intrinsèque

$$L_+ = L_x + iL_y$$

$$L_- = L_x - iL_y$$

$$L^2|\lambda^2, \mu\rangle = \lambda^2\hbar^2|\lambda^2, \mu\rangle$$

$$L_z|\lambda^2, \mu\rangle = \mu\hbar|\lambda^2, \mu\rangle$$

$$\text{求 } \|L_+|\lambda^2, \mu\rangle\|$$

$$\|L_+|\lambda^2, \mu\rangle\|^2 = \langle\lambda^2, \mu|L_+^\dagger L_+|\lambda^2, \mu\rangle$$

$$L_+^\dagger = L_x - iL_y = L_-$$

$$\begin{aligned} L_- L_+ &= (L_x - iL_y)(L_x + iL_y) \\ &= L_x^2 + L_y^2 + i(L_x L_y - L_y L_x) \\ &= L_x^2 + L_y^2 + i[L_x, L_y] \\ &= L_x^2 + L_y^2 - \hbar L_z \end{aligned} \tag{II6-II5-II1}$$

$$\begin{aligned} \|L_+|\lambda^2, \mu\rangle\|^2 &= \langle\lambda^2, \mu|L_+^\dagger L_+|\lambda^2, \mu\rangle \\ &= \langle\lambda^2, \mu|L_x^2 + L_y^2 - \hbar L_z|\lambda^2, \mu\rangle \\ &= \langle\lambda^2, \mu|L^2 - L_z^2 - \hbar L_z|\lambda^2, \mu\rangle \\ &= \langle\lambda^2, \mu|L^2|\lambda^2, \mu\rangle - \langle\lambda^2, \mu|L_z^2|\lambda^2, \mu\rangle - \langle\lambda^2, \mu|\hbar L_z|\lambda^2, \mu\rangle \\ &= \hbar^2(\lambda^2 - \mu^2 - \mu) \end{aligned} \tag{II6-II5-II2}$$

$$\text{Donc, } \|L_+|\lambda^2, \mu\rangle\| = \hbar\sqrt{\lambda^2 - \mu^2 - \mu}$$

$$\text{Donc, } \|L_-|\lambda^2, \mu\rangle\| = \hbar\sqrt{\lambda^2 - \mu^2 + \mu}$$

从模非负可以推出 $\mu^2 < \lambda^2$

求 $L_+|\lambda^2, \mu\rangle$ 的方向

知道为什么不显示

$$\begin{aligned}
&= [L_z, L_x + iL_y] \\
&= [L_z, L_x] + i[L_z, L_y] \\
&= i\hbar L_y + i(-i\hbar L_x) \\
&= \hbar(L_x + iL_y) \\
&= \hbar L_+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_z L_+ |\lambda^2, \mu\rangle &= (L_+ L_z + \hbar L_+) |\lambda^2, \mu\rangle \\
&= L_+ L_z |\lambda^2, \mu\rangle + \hbar L_+ |\lambda^2, \mu\rangle \\
&= L_+ \hbar \mu |\lambda^2, \mu\rangle + \hbar L_+ |\lambda^2, \mu\rangle \\
&= \hbar(\mu + 1) L_+ |\lambda^2, \mu\rangle
\end{aligned} \tag{II6-II5-II3}$$

考虑到 $L_z |\lambda^2, \mu + 1\rangle = \hbar(\mu + 1) |\lambda^2, \mu + 1\rangle$, 和 (II6-II5-II3) 对比, 可以推出

$$L_+ |\lambda^2, \mu\rangle \propto |\lambda^2, \mu + 1\rangle$$

结合前面求出的模, 我们得出

$$L_+ |\lambda^2, \mu\rangle = \hbar \sqrt{\lambda^2 - \mu^2 - \mu} |\lambda^2, \mu + 1\rangle$$

$$L_- |\lambda^2, \mu\rangle = \hbar \sqrt{\lambda^2 - \mu^2 + \mu} |\lambda^2, \mu - 1\rangle$$

6.5.1 Spin

期末考试的内容考了很多很多的 spin 的内容, 但是老师上课讲的不多, 课后看了书, 也没有看懂.

Chapter 7

Simulation

7.1 Calcul différentiel

Différentiabilité au sens de Gâteaux

Définition 2. Une fonction $F(x)$ d'un espace vectoriel V dans \mathbb{R} est une fonction différentiable au sens de Gâteaux en $x \in V$ si pour tout $h \in V$ la fonction $g(t) = F(x + th)$ est dérivable sur \mathbb{R} en $t = 0$ et si il existe une forme linéaire sur V , notée $DF(x)$, telle que

$$\forall h \in V \quad \frac{d}{dt}F(x + th)|_{t=0} = DF(x).h$$

Différentielle au sens de Fréchet

Définition 3. Soit V et W deux espaces vectoriels normés. Une application $f(x)$ de V dans W est différentiable (au sens de Fréchet, précision souvent omise) en $x \in V$ si il existe une application linéaire continue de V dans W , notée $Df(x)$ telle que

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Df(x).h}{\|h\|} = 0$$

Pour une fonction numérique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x).h}{h} = 0 \Rightarrow Df(x).h = f'(x).h$$

Normes équivalentes

si $\|x\|_1$ et $\|x\|_2$ sont deux normes équivalentes, alors il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

$$\frac{d}{dt}F(x(t))|_{t=0} = \sum_i \frac{\partial F(x(0))}{\partial x_i} = \langle \nabla F(x(0)), x'(0) \rangle$$

une droite passant par le point x et de direction $h \in \mathbb{R}^n$, donc d'équation paramétrique $x(t) = x + th$

$$\frac{d}{dt}F(x + th)|_{t=0} = \langle \nabla F(x), h \rangle = DF(x).h$$

7.1.1 Formulaire

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)$$

$$D(f(x), g(x)).h = (Df(x).h, g(x)) + (f(x), Dg(x).h)$$

L'ensemble des fonctions différentiables (au sens de Gateaux ou de Fréchet) est stable par addition, multiplication, composition

