MES NOTES DE COURS

Eric

December 20, 2013

Contents

Preface

This book the notebook edited by Eric for his courses à L'Ecole Centrale de Pékin.
In this book, I have used French, English and Chinese three languages.
If you find any error, please feel free to contact me by E-mail to Eric.
When you send mail, please specify the error position.
Your feedback is a great contribution for the success of this book!
Thank you!
(The content in this book reference those textbooks© and wikipedia©)

À MOI DANS LE FUTURE!

TO THOSE WHO WILL REVIEW THE COURSE!

Part I

MATHÉMATIQUES

Chapter 1

Algèbre

Espace métrique On appelle (E, d) un espace métrique si E est un ensemble et d une distance sur E .

Espace complet Un espace métrique M est dit complet si toute suite de Cauchy de M a une limite dans M (c'est-à-dire qu'elle converge dans M).
Intuitivement, un espace est complet s'il n'a pas de trou, s'il n'a aucun point manquant.
Par exemple, les nombres rationnels ne forment pas un espace complet, puisque $\sqrt{2}$ n'y figure pas alors qu'il existe une suite de Cauchy de nombres rationnels ayant cette limite.

Il est toujours possible de remplir les trous amenant ainsi à la complétion d'un espace donné.

Espace euclidien il est défini par la donnée d'un espace vectoriel sur le corps des réels, de dimension finie, muni d'un produit scalaire, qui permet de mesurer distances et angles.

Espace hermitien En mathématiques, un espace hermitien est un espace vectoriel sur le corps commutatif des complexes de dimension finie et muni d'un produit scalaire.

La géométrie d'un tel espace est analogue à celle d'un espace euclidien

Une forme hermitienne est une application définié sur E×E à valeur dans **C** notée $\langle ., . \rangle$, telle que :

- pour tout y fixé l'application $x \mapsto \langle x, y \rangle$est **C**-linéaire et
- $\forall x, y \in E$,$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

En particulier, $\langle x, x \rangle$ est réel, et $x \mapsto \langle x, x \rangle$ est une forme quadratique sur E vu comme **R**-espace vectoriel.

Espace préhilbertien En mathématiques, un espace préhilbertien est défini comme un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire

Un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est alors un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Espace de Hilbert C'est un espace préhilbertien complet, c'est-à-dire un espace de Banach dont la norme $\| \bullet \|$découle d'un produit scalaire ou hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par la formule

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

C'est la généralisation en dimension quelconque d'un espace euclidien ou hermitien.

Théorème de Riesz (Fréchet-Riesz)

un théorème qui représente les éléments du dual d'un espace de Hilbert comme produit scalaire par un vecteur de l'espace. Soient :

- H un espace de Hilbert (réel ou complexe) muni de son produit scalaire noté $< .,. >$
- f $\in$H' une forme linéaire continue sur H.

Alors il existe un unique y dans H tel que pour tout x de H on ait $f(x) =< y, x >$

$$\exists\,!\; y \in H\,,\quad \forall x \in H\,,\quad f(x) = \langle y, x\rangle$$

Extension aux formes bilinéaires

Si a est une forme bilinéaire continue sur un espace de Hilbert réel H (ou une forme sesquilinéaire complexe continue sur un Hilbert complexe), alors il existe une unique application A de H dans H telle que, pour tout $(u, v) \in H \times H$, on ait $a(u, v) =< Au, v >$. De plus, A est linéaire et continue, de norme égale à celle de a.

$$\exists!\, A \in \mathcal{L}(H),\ \forall (u, v) \in H \times H,\ a(u, v) = \langle Au, v\rangle.$$

Cela résulte immédiatement de l'isomorphisme canonique (isométrique) entre l'espace normé des formes bilinéaires continues sur H $\times$H et celui des applications linéaires continues de H dans son dual, et de l'isomorphisme ci-dessus entre ce dual et H lui-même.

