Chapter 1

矢量和张量

1.1 置换符号ε

行列式

$$det(a_{ij}) = \varepsilon_{rst} a_{r1} a_{s2} a_{t3}$$

矢量差乘

$$\begin{aligned} u \times v &= \varepsilon_{rst} u_s v_t e_r \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) e_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) e_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) e_3 \end{aligned} \tag{1-1-1}$$

1.1.1 $\varepsilon - \delta$ 恒等式

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ist} = \delta_{js} \varepsilon_{kt} - \delta_{ks} \varepsilon_{jt}$$

1.2 坐标变换

两个具有同一坐标原点O的右手笛卡尔直角坐标系x_1, x_2, x_3 and x'_1, x'_2, x'_3 用x表示P的点的矢径,其分量分别为x_1, x_2, x_3 and x'_1, x'_2, x'_3. 设e_1, e_2, e_3 and e'_1, e'_2, e'_3 分别表示他们的基向量

$$x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3 = x_j \cdot e_j$$

$$x = x_j \cdot e_j = x'_j \cdot e'_j$$

用e_i同时点乘方程两边得到:

$$x_j (e_j \cdot e_i) = x'_j (e'_j \cdot e_i)$$

but we have

$$x_j (e_j \cdot e_i) = x_j \delta_{ji} = x_i$$

so

$$x_i = (e'_j \cdot e_i) x'_j$$

now we define

$$(e'_j * e_i) \equiv \beta_{ji}$$

so we have:

$$x_i = \beta_{ji} x'_j \ (j = 1, 2, 3)$$

de la même facon, on a

$$x'_i = \beta_{ij} x_j \ (i = 1, 2, 3)$$

1.3 张量运算

$$\overrightarrow{\overrightarrow{a}} + \overrightarrow{\overrightarrow{b}} \Leftrightarrow a_{ij} + b_{ij}$$

Le produit de tenseurs est un tenseur. La convention d'Einstein s'applique en notation indicielle. En notation vectorielle, **chaque indice muet est représenté par le symbole •**.

$$\lambda \overrightarrow{\overrightarrow{a}} \Leftrightarrow \lambda a_i j$$

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{\overrightarrow{a}} \bullet \overrightarrow{b} \Leftrightarrow a_{ij} b_j$$

一个点,所以只有一个indice muet

$$\overrightarrow{\overrightarrow{c}} = \overrightarrow{a} \overrightarrow{b} \Leftrightarrow c_{ij} = a_i b_j$$

$$\overrightarrow{\overrightarrow{a}} \bullet\bullet \overrightarrow{\overrightarrow{b}} = a_{ij} b_{ij} \text{ 两个bullet是上下叠放的}$$

两个点,所以只有两个indice muet

Contraction d'un tenseur

Etant donné un tenseur d'ordre 2 ou plus, on peut choisir deux de ses indices libres et appliquer une contraction. Les lettres associées aux deux indices sont changées pour les rendre identiques. Exemples:

$$a_{ij} \to a_{ii}, a_{ijk} \to a_{ijj}, a_i b_j \to a_i b_i$$

cette opération rend les indices concernés muets et réduit l'ordre du tenseur de n à n - 2. dans le cas d'un tenseur d'ordre 2, il n'y a qu'une seule contraction possible, mais si l'ordre est supérieur à 2, plusieurs choix des indices de contraction sont possibles.

1.4 张量变换

$$\begin{cases} \bar{t}_{ij}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = t_{mn}(x_1, x_2, x_3) \beta_{im} \beta jn \\ t_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \bar{t}_{mn}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) \beta_{mi} \beta nj \end{cases} \tag{1-4-1}$$

1.5 grandien, divergence etc

λ est un scalaire:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$$

$\overrightarrow{a}$ est un vecteur:

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{\text{grad}} = a_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{b} = a_j \cdot \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \cdot e_i$$

$$\text{div}\overrightarrow{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{a} = \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \cdot \overrightarrow{e}_i$$

$$\triangle \lambda = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\lambda) = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i \partial x_i}$$

$$\triangle \overrightarrow{a} = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\lambda) = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\overrightarrow{b} = \text{div}\overrightarrow{\overrightarrow{a}} \Leftrightarrow b_i = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}$$