7.1.2 Jacobienne et Hessien

$$F : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

matrice jacobienne de F:

$$J_F(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$JF(x)_{i,j} = \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j}$$

$$HF(x) = Jf(x) \quad f(x) = F'(x)$$

$$HF(x)_{i,j} = \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} F(x + th)|_{t=0} = \langle HF(x).h, h \rangle$$

Proposition 7.1.1. *Une fonction $F(x)$ deux fois différentiable, admet un développement limité au second ordre*

$$\forall h \in V, F(x + h) = F(x) + \langle \nabla F(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle HF(x)h, h \rangle + \epsilon(h) \|h\|^2$$

7.1.3 Exemples

Exemple 6. Soit $F(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$

$$DF(x).h = \langle Ax - b, h \rangle$$

et pour le produit scalaire canonique

$$F'(x) = \nabla F(x) = Ax - b$$

$$JF'(x) = HF(x) = A$$

Exemple 7. L une forme linéaire continue sur V et a une forme bilinéaire continue symétrique et définie positive sur V

$$\text{Soit } J(v) = \frac{1}{2}a(u, v) - L(v)$$

$$DJ(u).v = a(u, v) - L(v)$$

Exemple 8.

$$J(u) = \int_0^1 g(x, u(x), u'(x))dx$$

Calculons $DJ(u)$

$$DJ(u).v = \frac{d}{dt}J(u + tv)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\int_0^1 g(x, u + tv, u' + tv')dx\right)|_{t=0}$$

$$DJ(u).v = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u_1}(x, u, u')v + \frac{\partial g}{\partial u_2}(x, u, u')v' dx$$

这里的 u_1 对应 u , u_2 对应 u'

$$DJ(u).v = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u}(x, u, u')v + \frac{\partial g}{\partial u'}(x, u, u')v' dx$$

对 v' 进行分部积分, 同时考虑到 $v(0) = v(1) = 0$, 得到

$$DJ(u).v = \int_0^1 \left(\frac{\partial g}{\partial u}(x, u, u') - \frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial u'}(x, u, u') \right) v(x) dx$$

En introduisant le produit scalaire de $L^2([0, 1])$

$$DJ(u).v = \left\langle -\frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial u'}(x, u, u') + \frac{\partial g}{\partial u}(x, u, u'), v \right\rangle$$

Soit $u_1 \in V_0$ un extremum local de la fonction $J(u)$, il vérifie $DJ(u_1) = 0$, Donc

$$\forall v \in V_0, DJ(u).v = \int_0^1 \left(\frac{\partial g}{\partial u}(x, u, u') - \frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial u'}(x, u, u') \right) v(x) dx = 0$$

然后得到

$$\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial u'} = 0$$

这就是变分原理中的欧拉公式

7.2 Convexité

Définition 4. On suppose que V est un espace de Hilbert. Une application $f(x)$ de V dans V est monotone si

$$\forall x, y \in V, \langle f(y) - f(x), y - x \rangle \geq 0$$

Note que si $V = \mathbb{R}$, cela revient à dire que $f(x)$ est croissante.

Théorème 7.2.1. Soit $F(x)$ une fonction différentiable sur un espace de Hilbert H . $F(x)$ est convexe si et seulement si l'application de H dans H définie par $f(x) = \nabla F(x)$ est monotone.

Théorème 7.2.2. Sur \mathbb{R}^n une fonction deux fois différentiable est convexe si et seulement si le Hessien $HF(x)$ est une matrice semi-définie positive.

Réciproquement si $\forall x, h \in V, \langle HF(x)h, h \rangle > 0$, alors F est strictement convexe.

7.3 Autre

Norme dans H^1 : $\|u\| = \int_0^1 u'^2 + u^2 dx$

其中 H^1 是指 espace de Herbert 上的一阶可微 (还是可导还不太肯定) 的函数构成的空间

L'EDP (sigle pour equations aux dérivées partielles) du second ordre linéaire à coefficients constants, en dimension deux:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0 \quad (\text{II7-II3-II1})$$

L'équation caractéristique de cette EDP:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad \text{equation conique} \quad (\text{II7-II3-II2})$$

方程中的 x, y 不一定指空间, 也可以是其他未知量, 比如时间 t

- Elliptique si $ac - b^2 > 0$ (la solution minimise une fonctionnelle d'énergie)
- Parabolique si $ac - b^2 = 0$ (évolution dissipatif)
- Hyperbolique si $ac - b^2 < 0$ (phénomènes physiques conservatifs)

Formulation faible (variationnelle)

étant donné un opérateur différentiel $R(\cdot)$ et une fonction f définie sur un domaine ouvert Ω , la formulation forte du problème est la suivante :

Trouver u définie sur Ω vérifiant $R(u) = f$ en tout point de Ω .

Une solution u est naturellement solution du problème suivant (formulation faible) :

Trouver u définie sur Ω vérifiant $\int_{\Omega} R(u) v = \int_{\Omega} f v$ pour toute fonction v définie sur Ω .

la formulation variationnelle d'un problème régi par des équations aux dérivées partielles correspond à une formulation faible de ces équations qui s'exprime en termes d'algèbre linéaire dans le cadre d'un *espace de Hilbert*. A l'aide du *théorème de Lax-Milgram*, elle permet de discuter de l'existence et de l'unicité de solutions. La méthode des éléments finis se fonde sur une formulation variationnelle pour déterminer des solutions numériques approchées du problème d'origine.

équation de Poisson

Pour un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , considérons l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions de carré intégrable et l'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$ des fonctions dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k sont dans $L^2(\Omega)$.

étant donné une fonction $f \in L^2(\Omega)$, on cherche une solution du problème suivant (formulation forte):

$$\begin{cases} u \in H^2(\Omega) \\ -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{II7-II3-II3})$$

La formulation variationnelle correspondante est la suivante :

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{II7-II3-II4})$$

où

$$A(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{et} \quad F(v) = \int_{\Omega} f v.$$

我们可以看到在 formulation forte 中 $u \in H^2(\Omega)$, 而在 formulation faible 中 $u \in H^1(\Omega)$, 也就是变弱了

Le théorème de Lax-Milgram permet ensuite de conclure à l'existence et à l'unicité d'une solution de la formulation variationnelle.