Théorème de Lax-Milgram

Appliqué à certains problèmes aux dérivées partielles exprimés sous une formulation faible (appelée également formulation variationnelle). Il est notamment l'un des fondements de la méthode des éléments finis. Soient :

- $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel ou complexe muni de son produit scalaire noté $\langle ., .\rangle$, de norme associée notée $\|.\|$
- a(. ,.) une forme bilinéaire (ou une forme sesquilinéaire si $\mathcal{H}$ est complexe) qui est
  - continue sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$: $\exists\, c > 0, \forall (u, v) \in \mathcal{H}^2\,,\ |a(u, v)| \leq c\|u\|\|v\|$
  - coercive sur $\mathcal{H}$ (certains auteurs disent plutôt $\mathcal{H}$-elliptique) : $\exists\, \alpha > 0, \forall u \in \mathcal{H}\,,\ a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$
- $L(.)$ une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$

Sous ces hypothèses il existe un unique u de $\mathcal{H}$ tel que l'équation $a(u, v) = L(v)$ soit vérifiée pour tout v de $\mathcal{H}$:

$$\exists!\ u \in \mathcal{H},\ \forall v \in \mathcal{H},\quad a(u, v) = L(v)$$

Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de $\mathcal{H}$ qui minimise la fonctionnelle $J : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ définie par $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$ pour tout v de $\mathcal{H}$, c'est-à-dire :

$$\exists!\ u \in \mathcal{H},\quad J(u) = \min_{v\in\mathcal{H}}\ J(v)$$

$-\triangle$ admet une base de fonctions propres v_k, $k \in N$, orthonormales pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$

Chapter 2

Analyse

COERVITÉ

Une fonction f définie sur un espace normé X à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est dite coercive sur une partie non bornée P de X si

$$\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in P}} f(x) = +\infty$$

ou de manière plus précise

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad \exists \rho \geqslant 0 : \quad (x \in X \text{ et } \|x\| \geqslant \rho) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant \nu.$$

Il revient au même de dire que les intersections avec P des ensembles de sous-niveau de la fonction sont bornées :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \qquad \{x \in P : f(x) \leqslant \nu\} \text{ est borné.}$$

Si l'on ne spécifie pas la partie P, il est sous-entendu que P=X.

Cas d'une forme bilinéaire

Plus spécifiquement, une forme bilinéaire $a : X \times X \to \mathbb{R}$ est dite coercive si elle vérifie :

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in X : \qquad a(x,x) \geqslant \alpha \|x\|^2.$$

Certains auteurs préfèrent utiliser l'appellation X-elliptique pour cette dernière définition. Celle-ci intervient entre autres dans le théorème de Lax-Milgram et la théorie des opérateurs elliptiques, accessoirement dans la méthode des éléments finis.

Lien entre les définitions

Dans le cas oùa est une forme bilinéaire, en posant $f(u) = a(u,u)$ on a équivalence entre la coercivité de a et celle de f. En effet, $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$implique qu'il existe $R > 0$tel que $\|x\| \geqslant R \Rightarrow f(x) \geqslant 1$. Ainsi:

$$\left(\frac{R}{\|u\|}\right)^2 a(u,u) = a\left(\frac{R}{\|u\|}u, \frac{R}{\|u\|}u\right) = f\left(\frac{R}{\|u\|}u\right) \geqslant 1$$

et

$$a(u,u) \geqslant \left(\frac{\|u\|}{R}\right)^2.$$

维基百科上没有直接给出coercivité的定义, 但是按照维基百科的解释, 我觉得coercivité的定义是

$$\alpha = \left(\frac{1}{R}\right)^2$$

Application contractante

Une application contractante, ou contraction, est une application k-lipschitzienne avec $0 \geq k \leq 1$

Théorème du point fixe pour une application contractante

Soient E un espace métrique complet (non vide) et f une application k -contractante de E dans E . Il existe un point fixe unique x^* de f (c'est-à-dire un x^* dans E tel que $f(x^*) = x^*$) . De plus, toute suite d'éléments de E vérifiant la récurrence

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

vérifie la majoration

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

donc converge vers x^*

Inégalité de Poincaré un résultat de la théorie des espaces de Sobolev

Cette inégalité permet de borner une fonction à partir d'une estimation sur ses dérivées et de la géométrie de son domaine de définition

