Chapter 1

微分方程与边值问题

1.1 一阶微分方程

Théorème 1.1.1. *(解的存在性和唯一性)*假设函数$f(x,y)$和他的偏导数$\frac{\partial f}{\partial y}$, 在$xy$平面上含有点$(a,b)$的某一矩形区域上连续,那么初始问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), y(a) = b \tag{1-1-1}$$

在含有点a 的开区间I 上有且仅有定义在区间I 上的一个解.

Example 1. 在微分方程$dy/dx = -y$中,函数$f(x,y) = -y$和偏导数$\frac{\partial f}{\partial y} = -1$在整个$xy$平面上连续,因此由定理1.1.1 知,对任意的初始值*(a,b)* 都有唯一解,尽管定理肯定了解存在于含有x=a 的某一个区间上,但是对于所有x 来讲$y(x) = Ce^{-x}$ 都被定义为解.

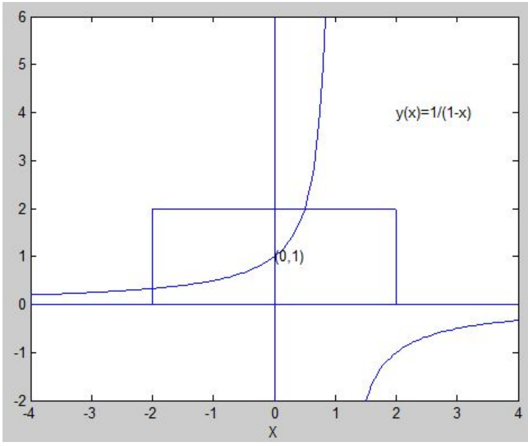
Note. 之前,我们讨论了非常简单的微分方程$\frac{dy}{dx} = y^2$, 这里$f(x,y) = y^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$. 这两个函数在$xy$平面上都连续,特别在矩形$-2 < x < 2, 0 < y < 2$ 上也连续.由于点*(0,1)* 属于该矩形,所以根据定理1.1.1, 初值问题

$$\frac{dy}{dx} = y^2, y(0) = 1 \tag{1-1-2}$$

在含有*a=0*的某个区间上有唯一解,确实,他就是我们之前求过的解

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

但是,在*x=1*处,*1/(1-x)*不连续,所以在整个区间$-2 < x < 2$上不存在唯一连续解,这样,定理1.1.1中的解区间*I*可能不像矩形$-2 < x < 2, 0 < y < 2$ 那么宽,该矩形上函数*f(x,y)*和偏导数$\frac{\partial f}{\partial y}$ 都连续. 从几何上讲,其原因是定理给出的解曲线在它达到区间的又给或两个端点之前,可能离开了矩形,而在矩形内部的解一定存在



图中解曲线在到达区间I的右端点之前离开矩形I

1.1.1 一阶线性微分方程

Théorème 1.1.2. 在两个系数函数$P(x)$与$Q(x)$都连续的某一区间上,求解一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1-1-3}$$

通过对1-1-3两边乘以适当的积分因子,可以得到一种标准解法,我们乘以

$$\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{\int \mathbf{P(x)dx}} \tag{1-1-4}$$

结果为

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + P(x)e^{\int P(x)dx}y = Q(x)e^{\int P(x)dx} \tag{1-1-5}$$

方程1-1-5的左边是$y(x)e^{\int P(x)dx}$的微分两边积分,最后求出1-1-3的通解为:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)}dx + C) \tag{1-1-6}$$

1.1.2 替换方法和恰当方程

Théorème 1.1.3. 形如$\frac{dy}{dx} = F(ax+by+c)$ 的微分方程可以通过变换$v = ax+by+c$ 将其变化分离变量型

1.1.3 恰当微分方程

Théorème 1.1.4. **(恰当型判别准则)**假设在矩形开区域$R : a < x < b, c < y < d$ 上,函数$M(x,y)$,$N(x,y)$连续且有连续一阶偏导数,那么微分方程

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1-1-7}$$

是恰当型的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{1-1-8}$$

在矩形R上成立.即存在R上的函数$F(x,y)$, 满足$\frac{\partial f}{\partial x} = M$, $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ 的充要条件是式1-1-8在矩形R 上成立.

Note. 一般的,为了求解恰当方程$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, 我们执行以下步骤:
首先,把$M(x,y)$ 对x 进行积分,且写成下面的形式

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$$

然后通过$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$ 求出$g(y)$, 这样就得到方程的隐式解$F(x,y) = C$

Example 2. 求解微分方程$(6xy - y^2)dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)dy = 0$
解:设$M(x,y) = (6xy - y^2), N(x,y) = (4y + 3x^2 - 3xy^2)$ 因为

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x - 3y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

所以方程是恰当的

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) = \int (6xy - y^2)dx + g(y) = 3x^2y - xy^3 + g(y)$$

然后对y进行微分,并设$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ 得到

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 3xy^2 + g'(y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2$$

整理得到:$g'(y) = 4y$, 于是$g(y) = 2y^2 + C_1$, 从而

$$F(x,y) = 3x^2y - xy^3 + 2y^2 + C_1$$

因此微分方程的隐式通解为

$$3x^2y - xy^3 + 2y^2 = C$$

1.2 数值逼近

1.2.1 欧拉方法

已知初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), y(x_0) = y_0. \tag{1-2-1}$$

步长为h的欧拉方法:应用迭代公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (n \geqslant 0) \tag{1-2-2}$$

来依次计算在各个点$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ 对真实解y=f(x)的真实值$y(x_1), y(x_2), \ldots, y(x_n)$ 的逼近值$y_1, y_2, \ldots, y_n$

1.2.2 改进的欧拉方法

已知初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), y(x_0) = y_0. \tag{1-2-3}$$

假设对步长h执行n步以后,已经得到在$x_n = x_0 + nh$ 点解的真值$y(x_n)$ 逼近值y_n, 可应用欧拉方法来获得在点$x_{n+1} = x_n + h$ 的解的真值的一个初步估计,即称之为u_{n+1} 而不是y_{n+1} ,则

$$u_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + hk_1. \quad k_1 = f(x_n, y_n) \tag{1-2-4}$$

既然$u_{n+1} \approx y(x_{n+1})$, 可取$k_2 = f(x_{n+1}, y_{n+1})$ 作为解曲线$y = f(x)$在$x = x_{x+1}$ 点的斜率的第二个估计.

当然,我们已经求出在$x = x_n$的近似斜率$k_1 = f(x_n, y_n)$. 为了获得在整个区间$[x_n, x_{x+1}]$ 上解曲线平均斜率的更加精确的估计,为什么不平均这两个斜率呢?

这个思想就是改进的欧拉方法的本质.

Théorème 1.2.1. 算法 改进的欧拉方法

给定初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0. \tag{1-2-5}$$

步长为h的欧拉方法:应用迭代公式$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ u_{n+1} = y_n + hk_1 \\ k_2 = f(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2) \end{cases}$

来依次计算$y = f(x)$在点$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$的真值$y(x_1), y(x_2), \ldots, y(x_n)$ 的逼近值$y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Note. 改进后的欧拉方法使用的是一种称为**预测-校正**方法的一类数值技术之一. 首先计算下一个y值的预测值u_{n+1} ,然后它自我校正. 这样步长为h的改进的欧拉方法

由使用预测值

$$u_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{1-2-6}$$

和校正值

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})) \tag{1-2-7}$$

构成.

1.2.3 龙格-库塔方法