à noter qu'une solution du premier problème est toujours solution du second, alors que la réciproque n'est pas vraie (une solution dans $H^1(\Omega)$ peut ne pas être assez régulière pour être dans $H^2(\Omega)$) : c'est d'ailleurs pour cette raison qu'une solution de la formulation variationnelle est parfois appelée solution faible (ou encore semi-faible).

Avec des conditions de bord plus générales que celles présentées ici, ce problème est plus amplement développé ici.

7.4 Phénomènes

Equation d'advection 平流

cherche une fonction $u(x, t)$ du point d'abscisse x , au temps t , $u \in C^1([0; 1] \times [0, T])$ solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u(0, t) = g(t) \end{cases} \quad (\text{II7-II4-III1})$$

Définition 5. Les droites caractéristiques dans le plan (x, t) de l'équation (II7-II4-III1) sont les droites $x - at = Cte$

Proposition 7.4.1. Une fonction $u(x, t) \in C^1$ est solution de (II7-II4-III1) si et seulement si u est une fonction constante sur les droites caractéristiques.

Les solutions de l'équation (II7-II4-III1) est:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - at) & \text{si } x \geq at \\ g(t - \frac{x}{a}) & \text{si } x \leq at \end{cases} \quad (\text{II7-II4-II2})$$

Equation de la diffusion

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega \times [0, T]) \\ C \frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u + cu = 0 & \text{si } x \in \Omega \\ -k \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{si } x \in \Gamma \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{si } x \in \Omega \end{cases} \quad (\text{II7-II4-II3})$$

Equation des ondes Soit $u(x, t), x \in [0, L], t \in [0, T]$ solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in (0, L), t \in (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in (0, L) \quad u_0(x) \in C([0, L]) \text{ la position initial} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & x \in (0, L) \text{ la vitesse initial est supposée null} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t \in (0, T) \end{cases} \quad (\text{II7-II4-II4})$$

Problème de Dirichlet non-homogène 边界上定值

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \forall x \in \Omega \\ u_\Gamma = u_d \end{cases} \quad (\text{II7-II4-II5})$$

Problème de Neumann en dimension deux

les conditions aux limites sur Γ portent sur la dérivée normale de la solution

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} = g \end{cases} \quad (\text{II7-II4-II6})$$

7.5 Discrétisation en temps

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (\text{II7-II5-II1})$$

On note $X^n = X(n\tau) \in \mathbb{R}^N$

$$\frac{X^{n+1} - X^n}{\tau} = (1 - \theta)AX^n + \theta AX^{n+1}$$

- Euler explicite $\theta = 0$
- Euler implicite $\theta = 1$
- Trapèzes $\theta = 1/2$

Chapter 8

Automation

8.1 自动控制的基本概念

在自动控制技术中, 把工作的机器称为被控对象把表征这些机器设备工作状态的物理参量称为被控量而对这些物理参量的要求值称为给定值或希望值 (或参考输入) 则控制的任务可概括为: 使被控对象的被控量等于给定值

多变量系统是现代控制理论研究的主要对象, 在数学上采用状态空间法为基础, 讨论多变量, 变参数, 非线性, 高精度, 高效能等控制系统的分析与设计.

放大元件: 放大倍数越大, 系统的反应越敏感, 一般情况下, 只要系统稳定, 放大倍数应适当大些.

稳态响应的含义: 通常习惯上把不随时间变化的静态称为稳态. 然而, 在控制系统中, 往往响应已达稳态, 但他们可能随时间有规律地变化. 因此, 控制系统中的稳态响应, 简单说来就是指时间趋于无穷大的确定的响应.

对自动控制系统性能的要求在时域中一般可归纳为**三大性能指标**:

稳定性

瞬态质量 要求系统瞬态响应过程具有一定的快速性与变化的平稳性

稳态误差

同一个系统, 上述三大性能指标往往相互制约. 提高控制过程的快速性, 可能会引起系统强烈震荡; 改善了平稳性, 控制过程又可能很迟缓, 甚至使得最终精度也很差.

8.2 控制系统的数学模型

零点用 \bigcirc 表示, 极点用 \times 表示

极点 (虚轴左边) 离虚轴越远, 相应的模态收敛越快

当零点不靠近任何极点时, 诸极点相对来说, 距离零点远一些的极点其模态所占比重较大, 若零点靠近某极点, 则对应模态的比重就减小, 所以离零点很近的极点比重会被大大削弱 (偶极子). 当零极点相重, 产生零极点对消时, 相应的模态就消失了.

串联: 传递函数相乘

并联: 传递函数相加

结构图变换: 比较点前移, 引出点后移

闭环系统的常用传递函数

开环传递函数: 将回环从反馈的末端 $B(s)$ 处断开, 沿回环从误差信号 $E(s)$ 开始至末端反馈信号 $B(s)$ 终止, 期间经过的通道传递函数的乘积称为开环传递函数

前向传递函数: 有输入到输出的直接通过传递函数的乘积

$$\text{闭环传递函数} = \frac{\text{前向传递函数}}{1 + \text{开环传递函数}} \quad (\text{II8-II2-II1})$$

无论外部输入信号取何种形式和作用与系统任一输入端 (如控制输入端或扰动输入端), 也不论输出信号选择哪个变量 (如 $C(s)$ 或 $E(s)$), 所对应的闭环传递函数都具有相同的特征方程.

这就是说, 系统的闭环极点与外部输入信号的形式和作用点无关, 同时也与输出信号的选取无关, 仅取决于闭环特征方程的根.

由此可进一步说明, 系统响应的自由运动模态是系统的固有属性, 与外部激发信号无关.