L'inégalité de Poincaré classique Soit p, tel que $1 \leq p < \infty$ et Ω un ouvert de largeur finie (borné dans une direction). Alors il existe une constante C , dépendant uniquement de Ω et p, telle que, pour toute fonction u de l'espace de Sobolev $W_0^{1,p(\Omega)}$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

2.0.1 Formule

拉普拉斯算子: 梯度的散度

$$\triangle f = \mathrm{div}(\vec{\mathrm{grad}} f)$$

Cartésien:

$$\triangle f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

函数的拉普拉斯算子也是该函数的黑塞矩阵的迹$\triangle f = tr(H(f))$

极坐标下的拉普拉斯算子表示法

$$\triangle f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Equation de poisson

$$\triangle \varphi = f$$

si $f = 0$, 那么泊松方程就会变成一个齐次方程, 称为拉普拉斯方程

高斯

高斯公式用散度表示为:

$$\iiint_{\Omega} \mathrm{div}\mathbf{A} dv = \oiint_{\Sigma} A_n dS = \oiint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的边界曲面,而

$$A_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$$

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot S$$

n是向量A在曲面Σ的外侧法向量上的投影。

斯托克斯公式

$\mathbf{R}^3$上的斯托克斯公式设S是分片光滑的有向曲面,S的边界为有向闭曲线,即$\Gamma = \partial S$,且的正向与S的侧符合右手规则: 函数$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$都是定义在" 曲面$S$连同其边界" 上且都具有一阶连续偏导数的函数,则有

$$\iint_S (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

这个公式叫做$\mathbf{R}^3$上的斯托克斯公式或开尔文一斯托克斯定理、旋度定理。这和函数的旋度有关,用梯度算符可写成

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

通过以下公式可以在" 对坐标的" 曲线积分"" 和对面积的" 面积积分"" 之间相互转换:

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

格林公式 设闭区域D由分段光滑的曲线∂D(∂D是D取正向的边界曲线)围成,函数$P(x,y)$及$Q(x,y)$在D上具有一阶连续偏导数,则有

$$\oint_{\partial D} (Pdx + Qdy) = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy)$$

格林第一公式 设函数$u(x,y,z)$和$v(x,y,z)$在闭区域Ω上具有一阶及二阶连续偏导数,则有

$$\iiint_{\Omega} u \triangle v dxdydz = \oint\oint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} (\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} +) dxdydz$$

其中Σ是闭区域Ω的整个边界曲面,$\frac{\partial v}{\partial n}$为函数$v(x,y,z)$沿$\Sigma$的外法线方向的方向导数

更加简洁的写法:

$$\int_{\Omega} u \triangle v d\Omega = \int_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\Sigma - \int_{\Omega} \vec{\mathrm{grad}} u \cdot \vec{\mathrm{grad}} v d\Omega$$

也可以用intégration par partie 来理解: div是二次微分, grad是一次微分, div可以看成是在grad的基础上再来一次微分, 而$\frac{\partial v}{\partial n} =< \vec{\mathrm{grad}} v, \vec{n} >$, 所以$\frac{\partial v}{\partial n}$ 可以理解成一次微分

格林第二公式 设$u(x,y,z)$、$v(x,y,z)$是两个定义在闭区域Ω上的具有二阶连续偏导数的函数,$\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$依次表示$u(x,y,z)$、$v(x,y,z)$沿$\Sigma$的外法线方向的方向导数,则有

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)dxdydz = \oint\oint_{\Sigma}(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})dS$$

Serie de Fourrier 给定一个周期为T的函数x(t),那么它可以表示为无穷级数：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{ik(\frac{2\pi}{T})t} \qquad (i\text{为虚数单位}) \tag{I2-I0-I1}$$

其中,a_k可以按下式计算:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) \cdot e^{-ik(\frac{2\pi}{T})t}dt$$

注意到$f_k(t) = e^{ik(\frac{2\pi}{T})t}$是周期为T的函数,故k 取不同值时的周期信号具有谐波关系(即它们都具有一个共同周期T).

$k = 0$时,(I2-I0-I1) 式中对应的这一项称为直流分量,也就是x(t)在整个周期的平均值.

$k = \pm 1$时具有基波频率$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$,称为一次谐波或基波,类似的有二次谐波,三次谐波等等。

三角函数族的正交性 所谓的两个不同向量正交是指它们的内积为0，这也就意味着这两个向量之间没有任何相关性,例如，在三维欧氏空间中，互相垂直的向量之间是正交的。事实上，正交是垂直在数学上的一种抽象化和一般化。一组n个互相正交的向量必然是线性无关的，所以必然可以张成一个n维空间，也就是说，空间中的任何一个向量可以用它们来线性表出。三角函数族的正交性用公式表示出来就是：

$$\int_0^{2\pi}\sin(nx)\cos(mx)\,dx = 0;$$

$$\int_0^{2\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0; (m \neq n)$$

$$\int_0^{2\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx = 0; (m \neq n)$$

$$\int_0^{2\pi}\sin(nx)\sin(nx)\,dx = \pi;$$

$$\int_0^{2\pi}\cos(nx)\cos(nx)\,dx = \pi;$$

Autres Une matrice

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

由(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 三个点组成的三角形的面积:$surf = \frac{1}{2}\det P$

Part II

PHYSIQIUE

Chapter 1

Simulation

1.1 Calcule différentiel

Différentiabilité au sens de Gâteaux

Défintion 1. *Une fonction $F(x)$ d'un espace vectoriel V dans $\mathbb{R}$ est une fonction différentiable au sens de Gateaux en $x \in V$ si pour tout $h \in V$ la fonction $g(t) = F(x + th)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en $t = 0$ et si il existe une forme linéaire sur V , notée $DF(x)$, telle que*

$$\forall h \in V \qquad \frac{d}{dt} F(x + th)|_{t=0} = DF(x).h$$

Différentielle au sens de Fréchet

Défintion 2. *Soit V et W deux espaces vectoriels normés. Une application $f(x)$ de V dans W est différentiable (au sens de Fréchet, précision souvent omise) en $x \in V$ si il existe une application linéaire continue de V dans W , notée $Df(x)$ telle que*

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(x + h) - f(x) - Df(x).h}{\|h\|} = 0$$

Pour une fonction numérique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x) - f'(x).h}{h} = 0 \Rightarrow Df(x).h = f'(x).h$$

Normes équivalentes
si $\|x\|_1$ et sont deux normes équivalentes, alors il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ tells que

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

$$\frac{d}{dt} F(x(t))|_{t=0} = \sum_i \frac{\partial F(x(0))}{\partial x_i} = \langle \nabla F(x(0)), x'(0) \rangle$$

une droite passant par le point x et de direction $h \in \mathbb{R}^n$, donc d'équation paramétrique $x(t) = x+th$

$$\frac{d}{dt} F(x + th)|_{t=0} = \langle \nabla F(x), h \rangle = DF(x).h$$

1.1.1 Formulaire

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)$$

$$D(f(x), g(x)).h = (Df(x).h, g(x)) + (f(x), Dg(x).h)$$

L'ensemble des fonctions différentiables (au sens de Gateaux ou de Fréchet) est stable par addition, multiplication, composition

1.1.2 Jacobienne et Hessien

$$F : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

matrice jacobienne de F:

$$J_F(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$JF(x)_{i,j} = \frac{\partial f_i(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_j}$$

$$HF(x) = Jf(x) \qquad f(x) = F'(x)$$

$$HF(x)_{i,j} = \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} F(x + th)|_{t=0} = \langle HF(x).h, h \rangle$$

Proposition 1.1.1. *Une fonction F(x) deux fois différentiable, admet un développement limité au second ordre*

$$\forall h \in V, F(x + h) = F(x) + \langle \nabla F(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle HF(x)h, h \rangle + \epsilon(h) \|h\|^2$$

1.1.3 Examples

Example 1. *Soit* $F(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$

$$DF(x).h = \langle Ax - b, h \rangle$$

et pour le produit scalaire canonique

$$F'(x) = \nabla F(x) = Ax - b$$

$$JF'(x) = HF(x) = A$$

Example 2. *L une forme linéaire continue sur V et a une forme bilinéaire continue symétrique et définie positive sur V*
Soit $J(v) = \frac{1}{2}a(u,v) - L(v)$

$$DJ(u).v = a(u,v) - L(v)$$

Example 3.