Mason 梅逊增益公式

$$G = \frac{\sum_{k=1}^n P_k * \Delta_k}{\Delta} \quad (\text{II8-II2-II2})$$

G : 总增益

P_k : 前向传递函数

Δ : 信号流图的特征式

8.3 时域分析法

8.3.1 典型输入信号

- 阶跃信号
- 斜坡信号
- 抛物线信号
- 脉冲信号
- 正弦信号

8.3.2 一阶系统时域分析

一阶系统的单位阶跃响应

8.3.3 二阶系统

典型二阶系统

阻尼 (欠阻尼, 临界阻尼, 过阻尼, 负阻尼)

重点是欠阻尼的分析, 包括调节时间, 超调量

8.3.4 稳定性分析

劳斯稳定判据

误差函数 (0,I,II 型系统)

8.4 根轨迹法

如开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s(0.5s + 1)} = \frac{K_g}{s(s + 2)}$$

- n 阶系统有 n 条分支
- 根轨迹上每只分支起始于开环极点处, 结束于有限零点处或者无线点处
- 开环传递函数分子多项式阶数 m 小于分母多项式阶数 n , 因此有 $(n - m)$ 条根轨迹的终点在无穷远处

增加开环零极点对根轨迹的影响

增加开环零点: 在复平面内的共轭复根的根轨迹向左弯曲, 而且分离点左移, 故输出响应的动态过程衰减较快, 超调量减小, 系统的相对稳定性较好

增加开环极点: 在复平面内的共轭复根的根轨迹向右弯曲, 而且分离点右移, 这时, 其快速性已大为下降, 相对稳定性也变差

8.5 线性系统的频率响应法

$G(j\omega)$ 就是系统的频率特性, 就是相当于把传递函数 $G(s)$ 中的 s 换成 $j\omega$

极坐标图: 当 ω 从 $0 \rightarrow \infty$, 频率特性 $G(j\omega)$ 的矢端轨迹

伯德图 (对数幅频与对数相频两条曲线)

横轴按频率的对数 $\lg \omega$ 标尺刻度, 但标出的是频率 ω 本身的数值, 因此横轴的刻度是不均匀的
典型环节

- 比例环节
- 积分环节
- 微分环节
- 惯性环节 (交接频率)
- 一阶微分环节
- 震荡环节
- 二阶微分环节
- 延迟环节

频段

低频段 指所有交接频率之前的区段, 这一段特性完全由积分环节和开环增益决定

中频段 通常是指在幅值穿越频率 ω_c (截止频率) 附近的区段, 这一段特性集中反映了闭环系统动态响应的平稳性和快速性

高频段 指幅频曲线在中频段以后 ($\omega > 10\omega_c$) 的区段, 这部分特性是由系统中时间常数很小, 频带很宽的部件决定的. 由于远离 ω_c , 一般分贝值又较低, 故对系统的动态影响不大. 另外, 从系统抗干扰的角度看, 高频段特性是有其意义的. 高频段的幅值, 直接反映了系统对输入端高频信号的抑制能力. 这部分特性分贝值越低, 系统抗干扰能力越强.

最小相位系统: 开环零点和开环极点全部位于 s 左半平面的系统

8.5.1 Nyquist 稳定判据

当 $G(s)H(s)$ 包含积分环节时, 在对数相频曲线 ω 为 0_+ 的地方, 应该补画一条从相角 $\angle G(j0_+)H(j0_+) + N * 90^\circ$ 到 $\angle G(j0_+)H(j0_+)$ 的虚线, 这里 N 是积分环节数.

计算正负穿越时, 应将补画的虚线看成对数相频特性曲线的一部分.

8.5.2 开环频域指标

稳定裕度: 赋值裕度和相角裕度

Chapter 9

Transfert thermique

9.1 Des nombres importants

Biot:

$$B_i = \frac{hD}{\lambda} = \frac{\tau^{cd}}{\tau^{cc}}$$
$$B_i = \frac{\text{coefficient de transfert} \times \text{dimension caractéristique}}{\text{conductivité thermique}}$$

Comme

$$Re = \frac{U \times l}{\nu}$$

U : la vitesse de fluide (transfert)

ν : coefficient de viscosité dynamique

Il caractérise le régime d'écoulement

Diffusivité thermique a en m^2/s :

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}; \frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T + \frac{P}{\rho c_p}$$

Nombre de Fourier:

$$F_0 = \frac{at}{x^2}$$

Le temps caractéristique de conduction thermique:

$$\tau^{cd} = \frac{x^2}{a}$$

Le temps caractéristique de convection thermique:

$$\tau^{cc} = \frac{\tau^{cd}}{B_i} = \frac{e^2/a}{he/\lambda} = \frac{\rho c_p e}{h}$$

La longueur caractéristique de conduction thermique à l'instant t :

$$l^{cd} = \sqrt{at}$$

Effusivité thermique du matériau:

$$b = \sqrt{\lambda \rho c}$$

il caractérise sa capacité à échanger de l'énergie thermique avec son environnement

La profondeur de pénétration e_p :

$$e_p = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$$

透射率 (当透射率小于某一个值时, 可以认为 ne passe pas):

$$\tau = \exp\left(-\frac{x}{e_p}\right)$$

流体的温度 $-x$ 变化曲线的横截距, 式中 λ 为 fluide 的参数:

$$\eta = \frac{\lambda}{h}$$

9.1.1 Convection forcée

le nombre de Nusselt:

$$N_u = \frac{hD}{\lambda} = \frac{D/\lambda}{1/h} = \frac{R^{cd}}{R^{cc}} = A \cdot (R_e)^\alpha \cdot (P_r)^\beta$$

C'est donc le rapport de la résistance thermique de conduction par la résistance thermique de convection. Il est d'autant plus élevé que la convection est prédominante sur la conduction. Il caractérise le type de transfert de chaleur.

Propriétés thermophysiques du fluide $\rho, \mu, \nu, C_p, \lambda, a$ sont évalués à la température de film $T_f = (T_0 + T_p)/2$

Le nombre de Prandtl:

$$P_r = \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a}$$

$$\frac{\text{Diffusivité de quantité de mouvement } \nu \text{ (ou viscosité cinématique)}}{\text{Diffusivité thermique}}$$

对于常见的流体:

Fluides usuels: P_r de l'ordre 1

Métaux liquides: P_r de l'ordre 10^{-2} 说明液态金属的传热性能非常好

Huiles: P_r de l'ordre 10^3

Le nombre de Péclet:

$$P_e = R_e \cdot P_r$$

Convection forcée externe laminaire

$$0.6 < P_r < 10 \quad \frac{\delta_{th}}{\delta_m} = pr^{-1/3} \quad (\text{II9-II1-II1})$$

$$h(x) = \frac{\lambda}{\frac{2}{3}\delta_{th}(x)} \quad (\text{II9-II1-II2})$$

9.1.2 Convection naturelle

Le nombre de Grashof (comme nombre de Reynolds):

$$G_{r_L} = \frac{\rho^2 g \beta (T_p - T_0) L^3}{\mu^2}$$

$$N_{u_L} = C G_{r_L}^\alpha P_r^\beta$$

$$G_{r_x} = \frac{\rho^2 g \beta (T_p - T_0) x^3}{\mu^2}$$

$$N_{u_x} = C' G_{r_x}^\alpha P_r^\beta$$

- $G_{r_x} \leq 10^9$ laminaire
- $G_{r_x} \geq 10^9$ et $G_{r_x} \leq 10^{10}$ transitoire
- $G_{r_x} \geq 10^{10}$ turbulent

Le nombre de Rayleigh:

Nombre de Rayleigh fait intervenir le terme moteur (Archimède) et les deux phénomènes de diffusion: le frottement visqueux ν mais aussi la conduction thermique a , ce qui est plus physique.

$$R_{a_x}(x) = G_{r_x} P_r = \frac{g \beta (T_p - T_0) x^3}{\nu a}$$

$$N_{u_L} = C R_{a_L}^{\alpha'} P_r^{\beta'}$$

$$N_{u_x} = C' R_{a_x}^{\alpha'} P_r^{\beta'}$$

Ces résultats sont faiblement dépendants du nombre de Prandtl.

9.1.3 Massique

transfert de chaleur	transfert d'espèce
$\varphi^{cc} = -\lambda \vec{\text{grad}} T$	$q^{cc} = -D_{s/m} \vec{\text{grad}} c$
$\varphi^{cc} = h^{cc} (T_p - T_f)$	$q^{cc} = h^{cc} (c_p - c)$
h^{cc} coefficient de transfert conducto-convectif ($W m^{-2} K^{-1}$)	$h^{cc} (m/s)$
$Re_x = \frac{ux}{\nu}$ et $Re_L = \frac{uL}{\nu}$	$Re_x = \frac{ux}{\nu}$ et $Re_L = \frac{uL}{\nu}$
$P_r = \frac{\nu}{a}$	$S_c = \frac{\nu}{D_{s/m}}$
N_u	S_h
$\frac{dH}{dt} = \varphi S$	$\frac{dM}{dt} = qS$

Le changement d'enthalpie:

$$dH = mc_p dT \quad (J)$$

En régime stationnaire pour gaz parfait ou liquide

$$\frac{dH}{dt} = \dot{m} c_p dT_m$$

9.2 Modèle

9.2.1 Ailette: $B_i < 0.1$

pour une barre de section carrée a et de longueur L : 对于一般图形来说, 没有一个确定的量能够单独表示特征尺寸, 所以一般用 $\frac{\text{面积}}{\text{周长}}$ 来表示这个特征尺寸

$$\text{sa longueur caractéristique } l = \frac{A}{P} = \frac{a^2}{4a} \quad (\text{II9-II2-II1})$$

$$B_i = \frac{hl}{\lambda} m = \sqrt{\frac{h}{l\lambda}} = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}} \quad (\text{II9-II2-II2})$$

$$(\text{II9-II2-II3})$$

Ailette idéale

$$m \cdot l \leq 1 \quad \frac{T(z) - T_f}{T_p - T_f} \simeq 1$$

La température de l'ailette rest en tout point très voisine de $T_p \Rightarrow \frac{T - T_f}{T_p - T_f} \simeq 1$

Ailette infinie

$$m \cdot l \geq 3 \quad \frac{T(z) - T_f}{T_p - T_f} = \exp(-mz)$$

Aucun flux n'est plus dissipé en bout d'ailette. En effet, au bout d'une certaine longueur, la température de l'ailette est proche de la température de référence du fluide. Le flux échangé tend vers 0.

Démonstration

$$\text{en } z: \quad \Phi_1 = \varphi(z) \cdot A \quad (\text{II9-II2-II4})$$

$$\text{en } z+dz: \quad \Phi_2 = -\varphi(z+dz) \cdot A \quad (\text{II9-II2-II5})$$

$$\text{en surface latéral: } \Phi_3 = -h(T(z) - T_f) \cdot P_m dz \quad (\text{II9-II2-II6})$$

$$\text{三个 flux 相加为零 (考虑了进出的符号问题): } \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \quad (\text{II9-II2-II7})$$

$$\text{en } z: \quad \Phi_1 = -\lambda \frac{dT}{dz} \cdot A \quad (\text{II9-II2-II8})$$

$$\text{en } z+dz: \quad \Phi_2 = -\lambda \frac{d}{dz} \left(T + \frac{dT}{dz} dz \right) \cdot A \quad (\text{II9-II2-II9})$$

$$\text{en surface latéral: } \Phi_3 = h(T(z) - T_f) \cdot P_m dz \quad (\text{II9-II2-II10})$$

$$\text{三个 flux 都为正值, 但是 } \Phi_1 \text{ 进去, } \Phi_2, \Phi_3 \text{ 都是出去: } \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0 \quad (\text{II9-II2-II11})$$

$$(\text{II9-II2-II12})$$

Résultat:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 T}{dz^2} &= \frac{hP_m}{\lambda A}(T(z) - T_f) = m^2(T(z) - T_f) \\ T - T_f &= Ae^{mz} + Be^{-mz}\end{aligned}\quad (\text{II9-II2-II13})$$

Pour l'ailette infinie

$$\begin{aligned}\text{温度不能无穷大} &\Rightarrow A = 0 \\ \text{enz} = 0 \quad T_p - T_f = B &\Rightarrow \frac{T - T_f}{T_p - T_f} = \exp -mz\end{aligned}\quad (\text{II9-II2-II14})$$

用到的公式:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(y + \frac{dy}{dx}\right) &= \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}dx\right) \\ &= \frac{dy}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2}dx + \frac{dy}{dx}\frac{ddy}{dx} \text{略去二阶无穷小} \\ &= \frac{dy}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2}dx\end{aligned}\quad (\text{II9-II2-II15})$$