$$J(u) = \int_0^1 g(x, u(x), u'(x))dx$$

Calculons $DJ(u)$

$$DJ(u).v = \frac{d}{dt}J(u+tv)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\int_0^1 g(x, u+tv, u'+tv')dx)|_{t=0}$$

$$DJ(u).v = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u_1}(x,u,u')v + \frac{\partial g}{\partial u_2}(x,u,u')v'dx$$

这里的u_1 对应u,u_2对应u'

$$DJ(u).v = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u}(x,u,u')v + \frac{\partial g}{\partial u'}(x,u,u')v'dx$$

对v' 进行分部积分，同时考虑到$v(0) = v(1) = 0$，得到

$$DJ(u).v = \int_0^1 (\frac{\partial g}{\partial u}(x,u,u') - \frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial u'}(x,u,u'))v(x)dx$$

En introduisant le produit scalaire de $L^2([0,1])$

$$DJ(u).v = \langle -\frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial u'}(x,u,u') + \frac{\partial g}{\partial u}(x,u,u'), v\rangle$$

Soit $u1 \in V_0$ *un extremum local de la fonction* $J(u)$, *il vérifie* $DJ(u1) = 0$, *Donc*

$$\forall v \in V_0, DJ(u).v = \int_0^1 (\frac{\partial g}{\partial u}(x,u,u') - \frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial u'}(x,u,u'))v(x)dx = 0$$

然后得到

$$\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial u'} = 0$$

这就是变分原理中的欧拉公式

1.2 Convecivité

Défintion 3. *On suppose que V est un espace de Hilbert. Une application $f(x)$ de V dans V est monotone si*

$$\forall x, y \in V, \langle f(y) - f(x), y - x\rangle \geq 0$$

Note que si $V = \mathbb{R}$, cela revient à dire que $f(x)$ est croissante.

Théorème 1.2.1. *Soit $F(x)$ une fonction différentiable sur un espace de Hilbert H. $F(x)$ est convexe si et seulement si l'application de H dans H définie par $f(x) = \nabla F(x)$ est monotone.*

Théorème 1.2.2. *Sur $\mathbb{R}^n$ une fonction deux fois diddérentiable est convexe si et seulement si le Hessien $HF(x)$ est une matrice semi-définie positive.*
Réciproquement si $\forall x, h \in V, \langle HF(x)h, h\rangle > 0$, alros F est strictement convexe.

1.3 Autre

Norme dans H^1: $\|u\| = \int_0^1 u'^2 + u^2 dx$

其中H^1 是指espace de Herbert 上的一阶可微(还是可导还不太肯定)的函数构成的空间

L'EDP(sigle pour equations aux dérivées partielles) du second ordre linéaire à cofficients constans, en dimension deux:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0 \tag{II1-II3-II1}$$

L'equation caractéristique de cette EDP:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad \text{equation conique} \tag{II1-II3-II2}$$

方程中的x,y 不一定指空间, 也可以是其他未知量, 比如时间t

- Elliptique si $ac - b^2 > 0$ (la solution minimise une fonctionnelle d'énergie)
- Parabolique si $ac - b^2 = 0$ (évolution dissipatif)
- Hyperbolique si $ac - b^2 > 0$ (phénomènes physiques conservatifs)

Formulation faible(variationnelle)

étant donné un opérateur différentiel $R(.)$ et une fonction f définie sur un domaine ouvert Ω , la formulation forte du problème est la suivante :

Trouver u définie sur Ω vérifiant $R(u) = f$ en tout point de Ω .

Une solution u est naturellement solution du problème suivant (formulation faible) :

Trouver u définie surΩ vérifiant $\int_\Omega R(u)\ v = \int_\Omega f\ v$ pour toute fonction v définie sur Ω .

la formulation variationnelle d'un problème régi par des équations aux dérivées partielles correspond à une formulation faible de ces équations qui s'exprime en termes d'algèbre linéaire dans le cadre d'un *espace de Hilbert*. A l'aide du *théorème de Lax-Milgram*, elle permet de discuter de l'existence et de l'unicité de solutions. La méthode des éléments finis se fonde sur une formulation variationnelle pour déterminer des solutions numériques approchées du problème d'origine.