温度梯度大的地方, 传热效率不一定高, 相反温度梯度低的地方也有可能传热效率很高, 例如 ailette, 由于横向传热很快, 导致横向几乎没有温度差, 没有温度差也就没有温度梯度, 但是横向传热效率很高

9.2.2 Écoulement

9.2.3 Stationnaire Uniform Établi

Stationnaire

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

Uniforme

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0$$

Établi Quand T suffisamment grand

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0$$

Laminaire 无论在流体内部还是在流体与表面的界面处, 热只通过分子传导进行传递. 即, 在流体粒子内作为内能所储备的热, 按照粒子准微观的分子运动, 横跨流线传递给相邻流线上的粒子. **Turbulent** 在湍流时, 存在横跨流线运输流体块的涡流, 通过这个涡流的宏观运动, 被运送到其他流体层的流体粒子跟那里的粒子混合, 在流体层间传递能量. 这种机理被称为涡传导. 湍流时, 由于分子传导又附加了涡流传导, 所以只与分子传导的导热情况相比, 其传热效果显著增强了. 因此涡流混合的程度越大, 传热的效率也越大.

9.2.4 Bilan

Hypothèses simplificatrices

- écoulement stationnaire
- propriétés thermophysiques de fluide ρ, c_p, μ, λ uniform (variation de T et P faible)

- force volumique \vec{f} ignoré
- puissance thermique $P_{th} = 0$
- fluide soit opaque ($\vec{\varphi}^R = 0$ soit transparent ($\text{div}\vec{\varphi}^R = 0$))
- écoulement subsonique $\Rightarrow \sum \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \chi \frac{DP_{th}}{Dt}$ négligeable

Bilan de masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

化简为

$$\text{div} \vec{v} = 0$$

Bilan de quantité de mouvement

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v} \right) = \vec{f} - \text{grad} p + \mu \Delta \vec{v} + \frac{\mu}{3} \text{grad} \text{div} \vec{v}$$

化简为

$$\rho (\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}) = -\text{grad} p + \mu \Delta \vec{v}$$

Bilan de l'enthalpie

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} T \right) = P_{th} - \text{div}(\vec{\varphi}^{CD} + \vec{\varphi}^R) + \sum_{ij} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \chi \frac{DP_{th}}{Dt}$$

化简为

$$\rho c_p (\vec{v} \cdot \text{grad} T) = -\text{div}(\vec{\varphi}^{CD}) = \lambda \Delta T$$

9.3 Flux surfacique

9.3.1 Milieu transparent et corps opaque

Un milieu transparent: il n'intégit pas de champ de rayonnement; il n'émet pas, n'absorbe pas, ne réfléchit pas, ni ne diffuse de rayonnement; tout rayonnement incident est transmis quelles que soient sa direction et sa fréquence.

Un corps opaque ne transmet aucune fraction d'un rayonnement incident(i); le rayonnement incident est soit absorbé(a), soit réfléchit(r).

9.3.2 Conduction et conducto-convection

(CD)Le transfert thermique dans le fluide à la paroi:

$$\varphi^{cd}|_{pf} = -\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial y}|_{pf}$$

(CC)Le transfert conducto-convectif(根据正方向):

$$\varphi^{cc} = h(T_p - T_c) \quad \text{由 } p \text{ 到 } c \text{ 为正方向}$$

9.3.3 Rayonnement

Classification

Les grandeurs physiques seront distinguées selon :

- La composition spectrale du rayonnement
 - Si la grandeur est relative à l'ensemble du spectre elle est dite *totale*.
 - Si elle concerne un intervalle spectral étroit $d\lambda$ autour d'une longueur d'onde λ elle est dite *monochromatique* : G_λ .
- La distribution spatiale du rayonnement
 - Si la grandeur est relative à l'ensemble des directions de l'espace, elle est dite *hémisphérique*.
 - Si elle caractérise une direction donnée de propagation, elle est dite *directionnelle* : G_x .

温度为 T 的物体的: L'énergie émise est maximale pour une certaine longueur d'onde λ_m

$$\lambda_m = \frac{3000k \cdot \mu m}{T}$$

物体 (en l'équilibre de température T) 的辐射波长范围 (在这个范围内包括了 98% 的能量):

$$[\frac{\lambda_m}{2}, 8\lambda_m]$$

À l'équilibre thermique, le flux radiatif surfacique φ^R est nul.

À l'équilibre thermique, $\varphi^i = \varphi^p$, $\varphi^R = \varphi^p - \varphi^i = 0$.

Le flux

(θ_1, θ_2) les angles $(n_1, u_1), (n_2, u_2)$ et u_1 le vecteur unitaire de O_1 vers O_2)

$$\begin{aligned} d\Phi_\lambda &= L_\lambda(O_1, u_1) \frac{dS_1 \cos \theta_1 dS_2 \cos \theta_2}{O_1 O_2^2} d\lambda \\ &= L_\lambda(O_1, u_1) dS_1 \cos \theta_1 d\Omega_1 d\lambda \\ &= L_\lambda(O_1, u_1) dS_2 \cos \theta_2 d\Omega_2 d\lambda \end{aligned} \quad (\text{II9-II3-II1})$$

Hémisphérique

Cas générale(**Hémisphérique**) 对于 θ 为半顶角 ($\theta \in [0, \pi/2]$) 的 cône, 对应的立体角及其微分分别为:

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta) \Rightarrow d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} d\varphi_\lambda^s &= \frac{d\Phi_\lambda^s}{dS_1} \\ &= \int_0^{\pi/2} L_\lambda^s(O_1, \theta) \cos \theta d\Omega d\lambda \\ &= d\lambda \int_{\Omega=2\pi(1-\cos \theta)} L_\lambda^s(O_1, \theta_1) \cos \theta_1 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1 \end{aligned} \quad (\text{II9-II3-II2})$$