équation de Poisson

Pour un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, considérons l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions de carré intégrable et l'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$ des fonctions dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k sont dans $L^2(\Omega)$.

étant donné une fonction $f \in L^2(\Omega)$, on cherche une solution du problème suivant (formulation forte):

$$\begin{cases} u \in H^2(\Omega) \\ -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{II1-II3-II3}$$

La formulation variationnelle correspondante est la suivante :

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ A(u,v) = F(v)\ \forall v \in H^1(\Omega) \,|\, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{II1-II3-II4}$$

où

$$A(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{et} \quad F(v) = \int_\Omega fv.$$

我们可以看到在formulation forte中$u \in H^2(\Omega)$, 而在formulation faible 中$u \in H^1(\Omega)$, 也就是变弱了

Le théorème de Lax-Milgram permet ensuite de conclure à l'existence et à l'unicité d'une solution de la formulation variationnelle.

à noter qu'une solution du premier problème est toujours solution du second, alors que la réciproque n'est pas vraie (une solution dans $H^1(\Omega)$ peut ne pas être assez régulière pour être dans $H^2(\Omega)$) : c'est d'ailleurs pour cette raison qu'une solution de la formulation variationnelle est parfois appelée solution faible (ou encore semi-faible).

Avec des conditions de bord plus générales que celles présentées ici, ce problème est plus amplement développé ici.

1.4 Phenomènes

Equation d'advection 平流

cherche une fonction $u(x,t)$ du point d'abscisse x , au temps t , $u \in C^1([0;1] \times [0,T])$ solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = u_0 x \\ u(0,t) = g(t) \end{cases} \tag{II1-II4-II1}$$

Défintion 4. *Les droites caractéristiques dans le plan (x,t) de l'équation (II1-II4-II1)sont les droites$x - at = Cte$*

Proposition 1.4.1. *Une fonction $u(x,t) \in C^1$ est solution de (II1-II4-II1)si et seulement si u est une fonction constante sur les droites caractéristiques.*

Les solutions de léquation (II1-II4-II1)est:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x - at) \text{ si } x >= at \\ g(t - \frac{x}{a}) \text{ si } x \leq at \end{cases} \tag{II1-II4-II2}$$

Equation de la diffusion

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega \times [0,T]) \\ C\frac{\partial u}{\partial t} - k \triangle u + cu = 0 \text{ si } x \in \Omega \\ -k\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ si } x \in \Gamma \\ u(x,0) = u_0 x \text{ si } x \in \Omega \end{cases} \tag{II1-II4-II3}$$

Equation des ondes Soit $u(x,t), x \in [0,L], t \in [0,T]$ solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x \in (0,L), t \in (0,T) \\ u(x,0) = u_0 x \quad x \in (0,L) \quad u_0(x) \in C([0,L]) \text{ la position initial} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad x \in (0,L) \text{ la vitess initial est supposée null} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad t \in (0,T) \end{cases} \tag{II1-II4-II4}$$

Problème de Dirichlet non-homogène 边界上定值

$$\begin{cases} -\triangle u + cu = f & \forall x \in \Omega \\ u_\Gamma = u_d \end{cases} \tag{II1-II4-II5}$$

Problème de Neumann en dimension deux
les conditions aux limites sur Γ portent sur la dérivée normale de la solution

$$\begin{cases} -\triangle u + cu = f & \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}_\Gamma = g \end{cases} \tag{II1-II4-II6}$$

1.5 Discrétisation en temps

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases} \tag{II1-II5-II1}$$

On note $X^n = X(n\tau) \in \mathbb{R}^N$

$$\frac{X^{n+1} - X^n}{\tau} = (1-\theta)AX^n + \theta AX^{n+1}$$

- Euler explicite $\theta = 0$
- Euler implicite $\theta = 1$
- Trapèzes $\theta = 1/2$