Cas d'un rayonnement isotrope(luminance indépendante de la direction)

$$\begin{aligned} d\varphi_\lambda^s &= \frac{d\Phi_\lambda^s}{dS_1} \\ &= d\lambda \int_0^{\pi/2} L_\lambda^s(O_1) \cos \theta_1 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1 \\ &= \pi L_\lambda^s(O_1) d\lambda \end{aligned} \quad (\text{II9-II3-II3})$$

Flux radiatif:

$$d\varphi_\lambda^R = d\varphi_\lambda^e - d\varphi_\lambda^a = d\varphi_\lambda^p - d\varphi_\lambda^i$$

使用 $\varphi^e = \varepsilon \sigma T^4$ 的前提是要求 le corps est isotrope(c'est à dire indépendante de direction)
如果要用这个公式乘上面积还需额外要求 le corps est homogène, 也就是说各个点的情况是一样的

Émissivité monochromatique directionnelle ε_λ : $L_\lambda^e(O_1, \theta_1, \varphi_1) = \varepsilon_\lambda(O_1, \theta_1, \varphi_1, T_1) L_\lambda^0(T_1)$

absorbé $L_\lambda^a = \alpha_\lambda(O_1, \theta_1, \varphi_1, T_1) L_\lambda^i$

réfléchi $L_\lambda^r = L_\lambda^i - L_\lambda^a$

Corps opaque, pas de transimission $\alpha_\lambda(O_1, \theta_1, \varphi_1, T_1) = \varepsilon_\lambda(O_1, \theta_1, \varphi_1, T_1)$

(II9-II3-II4)

Corps gris

Les propriétés radiatives(α, ε) sont indépendantes de la longueur d'onde λ mais dépendante de la direction.

Sur l'hypothèse que les N surfaces S_j sont grises:

$$\forall j : \quad \varepsilon_j = \alpha_j = 1 - \rho_j$$

$$\varphi_j^R = \varphi_j^p - \varphi_j^i \quad (\text{II9-II3-II5})$$

$$\varphi_j^p = \varepsilon_j \sigma_j T_j^4 + (1 - \varepsilon_j) \varphi_j^i \quad (\text{II9-II3-II6})$$

$$S_j \varphi_j^i = \sum_{k=1}^N S_k f_{kj} \varphi_k^p \Rightarrow \varphi_j^i = \sum_{k=1}^N f_{jk} \varphi_k^p \quad (\text{II9-II3-II7})$$

$$S_k f_{kj} = S_j f_{jk} \quad (\text{II9-II3-II8})$$

Corps noir

$$\varphi^p = \varphi^i, \varphi^e = \varphi^a, \varepsilon = \alpha = 1, \varphi^r = 0$$

Absorber tout rayonnement, donc ne réfléchit aucun rayonnement

La luminance monochromatique du rayonnement émis:

$$L_\lambda^{e^{C.N}} = L_\lambda^0(T) \quad \forall (\theta_1, \varphi_1)$$

Rayonnement d'équilibre

La luminance du rayonnement d'équilibre et celle du rayonnement émis par un corps noir est:

$$L^0(T) = \int_0^\infty L_\lambda^0(T) d\lambda = \frac{\sigma}{\pi} T^4$$

σ est dite *constante de Stefan*:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5.670 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$$

Le flux surfacique total de rayonnement isotrope incident sur un élément de surface ou partant de cet élément, à l'équilibre à la température T :

$$\varphi^i = \varphi^p = \int_0^\infty \pi L_\lambda^0(T) d\lambda = \sigma T^4$$

$$z\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_m(T)}, \frac{\lambda_2}{\lambda_m(T)}\right] = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L_\lambda^0(T) d\lambda}{\int_0^\infty L_\lambda^0(T) d\lambda} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \pi L_\lambda^0(T) d\lambda}{\sigma T^4}$$

9.4 Formule

9.4.1 Théorème de Rénaulde

Grandeur intégrale

$$\Phi(t) = \int_{D(t)} \varphi(\vec{x}, t) dv$$

$\varphi(\vec{x}, t)$ grandeur locale volumique

$$\frac{d\Phi}{dt} = \underbrace{\int_{D(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dv}_{\text{Instationnarité de } \varphi(\vec{x}, t)} + \underbrace{\int_{S(t)} \varphi \vec{W} \cdot \vec{n} dS}_{\text{Mouvement de } S(t)}$$

\vec{n} : vecteur normal unitaire

\vec{W} : vitesse locale en un point de $S(t)$ (n'est définie que sur S)

- Domaine matériel : $\vec{W} = \vec{U}$
- Domaine fixe : $\vec{W} = 0$

Conservation de la masse

Exemple 9. *Conservation de la masse* avec $\Phi = M, \varphi = \rho, \vec{W} = \vec{U}$ domaine matériel

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_S \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dS \\ &= \int_D \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) \right) dv \\ &= 0 \end{aligned} \tag{II9-II4-III1}$$

En prenant la limite d'une particule, on obtient la forme locale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0$$

Bilan d'énergie

Exemple 10. Bilan d'énergie (Point de vue d'un système matériel)

$$\begin{aligned}
 H_m &= mh = \rho V h = \int \rho h dv \\
 \frac{dH_m}{dt} &= \int_V \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} dv + \int_S (\rho h) \vec{u} \vec{n} ds \\
 &= \int_V \left(\rho \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv + \int_V \text{div}(\rho h \vec{u}) dv \\
 &= \int_V \left[\rho \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial \rho}{\partial t} + h \cdot \text{div}(\rho \vec{u}) + \rho \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}} h \right] dv \quad (\text{II9-II4-II2}) \\
 &= \int_V \left[\rho \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}} h \right) + h \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) \right) \right] dv \\
 &= \int_V \rho \frac{dh}{dt} dv
 \end{aligned}$$

9.5 Math

9.5.1 erf(x)

In mathematics, the error function (also called the Gauss error function) is a special function (non-elementary) of sigmoid shape which occurs in probability, statistics and partial differential equations. It is defined as:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (\text{II9-II5-II1})$$

The complementary error function, denoted erfc, is defined as

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \quad (\text{II9-II5-II2})$$

$$\text{ierfc}(x) = \int_x^\infty \text{erfc}(u) du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} - x \cdot \text{erfc}(x)$$

常用数值:

$$\text{erf}(\infty) = 1$$

$$\text{erf}(0.5) \simeq 0.5$$

$$\text{ierfc}(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

偶函数

For any complex number z:

$$\text{erf}(\bar{z}) = \overline{\text{erf}(z)} \quad (\text{II9-II5-II3})$$

9.5.2 Angle solide

angle solide

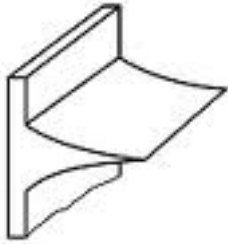
- La valeur d' un angle solide Ω est comprise entre 0 et 4
- Pour un cône de **demi-angle** au sommet α : $\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$

材料的导热性 多孔性凡是良好的保温材料, 在结构上大多都是多孔物质, 有时人为制成泡沫状, 纤维状或层状结构

例如, 石头的导热系数约为 $1Wm^{-1}K^{-1}$, 但把石头碎成砂子, 其导热系数则为 $0.3Wm^{-1}K^{-1}$. 再把石头制成纤维状 (像石棉一样的东西), 则导热系数约为 $0.05Wm^{-1}K^{-1}$

如上处理后, 导热系数降低的理由是因为颗粒间或纤维间的接触面积变小了, 期间产生了相当大的接触热阻, 再加上间隙中含有大量空气, 而空气的导热系数才 $0.023Wm^{-1}K^{-1}$, 比固体小多了, 所以阻挡了热流的移动. 因此无论怎样选择良好的保温材料, 几乎都不如空气的导入系数小. 一般情况下, 每单位体积的质量越小的物质, 导热系数越小. 但是, 档函有空间的间隙过大时, 由于间隙中的空气产生对流, 反而对传热不利. 当间隙达到 $1cm$ 时, 就会发生这种现象.

肋片 在各种截面形状的最佳肋片中, 最佳肋片是倒抛物线形截面肋片, 这种肋片所需材料及质量可以比三角形直肋片节约百分之几, 但从加工难易程度及耐久性方面, 实际工程都认为三角形直肋



片为最佳肋片.

Chapter 10

矢量和张量

10.1 置换符号 ε

行列式

$$\det(a_{ij}) = \varepsilon_{rst} a_{r1} a_{s2} a_{t3}$$

矢量差乘

$$\begin{aligned} u \times v &= \varepsilon_{rst} u_s v_t e_r \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) e_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) e_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) e_3 \end{aligned} \quad (\text{II10-II1-III1})$$

10.1.1 $\varepsilon - \delta$ 恒等式

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ist} = \delta_{js} \varepsilon_{kt} - \delta_{ks} \varepsilon_{jt}$$

10.2 坐标变换

两个具有同一坐标原点 O 的右手笛卡尔直角坐标系 x_1, x_2, x_3 and x'_1, x'_2, x'_3 用 x 表示 P 的点的矢径, 其分量分别为 x_1, x_2, x_3 and x'_1, x'_2, x'_3 . 设 e_1, e_2, e_3 and e'_1, e'_2, e'_3 分别表示他们的基向量

$$x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3 = x_j \cdot e_j$$

$$x = x_j \cdot e_j = x'_j \cdot e'_j$$

用 e_i 同时点乘方程两边得到:

$$x_j (e_j \cdot e_i) = x'_j (e'_j \cdot e_i)$$

but we have

$$x_j (e_j \cdot e_i) = x_j \delta_{ji} = x_i$$

so

$$x_i = (e'_j \cdot e_i) x'_j$$

now we define

$$(e'_j * e_i) \equiv \beta_{ji}$$

so we have:

$$x_i = \beta_{ji} x'_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

de la même façon, on a

$$x'_i = \beta_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, 3)$$

10.3 张量运算

$$\vec{\vec{a}} + \vec{\vec{b}} \Leftrightarrow a_{ij} + b_{ij}$$

Le produit de tenseurs est un tenseur. La convention d'Einstein s'applique en notation indicielle. En notation vectorielle, **chaque indice muet est représenté par le symbole •**.

$$\lambda \vec{\vec{a}} \Leftrightarrow \lambda a_{ij}$$

$$\vec{c} = \vec{\vec{a}} \bullet \vec{b} \Leftrightarrow a_{ij} b_j$$

一个点, 所以只有一个 indice muet

$$\vec{\vec{c}} = \vec{a} \vec{b} \Leftrightarrow c_{ij} = a_i b_j$$

$$\vec{\vec{a}} \bullet \bullet \vec{\vec{b}} = a_{ij} b_{ij} \quad \text{两个 bullet 是上下叠放的}$$

两个点, 所以只有两个 indice muet

Contraction d'un tenseur

Etant donné un tenseur d'ordre 2 ou plus, on peut choisir deux de ses indices libres et appliquer une contraction. Les lettres associées aux deux indices sont changées pour les rendre identiques. Exemples:

$$a_{ij} \rightarrow a_{ii}, a_{ijk} \rightarrow a_{ijj}, a_i b_j \rightarrow a_i b_i$$

cette opération rend les indices concernés muets et réduit l'ordre du tenseur de n à $n - 2$. dans le cas d'un tenseur d'ordre 2, il n'y a qu'une seule contraction possible, mais si l'ordre est supérieur à 2, plusieurs choix des indices de contraction sont possibles.

10.4 张量变换

$$\begin{cases} \bar{t}_{ij}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = t_{mn}(x_1, x_2, x_3) \beta_{im} \beta_{jn} \\ t_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \bar{t}_{mn}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \beta_{mi} \beta_{nj} \end{cases} \quad (\text{II10-II4-II1})$$

10.5 grandien, divergence etc

λ est un scalaire:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial x_i}$$

\overrightarrow{a} est un vecteur:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} = a_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \overrightarrow{b} = a_j \cdot \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \cdot e_i$$

$$\text{div} \overrightarrow{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{a} = \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \cdot \overrightarrow{e}_i$$

$$\Delta \lambda = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\lambda) = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i \partial x_i}$$

$$\Delta \overrightarrow{a} = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\lambda) = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\overrightarrow{b} = \text{div} \overrightarrow{\overrightarrow{a}} \Leftrightarrow b_i = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}$$